Семинар 3. Ряды Фурье

Рядом Фурье для 2π-периодической функции $f(x)$ называют ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

(либо в зависимости от рассматриваемого отрезка)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

Если функция **четная**, то есть

$$f(-x) = f(x),$$

то ряд Фурье сводится только к сумме четных членов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = 0$$

Если функция **нечетная**, то есть

$$f(-x) = -f(x),$$

то ряд Фурье сводится только к сумме нечетных членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{x=0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

$$a_n = 0.$$

1. Разложите в ряд Фурье $\cos^3 x$.

Способ 1.

Функция $\cos^3 x$ – четная, поэтому ее ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos^3 x \cos nx \, dx$$

Известно $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

Для нахождения a_n вычислим интеграл:

$$\int\limits_{x=0}^{\pi} \cos^3 x \cos nx \, dx = \frac{1}{4} \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos 3x \cos nx \, dx + \frac{3}{4} \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos x \cos nx \, dx$$

Используя соотношение:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos((n+m)x) + \cos((m-n)x)),$$

получаем:

$$\int\limits_{x=0}^{\pi} \cos^3 x \cos nx \, dx = \frac{1}{4} \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos 3x \cos nx \, dx + \frac{3}{4} \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos x \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos(3+n)x \, dx + \frac{1}{8} \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos(3-n)x \, dx +$$

$$+ \frac{3}{8} \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos(1+n)x \, dx + \frac{3}{8} \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos(1-n)x \, dx$$

Таким образом, нам надо вычислить 4 интеграла вида $\int_{x=0}^{\pi} \cos kx \, dx$, ($k -$ константа), при этом

$$\int_{x=0}^{\pi} \cos kx\, dx = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{1}{k}\sin k\pi - \frac{1}{k}\sin 0 = 0, (k \neq 0)$$

Но если множитель перед x будет равен 0, то мы получим:

$$\int_{x=0}^{\pi} \cos 0x\, dx = \int_{x=0}^{\pi} dx = \pi$$

$n = 0..\infty$, таким образом $\int_{x=0}^{\pi} \cos^3 x \cos nx\, dx$ не будет равняться 0 только при $n = 3$ и $n = 1$ (второй и четвертый интеграл в полученном разложении) , во всех остальных случаем получаем 0 (первый и третий интеграл).

При $n = 3$

$$\int_{x=0}^{\pi} \cos^3 x \cos nx\, dx = \int_{x=0}^{\pi} \cos^3 x \cos 3x\, dx = \frac{1}{4}\int_{x=0}^{\pi} \cos 3x \cos 3x\, dx + \frac{3}{4}\int_{x=0}^{\pi} \cos x \cos 3x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{x=0}^{\pi} \cos(3+3)x\, dx + \frac{1}{8}\int_{x=0}^{\pi} \cos(3-3)x\, dx +$$

$$+\frac{3}{8}\int_{x=0}^{\pi} \cos(1+3)x\, dx + \frac{3}{8}\int_{x=0}^{\pi} \cos(1-3)x\, dx = 0 + \frac{\pi}{8} + 0 + 0$$

Аналогично при $n = 1$

$$\int_{x=0}^{\pi} \cos^3 x \cos nx\, dx = \frac{3\pi}{8}$$

Таким образом, все a_n=*0*, кроме a_1 и a_3

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \cos^3 x \cos nx\, dx = 0, \qquad n \neq 1 \text{ или } 3$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\frac{3}{8}\pi = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = \frac{2}{\pi}\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{4}$$

В результате Ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

для $\cos^3 x$ сводится к двум слагаемым

$$\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

Это и есть ответ.

Способ 2.

Воспользуемся формулами Эйлера:

$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$\begin{aligned}\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + 3\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

Это и есть ряд Фурье для $\cos^3 x$.

Замечание. Таким путем можно найти ряды Фурье для выражений вида $\sin^m x \cos^n x$. При этом ярды будут содержать конечное число членов (тригонометрический многочлен).

Теорема Дирихле. Ряд Фурье для кусочно-гладкой 2π-периодической функции $f(x)$ сходится во всех точках вещественной оси, причем равенство

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x)$$

справедлива во всех точках, в которых функция не терпит разрыва. Если же в точке $x = c$ функция терпит разрыв, то

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nc + b_n \sin nc) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}.$$

2. Запишите ряд Фурье для нечётной функции, равной x^2 на отрезке $0 < x < \pi$. Где этот ряд совпадает с x^2?

