1. **Определение множества, мощности множества, прямого произведения множеств, подмножества, булеана.**
   Правило суммы и правило произведения множеств.
   Принцип Дирихле, обобщенный принцип Дирихле.

Множеством называется неупорядоченный набор различных элементов.
Множества обозначаются латинскими буквами A, B, C.
Подмножеством множества A называется такое множество B, что все его элементы принадлежат A: $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall\, b \in B\,,\, b \in A$
Множества A и B называют равными, если B ⊆ A и A ⊆ B.
Запись $|A|=n$ означает, что *мощность* конечного множества A равна n или множество A содержит n элементов.
Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается $\emptyset$.
Множество, состоящее из всех подмножеств множества A, называется *булеаном* и обозначается 2^A. ($2^A = \{B: B \subseteq A\}$).
Отметим, что $|2^A| = 2^{|A|}$
Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, входящих как в A, так и в B.

$$C = A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Объединением множеств A и B называется множество C, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из них.

$$C = A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Разностью множеств A и B называется множество C, содержащее такие элементы из A, которые не входят в B.

$$C = A \setminus B = \{x: x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Прямым произведением множеств A и B называется множество всех таких пар их элементов, что первый элемент в паре принадлежит множеству A, а второй – множеству B.

$A\times B = \{(a,b): a \in A,\ b\in B\}$ – прямое произведение множеств.

Правило суммы:
«Если объект из множества A можно выбрать m способами, а объект из множества B можно выбрать другими n способами, то выбор "либо из A , либо из B" может быть осуществлен $m+n$ способами.»
Пример.
Если на одной тарелке лежат 3 яблока, то выбрать одно яблоко можно 3 способами.
Если на другой тарелке лежат 4 груши, то выбрать одну грушу можно 4 способами.
А выбрать один фрукт можно 3+4=7 способами.
Обобщенное правило суммы.
«Если объект из множества A_1 можно выбрать m_1 способами, после этого объект из множества A_2 можно выбрать другими m_2 способами и так далее, объект из множества A_n можно выбрать m_n способами, то выбор "либо из A_1 , либо из A_2, … либо из A_n " может быть осуществлен $m_1+m_2+\ldots+m_n$ способами."

Правило произведения:

«Если объект из множества A можно выбрать m способами, и после каждого из таких выборов объект из множества B можно выбрать n способами, то выбор “из A, и из B" может быть осуществлен $m \times n$ способами.»

Пример**:**

В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

Действие, которое должно быть выполнено особым способом, необходимо выполнять первым. Итак, на место водителя можно посадить только одного из трех человек (умеющего водить машину), т.е. существуют три способа занять первое место. Второе место может занять любой из 6 человек, оставшихся после того, как место водителя будет занято и т.д. Используя принцип умножения, получаем произведение: $3 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 6! = 2160$ *способов.*

Принцип Дирихле:

Если в n ящиков положено более чем n предметов (кроликов), то хотя бы в одном ящике может лежать 2 и более предметов (кроликов).

Пример:

В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Решение:

Перед нами миллион «кроликов» – елок и, увы, всего лишь 600 001 клетка с номерами от 0 до 600 000. Каждый «кролик» – елка сажается нами в клетку с номером, равным количеству иголок на этой елке. Так как «кроликов» гораздо больше, чем клеток, то в какой-то клетке сидит по крайней мере два «кро-лика»: если бы в каждой сидело не более одного, то всего «кроли-ков»-елок было бы не более 600 001 штуки. Но ведь если два «кролика» – елки сидят в одной клетке, то количество иголок у них одинаково.

Обобщенный принцип Дирихле

Существуют другие, более формальные определения это принципа:

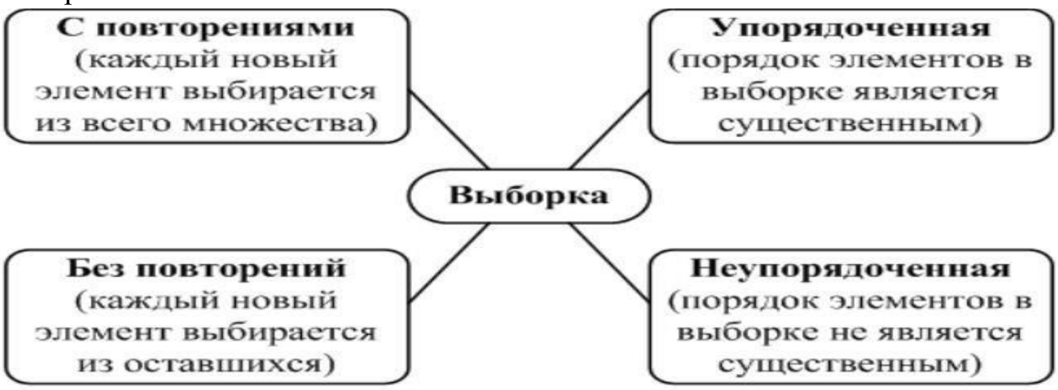
1) если $n + 1$ элементов разбить на n множеств, то по крайней мере одно множество содержит не менее 2 элементов.

2) если $nk + 1$ элементов разбить на n множеств, то хотя бы в одном множестве окажется не менее $k + 1$ элементов.

3) если m элементов разбить на n множеств, то хотя бы в одном множестве окажется не менее $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ элементов, и хотя бы одном множестве окажется не более $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ элементов.

2. **Выборка объема r из n элементов, типы выборок.**
Определение и формулы (с доказательством) для их числа: размещение, размещение с повторением, сочетание, сочетание с повторением, перестановка, мультимножество.

Рассмотрим множество A={ $a_1, \dots , a_n$}.
Набор элементов $a_{i1}, a_{i2} \dots , a_{ir} \in$ A называется <u>*выборкой объема r из n элементов*</u>, или (n, r)-выборкой.



(1) Упорядоченная выборка без повторений – <u>*размещение без повторений*</u> из n элементов по r.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ - число различных размещений.

Доказательство:
Первый элемент можно выбрать n способами, его номер – любой из n возможных. При любом выборе первого элемента есть n-1 способ выбрать второй элемент. По теореме* («если первый элемент можно выбрать k способами, а второй элемент – m способами, то пару элементов можно выбрать km способами»), число возможных пар = n(n-1). Для каждой такой пары есть n-2 способа выбрать третий элемент. По той же теореме*, число возможных пар = n(n-1)(n-2).
Продолжая рассуждения, получим, что общее число возможных наборов из k элементов = n*(n-1)*…*(n-k+1).

(2) Упорядоченная выборка с повторениями – <u>*размещение с повторениями*</u> из n элементов по r.

$\hat{A}_n^k = n^k$ - число различных размещений с повторениями.

Доказательство:
Первый элемент можно выбрать n способами. При каждом из этих способов второй элемент можно выбрать так же n способами(т.к. с повторениями), и так k раз.
Отсюда получаем, что общее число наборов = n*n*…*n = n^k.

(3) Упорядоченная (n, n)-выборка без повторений – <u>*перестановка*</u> из n элементов (по n).
P(n) = n! - число различных перестановок.
Доказательство:
Перестановка – частный случай размещения без повторений из n элементов по k при k = n. Поэтому по доказательству **(1)** P(n, n) = n*(n-1)*…*1 = n!.

(4) Неупорядоченная (n, r)-выборка без повторений – <u>*сочетание*</u> из n элементов по r.

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - число различных сочетаний.

Доказательство:
Согласно доказательству (3), k различных номеров элементов можно упорядочить k! способами. Поэтому из каждого набора, выбранного с учетом порядка и без повторений, можно образовать k! наборов, отличающихся друг от друга порядком следования номеров. Т.е. при выборе с учетом порядка возможно в k! раз больше наборов, чем при выборе без учета порядка. Поэтому число наборов при выборе без учета порядка = (A(n, k)) / k! = n!/k!(n-k)!.

(5) Неупорядоченная (n, r)-выборка с повторениями – <u>*сочетание с повторениями*</u> из n элементов по r.

$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ - число различных сочетаний с повторениями.

Доказательство:
Рассмотрим подробно, чем отличаются друг от друга два разных результата такой схемы выбора. Нам не важен порядок номеров, т.е. мы учитываем только, сколько раз в нашем наборе из k номеров элементов появился каждый номер. Поэтому результат выбора можно представить набором чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, в котором k_i — число появлений элемента номер i в наборе, и $k_1 + \ldots + k_n = k$. Числа k_i принимают значения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Два результата выбора в схеме выбора без учёта порядка различаются, если соответствующие им наборы $k_1, k_2, \ldots, k_n$ не совпадают (порядок следования элементов k_i учитывается).

