Лекция 5. Квадратичные формы. Задача об экстремуме квадратичной формы на единичной сфере

Квадратичные формы

Определение. Функцию f переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют однородной функцией или формой, если всюду и при любом значении параметра k верно соотношение

$$f(kx_1, \dots, kx_n) = k^r f(x_1, \dots, x_n);$$

число r называют показателем однородности (порядком формы и т.п.).

Пример. Выражение

$$x^3 + yx^2$$

является формой 3-го порядка.

Определение. Выражение вида

$$a(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

называют *квадратичной формой* относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Пример. Выражение

$$a(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$$

является квадратичной формой.

При раскрытии суммы всегда следует помнить, что $x_i x_j = x_j x_i$. Напр., общей вид квадратичной формы относительно двух переменных таков

$$a(x) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{2}(a_{i1}x_i x_1 + a_{i2}x_i x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{21}x_2 x_1 + a_{12}x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$
$$= a_{11}x_1^2 + (a_{21} + a_{12})x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

Не ограничивая общности рассмотрения, всегда можно считать

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Определение. Матрицу, образованную коэффициентами a_{ij} квадратичной формы, называют матрицей квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

При этом всегда $a_{ij} = a_{ji}$ или, в матричных обозначениях,

$$A^T = A.$$

Матрицы, удовлетворяющие этому соотношению, называют *эрмитовыми* в честь фр. математика Шарля Эрмита (Charles Hermite; 1822 —1901).

Пример 1. Матрицей квадратичной формы

$$a(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$$

будет

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Матрицей квадратичной формы

$$a(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1 x_3$$

будет

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача. Составьте квадратичную форму, матрицей которой является

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первый способ решения.

$$a(x_1, x_2) = 0x_1^2 + 2 \cdot 2x_1x_2 + 1x_2^2.$$

Если составить из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ столбец

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$x^T Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + \cdots + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots,$$

поэтому

$$a(x_1, \dots x_n) = a(x) = x^T Ax.$$

Задача. Составьте квадратичную форму, матрицей которой является

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Второй способ решения.

$$a(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1x_2 + x_2^2.$$

Задача об экстремальных значениях квадратичной формы на сфере

Если изменение переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ ничем не ограничено, то $a(x_1, \dots x_n)$ можно сделать произвольно малой и произвольно большой. Напр., если $a_{11} \neq 0$, то

$$a(x_1, 0, \dots 0) = a_{11}x_1^2$$

принимает в нуле значение 0, а при стремлении x_1 уходит на бесконечность. Если же изменение переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ ограничено некоторой связью, то задача о минимумах и максимумах квадратичной формы становится нетривиальной.

Определение. Множество значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих уравнению

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

называют единичной сферой в n-мерном пространстве. Для краткости в дальнейшем будем обозначать это множество как S.

Замечание 1. При $n = 2$ это уравнение задает окружность на плоскости, при $n = 3$ – обычную сферу. При $n > 3$ вообразить сферу невозможно, но принято сохранять за множеством

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

название сфера.

Замечание 2. Выражение $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ является квадратичной формой, ее матрицей служит единичная матрица, причем

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x^T E x = x^T x.$$

Задача 1. Для заданной квадратичной формы $a(x)$ найти

$$\alpha = \min_{x \epsilon S} a(x) \quad \text{и} \quad \beta = \max_{x \in S} a(x).$$

Случай $n = 2$

При $n = 2$ задача 1 может быть решена обычными средствами Анализа.

