Лекция 3. Множество решений систем линейных уравнений

Оглавление

Системы линейных уравнений в общем виде

В самом общем случае под системой линейных уравнений понимают систему, образованную p линейными уравнениями, содержащими n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

При этом число уравнений (p) может не совпадать с числом неизвестных (n). В матричном виде систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

можно записать так

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

или кратко

$$Ax = b.$$

Пример. Система

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

в матричном виде выглядит так

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 5\end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса

Школьный метод решения систем линейных уравнений позволяет полностью исследовать общий случай, если, кончено, коэффициенты системы – числа, а не буквенные символы.

Определение. Две системы уравнений

$$f_1(x_1,\dots,x_n)=0,\dots,f_p(x_1,\dots,x_n)=0$$

и

$$g_1(x_1,\dots,x_n)=0,\dots,g_q(x_1,\dots,x_n)=0$$

называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

Для определенности, все системы, имеющие пустое множество решений, то есть несовместные системы, считаются эквивалентными.

Метод исключения неизвестных, известный также как метод Гаусса, основан на след. тривиальном утверждении.

Утверждение. Мы заменим систему

$$f_1(x_1,\dots,x_n)=0,\dots,f_p(x_1,\dots,x_n)=0$$

на эквивалентную, если прибавим к одному уравнению другое, помноженное на произвольное число.

Ключом к методу Гаусса является возможность введения *порядка* среди неизвестных. Условимся считать, что переменная x_1 старше x_2, x_2 старше x_3 и т.д.

Замечание. При упрощении выражения

$$x+2y-3x$$

мы можем написать

$$2\,y-2\,x$$

или

$$-2\,x+2\,y,$$

поскольку от перемены порядка слагаемых сумма не меняется. Однако для однозначности ответа в задачах об упрощении выражения принимают соглашение, что сначала следует написать x, а потом y. При этом считается, что слагаемое $-2\,x$ старше $2\,y$. В Высшей алгебре сказанное записывают как

$$-2\,x>2\,y,$$

однако в школе во избежание недоразумений такой записи избегают.

Шаг 1. Ищем старшую переменную, которую содержат многочлены

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n);$$

обычно таковой является x_1, но для общности примем, что таковой является x_{i_1}. В ряду линейных многочленов

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)$$

берем самый левый, который содержит переменную x_{i_1}, и меняем его местами с $f_1(x_1, \dots, x_n)$. Теперь подберем такое число a_2, что многочлен

$$f_2 - a_2 f_1$$

не содержит x_{i_1}, и заменим второе уравнение на

$$f_2 - a_2 f_1 = 0.$$

При этом может получиться тривиальное уравнение $0 = 0$, которое мы условимся сразу отбрасывать, или уравнение $1 = 0$, что указывает на несовместность системы, получив его, мы не будем ничего больше предпринимать. С третьем и всеми последующими уравнениями проделаем ту же операцию. В результате получим новую систему

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_q(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

в которой:

- первое уравнение содержит моном x_{i_1} и переменные, которые ее младше,
- уравнения, начиная со второго, не содержат x_{i_1} и переменные, которые ее старше,
- число уравнений может быть меньше, чем в исходной системе, но не может оказаться больше, то есть $q \le p$.

Шаг 2. Ищем старшую переменную, которую содержат многочлены

$$f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_q(x_1, \dots, x_n);$$

примем, что таковой x_{i_2}. В ряду линейных многочленов

$$f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_q(x_1, \dots, x_n)$$

берем самый левый, который содержит переменную x_{i_2}, и меняем его местами с $f_2(x_1, \dots, x_n)$. Получим эквивалентную исходной систему, заменив уравнения с номерами $i = 3, \dots q$ на

$$f_i - b_i f_2 = 0,$$

где числа b_i подбираются таким образом, чтобы многочлены $f_i - b_i f_2$ не содержали x_{i_2}. При этом опять уравнения $0 = 0$ отбрасываются, а уравнения $1 = 0$ свидетельствуют о несовместности системы. В новой системе

- первое уравнение содержит переменную x_{i_1} и переменные, которые ее младше,
- второе уравнение содержит переменную x_{i_2} и переменные, которые ее младше,
- уравнения, начиная с третьего, не содержат переменную x_{i_2} и переменные, которые ее старше,

- число уравнений может быть меньше, чем в исходной системе, но не может оказаться больше.