Представим себе другой эксперимент, имеющий точно такие же результаты, и посчитаем их количество. Есть n групп по k элементов. Нас интересует только число элементов в каждой группе. Результатом эксперимента снова является набор чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, где k_i равно числу элементов в группе с номером i, и $k_1 + \ldots + k_n = k$. Числа k_i принимают натуральные значения или равны нулю.

А теперь изобразим результат такого размещения в виде схемы, в которой вертикальные линии обозначают перегородки между группами, а точки — элементы:

| • • • | | • | • • | • • | | • |

Мы видим результат размещения девяти элементов по семи группам. Первая группа содержит три элемента, вторая и шестая группы пусты, третья содержит один элемент, в четвёртой и пятой лежит по два элемента. Переложим один элемент из первой группы во вторую и изобразим таким же образом ещё два результата размещения:

| • • | • | • | • • | • • | | • |

| | | | | | | • • • • • • • • • |

Видим, что все размещения можно получить, меняя между собой элементы и перегородки, или расставляя k элементов на $n - 1 + k$ местах. Число $n - 1 + k$ получается так: у n групп есть ровно $n + 1$ перегородка, считая крайние, но из них перемещать можно лишь $n - 1$ внутреннюю перегородку. Таким образом, имеется $n - 1 + k$ мест, которые можно занять элементами либо внутренними перегородками. Перебрав все возможные способы расставить k элементов на этих $n - 1 + k$ местах (заполняя оставшиеся места перегородками), переберем все нужные размещения.

Осталось заметить, что способов расставить k элементов на $n - 1 + k$ местах существует

$C^k_{n+k-1} = C^{n-1}_{n+k-1}$. Именно столько есть способов выбрать из $n-1+k$ номеров мест k номеров мест для элементов.

Мультимножеством называется неупорядоченный набор элементов, которые могут повторяться.
Пусть дано мультимножество **M** = {a, a, … , a, b, b, … , b, … , x, x, … , x }, |**M** | = n , оно содержит k типов элементов, элемент a повторяется r_1 раз, b – повторяется r_2 раз, …, x – r_k раз. Тогда число различных перестановок элементов мультимножества определяется по формуле:
$P(a, a, \dots a, b, b, \dots b, \dots, x, x, \dots, x) = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$, где $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

3. Основные тождества, связанные с числом сочетаний (4 тождества с доказательством).

По определению число сочетаний C^r_n – это число различных r-элементных подмножеств n-элементного множества.
Числа C^r_n встречаются в формулах решения многих комбинаторных задач.
Основная формула для числа сочетаний $C^r_n = n!/(n-r)!r!$ позволяет получить ряд простых тождеств.
Рассмотрим некоторые из них.

Основные тождества, связанные с числом сочетаний

Теорема 2.1. $C^k_n = C^{n-k}_n$.

Доказательство.

$$C^{n-k}_n = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C^k_n \square.$$

Теорема 2.2. $C^k_n = C^k_{n-1} + C^{k-1}_{n-1}$.

Доказательство.

$$C^k_{n-1} + C^{k-1}_{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C^k_n \square$$

Теорема 2.3. $C^k_n C^r_k = C^{k-r}_{n-r} C^r_n$.

Доказательство.

$$C^k_n C^r_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-r)!r!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!}; \qquad (*)$$

$$C^{k-r}_{n-r} C^r_n = \frac{(n-r)!}{(n-r-k+r)!(k-r)!} \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!}; (**)$$

$(*) = (**)$ $\square$

Теорема 2.4 (тождество Коши). $C^k_{n+r} = \sum_{i=0}^{k} C^i_n C^{k-i}_r$.

Доказательство.

C^k_{n+r} – это число способов выбрать k предметов из n+rпредметов. Предметы можно выбирать в два приема: сначала выбрать i предметов из первых n предметов, а затем выбрать остальные k-i предметов из оставшихся r предметов.

4. Бином Ньютона (с доказательством).

Числа сочетаний C^r_n присутствуют в известной формуле бинома Ньютона, откуда они получили название биномиальных коэффициентов.

Теорема 2.4 (Бином Ньютона).

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \qquad (2.1)$$

Доказательство. По индукции.

База индукции: проверим при $n=1$

$(x+y)^1 = 1\cdot x^1 \cdot y^0 + 1\cdot x^0 y^1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k$ (2.1) – верно.

Индуктивное предположение. Предположим, что формула (2.1) верна для $n-1$: $(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k y^{n-k-1}$.

Шаг индукции. Необходимо доказать, что формула верна для n.

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} y C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{k+1} y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k} = \{\text{ðàñï èø åì ñói ì û}\} =$$

$$= C_{n-1}^0 x^1 y^{n-1} + C_{n-1}^1 x^2 y^{n-2} + \ldots + C_{n-1}^{n-2} x^{n-1} y^1 + C_{n-1}^{n-1} x^n y^0 +$$

$$+ C_{n-1}^0 x^0 y^n + C_{n-1}^1 x^1 y^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-2} x^{n-2} y^2 + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} y^1 =$$

$= \{$приведем подобные$\}=$

$$= x^1 y^{n-1}(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + x^2 y^{n-2}(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + \ldots +$$

$$+ C_{n-1}^{n-1} x^n y^0 + C_{n-1}^0 x^0 y^n = \{\text{по свойству } C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k\} =$$

$$= x^1 y^{n-1} C_n^1 + x^1 y^{n-1} C_n^2 + \ldots + x^{n-2} y^2 C_n^{n-2} + x^{n-1} y^1 C_n^{n-1} + C_n^n x^n y^0 +$$

$$+ C_n^0 x^0 y^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (n,r) x^k y^{n-k}. \ \square$$

Следствия из теоремы о биноме Ньютона

Следствие 1. $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Доказательство. Пусть $y = 1$ в теореме 2.4.

Тогда $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\, 1^{n-k}$.

Следствие 2. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Доказательство. Пусть $x = 1, y = 1$ в теореме 2.4.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot 1^r \cdot 1^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r. \square$$

Следствие 3. $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r = 0$.

Доказательство. Пусть $x = -1, y = 1$ в теореме 2.4.

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r 1^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r. \square$$

5. Свойства биномиальных коэффициентов (5 свойств с доказательством).

Следствия из теоремы о биноме Ньютона

Следствие 1. $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Доказательство. Пусть $y = 1$ в теореме 2.4.

Тогда $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 1^{n-k}$.

Следствие 2. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Доказательство. Пусть $x = 1, y = 1$ в теореме 2.4.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot 1^r \cdot 1^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r . \square$$

Следствие 3. $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r C_n^r = 0$.

Доказательство. Пусть $x = -1, y = 1$ в теореме 2.4.

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r 1^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r . \square$$

Теорема 2.5. $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$

Доказательство. По следствию 1 к теореме 2.4

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Дифференцируем по x: $((x+1)^n)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)'$, отсюда получаем $n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^{k-1}$.

Пусть $x = 1$, тогда $n2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k$. □

Теорема 2.6. $m^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^k$.