Задача 1bis. Для заданной квадратичной формы

$$a(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

найти

$$\alpha = \min_S a(x, y) \quad \text{и} \quad \beta = \max_S a(x, y)$$

на единичной окружности S, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Окружность можно представить в параметрическом виде

$$x = \cos t\,, \qquad y = \sin t\,, \qquad t = 0..2\pi;$$

при этом между значениями t и точками окружности устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

$$plotparam2d(\cos t\,, \sin t)$$

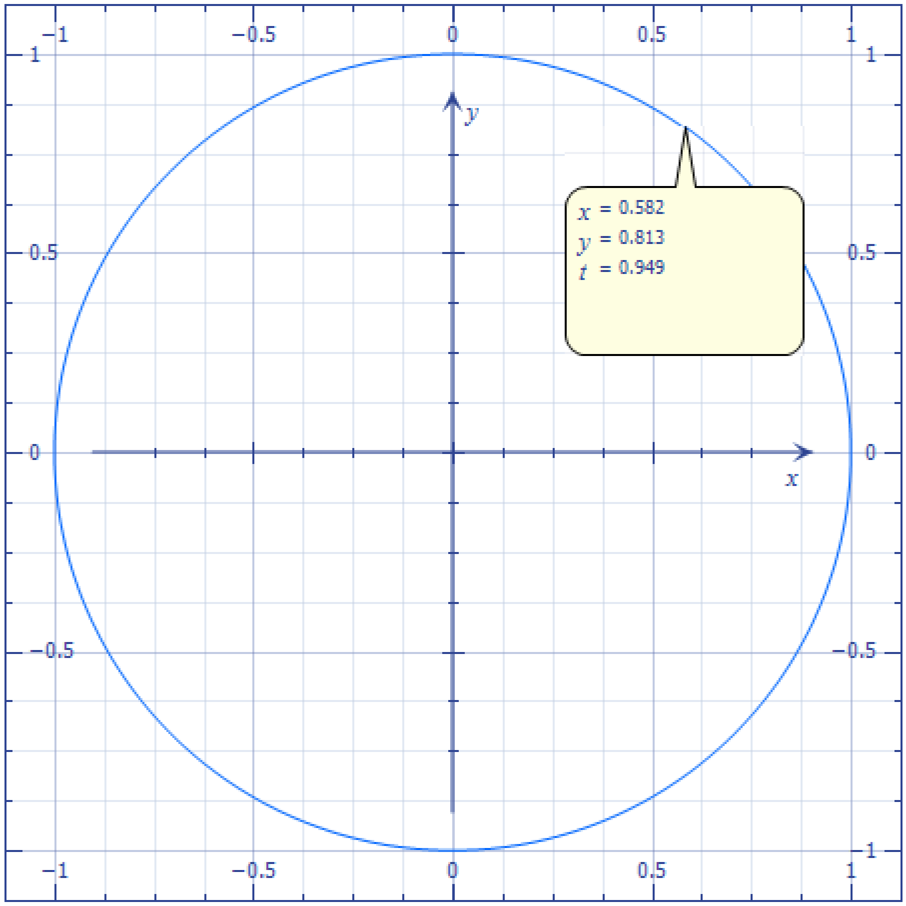

Рис. 1. Единичная окружность и ее параметризация.

Квадратичная форма $a(x, y)$ на этой окружности задает функцию от t:

$$a = a_{11}\cos^2 t + 2a_{12}\cos t \sin t + a_{22}\sin^2 t$$

или

$$a = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + a_{12}\sin 2t + \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\cos 2t$$

Таким образом, a имеет период π и поэтому при отыскании экстремальных значений можно ограничиться отрезком от 0 до π. Отыщем экстремумы этой функции средствами Анализа. Точки экстремума – нули производной

$$\frac{da}{dt} = 2a_{12}\cos 2t - (a_{11} - a_{22})\sin 2t = 0,$$

то есть корни уравнения

$$\tan 2t = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

Корнями этого уравнения будут

$$t = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} + \frac{\pi}{2}n, \qquad n = 0, \pm 1, \dots$$

На интересующий нас отрезок попадают только два значения

$$t_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

И

$$t_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} + \frac{\pi}{2}.$$

В этих точках вторая производная может обратиться в нуль только тогда, когда уравнения

$$\frac{da}{dt} = 2a_{12}\cos 2t - (a_{11} - a_{22})\sin 2t = 0$$

и

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -4a_{12}\sin 2t - 2(a_{11} - a_{22})\cos 2t = 0$$

