

Контрольная работа №1 по предмету «Линейная алгебра»

Пробный вариант

Задачи на 5 балла (2 задачи из ниже представленных)

1. Найдите решение системы методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

Ответ: (1, 3)

2. Найдите обратную матрицу A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,3 \\ 0,4 & -0,1 \end{pmatrix}$

3. Имеет ли система нетривиальные решения

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Ответ: не имеет.

4. Являются ли столбцы линейно независимыми

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: столбцы линейно независимы

5. При каких a столбцы будут линейно зависимыми

$$\begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: при $a = 0, a = -14$

Задачи на 6 баллов

6. Найдите обратную матрицу A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Найдите решение системы методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y + z + t = 0 \\ -x - y - 3t = 0 \\ 2x - y + z + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } y = -3t - x, z = -7t - 3x \text{ или } x = -\frac{7}{3}t - \frac{1}{3}z, y = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}z$$

Задача на 8 баллов

8. Найдите все собственные значения и все собственные вектора матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5; v_1 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$