Российский университет дружбы народов

Курс лекций «Линейная алгебра»

Лекция 3. Множество решений систем линейных уравнений

Системы линейных уравнений в общем виде

В самом общем случае под системой линейных уравнений понимают систему, образованную p линейными уравнениями, содержащими n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

При этом число уравнений (p) может не совпадать с числом неизвестных (n).

Системы линейных уравнений в общем виде

В матричном система линейных уравнений записывается как

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

или

$$Ax = b.$$

Метод Гаусса

Определение. Две системы уравнений

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

и

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_q(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

Для определенности, все системы, имеющие пустое множество решений, то есть несовместные системы, считаются эквивалентными.

Метод Гаусса

Метод Гаусса основан на следующем утверждении:

Утверждение. Мы заменим систему

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_p(x_1, \dots, x_n) = 0$$

на эквивалентную, если прибавим к одному уравнению другое, помноженное на произвольное число.

Также вводится порядок среди неизвестных. То есть считаем, что переменная x_1 старше x_2, x_2 старше x_3 и т.д.

Метод Гаусса

Шаг 1. Ищем старшую переменную, которую содержат многочлены

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n);$$

обычно таковой является x_1, но для общности примем, что таковой является x_{i_1}. В ряду линейных многочленов

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)$$

берем самый левый, который содержит переменную x_{i_1}, и меняем его местами с $f_1(x_1, \dots, x_n)$. Теперь подберем такое число a_2, чтобы многочлен

$$f_2 - a_2 f_1$$

не содержал x_{i_1}, и заменим второе уравнение на

$$f_2 - a_2 f_1 = 0.$$

Метод Гаусса

При этом может получиться тривиальное уравнение $0 = 0$, которое мы отбрасываем, или уравнение $1 = 0$, что указывает на несовместность системы. С третьем и всеми последующими уравнениями проделаем ту же операцию. В результате получим новую систему

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_q(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

в которой:

- первое уравнение содержит переменную x_{i_1} и переменные, которые ее младше,
- уравнения, начиная со второго, не содержат x_{i_1} и переменные, которые ее старше,
- число уравнений может быть меньше, чем в исходной системе, но не может оказаться больше, то есть $q \leq p$.

Метод Гаусса

Шаг 2. Ищем старшую переменную, которую содержат многочлены
$$f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_q(x_1, \dots, x_n);$$
примем таковой x_{i_2}. В ряду линейных многочленов
$$f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_q(x_1, \dots, x_n)$$
берем самый левый, который содержит переменную x_{i_2}, и меняем его местами с $f_2(x_1, \dots, x_n)$. Получим эквивалентную исходной систему, заменив уравнения с номерами $i = 3, \dots q$ на
$$f_i - b_i f_2 = 0,$$
где числа b_i подбираются таким образом, чтобы многочлены $f_i - b_i f_2$ не содержали x_{i_2}.

Метод Гаусса

При этом уравнения $0 = 0$ отбрасываются, а уравнения $1 = 0$ свидетельствуют о несовместности системы.

В новой системе:

- первое уравнение содержит переменную x_{i_1} и переменные, которые ее младше,
- второе уравнение содержит переменную x_{i_2} и переменные, которые ее младше,
- уравнения, начиная с третьего, не содержат переменную x_{i_2} и переменные, которые ее старше,
- число уравнений может быть меньше, чем в исходной системе, но не может оказаться больше.

Метод Гаусса

Следующие шаги. Проделывая аналогичные шаги в итоге получим, что система не имеет решения, либо получим эквивалентную систему, в которой r уравнений, причем:

- первое уравнение содержит переменную x_{i_1} и переменные, которые ее младше,
- второе уравнение содержит переменную x_{i_2} и переменные, которые ее младше

и т.д.