удовлетворяются одновременно, то есть когда система

$$\begin{cases} 2a_{12}x - (a_{11} - a_{22})y = 0 \\ 2a_{12}y + (a_{11} - a_{22})x = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение. Это возможно лишь в том случае, когда определитель системы

$$\det\begin{pmatrix} 2a_{12} & a_{22} - a_{11} \\ a_{11} - a_{22} & 2a_{12} \end{pmatrix} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4\,{a_{12}}^2 = 0$$

то есть при

$$a_{11} = a_{22}, \qquad a_{12} = 0.$$

В этом случае форма

$$a = a_{11}(x^2 + y^2)$$

и на окружности она вообще не изменяется. Исключив из рассмотрения этот случай, видим, что вторая производная в стационарных точках отлична от нуля и поэтому одна из найденных точек – точка максимума, а вторая – минимума.

Задача. В каких границах принимает значение форма

$$a(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

на единичной окружности?

Первый способ решения. Вычисляем

$$t_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{-2}{1-3} = \frac{\pi}{8}$$

и

$$t_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2},$$

а затем значения формы в этих точках:

$$a_i = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + a_{12}\sin 2t_i + \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\cos 2t_i = 2 - \sin 2t_i - \cos 2t_i$$

отсюда

$$a_1 = 2 - \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5857864376269$$

$$a_2 = 2 - \sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4142135623731$$

Ответ: форма на окружности меняется между $2 - \sqrt{2}$ и $2 + \sqrt{2}$. Этот ответ можно проверить по рис. 2.