Доказательство. По следствию 1 к теореме 2.4:

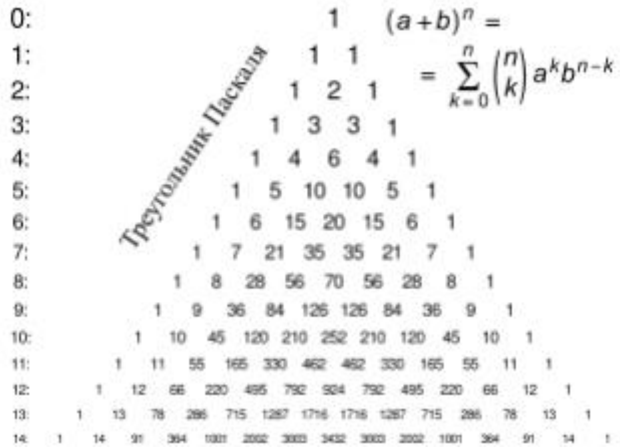
$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

При $x = m - 1$ получаем:

$$((m-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^k 1^k \Leftrightarrow m^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^k \ \square$$

6. **Треугольник Паскаля. Свойства треугольника Паскаля (свойство шестиугольника с доказательством)**

<u>*Треугольник Паскаля*</u> – бесконечная числовая таблица треугольной формы, по боковым сторонам которой стоят 1 и всякое число, кроме этих боковых единиц получается как сумма двух предшествующих:



<u>*Некоторые свойства треугольника Паскаля:*</u>

• Второе число каждой строки соответствует ее номеру.
• Третье число каждой строки равно сумме номеров строк, ей предшествующих.
• Если вычесть из центрального числа в строке с четным номером соседнее число из той же строки, то получится число Каталана.
• Сумма чисел i–той строки треугольника Паскаля равна .
• <u>*Свойство шестиугольника для треугольника Паскаля*</u>:

$$C_{n-1}^{k-1}C_{n}^{k+1}C_{n+1}^{k} = C_{n-1}^{k}C_{n}^{k-1}C_{n+1}^{k+1}$$

<u>Доказательство:</u>

$$C_{n-1}^{k-1}C_{n}^{k+1}C_{n+1}^{k} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!}$$

$$C_{n-1}^{k}C_{n}^{k-1}C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} \square$$

7. **Разбиение множества.**
Числа Стирлинга II рода. Формула для вычисления чисел Стирлинга II рода через предыдущие (с доказательством). Формула вычисления чисел Стирлинга II рода через сумму произведения сочетаний и предыдущих чисел Стирлинга II рода (с доказательством).

Под разбиением n-элементного множества A на k блоков будем понимать семейство подмножеств $\pi = \{B1, B2, \dots, Bk\}$ множества A, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k = A$;
2. $B_i \cap B_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq k$;
3. $B_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq k$.

Множество разбиений множества A на k блоков будем обозначать $\Pi k(A)$. Множество разбиений множества A на произвольное число блоков будем обозначать $\Pi(A)$.

<u>Число Стирлинга II рода</u> S(n,k) - есть число разбиений n-элементного множества на k блоков: $S(n,k) = |\Pi_k(A)|$, где $|A| = n$.

Пример:

Число $S(4,2) = 7$, так как множество a, b, c, d можно разбить на 2 блока 7-ю различными способами:

$\{\{a\},\{b, c, d\}\}$, $\{\{b\},\{a, c, d\}\}$, $\{\{c\},\{a, b, d\}\}$, $\{\{d\},\{a, b, c\}\}$, $\{\{a, b\}, c, d\}$, $\{\{a, c\}, b, d\}$, $\{\{a, d\}, b,$ c$\}$.

Теорема:

Числа Стирлинга II рода можно вычислять рекуррентно по формуле:

S(n, k) = S(n-1, k-1)+kS(n-1, k), 0<k<n,

с начальными условиями:

S(n, n) = 1, n>=0

S(n, 0) = 0, n>0

S(n, k) = 0, n<k.

Доказательство:

Начальные условия следуют из определения чисел Стирлинга II рода. Докажем рекуррентное соотношение.

Пусть множество A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ состоит из n>1 элементов, $\Pi_k(A)$ – множество всех разбиений множества A на k блоков. Будем считать, что элемент a_n входит в последний блок разбиения B_k, т.е. $a_n \in B_k$. Разделим множество разбиений $\Pi_k(A)$ на два класса: П'k(A), в который входят такие разбиения, в которых $|B_k| = 1$, и П''k(A), содержащий разбиения, в которых $|B_k|>1$. Мощность первого класса равна числу разбиений оставшихся элементов (кроме a_n) на k-1 блоков (не считая блок B_k), т.е. S(n-1, k-1). Все разбиения второго класса П''k(A) можно получить из разбиения множества $A\backslash\{a_n\}$ на k блоков, добавляя элемент a_n в любой из k блоков. Таким образом, мощность второго класса = kS(n-1, k).

Тогда число разбиений множества A

S(n, k) = |П'k(A)| + |П''k(A)| = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), ч.т.д.

Таблица начальных значений чисел Стирлинга 2-го рода.

k / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Теорема 3.2. $S(n,k)=\sum_{i=k-1}^{n-1} C_n^k S(i,k-1), \quad k\geq 2.$

Доказательство.

Рассмотрим множество всех разбиений множества *A={1,...,n}*. Это множество распадается на различные классы, соответствующие разным подмножествам множества *A*, которые являются блоками, содержащими элемент *n*. Для каждого *b*-элементного подмножества $B\subseteq A$, содержащего элемент *n*, существует в точности *S(n-b,k-1)* разбиений множества *A* на *k* блоков, содержащих *B* в качестве блока. Действительно, каждое такое разбиение однозначно соответствует разбиению множества *A\B* на *k-1* блоков. *b*-элементное множество $B\subseteq A$, содержащее элемент n, можно выбрать C_{n-1}^{b-1} способами. Следовательно,

$$S(n,k)=\sum_{b=1}^{n-(k-1)} C_{n-1}^{b-1} S(n-b,k-1)=$$

$$=\sum_{b=1}^{n-(k-1)} C_{n-1}^{n-b} S(n-b,k-1)=\sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^{i} S(i,k-1).\ \square$$

8. Числа Белла. Рекуррентное соотношение для вычисления чисел Белла (с доказательством).

n	B_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4 140
9	21 147
10	115 975
11	678 570
12	4 213 597
13	27 644 437
14	190 899 322
15	1 382 958 545
16	10 480 142 147
17	82 864 869 804
18	682 076 806 159
19	5 832 742 205 057
20	51 724 158 235 372

Определение: **Число Белла** B_n есть число всех разбиений n-элементного множества.
$B_n = |\Pi(A)|$, где $|A| = n$, или

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

Теорема: Числа Белла можно вычислять рекуррентно по формуле

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$$

с начальным условием

$$B_0 = 1.$$

Доказательство:
Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$, $|A| = n + 1$, и элемент a_{n+1} принадлежит блоку B. Тогда множество всех разбиений можно разделить на непересекающиеся подмножества $\Pi^i(A)$ такие, что $|B| = i$. Сформировать блок B можно C_n^{i-1} способами, $i = 1,2, \dots, n$, и для каждого такого блока B разбить оставшиеся $n - i + 1$ элементов на произвольное количество блоков можно B_{n-i+1} способами. Тогда

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} C_n^{i-1} B_{n-i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} C_n^{n-i+1} B_{n-i+1} = \left[\begin{matrix}\text{замена}\\ k := n - i + 1\end{matrix}\right] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$$

что и требовалось доказать.

9. Числа Стирлинга I рода. Формула для вычисления чисел Стирлинга I рода (с доказательством).

Введем следующее обозначение многочлена:

$[x]_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$.

В частных случаях эти многочлены имеют вид

$[x]_0 = 1$,

$[x]_1 = x$,

$[x]_2 = x(x-1)$,

$[x]_3 = x(x-1)(x-2)$.

Определение. **Числа Стирлинга 1-го рода** $s(n.k)$ есть коэффициенты при последовательных степенях переменной x в многочлене $[x]_n$:

$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$.

Теорема: Числа Стирлинга 1-го рода можно вычислять рекуррентно по формуле

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k), 0 < k < n,$$

с начальными условиями

$$s(n,n) = 1, n \geq 0,$$
$$s(n,0) = 0, n > 0,$$
$$s(n,k) = 0, n < k.$$

Доказательство: Начальные условия следуют из определения чисел Стирлинга 1-го рода. Докажем рекуррентное соотношение.

Из определения многочленов $[x]_n$ следует соотношение

$[x]_n = (x-n+1)[x]_{n-1}, n > 0$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = (x-n+1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^k = \sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^{k+1} -$$

$$-(n-1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^k = \sum_{k=2}^{n} s(n-1,k-1)x^k - (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)x^k - s(n-1,0)x^1 - (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} s(n-1,k)x^k - s(n-1,n)x^n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k))x^k$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x, получим

$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)$, ч.т.д.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0
5	0	24	-50	35	-10	1

10. Беззнаковые числа Стирлинга I рода. Формула для вычисления беззнаковых чисел Стирлинга I рода (с доказательством).

Определение 16. **Беззнаковое число Стирлинга первого рода** $|s(n,k)|$ есть число k циклов из -элементного множества.

\# 9. Рассмотрим множество $\{A, B, C, D\}$. Равные циклы из элементов этого множества $[A, B, C, D] = [B, C, D, A] = [C, D, A, B] = [D, A, B, C]$. Неравные циклы: $[A, B, C, D] \neq [B, C, A, D]$

\# 10. Представление множества $[A, B, C, D, E, F]$ в виде цикла (рис. 4.1).