След. шаги. Двигаясь так дальше, придем или к тому, что система не имеет решения, или к эквивалентной системе, в которой r уравнений, причем:

- первое уравнение содержит переменную x_{i_1} и переменные, которые ее младше,
- второе уравнение содержит переменную x_{i_2} и переменные, которые ее младше

и т.д.

Чтобы получить *частное решение* системы линейных уравнений, найдем

1. неизвестную x_{i_r}из последнего уравнения

$$f_r(x_{i_r}, \dots, x_n) = 0,$$

придав неизвестным $x_{i_r+1}, \dots, x_n$ какие угодно значения,

2. неизвестную $x_{i_{r-1}}$ из предпоследнего уравнения

$$f_{r-1}(x_{i_{r-1}}, \dots, x_n) = 0,$$

придав неизвестным $x_{i_{r-1}+1}, \dots, x_{i_r-1}$ какие угодно значения

и т.д.

Чтобы получить *общее решение* системы линейных уравнений, найдем:

1. неизвестную x_{i_r} из последнего уравнения

$$f_r(x_{i_r}, \dots, x_n) = 0$$

как линейную функцию переменных $x_{i_r+1}, \dots, x_n$, которые могут принимать какие угодно значения,

2. неизвестную $x_{i_{r-1}}$ из последнего уравнения

$$f_{r-1}(x_{i_{r-1}}, \dots, x_n) = 0,$$

как линейную функцию переменных $x_{i_{r-1}+1}, \dots, x_{i_r-1}$, которые могут принимать какие угодно значения,

и т.д. В итоге мы выразим r неизвестных через оставшиеся $n-r$ величины, на изменения которых система не накладывает никаких ограничений.

Определение. Так вычисленное число r будем называть *рангом* системы линейных уравнений, а число $n-r$ - размерностью множества решений системы.

Пример 1. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Порядок переменных $x > y$. Старшая переменная содержится в первом уравнении. Вычитаем из второго уравнения первое, умноженное на 2

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -y + 5 = 0 \end{cases}$$

Здесь:

1. Первое уравнение содержит x и y.
2. Второе уравнение содержит только y.

Чтобы решить систему, начинаем со второго уравнения:

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = 1 - y = -4 \end{cases}$$

Ответ: $x = 1, y = -4$

Замечание. Здесь размерность множества решений равна нулю и нет смысла говорить об общем и частных решениях.

Пример 2. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Порядок переменных $x > y$>z.

Шаг 1. Исключаем x

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

Шаг 2. Исключаем y

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \\ -z + 8 = 0 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} z = 8 \\ y = -4 + z = 4 \\ x = 1 - z - y = -11 \end{cases}$$

Проверка:

$$solve\{x + y + z - 1 = 0, x + 2\,y + 3 = 0, x - y + 2\,z - 1 = 0\}$$

$$(x = -11, y = 4, z = 8)$$

Пример 3. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

Шаг 1. Исключаем x

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Шаг 2. Исключаем y

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \\ 8 = 0 \end{cases}$$

Ответ: система несовместна.

Пример 4. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ 2x + 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Шаг 1. Исключаем x

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

Шаг 2. Исключаем y

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Отбрасываем уравнение $0 = 0$, получаем 2 уравнения с 3-мя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

Здесь:

1. Первое уравнение содержит x, y и z.
2. Второе уравнение содержит только y и z.

Чтобы найти какое-нибудь частное решение, придаем младшей переменной z какое либо числовое значение, а дальше определяем старшие переменные по формулам

$$\begin{cases} y = -4 + z, \\ x = 1 - z - y = 5 - 2z. \end{cases}$$

Напр., при $z = 0$

$$y = -4, \qquad x = 5$$

при $z = 1$

$$y = -3, \qquad x = 3$$

Чтобы найти общее решение системы оставляем z как символьную переменную,

$$\begin{cases} y = -4 + z, \\ x = 1 - z - y = 5 - 2z, \end{cases}$$

где z пробегает всю вещественную прямую.

Замечание 1. Важно не число уравнений, а сколько останется нетривиальных уравнений после исключения. Это число называют *рангом* системы. В данном случае ранг равен 2, неизвестных три, а ответ содержит $3 - 2 = 1$ неопределённую величину. Это число называют размерностью множества решений системы.

Множество решений системы не зависит от способа его отыскания, в частности от выбора порядка среди переменных $x_1, \dots, x_n$. Однако в том случае, когда размерность множества решений не равна нулю, от способа отыскания решения зависит описание этого множества.

Системы однородных линейных уравнений

Система однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

или кратко

$$Ax = 0$$

всегда имеет тривиальное решение $x = 0$. Это уравнение имеет нетривиальное решение, напр., если число уравнений меньше числа переменных.