$$plot2d(\cos^2 x - 2\cos x \sin x + 3\sin^2 x)$$

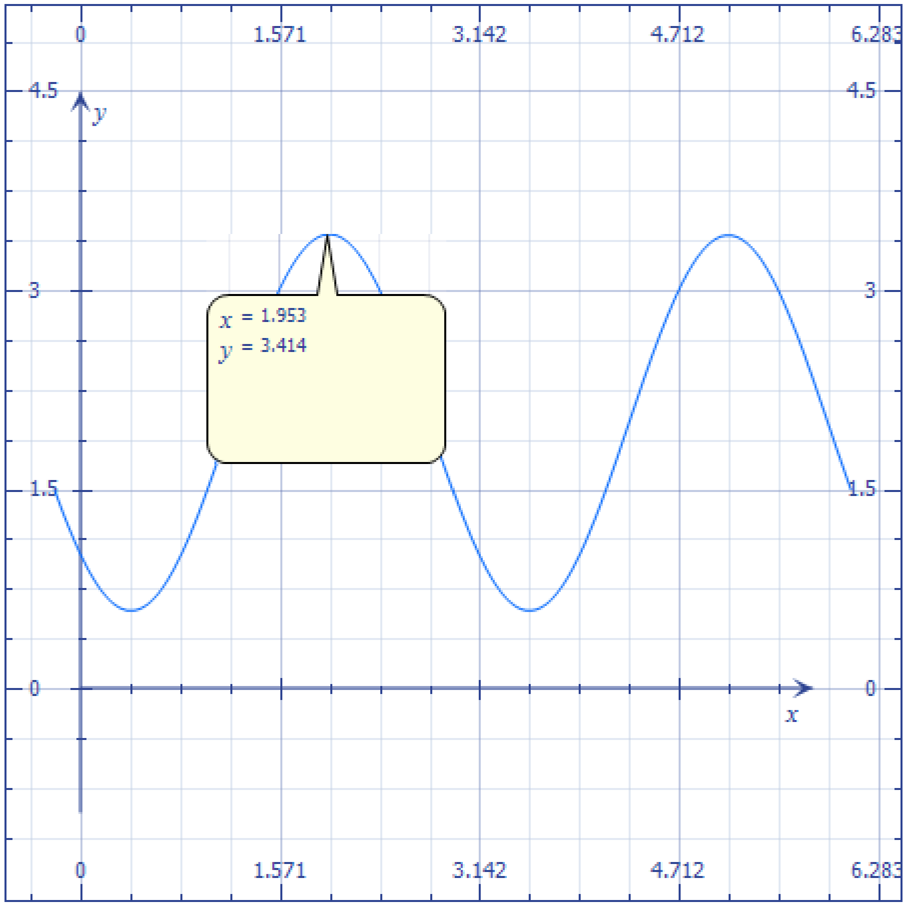

Рис. 2. График зависимости формы от угла.

Общий случай

Теорема об экстремумах квадратичной формы. Экстремальные значения квадратичной формы с матрицей A на единичной сфере – это наименьшее и наибольшее из собственных значений матрицы. Более того, форма достигает своих экстремальных значений на собственных векторах, то есть тех столбцах x, для которых Ax и x отличаются на мультипликативную константу:

$$Ax = \lambda x,$$

где λ – некоторое вещественное число.

Док-во. Допустим, что при некотором x форма достигает своего максимального значения на сфере.

Замечание. В общем случае форма – непрерывная функция на сфере, поэтому она ограничена и более того достигает своего максимального и минимального значения. В случае многих переменных — это утверждение известно в курсе Анализа как теорема

Вейерштрасса. В курсе Алгебры мы примем существование минимума и максимума при $n > 2$ без доказательства.

Придадим столбцу бесконечно малое приращение δx, которое не выводит его со сферы. Тогда

$$\delta a = a(x+\delta x) - a(x) = (x+\delta x)^T A(x+\delta x) - x^T Ax = \delta x^T Ax + x^T A\delta x + \delta x^T A\delta x.$$

Как обычно, член второго порядка, выделенный красным, сокращают. Остается заметить, что симметричности матрицы ($A^T = A$) следует, что

$$\delta x^T Ax = \delta x^T A^T x = (A\delta x)^T x = x^T A\delta x,$$

поэтому

$$\delta a = 2\delta x^T Ax.$$

Чтобы точка x была точкой максимума, эта величина не должна быть положительной при любых δx. Однако найденное выражение является линейной функцией δx, поэтому оно меняет знак, когда меняет знак δx. Значит, выписанное неравенство возможно лишь тогда, когда

$$\delta x^T Ax = 0.$$

Выбор столбца δx подчинен лишь одному условию: столбец $x + \delta x$ должен оставаться на единичной сфере:

$$1 = (x+\delta x)^T(x+\delta x) = x^T x + 2\delta x^T x + \delta x^T\delta x = 1 + 2\delta x^T x,$$

то есть

$$\delta x^T x = 0.$$

Итак: если на x форма достигает максимального значения, то верно

$$y^T Ax = 0$$

для всех столбцов y, удовлетворяющих условию

$$y^T x = 0.$$

Подберем теперь такое число α, чтобы

$$x^T(Ax - \alpha x) = 0,$$

то есть положим

$$\alpha = \frac{x^T A x}{x^T x} = x^T A x = a(x).$$

Тогда

$$z^T (Ax - \alpha x) = 0$$

для всех столбцов z, удовлетворяющих условию

$$z^T x = 0,$$

и при $z = x$. Для произвольного столбца z всегда можно подобрать константу γ таким образом, чтобы

$$x^T (z - \gamma x) = 0,$$

именно следует взять

$$\gamma = \frac{x^T z}{x^T x} = x^T z.$$

В таком случае

$$z^T (Ax - \alpha x) = (z - \gamma x)^T (Ax - \alpha x) + \gamma x^T (Ax - \alpha x) = 0$$

для произвольного столбца z. Взяв столбец, у которого все элементы, кроме i-го, равны нулю, увидим, что i-ый элемент столбца $(Ax - \alpha x)$ равен нулю. Таким образом,

$$Ax - \alpha x = 0,$$

то есть x – собственный вектор матрицы А, а α -- ее собственное значение – по построению равно значению формы в точке x, что и тр. д.

