Лекция 7. Приведение матрицы к диагональному виду

Приведение матрицы к диагональному виду

Определение. Матрица, все элементы которой, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Вместо

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

для краткости условимся писать

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(2,3)$$

Общая задача. Для заданной матрицы А отыскать такую обратимую матрицу U, чтобы матрица $U^{-1}AU$ была диагональной.

Теорема 1. Если

$$U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

то $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные значения матрицы A.

Док-во. Из

$$U^{-1}AU - \lambda E = U^{-1}AU - \lambda U^{-1}U = U^{-1}(A - \lambda E)U$$

следует, что

$$\det(U^{-1}AU - \lambda E) = \det U^{-1}(A - \lambda E)U$$

По теореме об определителе произведения матриц

$$\det U^{-1}(A - \lambda E)U = \frac{1}{\det U}\det(A - \lambda E)\det U = \det(A - \lambda E).$$

Поэтому

$$\det(U^{-1}AU-\lambda E)=\det(A-\lambda E)$$

и собственные значения матриц A и $U^{-1}AU$ совпадают. Остается заметить, что

$$\det(U^{-1}AU-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda & 0\\ 0 & \ddots\end{pmatrix}=(\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda),$$

поэтому $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ - собственные значения матрицы $U^{-1}AU$.

Теорема 2. Пусть матрица A имеет n собственных значений $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, которым отвечают собственные векторы

$$\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{21}\\ \vdots\\ u_{n1}\end{pmatrix},\dots\begin{pmatrix}u_{1n}\\ u_{2n}\\ \vdots\\ u_{nn}\end{pmatrix}$$

Составим из этих столбцов матрицу

$$U=\begin{pmatrix}u_{11} & \dots & u_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{n1} & \cdots & u_{nn}\end{pmatrix}$$

Если эта матрица обратима, то

$$U^{-1}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

Док-во. По определению с.з. и с.в.

$$A\begin{pmatrix}u_{1m}\\ u_{2m}\\ \vdots\\ u_{nm}\end{pmatrix}=\lambda_m\begin{pmatrix}u_{1m}\\ u_{2m}\\ \vdots\\ u_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_m u_{1m}\\ \lambda_m u_{2m}\\ \vdots\\ \lambda_m u_{nm}\end{pmatrix},$$

Поэтому

$$AU=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11} & \dots & u_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{n1} & \cdots & u_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 u_{11} & \dots & \lambda_n u_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1 u_{n1} & \cdots & \lambda_n u_{nn}\end{pmatrix}$$

Пусть

$$U^{-1}=\begin{pmatrix}v_{11} & \dots & v_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n1} & \cdots & v_{nn}\end{pmatrix}$$

тогда

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}v_{11} & \dots & v_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n1} & \cdots & v_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 u_{11} & \dots & \lambda_n u_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1 u_{n1} & \cdots & \lambda_n u_{nn}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_1(v_{11}u_{11}+\cdots v_{1n}u_{n1}) & \dots & \lambda_n(v_{11}u_{1n}+\cdots v_{1n}u_{nn})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1(v_{n1}u_{11}+\cdots v_{nn}u_{n1}) & \cdots & \lambda_n(v_{n1}u_{1n}+\cdots v_{nn}u_{nn})\end{pmatrix}$$

Вспоминая, что

$$U^{-1}U = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_{11}u_{11} + \cdots v_{1n}u_{n1}) & \dots & (v_{11}u_{1n} + \cdots v_{1n}u_{nn}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_{n1}u_{11} + \cdots v_{nn}u_{n1}) & \cdots & (v_{n1}u_{1n} + \cdots v_{nn}u_{nn}) \end{pmatrix}$$

равно

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

видим, что

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

что и тр. д.

Задача. Приведем к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Шаг 1. Ищем с.з.

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = -1 \text{ или } \lambda = 3$$

Шаг 2. Для каждого с.з. ищем по с.в.

Для $\lambda_1 = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

или

$$x + y = 0$$

Поэтому можно взять

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda_2 = 3$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

или

$$x - y = 0$$

Поэтому можно взять

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Составляем матрицу

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и проверяем ее обратимость

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Ответ: при

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица $U^{-1}AU$ является диагональной:

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(-1,3)$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Функции от матриц

После введения арифметических действий, мы знаем, что такое многочлен от матрицы.

Пример. Пусть

$$f(\lambda) = 2\lambda^2 + 3$$

тогда

$$f(A) = 2A^2 + 3A^0 = 2A^2 + 3E.$$

В частности

$$f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Если

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

то для произвольного многочлена $f(\lambda)$ верно

$$f(A) = U\operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))U^{-1}$$

Док-во. Из

$$A = U\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^{-1}$$

следует, что

$$A^2 = U\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^{-1}U\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^{-1} = U\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^{-1}$$

Но

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$A^2 = U\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)U^{-1}$$

Действуя так дальше, получим

$$A^m = U\mathrm{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)U^{-1}$$

Пусть

$$f(\lambda) = a\lambda^m + \cdots$$

тогда

$$f(A) = aA^m + \cdots = aU\mathrm{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)U^{-1} + \cdots = U\mathrm{diag}(a\lambda_1^m + \cdots, \dots, a\lambda_n^m + \cdots)U^{-1}$$

или

$$f(A) = U\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))U^{-1},$$

что и тр. д.