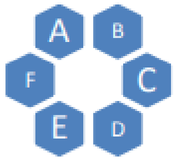


Рис. 4.1. Графическое представление множества в виде цикла

Свойства беззнакового числа Стирлинга первого рода:

1. $|s(0,0)| = 1$
2. $|s(n,k)| = 0,\ k > n$
3. $|s(n,k)| = 1,\ n \geq 0$
4. $|s(n,0)| = 0,\ n > 0$
5. $|s(n,1)| = (n-1)!,\ n \geq 0$

Теорема 4.5. Рекуррентная формула для вычислений беззнаковых чисел Стирлинга первого рода

$$s(n,k) = |s(n-1,k-1)| + (n-1)|s(n-1,k)|, \text{ для } 0 < k < n, \quad (4.4)$$

Доказательство: см. теорему 4.4. Беззнаковые числа Стирлинга первого рода представлены в табл. 4.4.

Табл. 4.4. Беззнаковые числа Стирлинга первого рода

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0
4	0	6	11	6	1	0
5	0	24	50	35	10	1

Определение 17. С другой стороны, беззнаковое число Стирлинга первого рода $|s(n,k)|$ есть коэффициенты в разложении:

$$(x)^{(n)} = x(x+1)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| x^k$$

11. Формула включений и исключений (с доказательством).

Формула (или принцип) включений и исключений — комбинаторная формула, позволяющая определить мощность объединения конечного числа конечных множеств, которые в общем случае могут пересекаться друг с другом. Обозначим через |N| мощность множества N, из этого сразу следует, что:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

Графическое представление формулы включений и исключений

Формула включения исключения может быть представлена в следующей форме. Пусть $A1, A2, \dots, An$ -конечные множества, тогда

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \cdots$$

$$\dots + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Теорема. Пусть имеется N элементов и n свойств $p_1, p_2, \dots, p_n$. Обозначим

$N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ – число элементов, обладающих, по крайней мере, свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$,

$N(\overline{p_{i_1}}, \overline{p_{i_2}}, \dots, \overline{p_{i_k}})$ – число элементов, **не обладающих** свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$,

$N(k)$ – число элементов, обладающих ровно k свойствами (любыми).

Тогда число $N(0) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_n})$элементов, не обладающих не одним из свойств вычисляется по формуле

$$N(0) = N + \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s})$$
$$= N - \sum_{1 \le i \le n} N(p_i) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3})$$
$$+ \dots + (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}) + (-1)^n N(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Доказательство. (индукция по числу свойств)

При n=1 свойств формула верна, т.к.

$$N(0) = N(\overline{p_1}) = N - N(p_1).$$

Допустим, формула верна для некоторого m свойств, т.е

$$N(0) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}) = N + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}).$$

Тогда $N(0)$ при $m+1$ свойствах

$N(0) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, \overline{p_{m+1}}) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}) - N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, p_{m+1}).$

Выражение для $N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m})$ следует из предположения индукции. А $N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, p_{m+1})$ можно вычислить, применяя формулу из предположения для m свойств к множеству элементов $N(p_{m+1})$, обладающих свойством p_{m+1}:

$$N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, p_{m+1}) = N(p_{m+1}) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}, p_{m+1})$$

Тогда

$$N(0) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, \overline{p_{m+1}}) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}) - N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, p_{m+1}) =$$

$$N + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s})$$

$$- \left(N(p_{m+1}) + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}, p_{m+1}) \right) =$$

$$N - \sum_{1 \le i \le m} N(p_i) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}) + \cdots$$

$$+ (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}) + (-1)^m N(p_1, p_2, \dots, p_m) - N(p_{m+1}) +$$

$$+ \sum_{1 \le i \le m} N(p_i, p_{m+1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{m+1}) + \cdots + (-1)^{m+1} N(p_1, p_2, \dots, p_{m+1})$$

$$= N + \sum_{s=1}^{m+1} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m+1} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}).$$

12. Решение задачи о беспорядках.

Определить количество перестановок $a_1, \dots, a_n$ чисел $1, \dots, n$, таких, что $a_i \neq i, i = \overline{1,n}$

Решение. Число всех перестановок $N = n!$.
Свойство p_i: $a_i = i$, $i = 1, n$.

$N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ -число перестановок, оставляющих на месте по крайней мере числа $i_1, \dots, i_k$, следовательно $N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}) = (n-k)!$
В сумме $\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ - C_n^k слагаемых, тогда по формуле включений и исключений

$$N(0) = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} (n-k)! = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)! =$$

$$n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!\,(n-k)!}{k!\,(n-k)!} = n! - n! + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ответ: $n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

13. Формула для вычисления числа предметов, обладающих ровно n свойствами (с доказательством + доказательство леммы).

Лемма 6.1 (вспомогательная)

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r} C_n^k C_k^r = 0, \forall n,r \in N, n \geq r. \qquad (6.2)$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \qquad (6.3)$$

Дифференцируя (6.3) r раз по x, получим

$$n(n-1)...(n-r+1)(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} C_n^k k(k-1)...(k-r+1)x^{k-r}.$$

Последнее равенство преобразуется к виду

$$\frac{n!}{(n-r)!}(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} C_n^k \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r}.$$

Разделив обе части на $r!$, приходим к соотношению

$C_n^r (1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} C_n^k C_k^r x^{k-r}$, которое при $x=-1$ дает

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r} C_n^k C_k^r = 0.$$

Лемма 6.2. Пусть дано N элементов и n свойств $s_1, \ldots, s_n$. Пусть $N_{i_1 \ldots i_r}$ - число элементов, обладающих по крайней мере свойствами $i_1, \ldots, i_r$, $r = \overline{1,n}$. Тогда **число элементов** $N(r)$**, обладающих ровно** r **свойствами** определяется формулой

$$N(r) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} N_{i_1 \ldots i_r} + \cdots + (-1)^{s-r} C_s^r \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n} N_{i_1 \ldots i_s} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-r} C_n^r N_{12 \ldots n} = \sum_{s=r}^{n} (-1)^{n-s} C_s^r \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n} N_{i_1 \ldots i_s}. \qquad (6.4)$$

Доказательство. В левой части (6.4) элемент с ровно r свойствами учитывается один раз. В правой части (6.4) элемент с ровно r свойствами учитывается один раз в первом слагаемом и не учитывается далее. Элемент с ровно t свойствами, $t>r$, учитывается $(-1)^{s-r} C_s^r C_t^s$ раз в слагаемом $(-1)^{s-r} C_s^r \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n} N_{i_1 \ldots i_s}$.

Поэтому вклад от элементов с ровно t свойствами, $t>r$, составляет $\sum_{s=r}^{t}(-1)^{s-r} C_s^r C_t^s$. В силу леммы 6.1 эта сумма равна нулю.

14. Формула для вычисления числа предметов, обладающих не менее, чем k свойствами (с доказательством).

__**Теорема.**__ При $k > 0$

$$\widetilde{N}(k) = \sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} C_{s-1}^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}).$$

__**Доказательство**__:

$$\widetilde{N}(k) = \sum_{m=k}^{n} N(m) =$$

$$= \sum_{m=k}^{n} \sum_{s=m}^{n} (-1)^{s-m} C_s^m \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) =$$

$$= \sum_{s=k}^{n} \sum_{m=k}^{s} (-1)^{s-m} C_s^m \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) =$$

$$= \sum_{s=k}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) \sum_{m=k}^{s} (-1)^{s-m} C_s^m =$$

Рассмотрим теперь только последнюю сумму

$$\sum_{m=k}^{s} (-1)^{s-m} C_s^m = \left| \begin{array}{c} \text{распишем} \\ \text{в обратном} \\ \text{порядке} \end{array} \right| = C_s^s - C_s^{s-1} + C_s^{s-2} - C_s^{s-3} + \cdots$$

$$+(-1)^{s-k} C_s^k = C_{s-1}^{s-1} - C_s^{s-1} + C_s^{s-2} - C_s^{s-3} + \cdots + (-1)^{s-k} C_s^k =$$

$$= -C_{s-1}^{s-2} + C_s^{s-2} - C_s^{s-3} + \cdots + (-1)^{s-k} C_s^k = C_{s-1}^{s-3} - C_s^{s-3} + \cdots$$

$$+(-1)^{s-k} C_s^k = \cdots = (-1)^{s-k-1} C_{s-1}^k + (-1)^{s-k} C_s^k = (-1)^{s-k} C_{s-1}^{k-1}.$$

Подставляя данное выражение в исходную сумму, получим

$$\sum_{s=k}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) (-1)^{s-m} C_{s-1}^{k-1} =$$

$$\sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-m} C_{s-1}^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) \text{. ч. т. д.}$$

15. Решение задачи о встречах.

