

L4: Linear time sorting \Rightarrow Quick sort \neq Linear time.
 mergesort \Rightarrow $\frac{n}{2}$ $\frac{n}{4}$ $\frac{n}{8}$ $\frac{n}{16}$ $\frac{n}{32}$ $\frac{n}{64}$ $\frac{n}{128}$ $\frac{n}{256}$ $\frac{n}{512}$ $\frac{n}{1024}$ $\frac{n}{2048}$ $\frac{n}{4096}$ $\frac{n}{8192}$ $\frac{n}{16384}$ $\frac{n}{32768}$ $\frac{n}{65536}$ $\frac{n}{131072}$ $\frac{n}{262144}$ $\frac{n}{524288}$ $\frac{n}{1048576}$ $\frac{n}{2097152}$ $\frac{n}{4194304}$ $\frac{n}{8388608}$ $\frac{n}{16777216}$ $\frac{n}{33554432}$ $\frac{n}{67108864}$ $\frac{n}{134217728}$ $\frac{n}{268435456}$ $\frac{n}{536870912}$ $\frac{n}{1073741824}$ $\frac{n}{2147483648}$ $\frac{n}{4294967296}$ $\frac{n}{8589934592}$ $\frac{n}{17179869184}$ $\frac{n}{34359738368}$ $\frac{n}{68719476736}$ $\frac{n}{137438953472}$ $\frac{n}{274877906944}$ $\frac{n}{549755813888}$ $\frac{n}{1099511627776}$ $\frac{n}{2199023255552}$ $\frac{n}{4398046511104}$ $\frac{n}{8796093022208}$ $\frac{n}{17592186044416}$ $\frac{n}{35184372088832}$ $\frac{n}{70368744177664}$ $\frac{n}{140737488355328}$ $\frac{n}{281474976710656}$ $\frac{n}{562949953421312}$ $\frac{n}{1125899906842624}$ $\frac{n}{2251799813685248}$ $\frac{n}{4503599627370496}$ $\frac{n}{9007199254740992}$ $\frac{n}{18014398509481984}$ $\frac{n}{36028797018963968}$ $\frac{n}{72057594037927936}$ $\frac{n}{144115188075855872}$ $\frac{n}{288230376151711744}$ $\frac{n}{576460752303423488}$ $\frac{n}{1152921504606846976}$ $\frac{n}{2305843009213693952}$ $\frac{n}{4611686018427387904}$ $\frac{n}{9223372036854775808}$ $\frac{n}{18446744073709551616}$ $\frac{n}{36893488147419103232}$ $\frac{n}{73786976294838206464}$ $\frac{n}{147573952589676412928}$ $\frac{n}{295147905179352825856}$ $\frac{n}{590295810358705651712}$ $\frac{n}{1180591620717411303424}$ $\frac{n}{2361183241434822606848}$ $\frac{n}{4722366482869645213696}$ $\frac{n}{9444732965739290427392}$ $\frac{n}{18889465931478580854784}$ $\frac{n}{37778931862957161709568}$ $\frac{n}{75557863725914323419136}$ $\frac{n}{151115727451828646838272}$ $\frac{n}{302231454903657293676544}$ $\frac{n}{604462909807314587353088}$ $\frac{n}{1208925819614629174706176}$ $\frac{n}{2417851639229258349412352}$ $\frac{n}{4835703278458516698824704}$ $\frac{n}{9671406556917033397649408}$ $\frac{n}{19342813113834066795298816}$ $\frac{n}{38685626227668133590597632}$ $\frac{n}{77371252455336267181195264}$ $\frac{n}{154742504910672534362390528}$ $\frac{n}{309485009821345068724781056}$ $\frac{n}{618970019642690137449562112}$ $\frac{n}{1237940039285380274899124224}$ $\frac{n}{2475880078570760549798248448}$ $\frac{n}{4951760157141521099596496896}$ $\frac{n}{9903520314283042199192993792}$ $\frac{n}{19807040628566084398385987584}$ $\frac{n}{39614081257132168796771975168}$ $\frac{n}{79228162514264337593543950336}$ $\frac{n}{158456325028528675187087900672}$ $\frac{n}{316912650057057350374175801344}$ $\frac{n}{633825300114114700748351602688}$ $\frac{n}{1267650600228229401496703205376}$ $\frac{n}{2535301200456458802993406410752}$ $\frac{n}{5070602400912917605986812821504}$ $\frac{n}{10141204801825835211973625643008}$ $\frac{n}{20282409603651670423947251286016}$ $\frac{n}{40564819207303340847894502572032}$ $\frac{n}{81129638414606681695789005144064}$ $\frac{n}{162259276829213363391578010288128}$ $\frac{n}{324518553658426726783156020576256}$ $\frac{n}{649037107316853453566312041152512}$ $\frac{n}{1298074214633706907132624082305024}$ $\frac{n}{2596148429267413814265248164610048}$ $\frac{n}{5192296858534827628530496329220096}$ $\frac{n}{10384593717069655257060992658440192}$ $\frac{n}{20769187434139310514121985316880384}$ $\frac{n}{41538374868278621028243970633760768}$ $\frac{n}{83076749736557242056487941267521536}$ $\frac{n}{166153499473114484112975882535043072}$ $\frac{n}{332306998946228968225951765070086144}$ $\frac{n}{664613997892457936451903530140172288}$ $\frac{n}{1329227995784915872903807060280344576}$ $\frac{n}{2658455991569831745807614120560689152}$ $\frac{n}{5316911983139663491615228241121378304}$ $\frac{n}{10633823966279326983230456482242756608}$ $\frac{n}{21267647932558653966460912964485513216}$ $\frac{n}{42535295865117307932921825928971026432}$ $\frac{n}{85070591730234615865843651857942052864}$ $\frac{n}{170141183460469231731687303715884105728}$ $\frac{n}{340282366920938463463374607431768211456}$ $\frac{n}{680564733841876926926749214863536422912}$ $\frac{n}{1361129467683753853853498429727072845824}$ $\frac{n}{2722258935367507707706996859454145691648}$ $\frac{n}{5444517870735015415413993718908291383296}$ $\frac{n}{10889035741470030830827987437816582766592}$ $\frac{n}{21778071482940061661655974875633165533184}$ $\frac{n}{43556142965880123323311949751266331066368}$ $\frac{n}{87112285931760246646623899502532662132736}$ $\frac{n}{174224571863520493293247799005065324265472}$ $\frac{n}{348449143727040986586495598010130648530944}$ $\frac{n}{696898287454081973172991196020261297061888}$ $\frac{n}{1393796574908163946345982392040522594123776}$ $\frac{n}{2787593149816327892691964784081045188247552}$ $\frac{n}{5575186299632655785383929568162090376495104}$ $\frac{n}{11150372599265311570767859136324180752990208}$ $\frac{n}{22300745198530623141535718272648361505980416}$ $\frac{n}{44601490397061246283071436545296723011960832}$ $\frac{n}{89202980794122492566142873090593446023921664}$ $\frac{n}{178405961588244985132285746181186892047843328}$ $\frac{n}{356811923176489970264571492362373784095686656}$ $\frac{n}{713623846352979940529142984724747568191373312}$ $\frac{n}{1427247692705959881058285969449495136382746624}$ $\frac{n}{2854495385411919762116571938898990272765493248}$ $\frac{n}{5708990770823839524233143877797980545530986496}$ $\frac{n}{11417981541647679048466287755595961091061972992}$ $\frac{n}{22835963083295358096932575511191922182123945984}$ $\frac{n}{45671926166590716193865151022383844364247891968}$ $\frac{n}{91343852333181432387730302044767688728495783936}$ $\frac{n}{182687704666362864775460604089535377456991567872}$ $\frac{n}{365375409332725729550921208179070754913983135744}$ $\frac{n}{730750818665451459101842416358141509827966271488}$ $\frac{n}{1461501637330902918203684832716283019655932542976}$ $\frac{n}{2923003274661805836407369665432566039311865085952}$ $\frac{n}{5846006549323611672814739330865132078623730171904}$ $\frac{n}{11692013098647223345629478661730264157247460343808}$ $\frac{n}{23384026197294446691258957323460528314494920687616}$ $\frac{n}{46768052394588893382517914646921056628989841375232}$ $\frac{n}{93536104789177786765035829293842113257979682750464}$ $\frac{n}{187072209578355573530071658587684226515959365500928}$ $\frac{n}{374144419156711147060143317175368453031918731001856}$ $\frac{n}{748288838313422294120286634350736906063837462003712}$ $\frac{n}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424}$ $\frac{n}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848}$ $\frac{n}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696}$ $\frac{n}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392}$ $\frac{n}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784}$ $\frac{n}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568}$ $\frac{n}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136}$ $\frac{n}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272}$ $\frac{n}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544}$ $\frac{n}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088}$ $\frac{n}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176}$ $\frac{n}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352}$ $\frac{n}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704}$ $\frac{n}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408}$ $\frac{n}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816}$ $\frac{n}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632}$ $\frac{n}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264}$ $\frac{n}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528}$ $\frac{n}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056}$ $\frac{n}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112}$ $\frac{n}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224}$ $\frac{n}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448}$ $\frac{n}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896}$ $\frac{n}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792}$ $\frac{n}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584}$ $\frac{n}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168}$ $\frac{n}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336}$ $\frac{n}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672}$ $\frac{n}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344}$ $\frac{n}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688}$ $\frac{n}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376}$ $\frac{n}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752}$ $\frac{n}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504}$ $\frac{n}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008}$ $\frac{n}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016}$ $\frac{n}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032}$ $\frac{n}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064}$ $\frac{n}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128}$ $\frac{n}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256}$ $\frac{n}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512}$ $\frac{n}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024}$ $\frac{n}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048}$ $\frac{n}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096}$ $\frac{n}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192}$ $\frac{n}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384}$ $\frac{n}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768}$ $\frac{n}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536}$ $\frac{n}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072}$ $\frac{n}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144}$ $\frac{n}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288}$ $\frac{n}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576}$ $\frac{n}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152}$ $\frac{n}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304}$ $\frac{n}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608}$ $\frac{n}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216}$ $\frac{n}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432}$ $\frac{n}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864}$ $\frac{n}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728}$ $\frac{n}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456}$ $\frac{n}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912}$ $\frac{n}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824}$ $\frac{n}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648}$ $\frac{n}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296}$ $\frac{n}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592}$ $\frac{n}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184}$ $\frac{n}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368}$ $\frac{n}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736}$ $\frac{n}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472}$ $\frac{n}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944}$ $\frac{n}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888}$ $\frac{n}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776}$ $\frac{n}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552}$ $\frac{n}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104}$ $\frac{n}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208}$ $\frac{n}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416}$ $\frac{n}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832}$ $\frac{n}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664}$ $\frac{n}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328}$ $\frac{n}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656}$ $\frac{n}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312}$ $\frac{n}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624}$ $\frac{n}{3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248}$ $\frac{n}{7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496}$ $\frac{n}{14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992}$ $\frac{n}{28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984}$ $\frac{n}{57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968}$ $\frac{n}{115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584$