Пример. Пусть

$$f(\lambda) = 2\lambda^2 + 3$$

Тогда из

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

сразу следует, что

$$f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 3^2 + 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

В этом мы уже убедились выше прямым вычислением.

Формулу, верную для многочленов, принимают за определение во всех прочих случаях.

Определение. Если

$$U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

то для произвольной функции $f(\lambda)$, определенной на вещественной оси или ее части, содержащей все собственные значения матрицы A, принимают, что

$$f(A) = U\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))U^{-1}$$

Замечание. Так введенная $f(A)$ не зависит от выбора U. Для многочленов это очевидно, а для произвольных непрерывных функций это легко установить, воспользовавшись теоремой из Анализа, согласно любую непрерывную функцию можно приблизить многочленами.

Пример. Используя опять представление

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\sqrt[3]{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt[3]{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{pmatrix}$$

Теорема 4. Если определен корень $\sqrt[r]{A}$, то $\left(\sqrt[r]{A}\right)^r = A$.

Док-во. По определению

$$\sqrt[r]{A} = U \mathrm{diag}\left(\sqrt[r]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[r]{\lambda_n}\right) U^{-1}$$

поэтому

$$\left(\sqrt[r]{A}\right)^r = U \mathrm{diag}\left(\left(\sqrt[r]{\lambda_1}\right)^r, \dots, \left(\sqrt[r]{\lambda_n}\right)^r\right) U^{-1} = A$$

Пример. Как мы знаем,

$$\sqrt[3]{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{pmatrix},$$

отсюда

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Типичная задача. Вычислите

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

Решение.

Шаг 1. Ищем с.з.

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = -2 \text{ или } \lambda = 4$$

Шаг 2. Для каждого с.з. ищем по с.в.

Для $\lambda_1 = -2$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

или

$$x + y = 0$$

Поэтому можно взять

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda_2 = 4$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

или

$$x - y = 0$$

Поэтому можно взять

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Составляем матрицу

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и проверяем ее обратимость

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Шаг 4. Вычисляем

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\,e^2} + \frac{e^4}{2} & \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2\,e^2} \\ \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2\,e^2} & \frac{1}{2\,e^2} + \frac{e^4}{2} \end{pmatrix}$$

Эрмитовы матрицы

Напомним, что матрица A называется эрмитовой, если

$$A^T = A.$$

Теорема 6. Всякая эрмитова матрица может приведена к диагональному виду:

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^{-1}$$

При этом

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

и

$$U^{-1} = U^T.$$

Док-во. Пусть A – эрмитова матрица, тогда ей можно сопоставить квадратичную форму

$$a(x) = x^T A x = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots,$$

Как мы знаем, если на единичной сфере

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

эта форма принимает свое наименьшее значение λ_1 в точке с координатами

$$u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1},$$

то λ_1 – собственное значение матрицы А, а столбец

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}$$

- ее собственный вектор. Таким образом одно вещественное собственное значение имеется. Чтобы отыскать второе, отыщем минимум этой квадратичной формы на той части единичной сферы

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1,$$

в которой верно

$$u_{11}x_1 + u_{21}x_2 + \cdots + u_{n1}x_n = 0.$$

Обозначим это наименьшее значение как $\lambda_2 \geq \lambda_1$, а координаты точки экстремума как

$$u_{12}, u_{22}, \dots, u_{n2}.$$

Нетрудно доказать, что столбец

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{pmatrix}$$

- собственный вектор, отвечающий с.з. λ_2. Действуя так далее получим n с.з. и n с.в., из которых можно составить матрицу U.

По построению

$$u_1^T u_1 = 1,$$

$$u_1^T u_2 = 0, \qquad u_2^T u_2 = 1$$

$$u_1^T u_3 = u_2^T u_3 = 0, \qquad u_3^T u_3 = 1$$

и т.д. Поэтому

$$U^T U = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^T u_1 & \dots & u_1^T u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^T u_1 & \cdots & u_n^T u_n \end{pmatrix} = E.$$

Это означает, что матрица U обратима и $U^{-1} = U^T$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 1.

Домашнее задание

1. Приведите матрицы к диагональному виду
   a.) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
   b.) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
   c.) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Вычислите
$$\sqrt{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$
3. Вычислите
$$\sin \begin{pmatrix} \pi & 2\pi \\ 2\pi & \pi \end{pmatrix}$$
4. (*) Решите матричное уравнение
$$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$