Поскольку функция – нечетная, ее ряд Фурье сводится к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \,,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx$$

$$\int_{x=0}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx =$$

$$\frac{2\,(\pi\, n \sin(\pi\, n) + \cos(\pi\, n))}{n^3} - \frac{\pi^2 \cos(\pi\, n)}{n} - \frac{2}{n^3} =$$

$$\frac{2(-1)^n}{n^3} - \frac{\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{2}{n^3}$$

$(\cos(0) = 1\,, \cos(\pi) = -1\,, \cos(2\pi) = 1, .. \square \cos(\pi\, n) = (-1)^n)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n}{n^3} - \frac{\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{2}{n^3}\right) = -\frac{2\pi(-1)^n}{n} + \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^3}$$

Ответ 1: ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\pi(-1)^n}{n} + \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^3}\right) \sin nx$$

Где этот ряд совпадает с x^2? По условию

$$f(x) = x^2, \qquad 0 < x < \pi$$

Рассматриваемая функция задана двумя гладкими выражениями за период. Применима теорема Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\pi(-1)^n}{n} + \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^3}\right) \sin nx = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Там, где нет разрывов

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = f(x) = x^2, \qquad 0 \leq x < \pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\pi(-1)^n}{n}+\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^3}\right)\sin nx = x^2, \qquad 0 \le x < \pi$$

В точке $x = 0$ ряд равен нулю, $x^2 = 0$, то есть равенство выполняется. В точке $x = \pi$ ряд равен нулю, $x^2 = \pi^2$, то есть функция терпит разрыв.

Ответ 2: $0 \le x < \pi$

3. Запишите ряд Фурье для четной функции, совпадающей с x^2 на отрезке $[0, \pi]$. Где этот ряд совпадает с x^2?

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Функция четная, поэтому ряд сводится к сумме четных членов

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx =$$

$$\frac{2\,\pi^2\,n^2\sin(\pi\,n)+4\,\pi\,n\cos(\pi\,n)-4\sin(\pi\,n)}{\pi\,n^3}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}, \qquad n \ne 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\,\pi^2}{3}$$