Определить количество перестановок $a_1, \dots, a_n$ чисел $1, \dots, n$, для которых $a_i = i$ ровно в k местах.

__Решение__. Число всех перестановок $N=n!$. Пусть свойство p_i: $a_i=i$..
$N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s})$ -число перестановок, оставляющих на месте по крайней мере числа $i_1, \dots, i_s$, следовательно $N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}\right) = (n-s)!$
В сумме $\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le n} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}\right)$ - C_n^s слагаемых, тогда по формуле включений и исключений

$$N(k) = \sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} C_s^k \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le n} (n-s)! = \sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} C_s^k C_n^s (n-s)! =$$

$$\sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} \frac{s!\, n!\, (n-s)!}{k!\, (s-k)!\, s!\, (n-s)!} = \frac{n!}{k!} \sum_{s=k}^{n} \frac{(-1)^{s-k}}{(s-k)!} = \frac{n!}{k!} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{(-1)^s}{s!}$$

16. Полиномиальная теорема (с доказательством).

<u>**Теорема**</u>. Для любых $a_1, a_2, \dots, a_k$ и натуральных n верна формула

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots n_k \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \dots {a_k}^{n_k}$$

<u>**Доказательство:**</u> (индукция по числу слагаемых)

1. $k = 2$ формула сводится к биному Ньютона - верно
2. Допустим, что для некоторого m формула верна, т.е.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots n_m \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_m = n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \dots {a_m}^{n_m}$$

(индукция по числу слагаемых)

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_{m+1})^n = \big((a_1 + a_2 + \dots + a_m) + a_{m+1}\big)^n =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} C_n^l (a_1 + a_2 + \dots + a_m)^l {a_{m+1}}^{n-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} C_n^l \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots n_m \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_m = l}} \frac{l!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \dots {a_m}^{n_m} {a_{m+1}}^{n-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!\,(n-l)!} \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots n_m \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_m = l}} \frac{l!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \dots {a_m}^{n_m} {a_{m+1}}^{n-l} =$$

$$= \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots n_m, n_{m+1} \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_m + n_{m+1} = n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \dots {a_m}^{n_m} {a_{m+1}}^{n_{m+1}}$$

Ч.т.д.

17. Формальный степенной ряд (ФСР). Определение производящей функции (ПФ). Свойства ПФ и ФСР: сложение, умножение, дифференцирование, интегрирование.

Очень часто работать с последовательностями достаточно сложно. Для облегчения работы с числовой последовательностью можно поставить в соответствие некоторую функцию таким образом, чтобы обычные операции над последовательностями соответствовали бы простым операциям над соответствующими функциями.
Наиболее частым в комбинаторике является сопоставление последовательности ее производящей функции.

Пусть $\{a_0, a_1, a_2, \dots , a_n, \dots\}$ - произвольная (бесконечная) последовательность чисел. *Производящей функцией, ФСР (формальным степенным рядом),* обозначается $f_a(s)$, для этой последовательности будем называть выражение вида или в сокращенной записи: $f_a(s) = \sum^{oo}_{n=0} a_n s^n$.

Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция называется производящим многочленом.

Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Мы будем рассматривать последовательности натуральных, рациональных, вещественных и комплексных чисел.
Производящую функцию, как и обычную функцию, мы будем часто обозначать одной буквой, указывая в скобках ее аргумент, и в качестве индекса указывать букву обозначения последовательности: $f_a(s) = \sum^{oo}_{n=0} a_n s^n = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots + a_n s^n + \dots$.

Употребляя слово «функция», мы вовсе не имеем в виду, что написанное выражение действительно является функцией. Так, не следует думать, будто мы можем сказать, чему равно «значение $f_a(s_0)$ производящей функции в точке s_0».
Переменная s является формальной, и сумма ряда $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots + a_n s^n + \dots$ смысла не имеет.
Однако верно утверждение $f_a(0)=0$, т.е. мы знаем значение производящей функции в нуле.
Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином «производящая функция» мы будем также пользоваться термином «формальный степенной ряд».

В комбинаторном анализе чаще всего используют следующие три вида производящих функций.

I. $\{a_n\} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - степенная производящая функция.

II. $\{a_n\} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}$ - экспоненциальная производящая функция.

III. $\{a_n\} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ - функция Дирихле.

Свойство 1. (сумма и разность). Пусть a_k, b_k, c_k – последовательности, причем $c_k = \alpha a_k \pm \beta b_k$; f_a(z), f_b(z), f_c (z) – соответствующие им ПФ. Тогда

$$f_c(z) = \alpha f_a(z) \pm \beta f_b(z).$$

Доказательство:

$$f_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} \beta b_n z^n =$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \alpha f_a(z) \pm \beta f_b(z).$$

Свойство 2. (произведение). Пусть a_k, b_k, c_k – последовательности, причем $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$; (свертка), f_a(z), f_b(z), f_c (z) – соответствующие им ПФ. Тогда

$$f_c(z) = f_a(z) f_b(z).$$

Доказательство свойства 2.

$$f_c(z) = f_a(z) f_b(z) =$$

$$= (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots) =$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots +$$

$$+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_i b_{n-i} + \cdots + a_n b_0) z^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{n} a_i b_{k-i}$$

Свойство 3. (производная ПФ) Пусть a_k, b_k– последовательности, причем $b_k = (k+1) a_{k+1}$, $k \geq 0$; f_a(z), f_b(z) – соответствующие им ПФ, тогда $f_b(z) = \left(f_a(z)\right)'$

Доказательство:

$$f_a'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

Свойство 4. (интеграл ПФ) Пусть a_k, b_k– последовательности, причем $b_k = \frac{a_{k-1}}{k}$, $k > 0$; f_a(z), f_b(z) – соответствующие им ПФ, тогда $f_b(z) = \int f_a(z)\, dz$.

Доказательство:

$$\int f_a(z) dz = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$$

Замечание 1: Операция дифференцирования обратна операции интегрирования:

$$\left(\int f(z)\right)' = f(z)$$

Замечание 2: Операция же интегрирования производной приводит к функции с нулевым свободным членом, и поэтому результат, вообще говоря, отличается от исходной функции.

$$\int f'(z) dz = f(z) - a_0$$

Свойство 3. Пусть $f_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_i t^i + \dots$ и $f_b(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_i t^i + \dots$ две производящие функции, причем $f_b(0) = 0$. **Подстановкой производящей функции** f_b в функцию f_a называется производящая функция вида

$$f_a(f_b(t)) = a_0 + a_1 b_1 t + (a_1 b_2 + a_2 b_1) t^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 {b_1}^3) t^3 + \cdots$$

Если, например, $f_b(t) = -t$, то $f_a(f_b(t)) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3$.

18. Задача о взвешивании.

Метод производящих функций – математический прием, позволяющий сводить задачи из теории чисел, теории вероятностей и комбинаторики к задачам из анализа. Рассмотрим на примере задачи о взвешивании.

Какие грузы можно взвесить гирями $1, 2, 4, 8, \dots, 2^n$ *грамм и сколькими способами?*

Решение. Эйлер рассматривал произведение:

$$\alpha(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots(1+z^{2^n})$$

$$\alpha(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_m z^m$$

A_k - коэффициент при z^k, получается как произведение z в некоторой степени, т.е. A_k - это в точности число разных представлений числа k в виде суммы некоторых чисел 1, 2, 4, 8, …, 2^n.

Рассмотрим произведения:

$$\left.\begin{array}{cccc} (1-z) & (1+z) & = & (1-z^2) \\ (1-z^2) & (1+z^2) & = & (1-z^4) \\ (1-z^4) & (1+z^4) & = & (1-z^8) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}\right\}$$

Домножим $\alpha(z)$ на $(1-z)$:

$$(1-z)\alpha(z) = (1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots(1+z^{2^n}) =$$
$$(1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots(1+z^{2^n}) =$$
$$(1-z^4)(1+z^4)(1+z^8)\dots(1+z^{2^n}) = \dots = 1 - z^{2^{n+1}}$$

Таким образом,

$$\alpha(z) = \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1-z},$$

что можно интерпретировать как сумму геометрической прогрессии со знаменателем z и единичным нулевым элементом, т.е.

$$\alpha(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2^{n+1}-1}.$$

Ответ: только одним способом можно взвесить груз весом k грамм гирями $1, 2, 4, 8, \dots 2^n$ грамм, при $k \le 2^{n+1} - 1$.