Пример. Уравнение

$$x + y = 0$$

имеет бесконечно много решений.

Применение метода исключения к однородной системе позволяет выразить часть переменных $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r})$ как линейные функции оставшихся $d = n - r$ переменных.

Пример. Система 3-х уравнений с 4-мя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

легко решается по методу исключений.

Шаг 1. Исключаем x

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -2y + z - 2t = 0 \\ -2y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

Шаг 2. Исключаем у

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -2y+z-2t=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Множество решений:

$$\begin{cases} z=2y+2t \\ x=-y-z-t=3(y+t) \end{cases}$$

где y, t могут принимать любые значения. В матричном виде это можно записать так

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(y+t) \\ y \\ 2(y+t) \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь указано два частных решения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

из которых составлено общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В общем же случае столбцов получится столько, сколько переменных мы должны оставить неопределенными. В итоге применение метода Гаусса приводит нас к важной теореме.

Теорема 1. Общее решение системы однородных линейных уравнений

$$Ax = b$$

можно представить в виде суммы

$$x = c_1 f_1 + \cdots c_d f_d,$$

$x = f_1, \dots, x = f_d$ – надлежащим образом выбранные частные решения этой системы, а $c_1, \dots, c_d$ – произвольные константы, которым можно придавать любые числовые значения.

В линейной алгебре возникшая здесь конструкция имеет особое название.

Определение. Пусть $f_1, \dots f_d$ -- элементы линейного пространства V. Тогда выражение вида

$$c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d$$

при любых числовых значениях $c_1, \dots, c_d$ называют линейной комбинацией элементов $f_1, \dots f_d$, а сами числа $c_1, \dots, c_r$ -- коэффициентами этой линейной комбинации. Множество всех линейных комбинаций элементов $f_1, \dots f_d$, то есть множество всех элементов вида

$$c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d, \qquad c_1, \dots, c_d \in R$$

называют линейной оболочкой, натянутой на элементы $f_1, \ldots f_d$, ее обозначают как $L(f_1, \ldots f_d)$

Пример. Множество решений системы

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

- это линейная оболочка, натянутая на два частных решения этой системы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя различные методы решения, можно придти к различному описанию множества решений.

Пример. Рассмотрим уже знакомую нам систему 3-х уравнений с 4-мя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

но найдем ее общее решение, приняв другой порядок, скажем, $y > x > z > t$

Шаг 1. Исключаем y

$$\begin{cases} y + x + z + t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

Шаг 2. Исключаем x

$$\begin{cases} y + x + z + t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Множество решений:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -x - z - t = \frac{1}{2}z - t \end{cases}$$

где z, t могут принимать любые значения. В матричном виде это можно записать так

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}z \\ -\frac{7}{2}z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь указано два частных решения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

из которых составлено общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Хорошо видно, что число столбцов, необходимых для задания линейной оболочки, то есть размерность множества решений, не зависит от способа решения. Однако это число без труда может быть увеличено.

Пример. Линейная оболочка, натянутая на три столбца

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

совпадает с линейной оболочкой, натянутой на первые два из них, поскольку

$$f_3 = f_1 + f_2.$$

Определение. Элементы $f_1, \dots f_d$ линейного пространства V называются линейно независимыми, если равенство

$$c_1 f_1 + \dots + c_d f_d = 0$$

возможно только при

$$c_1 = \dots = c_d = 0.$$

Размерностью линейной оболочки M называют максимальное число содержащихся в нем линейно независимых элементов, это число обозначают как $\dim M$.

Замечание. Линейно независимые частные решения однородной системы, на которые натянуто множество ее решений, называют фундаментальной системой решений (ФСР).

Пример. Общее решение системы

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

найденное по методу исключений, есть

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(y+t) \\ y \\ 2(y+t) \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь переменные y и t (2 и 4 неизвестные) оставлены произвольными. При разбиении столбца на линейную комбинацию получается два столбца: столбец при y имеет на месте 2-го элемента 1, а на 4-м месте, столбец при t – на месте 2-го 0, а на месте 4-го элемента 1. Равенство

$$y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

во второй строке дает y=0, а в четвертой t=0. Поэтому столбцы линейно независимы.

Чтобы сделать из этого заключение о том, что размерность оболочки, натянутой на эти два столбца, равна 2, необходимо воспользоваться следующим утверждением.