Метод Гаусса

Чтобы получить *частное решение* системы линейных уравнений, найдем

- неизвестную x_{i_r} из последнего уравнения

$$f_r\left(x_{i_r}, \dots, x_n\right) = 0,$$

придав неизвестным $x_{i_r+1}, \dots, x_n$ какие угодно значения,

- неизвестную $x_{i_{r-1}}$ из предпоследнего уравнения

$$f_{r-1}\left(x_{i_{r-1}}, \dots, x_n\right) = 0,$$

придав неизвестным $x_{i_{r-1}+1}, \dots, x_{i_r-1}$ какие угодно значения

и т.д.

Метод Гаусса

Чтобы получить *общее решение* системы линейных уравнений, найдем:

- неизвестную x_{i_r} из последнего уравнения

$$f_r\left(x_{i_r}, \dots, x_n\right) = 0$$

как линейную функцию переменных $x_{i_r+1}, \dots, x_n$, которые могут принимать какие угодно значения,

- неизвестную $x_{i_{r-1}}$ из уравнения

$$f_{r-1}\left(x_{i_{r-1}}, \dots, x_n\right) = 0,$$

как линейную функцию переменных $x_{i_{r-1}+1}, \dots, x_{i_r-1}$, которые могут принимать какие угодно значения, и т.д.

В итоге мы выразим r неизвестных через оставшиеся $n - r$ величины, на изменения которых система не накладывает никаких ограничений.

Метод Гаусса

Определение. Число r будем называть *рангом* системы линейных уравнений, а число $n - r$ - размерностью множества решений системы, где n – число неизвестных.

Пример 1. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Метод Гаусса

Решение. Порядок переменныхПорядок переменных $x > y > z$. Шаг 1. Исключаем x

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

Шаг 2. Исключаем y

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \\ -z + 8 = 0 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} z = 8 \\ y = -4 + z = 4 \\ x = 1 - z - y = -11 \end{cases}$$

Замечание. Здесь размерность множества решений равна нулю $(r - n = 2 - 2 = 0)$ и нет смысла говорить об общем и частных решениях.

Метод Гаусса

Метод Гаусса можно реализовать через матричную запись. Рассмотрим систему из p уравнений с n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Матрица этой системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{p}1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Матрица, включающая правую часть

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{p}1} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right),$$

называется расширенной матрицей системы.

Алгоритм решения аналогичен исключению старших переменных, только в этом случае работаем с коэффициентами.

Если в первой строке в первом столбце стоит нулевой элемент, то из p строк находим строку i, у которой первый элемент в первом столбце не равен 0 и меняем строку 1 со строкой i. Далее из каждой строки $i = 2..p$, вычитаем первую строку умноженную на такой коэффициент, чтобы в строках $i = 2..p$ в элементы в первом столбце равнялись 0. Таким образом, мы обнуляем все элементы первого столбца, кроме элемента стоящего в первой строке a_{11}.

Метод Гаусса

Мы получаем матрицу следующего вида:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{22} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{2p} & \ldots & \tilde{a}_{pn} & \tilde{b}_p \end{array}\right),$$

Теперь проделываем аналогичные действия со второй строкой. Если во второй строке во втором столбце ($\tilde{a}_{22}$) стоит нулевой элемент, то из p строк находим строку i, у которой первый элемент во втором столбце не равен 0 и меняем строку 2 со строкой i. Далее из каждой строки $i = 3..p$, вычитаем вторую строку умноженную на такой коэффициент, чтобы в строках $i = 3..p$ в элементы во втором столбце равнялись 0. Таким образом, мы обнуляем все элементы второго столбца, кроме элемента $\tilde{a}_{22}$.

Метод Гаусса

Получаем матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1\mathrm{n}} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \ldots \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} \ldots \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ \ \ddots \ \ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{p3} \cdots \tilde{a}_{pn} & \tilde{b}_p \end{array}\right),$$

Теперь проделываем аналогичные действия со второй строкой. Если во второй строке во втором столбце ($\tilde{a}_{22}$) стоит нулевой элемент, то из p строк находим строку i, у которой первый элемент во втором столбце не равен 0 и меняем строку 2 со строкой i. Далее из каждой строки $i = 3..p$, вычитаем вторую строку умноженную на такой коэффициент, чтобы в строках $i = 3..p$ в элементы во втором столбце равнялись 0.