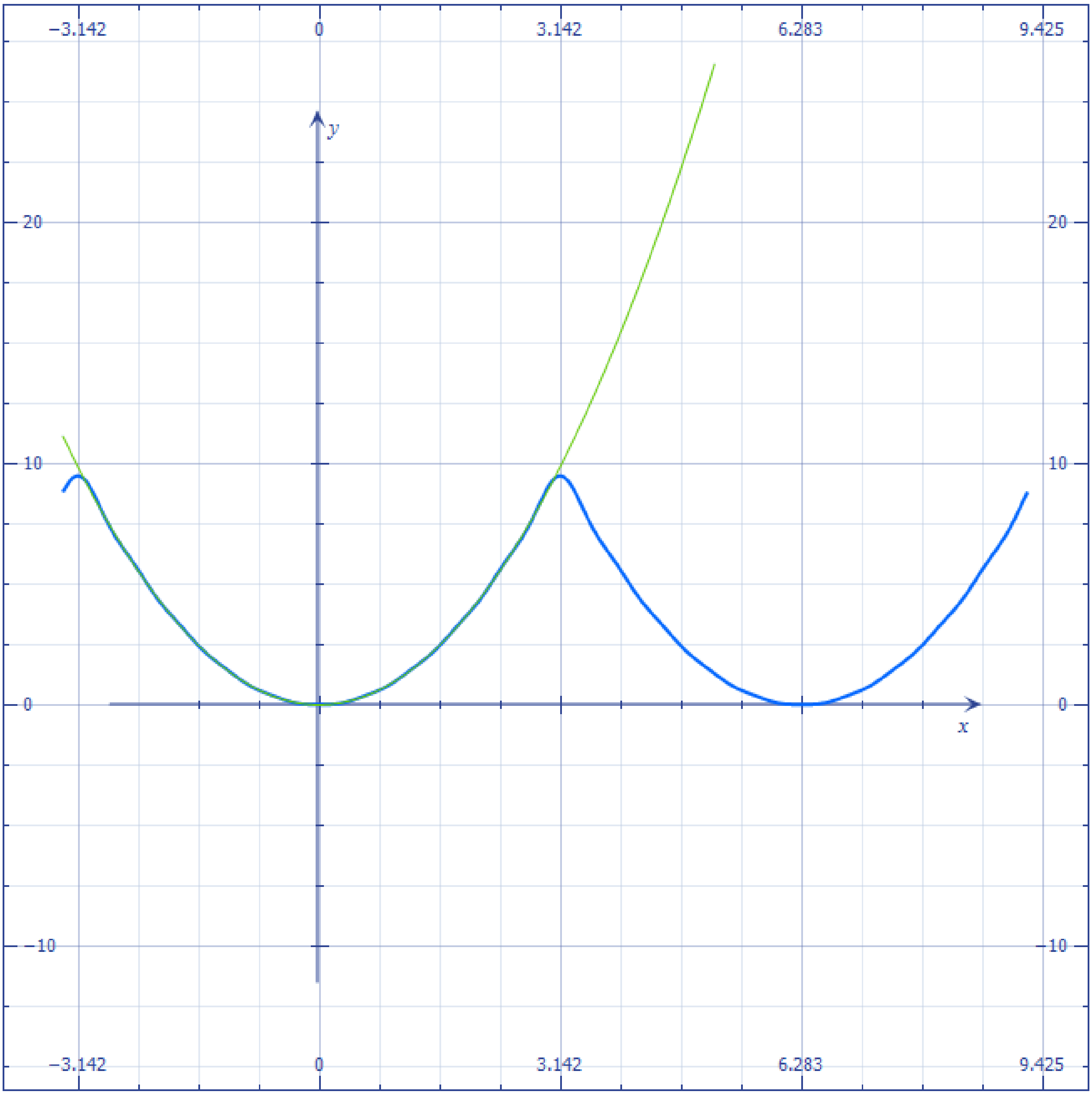
Рядом Фурье будет

$$\frac{1}{2}\frac{2\,\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Или

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Если построить график ряда и исходной функции получим:



По графику видно, что рассматриваемая функция не имеет разрывов. По теореме Дирихле

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = f(x)$$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2, \qquad |x| \leq \pi$$

4. Используя ряд из предыдущей задачи, вычислите точно сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Из предыдущего задания мы получили следующее разложение:

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx = x^2, \qquad |x| \le \pi$$

Рассмотрим это равенство при $x = \pi$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi = \pi^2$$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \pi^2$$

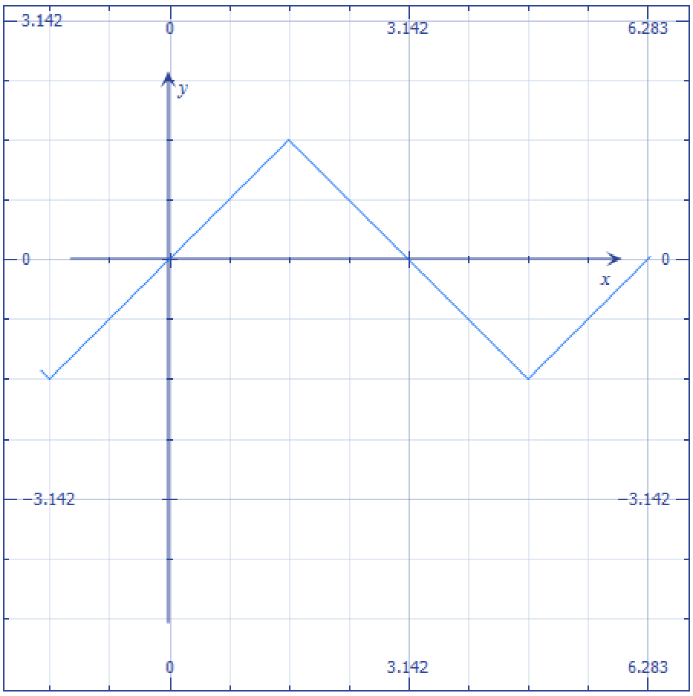
$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \pi^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

5. Разложите в ряд Фурье функцию $\arcsin\sin x$. Сходится ли этот ряд равномерно по x?

$$\arcsin\sin x = x, \qquad |x| \le \frac{\pi}{2}$$

График функции



Рассматриваемая функция имеет период 2π:

$$\arcsin\sin(x+2\pi) = \arcsin\sin x$$

И нечетная

$$\arcsin\sin(-x) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin\sin x$$

Ряд Фурье для нечетной 2π-периодической функции имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\pi} \arcsin\sin x \cdot \sin nx\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\sin x \cdot \sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \arcsin\sin x \cdot \sin nx\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \cdot \sin nx\, dx
\end{aligned}$$