Лемма о размерности линейной оболочки. Размерность линейной оболочки M, натянутой на линейно независимые элементы $f_1, \dots f_d$ линейного пространства V, равна d.

Док-во. По условию у нас уже имеется d линейно независимых элементов, поэтому $\dim M \geq d$. Допустим, вопреки утверждению теоремы, что $\dim M = s > d$. Тогда в M содержится s линейно независимых элементов, скажем, $g_1, \dots, g_s$. Но каждый элемент M – линейная комбинация элементов $f_1, \dots f_d$, поэтому найдутся такие числа a_{ij}, что

$$g_i = a_{i1}f_1 + \dots + a_{id}f_d$$

В таком случае уравнение

$$c_1 g_1 + \ \dots + c_s g_s = 0$$

можно переписать как

$$c_1(a_{11}f_1 + \dots + a_{1d}f_d) + \ \dots + c_s(a_{s1}f_1 + \dots + a_{sd}f_d) = 0$$

или

$$(c_1 a_{11} + \dots + c_s a_{s1})f_1 + \dots + (c_1 a_{1d} + \cdots c_s a_{sd})f_d = 0$$

В силу линейной независимости элементов $f_1, \dots f_d$ это равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} c_1 a_{11} + \dots + c_s a_{s1} = 0 \\ \dots \\ c_1 a_{1d} + \cdots c_s a_{sd} = 0 \end{cases}$$

Это система d однородных уравнений относительно большего числа неизвестных. Она всегда имеет нетривиальные решения, поэтому найдутся такие $c_1, \dots, c_s$, что среди них имеются отличные от нуля и выполняется

$$c_1 g_1 + \ \dots + c_s g_s = 0$$

Это означает, что $g_1, \dots, g_s$ линейно зависимы, против нашего предположения. Поэтому что $\dim M = s = d$.

Метод исключения всегда дает линейно независимые столбцы. В самом деле, общее решение получается как линейная комбинация d столбцов, причем тот столбец, который умножается на x_m, имеет на m-той позиции 1, а остальные столбцы имеют на этом месте 0. Поэтому m-ая строка равенства

$$c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d = 0$$

дает, что коэффициент при том столбце, который умножается на x_m, равен нулю. В итоге получается

$$c_1 = \cdots = c_d = 0.$$

Поэтому размерность множество решений однородной системы линейных уравнений как линейной оболочки в пространстве столбцов равна

$$d = n - r,$$

где n – число неизвестных, а r – ранг системы, то есть число уравнений, остающихся при применении метода Гаусса.

Теорема 2. Размерность множество решений однородной системы линейных уравнений как линейной оболочки в пространстве столбцов равна

$$d = n - r,$$

где n – число неизвестных, а r – ранг системы, то есть число уравнений, остающихся при применении метода Гаусса.

Размерность множества решений как линейно оболочки не зависит от способа отыскания этого множества. Для ее вычисления можно пользоваться методом Гаусса, выбрав любой порядок неизвестных, всякий раз будет получаться одно и то же число – размерность множества решений как линейно оболочки.

При сравнении двух общих решений одной системы, полученных различными способами удобно пользоваться следующим утверждение, представляющим собой усовершенствование теоремы 1.

Теорема 3. Если известна размерность d пространства решений системы однородных линейных уравнений, то множество решений – линейная оболочка, натянутая на любые d линейно независимые частные решения этой системы.

Док-во. Пусть множество решений – линейная оболочка, натянутая на линейно независимые столбцы $g_1, \dots, g_d$ и пусть $f_1, \dots, f_d$ – линейно независимые частные решения, то есть столбцы из линейной оболочки. Поскольку размерность оболочки равна d, то $f_1, \dots, f_d, g_1$ - линейно зависимы, то есть найдутся такие числа $c_1, \dots, c_{d+1}$, что среди них есть не равные нулю и верно

$$c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d + c_{d+1} g_1 = 0.$$

Здесь c_{d+1} не равен нулю, поскольку в противном случае

$$c_1f_1 + \cdots + c_df_d = 0$$

выполнялось бы при ненулевых $c_1, \dots, c_d$ и $f_1, \dots, f_d$ были бы линейно независимы. Следовательно,

$$g_1 = -\frac{c_1}{c_{d+1}}f_1 - \cdots - \frac{c_d}{c_{d+1}}f_d$$

Тем же путем мы выясним, что $g_2, \dots, g_d$ можно представить как линейную комбинацию $f_1, \dots, f_d$. Но любое частное решение является линейной комбинацией $g_1, \dots, g_d$, поэтому и линейной комбинацией $f_1, \dots, f_d$. Остается заметить, что при любом выборе констант верно

$$A(c_1f_1 + \cdots + c_df_d) = c_1 \cdot Af_1 + \cdots + c_d \cdot Af_d = 0,$$

то есть любая линейная комбинация $x = c_1f_1 + \cdots + c_df_d$ является решением уравнения $Ax = 0$. Это означает, что все множество решений можно описать как линейную оболочку, натянутую на $f_1, \dots, f_d$.