Из доказанной теоремы получается очень простое правило решение задачи 1.

Правило отыскания экстремальных значений формы на единичной сфере. Для отыскания собственных значений следует:

1. Составить определитель матрицы, полученной из исходной матрицы путем вычитая из элементов, стоящих на главной диагонали параметра λ.
2. Приравнять этот определитель нулю и получить т.н. характеристическое уравнение
3. Найти вещественные корни характеристического уравнения:
$$\lambda_1 > \lambda_2 \ \dots > \lambda_r.$$
4. Наименьший из корней – минимальное значение формы, наибольший – максимальное.

Задача. В каких границах принимает значение форма

$$a(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

на единичной окружности?

Второй способ решения. Выписываем матрицу формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\,\lambda + 2.$$

Находим корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 4\,\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = 2 - \sqrt{2} \text{ или } \lambda = \sqrt{2} + 2$$

Ответ: на единичной окружности

$$0.585\ldots = 2 - \sqrt{2} \le x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 \le 2 + \sqrt{2} = 3.414\ldots$$

Задача 2. В каких границах принимает значение форма

$$a(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$$

на единичной сфере?

Решение. Матрицей формы служит

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & -3 \\ -2 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\,\lambda^2 + 3\,\lambda - 26$$

Решаем характеристическое уравнение

$$-\lambda^3 + 6\,\lambda^2 + 3\,\lambda - 26 = 0$$

$$\lambda = -2 \text{ или } \lambda = 4 - \sqrt{3} \text{ или } \lambda = 4 + \sqrt{3}$$

Итак, собственные значения в порядке убывания:

$$\lambda_1 = 4 + \sqrt{3} = 5.732 \ldots > \lambda_2 = 4 - \sqrt{3} = 2.268 \ldots > \lambda_3 = -2$$

Ответ: на единичной сфере

$$-2 \le x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 \le 4 + \sqrt{3} = 5.732 \ldots$$

Задача на условный экстремум

Задача. Функция $z = f(x, y)$рассматривается не во всех точках (x, y), но лишь в тех, которые лежат на кривой $g(x, y) = 0$. Требуется найти точки, в которых эта функция принимает наименьшее и наибольшее значение.

Или: найти экстремумы функции $z = f(x, y)$ при условии $g(x, y) = 0$.

Задача отыскания экстремумов на сфере является частным случаем задачи поиска условного экстремума.

Некоторые сведения из Анализа. Частные производные.

Определение. Частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Аналогично определяется частная производная по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ вычисляется при неизменном y, а $\frac{\partial z}{\partial y}$ при неизменном x. Таким образом, определения частных производных можно сформулировать следующим образом:

Частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется производная по x, вычисленная в предположении, что y – постоянная. Частной производной по y от функции $z = f(x, y)$ называется производная по y, вычисленная в предположении, что x – постоянная.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = x^2 + 3xy - 5y^3$$

Решение. Частная производная по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$$

Частная производная по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 15y^2$$

Пример 2. Найти частные производные функции

$$z = x^2 \sin y$$

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y, \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$

Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим функцию n переменных $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и m уравнений связи (условия) $g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Чтобы найти условные экстремумы функции $z = f(x_n)$, удовлетворяющих уравнениям $g_m(x_n) = 0$, необходимо решить систему из $n + m$ уравнений, составленную из частных производных функции Лагранжа и уравнений связи, вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_n, \lambda_m)}{\partial x_n} = 0 \\ g_m(x_n) = 0 \end{cases}.$$

Функция

$$L(x, \lambda) = f(x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(x_n)$$

называется функцией Лагранжа, а коэффициенты λ_i - множители Лагранжа.

Случай для $n = 2$.