Вычислим отдельно интеграл:

$$\int x \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\int x\, d\cos nx = -\frac{1}{n}\left(x cos\ nx - \frac{1}{n}\int \cos nx\, dnx\right)$$
$$= -\frac{1}{n}\left(x\ cos\ nx - \frac{1}{n}\sin nx\right) + C$$

Таким образом:

$$\int\limits_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\ cos\ \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{n}\left(0\ cos\ 0 - \frac{1}{n}\sin 0\right)$$
$$= -\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\ cos\ \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\int\limits_{x=\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \cdot \sin nx\, dx = \frac{\frac{\pi\, n \cos\left(\frac{\pi\, n}{2}\right)}{2} + \sin\left(\frac{\pi\, n}{2}\right)}{n^2}$$

Отсюда получаем:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \cdot \sin nx\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\ cos\ \frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{\frac{\pi\, n\cos\left(\frac{\pi\, n}{2}\right)}{2}+\sin\left(\frac{\pi\, n}{2}\right)}{n^2}\right)=\frac{4\sin\left(\frac{\pi\, n}{2}\right)}{\pi\, n^2}$$

Ряд Фурье для $\arcsin\sin x$ равен

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi\, n}{2}\right)}{n^2}\sin nx=\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{3^2}\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5x+\cdots\right)$$

Сходится ли ряд равномерно?

$$\frac{4}{\pi}\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi\, n}{2}\right)}{n^2}\sin nx\right|\leq\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2}$$

Числовая мажоранта – ряд

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

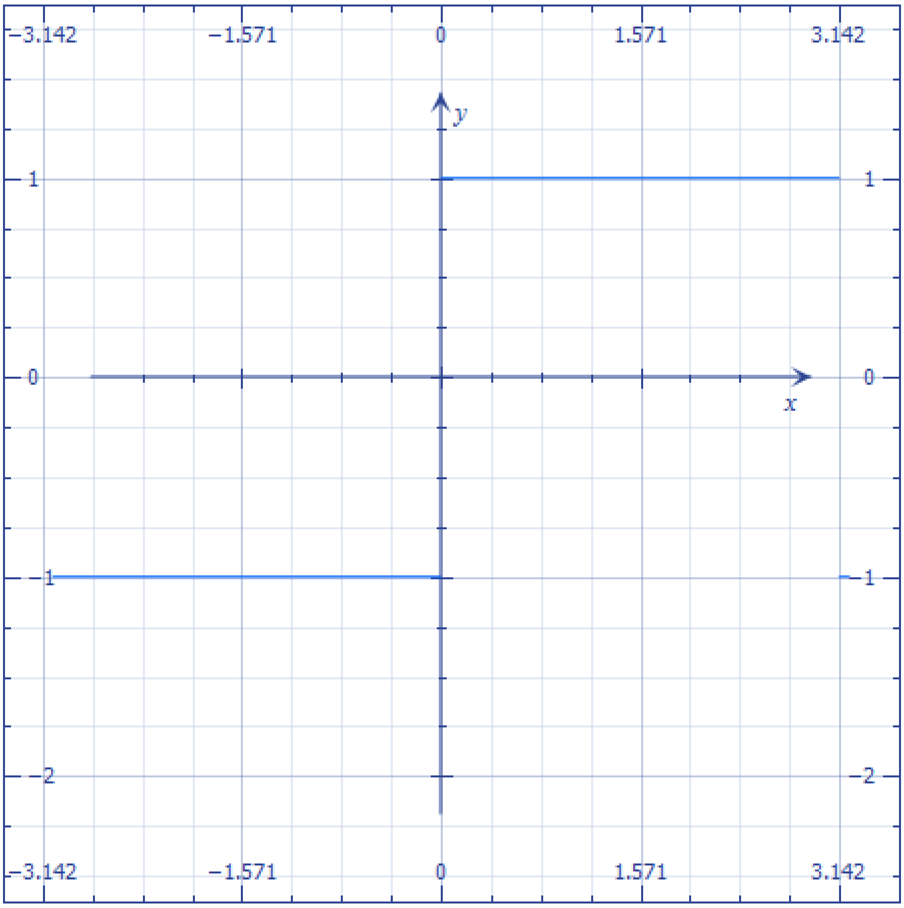
Является сходящимся гармоническим рядом. Поэтому исходный ряд Фурье сходится равномерно.

6. Разложите в ряд Фурье функцию

$$sign\sin x\ .$$

Сходится ли этот ряд равномерно по x?