Таким образом, мы обнуляем все элементы второго столбца строк $i = 3..p$.

Метод Гаусса

Проделываем эти действия пока не получим матрицу, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \cdots & \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{pn} & \tilde{b}_p \end{array}\right)$$

Затем в обратном порядке находим неизвестные $x_i, i = 1..n$.

Метод Гаусса

В этом случае решение системы:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pn}} \\ x_{n-1} = \dfrac{1}{\tilde{a}_{(p-1)(n-1)}}\left(\tilde{b}_{p-1} - \tilde{a}_{(p-1)n}\dfrac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pn}}\right) \\ \vdots \\ x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \dfrac{a_{12}}{\tilde{a}_{22}}\left(\tilde{b}_2 - \cdots - \tilde{a}_{2n}\dfrac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pn}}\right) - \cdots - \dfrac{a_{1(n-1)}}{\tilde{a}_{(p-1)(n-1)}}\left(\tilde{b}_{p-1} - \tilde{a}_{(p-1)n}\dfrac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pn}}\right) - a_{1n}\dfrac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pn}}\right) \end{cases}$$

Метод Гаусса

Если в ходе решения в расширенной матрице появляется нулевая строка, мы вычеркиваем ее. Это означает, что ранг матрицы системы меньше числа уравнений. При этом, если ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы линейных уравнений, то это означает, что система не совместна (это соответствует случаю, когда в одном из уравнений слева получается 0, а справа остается константа не равная 0).

Размерность решения будет равна $n - r$, где n – число неизвестных, r – ранг матрицы.

Метод Гаусса

Пример 2. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y = -3 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся методом Гаусса в матричной записи.

Метод Гаусса

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

И приведем ее такому виду, чтобы под главной диагональю остались только нулевые элементы.

Из третьей и второй строки вычитаем первую, получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

Далее из 3-й строки вычитаем 2-ю домноженную на множитель (-2), получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Мы получили, что ранг расширенной матрицы, больше ранга матрицы системы, или получаем $0 = 8$, что невозможно. Таким образом, данная система несовместна.

Метод Гаусса

Пример 3. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y = -3 \\ 2\,x + 3\,y + z = -2 \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

Вычитаем из 2-й строки 1-ю и из 3-й строки 1-ю домноженную на 2. Получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Теперь из 3-й строки вычитаем 2-ю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем нулевую строку, которую можно вычеркнуть

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

Полученная матрица эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = -4 \end{cases}$$

Таким образом, получаем общее решение:

$$\begin{cases} y = -4 + z \\ x = 1 - z - y = 5 - 2z \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$

Чтобы найти какое-нибудь частное решение, придаем младшей переменной z какое-либо числовое значение и определяем остальные (старшие) переменные. Например, при $z = 0$

$$y = -4, \qquad x = 5$$

Метод Гаусса

Замечание 1. Важно не число уравнений, а сколько останется нетривиальных уравнений после исключения. Это число называют *рангом* системы. В данном случае ранг равен 2, неизвестных три, а ответ содержит $3 - 2 = 1$ неопределённую величину. Это число называют размерностью множества решений системы.

Множество решений системы не зависит от способа его отыскания, в частности от выбора порядка среди переменных $x_1, \dots, x_n$. Однако в том случае, когда размерность множества решений не равна нулю, от способа отыскания решения зависит описание этого множества.

Системы однородных линейных уравнений

Система однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

или кратко

$$Ax = 0$$

всегда имеет тривиальное решение $x = 0$. Это уравнение может имеет нетривиальное решение, если число уравнений меньше числа переменных (или $detA = 0$).