L5

Data structures

	Sorted linked lists	sorted arrays
search	$O(n)$	$O(\log n)$
insert delete	$O(n)$	$O(n)$
access	$O(n)$	$O(1)$

→ hashtable: expected $O(1)$
worst $O(n)$

hash tables: universal hash families.

dictionary hash

⇒ chaining (hash table): bucket

→ bucket: 저장 공간
hash table ⇒ hash function
universal hash family

hashtable goal

⇒ $O(1)$: key → value | bucket

① Direct addressing

→ 여러 bucket에 | mapping table |

hashtable: hash value가 같을 경우

collision → 다른 bucket

⇒ chaining을 사용

bucket이 full (worst) ⇒ balanced $O(1)$

solution: Randomness.

number of items in bucket → hash function?

$$E[C] = \sum_{j=1}^n P(h(u_i) = h(u_j)) \quad \text{hash table이 full 될 확률}$$

$$= \frac{1 + \sum_{i \neq j} P(h(u_i) = h(u_j))}{1 + \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{1} \quad \text{only } n \rightarrow 0$$

$$1 + \frac{n-1}{n} \leq 2$$

⇒ a uniformly random hash function.

⇒ bucket이 full이 될 확률?

→ hash function:

Pick a prime n & define

$$h(x) = ax \bmod n \Rightarrow a \% n$$

a random

모든 n 에 대해

Summary

⇒ ① Direct addressing: 모든 data에 대해 접근 가능

Pros: $O(1)$ Insert / delete / search

Cons: large space required

② hash table with chaining.

- small space than direct addressing.

⇒ Insert in $O(1)$, search in $O(\text{length of list})$

③ hash function

→ 결정론적 hash function

여러개의 hash의 집합을 이루며, universal hash family

어떤 n 에 대해서도