Теорема о множителе Лагранжа. Если функция $z = f(x, y)$ принимает экстремальное значение в неособенной точки кривой $g(x, y) = 0$, то координаты x, y этой точки удовлетворяют системе 3-х уравнений относительно 3-х неизвестных x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Задача. Найти экстремум квадратичной формы

$$a(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

при условии

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Решение. Согласно теореме Лагранжа экстремум достигается в точках (x, y), координаты которых вместе с дополнительным параметром удовлетворяют системе из 3-х уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Вычисляя производные, получаем систему

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Система линейных относительно *x,y* уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda y \end{cases}$$

Имеет нетривиальное решение только при тех значениях множителя Лагранжа, которые называются собственными значениями матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и вычисляются как корни характеристического уравнения

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Это – квадратное уравнение. Поскольку в задаче должно получиться две точки экстремума – минимум и максимум, это уравнение должно иметь два вещественных корня, обозначим их как α и β, пусть для определенности $\alpha < \beta$.

Обращение в нуль определителя гарантирует, что одно из линейных уравнений можно выкинуть, поэтому (если a_{11} и a_{12} не обращаются в нуль одновременно) мы имеем для отыскания координат первой точки экстремума систему

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \alpha x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

а для второй – систему

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \beta x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Решения этих систем - это собственные вектора, отвечающие собственным значениям $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$ соответственно.

Теорема 2. Квадратичная форма

$$a(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

на окружности

$$x^2 + y^2 = 1$$

меняется между двумя значениями, которые являются собственными значениями матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

этой формы. Координаты точек экстремума составляют собственные векторы, точка минимума дает собственный вектор, отвечающий наименьшему собственному значению, а точка максимума – наибольшему.

Теорема 3. Эрмитова матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ a_{12} = a_{21},$$

имеет два вещественных собственных значения.

Обе теоремы обобщаются на n-мерный случай.

Теорема 2b. Квадратичная форма

$$a(x_1, \dots, x_n)$$

на сфере

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

меняется между двумя значениями, которые являются собственными значениями матрицы этой формы. Координаты точек экстремума составляют собственные векторы.

Теорема 3b. Все собственные значения эрмитовой матрицы – вещественные.

Пример. Найти методом Лагранжа экстремумы функции

$$z = x^2 - xy$$

на окружности

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Решение. Найдем частные производные $f(x, y) = x^2 - xy$

и $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - y, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2y$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 2x - y = 2\lambda x \\ -x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Первые два уравнения составляют систему однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)x - y = 0 \\ -x - 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$\det\begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & -1 \\ -1 & -2\lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$$

Откуда находим два возможных значения для множителя:

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \text{ или } \lambda = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

При $\lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ имеем

$$\begin{cases} 2x - y = (1-\sqrt{2})x \\ -x = (1-\sqrt{2})y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Здесь второе уравнение совпадает с первым. Поэтому решаем систему

$$\begin{cases} 2\,x - y = \left(1-\sqrt{2}\right)x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Откуда получаем $(0.383, 0.924)$ и $(-0.383, -0.924)$ – это точки минимума

При $\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ имеем

$$\begin{cases} 2x - y = (1+\sqrt{2})x \\ -x = (1+\sqrt{2})y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Здесь второе уравнение совпадает с первым. Поэтому решаем систему

$$\begin{cases} 2\,x - y = \left(1 + \sqrt{2}\right)x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Откуда получаем$(-0.924{,}0.383)$ и $(0.924, -0.383)$ – это точки максимума.

Домашнее задание

1. Составьте матрицы квадратичных форм:

$$x^2 + (x - y)^2$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

2. Укажите, в каких пределах меняются значения след. квадратичных форм на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$:

$$a = x^2 - 2xy + y^2$$

$$a = x^2 - 3y^2$$

$$a = 2x^2 + 2y^2$$

3. Укажите, в каких пределах меняются значения след. квадратичных форм на единичной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$a = x^2 + 2xy - 2xz + y^2 - 3z^2$$

$$a = xy + xz + yz$$

$$a = x^2 - y^2 + 2z^2 + 3xy$$