Домашнее задание №1.

1. Докажите, что ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{(6n-1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+3}{(6(n+1)-1)^2} \times \frac{(6n-1)^2}{(n^2+3)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2+3}{(6n+5)^2} \times \frac{(6n-1)^2}{n^2+3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{6n^4}{36n^4} = \frac{1}{6} < 1$$ ряд расходится

2. Докажите, что ряд сходится абсолютно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{6^n+3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin 3n}{6^n+3}\right| \Rightarrow |\sin 3n| \leq 1 \text{ тогда } \left|\frac{\sin 3n}{6^n+3}\right| \leq \frac{1}{6^n}$$

исследуем сходимость мажорантного $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$

По определению такой ряд будет сходится абсолютно

3) Докажите, сх. аб., вычислите его сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 5n}{4^n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos 5n}{4^n+1}\right|$$

Проверим его сходимость

Так как $|\cos 5n| \leq 1$, то мажорантный ряд будет

$$\left|\frac{\cos 5n}{4^n+1}\right| \leq \frac{1}{4^n} \Rightarrow \text{Ряд сходится абсолютно}$$

Сумма

$$S = \frac{q_1(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\frac{1}{3}-\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)\leqslant 0{,}01 \Rightarrow \quad \boxed{N=3}$$

4. Докажите:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 5n}{n^2+2}$$

$$|\cos 5n|\leqslant 1 \Rightarrow \left|\frac{\cos 5n}{n^2+2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$$

По определению, если мажорантный ряд сходится, то и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos 5n}{n^2+2}\right|$$

Исследуем сходимость мажорантного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Это гармонический ряд $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$

$q>1$, по определению такой ряд будет сходится абсолютно

Сумма:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Тогда остаток:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leqslant\pm 0{,}01$$