Пример. Допустим, мы нашли, что система

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

имеет общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

а некто другой считает, что ее общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Как проверить, верно ли это второе выражение? Прежде всего, в обоих случаях используются линейно независимые столбцы. Так должно быть, поскольку применяется метод Гаусса. Впрочем, независимость можно проверить прямо.

$$c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$c_1\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Если мы уверены в своем решении, то размерность множества решений равна 2. Столбцы

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

дают два линейно независимых решения системы

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

поэтому второе решение тоже правильное.

Системы неоднородных линейных уравнений

Обратимся теперь к системе неоднородных уравнений

$$Ax = b$$

Эта система может быть несовместна. Если эта система совместна и известно одно ее частное решение, скажем $x = f$, то всякое другое, скажем $x = g$, представимо как сумма f и некоторого решения однородного уравнения. В самом деле,

$$g = f + (g - f)$$

и

$$A(g - f) = Ag - Af = b - b = 0.$$

Сумма f и любого решения h однородного уравнения является решением исходного неоднородного уравнения, поскольку

$$A(f + h) = Af + Ah = b + 0 = b.$$

Отсюда:

Теорема 4. Общее решение систем неоднородных линейных уравнений

$$Ax = b$$

есть сумма частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения

$$Ax = 0$$

С учетом теоремы 1 это означает, что общее решение систем неоднородных линейных уравнений имеет вид

$$x = f + c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d,$$

где d – размерность множества решений системы

$$Ax = 0.$$

Пример. Как мы уже знаем, решение системы

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ 2\,x + 3\,y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

общее решение системы дается формулой

$$\begin{cases} y = -4 + z, \\ x = 1 - z - y = 5 - 2z, \end{cases}$$

где z пробегает всю вещественную прямую. В матричном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2z \\ -4 + z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

частное решение системы,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2\,x + 3\,y + z = 0 \end{cases}$$

Из теоремы 4 следует, что размерность множества решений совместной системы неоднородных уравнений не зависит от правой части. Однако правую часть иногда можно выбрать так, что система становится несовместной.

Домашнее задание

Теоретические вопросы

1. Как записать систему линейных уравнений в матричном виде?
2. Опишите алгоритм Гаусса решения СЛАУ. При каких обстоятельствах алгоритм уходит на ветку «нет решения»?
3. Что такое общее и частное решение СЛАУ?
4. Какие столбцы называют линейно независимыми? Что такое линейная оболочка? Как определяется понятие размерности линейной оболочки?
5. Сформулируйте и докажите лемму о размерности линейной оболочки.
6. Опишите, как устроено общее решение системы однородных линейных уравнений.
7. Опишите, как устроено общее решение системы неоднородных линейных уравнений.
8. Что такое размерность множества решений СЛАУ? Почему она не зависит от способа решения СЛАУ?

Задачи

1. Определите размерность множества решений системы

1.	$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \\ 2x=1 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-z=2 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-z=2 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-2t=1 \\ 2x+2z-t=1 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-2t=1 \\ 2x+2z-t=1 \\ x+y+t=3 \end{cases}$

2. Найдите общее решение системы
$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-2t=0 \\ 2x+2z-t=0 \end{cases}$$
3. Найдите общее решение системы
$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-2t=1 \\ 2x+2z-t=1 \end{cases}$$
4. Нарисуйте график зависимости размерности d множества решения системы
$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-z=2 \\ 2x-y+z=\alpha \end{cases}$$
от параметра α.
5. При каких значения параметра α система

$$\begin{cases} \alpha x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + \alpha y - z = 0 \\ 3x - y + \alpha z = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение?

6. Элементы матрицы Гильберта определяются по формуле

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \qquad i = 1, \dots, n, \qquad j = 1, \dots, n$$

Пусть

$$b_1 = 1, \qquad b_i = 0, \qquad i = 2, \dots, n$$

Примените метод Гаусса к решению системы

$$Ax = b$$

при $n = 6$. Ответ представьте в десятичных дробях.