Системы однородных линейных уравнений

Пример 1. Найти решение системы

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+2z-t=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$$

Системы однородных линейных уравнений

Шаг 1. Исключаем x

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -2y + z - 2t = 0 \\ -2y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

Шаг 2. Исключаем y

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -2y + z - 2t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Системы однородных линейных уравнений

Множество решений:

$$\begin{cases} z = 2y + 2t \\ x = -y - z - t = 3(y + t) \end{cases}$$

Неизвестных 4, ранг системы 2, следовательно размерность решений $4 - 2 = 2$, при этом $y, t \in \mathbb{R}$ (могут принимать любые значения).

В матричном виде решение можно записать так

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(y+t) \\ y \\ 2(y+t) \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Системы однородных линейных уравнений

Здесь указано два частных решения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

из которых составлено общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В общем же случае столбцов получится столько, сколько переменных мы должны оставить неопределенными.

Системы однородных линейных уравнений

Теорема 1. Общее решение системы однородных линейных уравнений

$$Ax = 0$$

можно представить в виде суммы

$$x = c_1 f_1 + \cdots c_d f_d,$$

$x = f_1, \dots, x = f_d$ – надлежащим образом выбранные частные решения этой системы, а $c_1, \dots, c_d$ – произвольные константы, которым можно придавать любые числовые значения.

В линейной алгебре возникшая здесь конструкция имеет особое название.

Фундаментальная система решений

Определение. Пусть $f_1, \dots f_d$ - элементы линейного пространства V. Тогда выражение вида

$$c_1 f_1 + \dots + c_d f_d$$

при любых числовых значениях $c_1, \dots, c_d$ называют линейной комбинацией элементов $f_1, \dots f_d$, а сами числа $c_1, \dots, c_d$ - коэффициентами этой линейной комбинации.

Множество всех линейных комбинаций элементов $f_1, \dots f_d$, то есть множество всех элементов вида

$$c_1 f_1 + \dots + c_d f_d, \qquad c_1, \dots, c_d \in R$$

называют линейной оболочкой, натянутой на элементы $f_1, \dots f_d$, ее обозначают как $L(f_1, \dots f_d)$

Фундаментальная система решений

Пример 1. Множество решений системы

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

- это линейная оболочка, натянутая на два частных решения этой системы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений

Пример 2. Найдем решение системы 3-х уравнений с 4-мя неизвестными, рассмотренной ранее

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

но найдем ее общее решение, приняв другой порядок, скажем,

$$y > x > z > t$$

Шаг 1. Исключаем y

$$\begin{cases} y + x + z + t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

Фундаментальная система решений

Шаг 2. Исключаем x

$$\begin{cases} y + x + z + t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Множество решений:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}z \\ y = -x - z - t = \dfrac{1}{2}z - t \end{cases}$$

где z, t могут принимать любые значения

Фундаментальная система решений

В матричном виде это можно записать так

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}z \\ -\frac{7}{2}z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь указано два частных решения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Фундаментальная система решений

Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов, необходимых для задания линейной оболочки, то есть размерность множества решений, не зависит от способа решения.

Фундаментальная система решений

Определение. Элементы $f_1, \dots f_d$ линейного пространства V называются линейно независимыми, если равенство

$$c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d = 0$$

возможно только при

$$c_1 = \cdots = c_d = 0.$$

Размерностью линейной оболочки M называют максимальное число содержащихся в нем линейно независимых элементов, это число обозначают как $\dim M$.

Замечание. Линейно независимые частные решения однородной системы, образующие множество ее решений, называют фундаментальной системой решений (ФСР).

Фундаментальная система решений

Пример 3. Общее решение системы

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+2z-t=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$$

имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(y+t) \\ y \\ 2(y+t) \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений

Переменные y и t могут принимать произвольные значения. При разбиении столбца на линейную комбинацию получается два столбца: столбец при y имеет на месте 2-го элемента 1, а на 4-м месте 0, столбец при t – на месте 2-го 0, а на месте 4-го элемента 1. Равенство

$$y\begin{pmatrix}3\\1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\2\\1\end{pmatrix}=0$$

во второй строке дает $y=0$, а в четвертой $t=0$. Поэтому столбцы линейно независимы.