19. Извлечение квадратного корня с помощью ПФ. ????????

(я не нашла ничего в лекциях по этому вопросу (может и плохо искала) но хотя бы нашла пример в гугле)

Извлечение квадратного корня (ещё один частный случай)
Гипотеза (пока без доказательства):

$$(1+x)^{1/2}=\sum_{i=1} C_{1/2}^i x^i=\sum_i \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-i+1\right)}{i!}x^i=\sum_i \frac{(-1)^{i-1}1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2i-3)}{2^i i!}x^i=$$

$$=\sum_i \frac{(-1)^{i-1}1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2i-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2i}x^i=\sum_i \frac{(-1)^{i-1}(2i-2)!}{i\left((i-1)!\right)^2\cdot 2^{2i-1}}x^i=\sum_i \frac{(-1)^{i-1}}{i\cdot 2^{2i-1}}C_{2i-2}^{i-1}x^i$$

Найти: $\sqrt{30}$.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k y^{n-k}$$

Замена $\left\{n=\frac{1}{2}, y=1\right\}$ приводит к

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k x^k$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{n!}{(n-1)!1!}x+\frac{n!}{(n-2)!2!}x^2+\ldots+\frac{n!}{(n-k)!k!}x^k$$

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k\right)}{k!}x^k+\ldots$$

$$\sqrt{30}=\sqrt{25+5}=5\sqrt{1+\frac{1}{5}}$$

<u>Ответ:</u> $\sqrt{30}=5\left(1+\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\ldots\right)=5,2\ldots$

20. Нахождение табличных ПФ.

	ПФ	Последовательность
1	$(1+s)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\alpha} C_{\alpha}^{k} s^{k}$	$\{C_{\alpha}^{0}, C_{\alpha}^{1}, C_{\alpha}^{2}, \ldots, C_{\alpha}^{\alpha}, 0, \ldots\}$
2.	$\frac{1}{1-s}=\sum_{k=0}^{\infty} s^{k}$	$\{1,1,1,\ldots\}$
3.	$\frac{1}{(1-s)^{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1) s^{k}$	$\{1,2,3,4,\ldots\}$
4.	$\frac{1}{(1-s)^{r}}=\sum_{k=0}^{\infty} C_{r+k-1}^{k} s^{k}$	$\{1, C_{r}^{1}, C_{r+1}^{2}, C_{r+2}^{3}, \ldots\}$
5.	$\ln\left(\frac{1}{1-s}\right)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{k} s^{k},\ a_{k}=\begin{cases}0, k=0 \\ \frac{1}{k}, k \geq 1\end{cases}$	$\left\{0,1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$
6.	$\ln(1+s)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{k} s^{k},\ a_{k}=\begin{cases}0,\ k=0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{k}, k \geq 1\end{cases}$	$\left\{0,1, \frac{(-1)}{2}, \frac{1}{3}, \frac{(-1)}{4}, \ldots\right\}$
7.	$e^{s}=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^{k}$	$\left\{1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots\right\}$
8.	$\sin(x)=x-\frac{1}{3!} x^{3}+\frac{1}{5!} x^{5}-\frac{1}{7!} x^{7}+\ldots$	$\left\{0,1,0, \frac{(-1)}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, \ldots\right\}$
9.	$\cos(x)=1-\frac{1}{2!} x^{2}+\frac{1}{4!} x^{4}-\frac{1}{6!} x^{6}+\ldots$	$\left\{1,0, \frac{(-1)}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, \ldots\right\}$

1) Для доказательства используем обобщенный бином Ньютона для действительных степеней

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{k\geq 0} C_{\alpha}^{k} z^{k}\text{, где } C_{\alpha}^{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Следовательно, $(1+z)^{\alpha} \leftrightarrow \{C_{\alpha}^{k}\}, k\geq 0$.

2) При $0<z<1$ последовательность $1, z, z^2, \dots z^n, \dots$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, а ее сумма

$$1+z+z^2+\dots+z^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}.$$

Следовательно, $\frac{1}{1-z} \leftrightarrow \{1,1,\dots,1,\dots\}$.

3) Заметим, что $\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}$, тогда

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$$

Следовательно, $\frac{1}{(1-z)^2} \leftrightarrow \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$.

4) Заметим, что $\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(r-1)}=\frac{(r-1)!}{(1-z)^r}$, тогда

$$\frac{1}{(1-z)^r}=\frac{1}{(r-1)!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^{(r-1)}=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-r+2)z^{n-r+1}=$$

$$=\sum_{n=r-1}^{\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}z^{n-r+1}=\sum_{n=r-1}^{\infty}\frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!}z^{n-r+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{n} z^n$$

Следовательно, $\frac{1}{(1-z)^r} \leftrightarrow \{C_{n+r-1}^{n}\}, n\geq 0$.

5) Заметим, что $\int\frac{1}{1-z}dz=ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$, тогда

$$ln\left(\frac{1}{1-z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n.$$

Следовательно, $ln\left(\frac{1}{1-z}\right) \leftrightarrow \left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$.

6) Заметим, что $ln(1-z)=-ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$, тогда подставляя $-z$ вместо z

$$ln(1+z)=-ln\left(\frac{1}{1-(-z)}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-z)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$$

Следовательно, $ln(1+z) \leftrightarrow \left\{0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{(-1)^{n+1}}{n},\dots\right\}$

7) Используем формулу Маклорена представления дифференцируемой функции в окрестности нуля: $F(x)=F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$(e^z)^{(n)}=e^z,$$

$$e^z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

Следовательно, $e^z \leftrightarrow \left\{1,1,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\dots,\frac{1}{n!},\dots\right\}$.

8) Используем формулу Маклорена представления дифференцируемой функции в окрестности нуля: $F(x)=F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$(sinz)'=cosz,$$
$$(sinz)''=-sinz$$
$$(sinz)^{(3)}=-cosz$$
$$(sinz)^{(4)}=sinz$$

$$sinz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

Следовательно, sinz $\leftrightarrow \left\{0,1,0,-\frac{1}{3!},0,\frac{1}{5!},\dots,\frac{(-1)^n}{(2n+1)!},\dots\right\}$.

21. Решение однородных линейных рекуррентных соотношений. Теорема об общем виде решения рекуррентного соотношения порядка k (с доказательством).

Рассмотрим последовательность $\{an\}$, $n \geq 0$; будем говорить, что задано однородное линейное рекуррентное соотношение (ОЛРС) с постоянными коэффициентами порядка k, если для всех $n \geq 0$ выполняется равенство
$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n$. где c - постоянные величины.
Данное выражение позволяет вычислить очередной член последовательности по предыдущим k членам.
Ясно, что, задав начальные значения $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ можно последовательно определить все члены последовательности.
Мы рассмотрим общий метод решения ОЛРС (т.е. поиска $\{a_n\}$ как функции от n).
Используем метод производящих функций.