График функции $sign\sin x$ имеет вид:



То есть

$$sign\sin x = \begin{cases} 1, & 0 < x \le \pi \\ -1, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

Функция нечетная, 2π-периодическая, кусочно-постоянная.

Ряд Фурье для нечетной 2π-периодической функции имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} sign\sin x \cdot \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_{x=0}^{\pi} \sin nx\,dnx$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1)$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}\sin nx = -\frac{2}{\pi}\left(-2\sin x - \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

Сходится ли ряд равномерно?

$$sign \sin x = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

Мажоранта:

$$\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) = \infty$$

Мажоранта расходится, но ряд сходится по теореме Дирихле.

Если бы ряд сходился равномерно, то функция $sign \sin x$ была бы непрерывной функцией. Но она имеет разрывы. Поэтому ряд сходится неравномерно.

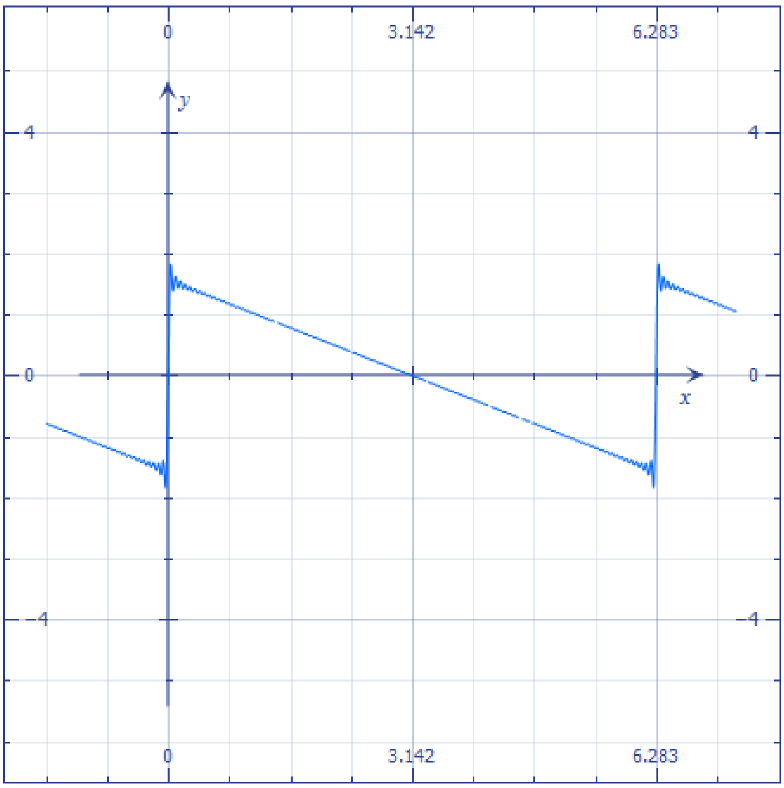
7. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = ?$$

Шаг 1. Гипотеза

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{\sin nx}{n}$$

Построим график этой частичной суммы:



По графикам частичных сумм, кажется, что

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = ax + b, \qquad 0 < x < 2\pi$$

Очевидно, что сумма имеет период 2π и что она является нечетной функцией.

По графику

$f(\pi) = 0$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Тогда подставляя эти значения в уравнение прямой $f(x) = ax + b$, получаем:

$$\begin{cases} a\pi + b = 0, \\ b = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2}, \\ b = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Гипотеза:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi$$

Шаг 2. Обоснование. Рассмотрим нечетную функцию *g(x)*, имеющую период 2π и равную

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi$$

Составим ее ряд Фурье.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx$$

$$= \frac{-\sin(\pi\, n) + \pi\, n}{\pi\, n^2} = \frac{1}{n}$$

Рядом Фурье для g будет

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Это и есть исходный ряд. Функция g – кусочно-линейная, поэтому по теореме Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = g(x)$$

При всех x, в которых график g не рвется, т.е. при $x \neq 2\pi n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi$$

8. Вычислите производную функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x)$$

Из предыдущего номера мы знаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi$$

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi$$

В силу периодичности исходно функции

$$f'(x) = -\frac{1}{2}, \qquad x \neq 2\pi n.$$

В точках разрыва производная не определена.

$$f'(0) = \text{нет}$$

Замечание.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

Этот ряд расходится, напр., при x=1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$$

Отсюда не следует, что $f'(1)$ не определена. Из теоремы Дирихле $f'(1) = -\frac{1}{2}$.