Фундаментальная система решений

Лемма о размерности линейной оболочки. Размерность линейной оболочки M, натянутой на линейно независимые элементы $f_1, \dots f_d$ линейного пространства V, равна d.

Доказательство. По условию у нас уже имеется d линейно независимых элементов, поэтому $\dim M \geq d$. Допустим, вопреки утверждению теоремы, что $\dim M = s > d$. Тогда в M содержится s линейно независимых элементов, скажем, $g_1, \dots, g_s$. Но каждый элемент M – линейная комбинация элементов $f_1, \dots f_d$, поэтому найдутся такие числа a_{ij}, что

$$g_i = a_{i1} f_1 + \cdots + a_{id} f_d$$

Российский университет дружбы народов

Фундаментальная система решений

В таком случае уравнение

$$c_1 g_1 + \ \ldots + c_s g_s = 0$$

можно переписать как

$$c_1(a_{11}f_1 + \cdots + a_{1d}f_d) + \ \ldots + c_s(a_{s1}f_1 + \cdots + a_{sd}f_d) = 0$$

или

$$(c_1 a_{11} + \cdots + c_s a_{s1})f_1 + \cdots + (c_1 a_{1d} + \cdots c_s a_{sd})f_d = 0$$

В силу линейной независимости элементов $f_1, \ldots f_d$ это равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} c_1 a_{11} + \cdots + c_s a_{s1} = 0 \\ \ldots \\ c_1 a_{1d} + \cdots c_s a_{sd} = 0 \end{cases}$$

Фундаментальная система решений

Полученная система содержит d однородных уравнений относительно большего числа неизвестных. Она всегда имеет нетривиальные решения, поэтому найдутся такие $c_1, \dots, c_s$, что среди них имеются отличные от нуля и выполняется

$$c_1 g_1 + \dots + c_s g_s = 0$$

Это означает, что $g_1, \dots, g_s$ линейно зависимы, против нашего предположения. Поэтому что $\dim M = s = d$.

Фундаментальная система решений

Метод Гаусса всегда дает линейно независимые столбцы. Общее решение получается как линейная комбинация d столбцов, причем тот столбец, который умножается на x_m, имеет на m-ой позиции 1, а остальные столбцы имеют на этом месте 0. Поэтому m-ая строка равенства

$$c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d = 0$$

дает, что коэффициент при том столбце, который умножается на x_m, равен нулю. В итоге получается

$$c_1 = \cdots = c_d = 0.$$

Поэтому размерность множество решений однородной системы линейных уравнений как линейной оболочки в пространстве столбцов равна

$$d = n - r$$

Фундаментальная система решений

Теорема 2. Если известна размерность d пространства решений системы однородных линейных уравнений, то множество решений – линейная оболочка, натянутая на любые d линейно независимые частные решения этой системы.

Доказательство. Пусть множество решений – линейная оболочка, натянутая на линейно независимые столбцы $g_1, \dots, g_d$ и пусть $f_1, \dots, f_d$ – линейно независимые частные решения, то есть столбцы из линейной оболочки. Поскольку размерность оболочки равна d, то $f_1, \dots, f_d, g_1$ - линейно зависимы, то есть найдутся такие числа $c_1, \dots, c_{d+1}$, что среди них есть не равные нулю и верно

$$c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d + c_{d+1} g_1 = 0.$$

Фундаментальная система решений

Здесь c_{d+1} не равен нулю, поскольку в противном случае

$$c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d = 0$$

выполнялось бы при ненулевых $c_1, \ldots, c_d$ и $f_1, \ldots, f_d$ были бы линейно независимы. Следовательно,

$$g_1 = -\frac{c_1}{c_{d+1}} f_1 - \cdots - \frac{c_d}{c_{d+1}} f_d$$

Фундаментальная система решений

Тем же путем мы выясним, что $g_2, \dots, g_d$ можно представить как линейную комбинацию $f_1, \dots, f_d$. Но любое частное решение является линейной комбинацией $g_1, \dots, g_d$, поэтому и линейной комбинацией $f_1, \dots, f_d$. Остается заметить, что при любом выборе констант верно

$$A(c_1 f_1 + \dots + c_d f_d) = c_1 \cdot A f_1 + \dots + c_d \cdot A f_d = 0,$$