Общий метод решения ОЛРС:
Для решения задачи достаточно найти производящую функцию

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Введем обозначение $K(z) = 1 - c_1 z - c_2 z^2 - \ldots - c_k z^k$, и рассмотрим их произведение $C(z) = A(z)K(z)$.

$$C(z) = \left(1 - c_1 z - c_2 z^2 - \cdots - c_k z^k\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n =$$

$$\left(1 - c_1 z - c_2 z^2 - \cdots - c_k z^k\right)\left(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots\right) =$$

$$a_0 + (a_1 - c_1 a_0)z + (a_2 - c_1 a_1 - c_2 a_0)z^2 + \cdots + (a_{k-1} - c_1 a_{k-2} - \cdots - c_{k-1} a_0)z^{k-1}$$
$$+ (a_k - c_1 a_{k-1} - \cdots - c_k a_0)z^k + (a_{k+1} - c_1 a_k - \cdots - c_k a_1)z^{k+1} + \cdots$$
$$+(a_{n+k} - c_1 a_{n+k-1} - \cdots - c_k a_n)z^{n+k} + \cdots$$

Таким образом, все коэффициенты z^m при $m \geq k$ равны нулю. Значит, $C(z)$ - многочлен степени не более $k - 1$.
Тогда дробь $A(z) = C(z)/K(z)$ является правильной алгебраической дробью.
Рассмотрим характеристический многочлен $F(z) = z^k - c_1 z^{k-1} - c_2 z^{k-2} - \ldots - c_k$.
В поле комплексных чисел F(z) можно разложить на множители следующим образом:
$F(z) = (z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \ldots (z - \alpha_r)^{k_r}$, k_i - кратность корня α_i, $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = k$.
Заметим, что

$$z^k F\left(\frac{1}{z}\right) = z^k\left(\frac{1}{z^k} - c_1 \frac{1}{z^{k-1}} - c_2 \frac{1}{z^{k-2}} - \cdots - c_k\right) = 1 - c_1 z - c_2 z^2 - \cdots - c_k z^k$$
$$= K(z).$$

Тогда разложение на множители $K(z)$ имеет вид

$$K(z) = z^k \left(\frac{1}{z} - \alpha_1\right)^{k_1} \left(\frac{1}{z} - \alpha_2\right)^{k_2} \ldots \left(\frac{1}{z} - \alpha_r\right)^{k_r} =$$
$$= (1 - \alpha_1 z)^{k_1}(1 - \alpha_2 z)^{k_2} \ldots (1 - \alpha_r z)^{k_r}.$$

Таким образом ПФ последовательности $\{a_n\}, n \geq 0$ имеет вид

$$A(z) = \frac{C(z)}{K(z)} = \frac{C(z)}{(1-\alpha_1 z)^{k_1}(1-\alpha_2 z)^{k_2} \dots (1-\alpha_r z)^{k_r}}$$

Правильная алгебраическая дробь имеет единственное разложение в сумму простейших алгебраических дробей, т.е.

$$A(z) = \frac{\beta_{11}}{(1-\alpha_1 z)} + \frac{\beta_{12}}{(1-\alpha_1 z)^2} + \dots + \frac{\beta_{1k_1}}{(1-\alpha_1 z)^{k_1}} + \frac{\beta_{21}}{(1-\alpha_2 z)} + \frac{\beta_{22}}{(1-\alpha_2 z)^2} + \dots + \frac{\beta_{2k_2}}{(1-\alpha_2 z)^{k_2}} \dots + \frac{\beta_{r1}}{(1-\alpha_r z)} + \frac{\beta_{r2}}{(1-\alpha_r z)^2} + \dots + \frac{\beta_{rk_r}}{(1-\alpha_r z)^{k_r}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\beta_{ij}}{(1-\alpha_i z)^j} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{ij} C_{n+j-1}^{n} (\alpha_i z)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i{}^n \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} C_{n+j-1}^{n} \right).$$

Следовательно,

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i{}^n \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} C_{n+j-1}^{n}.$$

Тогда общее решение ОЛРС

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i{}^n P_i(n),$$

где $P_i(n)$ – многочлен степени $k_i - 1$.

На практике вычисление коэффициентов многочленов $P_i(n)$ выполняют методом вариации постоянных, используя начальных значения последовательности $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$.

22. Решение неоднородных линейных рекуррентных соотношений методом производящих функций (в качестве объяснения найти решение НЛРС, разобранного на лекции).

23. Числа Фибоначчи. Рекуррентная формула для чисел Фибоначчи. Вычисление явной формулы для чисел Фибоначчи.

<u>Определение.</u> Числа Фибоначчи - числовая последовательность, которая определяется начальными членами $F_0 = F_1 = 1$, и рекуррентным соотношением

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

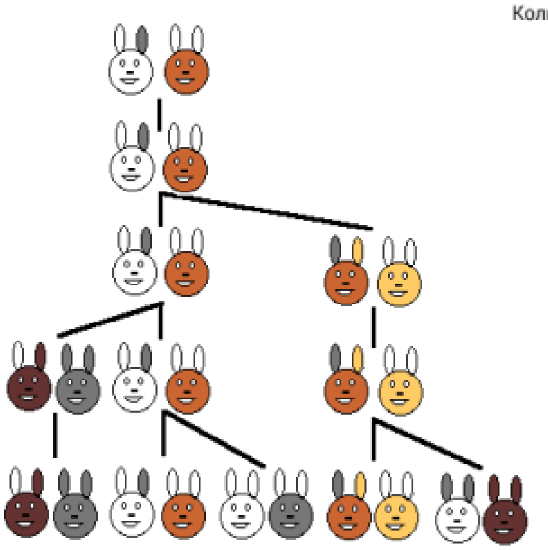
<u>Последовательность Фибоначчи</u>

Эта последовательность была исследована Леонардо Пизанским, известным как Фибоначчи, в труде «Книга абака» (1202). Он рассматривает развитие идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов, предполагая, что:

-в «нулевом» месяце имеется пара кроликов (одна новая пара);

-в первом месяце первая пара производит на свет другую пару (одна новая пара);

-во втором месяце обе пары кроликов порождают другие пары и первая пара погибает (две новые пары)
- в третьем месяце вторая пара и две новые пары порождают в общем три новые пары, а старая вторая пара погибает (три новые пары)



Из приведенных выше высказываний становится ясно, что Фибоначчи вывел особый ряд чисел. Закономерным является тот факт, что каждая пара кроликов порождает еще две пары на протяжении жизни, а затем погибает.
Примечательно, что первые два члена этой последовательности равны 1, следующие же члены равны сумме двух предыдущих.
Знаменитая последовательность Фибоначчи определяется своими начальными членами ($f_0 = f_1 = 1$) и соотношением $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
Из этого соотношения легко получить начало последовательности Фибоначчи
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …
в которой каждый член, начиная с f_2, равен сумме двух предыдущих.
Чтобы вывести *формулу производящей функции* запишем определение ПФ для чисел Фибоначчи:
$Fib(s) = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots$.

Далее умножим обе части равенства (12.2) на $s+s^2$. Получим

$$(s+s^2)Fib(s) = s + s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 5s^5 + \dots +$$
$$+ s^2 + s^3 + 2s^4 + 3s^5 + \dots =$$
$$= s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + 8s^5 + \dots$$

или $(s+s^2)Fib(s) = Fib(s) - 1$,
откуда

$$Fib(s) = \frac{1}{1-s-s^2}. \qquad (12.3)$$

Полученную формулу можно понимать как композицию двух производящих функций $(1-s)^{-1}$ $s+s^2$, т.е.

$$Fib(s) = 1 + (s+s^2) + (s+s^2)^2 + (s+s^2)^3 + \dots$$

Такое разложение, однако, не очень удобно, так как в его членах перемешаны различные степени переменных и оно не дает явной формулы для коэффициентов.
Полезнее представить дробь в виде суммы двух элементарных дробей:

$$\frac{1}{1-s-s^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-s_2}-\frac{1}{s-s_1}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s_1\left(1-\frac{s}{s_1}\right)}-\frac{1}{s_2\left(1-\frac{s}{s_2}\right)}\right),$$

где $s_1=\left(-1+\sqrt{5}\right)/2,\ s_2=\left(-1-\sqrt{5}\right)/2$ - корни уравнения $1-s-s^2=0$. Из последнего разложения немедленно получаем

$$Fib(s)=\frac{1}{\sqrt{5}s_1}\left(1+\frac{s}{s_1}+\frac{s^2}{s_1^2}+\ldots\right)-\frac{1}{\sqrt{5}s_2}\left(1+\frac{s}{s_2}+\frac{s^2}{s_2^2}+\ldots\right).$$

Поэтому

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(s_1^{-1-n}-s_2^{-1-n}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(s_1^{n+1}-s_2^{n+1}\right)=$$
$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \tag{12.4}$$

<u>Ответ</u>: явная формула для вычисления числа Фибоначчи имеет вид

$$f_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{5s_1}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

24. Числа Каталана. Рекуррентная формула чисел Каталана. Нахождение ПФ, явной формулы и упрощенного рекуррентного соотношения для чисел Каталана.

Числа Каталана — числовая последовательность, встречающаяся в удивительном числе комбинаторных задач. Ниже дано одно из возможных определений этих чисел.

Числом Каталана C_n называется количество правильных скобочных последовательностей длины 2n, т. е. таких последовательностей скобок, в которых количество открывающих скобок равно количеству закрывающих, и в любом ее префиксе открывающих скобок не меньше, чем закрывающих.
Например, для n=3 существует 5 таких последовательностей, т.е. $C_3 = 5$:
((( ))), ( )(( )), ( )( )( ), (( ))( ), (( )( )).
Эта последовательность названа в честь бельгийского математика Каталана, жившего в 19 веке, хотя на самом деле она была известна ещё Эйлеру, жившему за век до Каталана.
Первые несколько чисел Каталана: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, …

<u>Рекуррентное соотношение чисел Каталана</u>
Заметим, что между парой из открывающей и закрывающей скобок можно расположить правильную последовательность из $2k$ скобок, $0 \le k \le n-1$. Тогда получим такое расположение скобок:

$$\overbrace{\underset{2k}{((\ldots))}\quad \underset{2(n-k-1)}{(\ldots)}}$$

Чтобы вычислить число способов правильно расположить последовательность из 2n скобок необходимо вычислить количество всех возможных вариантов расположить 2k скобок между данной парой из открывающей и закрывающей скобок и оставшихся $2(n-k-1)$ скобок вне данной пары. Просуммировав по всем возможным k, получим

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_iC_{n-1-i},$$

с начальным значением $C_0 = 1$

Запишем ПФ чисел Каталана по определению

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{n-1} C_iC_{n-1-i} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{n-1} C_iC_{n-1-i} =$$

$$1 + z\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} C_iC_{n-1-i} = 1 + z\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{n} C_iC_{n-i} = 1 + zC(z)C(z).$$

Таким образом, мы получили соотношение для ПФ чисел Каталана:

$$C(z) = 1 + zC(z)C(z).$$

Решая полученное соотношение относительно $C(z)$, получаем

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Так как $C(0) = C_0 = 1$, то подставляя $z = 0$ в оба эти корня, окончательно получаем

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Вывод формулы для n-ого числа Каталана:

Расспишем для начала $\sqrt{1-4z}$ в степенной ряд, используя табличные ПФ

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^{n}(-4z)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4z)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}(-4z)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!\,2^n}(-1)^n 4^n z^n =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^n z^n =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)(n-1)!}{n!\,(n-1)!}2^n z^n$$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)(n-1)!}{n!\,(n-1)!}2^n z^n =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{n!\,(n-1)!}2z^n =$$

$$= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}z^n = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}z^n$$

Теперь, подставляя выражение для $\sqrt{1-4z}$ в ПФ чисел Каталана, получим

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{1}{2z}\left(1 - (1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}z^n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}z^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}z^n.$$

Таким образом,

$$C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

Вывод упрощенной рекуррентной формулы:

Последняя формула позволяет получить упрощенное рекуррентное соотношение для эффективного алгоритма расчета чисел Каталана.

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2} C_{2n+2}^{n+1} = \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} =$$
$$= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} =$$
$$= \frac{4n+2}{(n+2)} C_n$$

Таким образом,

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n.$$

25. Генерация комбинаторных объектов: перестановки, сочетания, разбиения числа, подмножества.

Перестановки

Определение 28. Если $\delta = \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$ и $\tau = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ - перестановки, то δ лексикографически меньше τ, если и только если для некоторого $k \leq 1$ мы имеем $\delta_j = \tau_j$, для всех $j < k$ и $\delta_k < \tau_k$.

Иными словами, последовательность перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ представлена в лексикографическом порядке, если она записана в порядке возрастания получающихся чисел.

Например: лексикографическая последовательность перестановок трех элементов имеет вид:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

То есть каждая тройка больше предыдущей.

Алгоритм лексикографического порождения перестановок может быть следующим. Начиная от перестановки $(1, 2, \dots, n)$, мы переходим далее от $\Pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ и ее последующей путем просмотра Π справа налево в поисках самой правой позиции, в которой $\pi_i + \pi_{i+1}$. Найдя ее, мы теперь ищем π_j, наименьший элемент, расположенный справа от π_i и больший π_i; затем осуществляется транспозиция элементов π_i и π_j и отрезок $\pi_{i+1}, ..., \pi_n$ переворачивается.

Например, для $n=8$ и $\Pi = (2,6,5,8,7,4,3,1)$ мы имеем $\pi_i = 5$, $\pi_i = 7$, меняя их местами, получаем $(2,6,7,8,5,4,3,1)$. Переворачивая отрезок $\pi_{i+1}, ..., \pi_n$, получаем новую перестановку $(2,6,7,1,3,4,5,8)$, следующую за Π в лексикографическом порядке.

Следующий алгоритм реализует эту процедуру (в квадратных скобках даны комментарии).

Алгоритм генерации перестановок в лексикографическом порядке

```
for j=0 to n do πj←j;
i←1;
while i≠0 do
begin
      вывести Π=(π1, ..., πn);
      [Найти самое правое место, где πi<πi+1.]
      i←n-1;
      while πi>πi+1 do i←i-1;
      [Найти πj, наименьший элемент справа от πi и больший
      πi]
      j←n;
      while πi>πj do j←j-1;
      [Поменять местами πi и πj и затем перевернуть πi+1,...πn]
      πi ⇔π,j
      r ←n;
      s←i+1;
      while r>s do
      begin
            πr⇔πs;
            r ←r-1;
            s ←s+1;
      end;
end.
```

Сочетания

Пусть основным множеством является множество натуральных чисел *(1,2,…,n)*. Необходимо сгенерировать все сочетания мощности k. Рассмотрим генерацию в лексикографическом порядке. Например, сочетаний из пяти предметов по три получается следующий лексикографический порядок:
123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.

Алгоритм лексикографической генерации сочетаний может быть следующим.
Начиная с сочетания *(1,2,…,k)*, следующее сочетание находится просмотром текущего сочетания справа налево с тем, чтобы определить место самого правого элемента, который еще не достиг своего максимального значения. Этот элемент увеличивается на единицу, а всем элементам справа от него присваиваются новые наименьшие возможные значения.
Например, если $n=6$ и мы получили сочетание *(1236)*.

Алгоритм генерации сочетаний

$C_0 \leftarrow -1;$
$for\ i=1\ to\ k\ do\ C_i \leftarrow 1;$
$j \leftarrow 1;$
$while\ j \neq 0\ do$
$begin$
  $вывести\ (C_1, C_2, \ldots, C_k);$
  $j \leftarrow k;$
  $while\ C_j = n-k+j\ do\ j \leftarrow j-1;$
  $C_j \leftarrow C_j + 1;$
  $for\ i=j+1\ to\ k\ do\ C_i = C_{i-1}+1;$
$end.$

Разбиения чисел

Рассмотрим задачу генерации разбиений натурального числа n в последовательность неотрицательных целых чисел $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, так что $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$ и порядок чисел p_i не важен. Таким образом не делается различий между 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1.
Разбиения числа n на l компонентов можно генерировать в возрастающем лексикографическом порядке, начиная с $p_1 = p_2 = \cdots = p_{l-1} = 1$ и продолжая процесс следующим образом.
Для получения следующего разбиения из текущего просматриваем элементы справа налево, останавливаясь на самом правом p_i, таком, что $p_l - p_i \geq 2$.
Заменяем затем p_j на p_{i+1} для $j=i,i+1,\ldots,l-1$ и после этого заменяем p_l на $n - \sum_{j=1}^{l-1} p_j$.

Например, если n=12 и l=5, а разбиение имеет вид (11334), то 4 на 2 больше самой правой 1 и следующее разбиение будет иметь вид (12225).
Когда ни один из элементов разбиения не отличается от последнего больше, чем на 1, процедура заканчивается.

Алгоритм генерации разбиения чисел

```
l←1;
p1←n;
p0←-1;
while l≤n do
begin
    вывести (p1, ...,pl);
    i← l-1;
    while pl-pi<2 do i←i-1;
    if i≠0 then for j=l-1 to i by –1 do pj←pi+1;
    else for j=1 to l do pj←1;
    l←l+1;
    pl←n- Σ_{j=1}^{l-1} pj ;
end.
```

Подмножества множества

Порождение подмножеств множества $(a_1,...,a_n)$ эквивалентно порождению n - разрядных двоичных наборов: a_i принадлежит подмножеству, если и только если i-й разряд равен 1.

Таким образом, задача порождения всех подмножеств множества сводится к задаче порождения всех возможных двоичных последовательностей длины n.

Алгоритм генерации подмножества множеств

```
for i=0 to n do bi ←0;
while bn≠1 do
begin
    вывести (bn-1bn-2...b0);
    i←0;
    while bi=1 do
    begin
        bi ←0;
        i ← i+1;
    end;
    bi ← 1;
end.
```