то есть любая линейная комбинация $x = c_1 f_1 + \dots + c_d f_d$ является решением уравнения $Ax = 0$. Это означает, что все множество решений можно описать как линейную оболочку, натянутую на $f_1, \dots, f_d$.

Фундаментальная система решений

Пример 4. Допустим, мы нашли, что система

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

имеет общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений

При этом для этой системы также верно решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проверим являются ли эти решения эквивалентными. В обоих случаях используются линейно независимые столбцы. Проверим независимость прямо.

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \quad c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Фундаментальная система решений

Размерность первого решения равна 2, при этом столбцы

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

дают два линейно независимых решения системы

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

поэтому второе решение тоже правильное.

Базис

Определение. Столбцы $e_1, e_2, \dots, e_p$ называют базисом линейного пространства, если:

1. Эти столбцы линейно независимы,
2. Любой столбец этого линейного пространство – линейна комбинация этих столбцов.

Пример. Столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис пространства векторов длины 2.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Базис пространства решений называют фундаментальной системой решений системы (ФСР).

Системы неоднородных линейных уравнений

Обратимся теперь к системе неоднородных уравнений

$$Ax = b$$

Эта система может быть несовместна. Если эта система совместна и известно одно ее частное решение, скажем $x = f$, то всякое другое, скажем $x = g$, представимо как сумма f и некоторого решения однородного уравнения. В самом деле,

$$g = f + (g - f)$$

и

$$A(g - f) = Ag - Af = b - b = 0.$$

Сумма f и любого решения h однородного уравнения является решением исходного неоднородного уравнения, поскольку

$$A(f + h) = Af + Ah = b + 0 = b.$$

Системы неоднородных линейных уравнений

Теорема 3. Общее решение систем неоднородных линейных уравнений

$$Ax = b$$

есть сумма частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения

$$Ax = 0$$

С учетом теоремы 1 это означает, что общее решение систем неоднородных линейных уравнений имеет вид

$$x = f + c_1 f_1 + \cdots + c_d f_d,$$

где d – размерность множества решений системы

$$Ax = 0.$$

Системы неоднородных линейных уравнений

Пример 1. Общее решение системы

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ 2\,x + 3\,y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

дается формулой

$$\begin{cases} y = -4 + z, \\ x = 1 - z - y = 5 - 2z, \end{cases}$$

где $z \in \mathbb{R}$.

Системы неоднородных линейных уравнений

В матричном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2z \\ -4 + z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Здесь $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ - частное решение системы, а $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2\,x + 3\,y + z = 0 \end{cases}$$

Системы неоднородных линейных уравнений

Из теоремы 3 следует, что размерность множества решений совместной системы неоднородных уравнений не зависит от правой части. Однако правую часть иногда можно выбрать так, что система становится несовместной.

Вопросы для самопроверки

1. Как записать систему линейных уравнений в матричном виде?
2. Опишите алгоритм Гаусса решения СЛАУ. При каких обстоятельствах алгоритм уходит на ветку «нет решения»?
3. Что такое общее и частное решение СЛАУ?
4. Какие столбцы называют линейно независимыми? Что такое линейная оболочка? Как определяется понятие размерности линейной оболочки?
5. Сформулируйте и докажите лемму о размерности линейной оболочки.
6. Опишите, как устроено общее решение системы однородных линейных уравнений.
7. Опишите, как устроено общее решение системы неоднородных линейных уравнений.
8. Что такое размерность множества решений СЛАУ? Почему она не зависит от способа решения СЛАУ?