Лекция 2. Системы линейных уравнений и определители

Оглавление

Линейные уравнения

Уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

называют *линейным*. Здесь $x_1, x_2, \dots x_n$ – неизвестные, а $a_1, a_2, \dots, a_n$и b – коэффициенты уравнения, в их качестве могут выступать известные числа или функции каких либо параметров. Если $n = 2$ вместо x_1, x_2обычно используют x, y. Уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

имеет особое название, его называют *однородным линейным уравнением*.

Для решения систем линейных уравнений удобно использовать *Microsoft Mathematics*, специально разработанное бесплатное приложение под Windows, помогающие учащимся выполнять задания по математике и другим точным наукам.

Системы из двух уравнений

Пример

Рассмотрим какую-нибудь систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, напр.,

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 2y = 3, \end{cases}$$

Эту систему можно решить средствами MS Word. Кликнув по формуле

$$solve(\{x + y = 1, x - 2y = 3\})$$

правой кнопкой мыши и выбрав в меню пункт Решить, разу получим

$$\left(x = \frac{5}{3}, y = -\frac{2}{3}\right)$$

Более подробно с ходом решения можно ознакомиться в MSMath. Запустим MSMath и последуем советам справки:

> На вкладке *Главная* в группе *Сервис* выберите команду *Средство решения уравнений*.
> Выберите команду Решить 1 уравнение и пункт Решить систему из 2 уравнений.
> В поле *Уравнение 1* введите первое уравнение и щелкните поле *Уравнение 2*.
> Введите второе уравнение.
> Нажмите кнопку *Решить*.

В итоге появится ответ

$$solve(\{x + y = 1, x - 2y = 3\})$$

$$\left(x = \frac{5}{3}, y = -\frac{2}{3}\right)$$

а также пошаговое описание решения система тремя способами.

MSMath предлагает найти решение тремя способами:

> *Методом подстановки*. Чтобы решить систему двух уравнений методом подстановки, следует сначала решить одно из уравнений относительно одной из переменных. Затем результат подставляется вместо этой переменной во второе уравнение.
> *Методом исключения*. Для решения системы уравнений методом исключения, коэффициенты при одной из переменных в обоих уравнениях должны совпадать. Тогда эта переменная может быть исключена при вычитании одного уравнения из другого.
> Методом, использующим матрицы.

Первые два из них входят в школьный курс и пошагово описаны в MSMath.

Общий случай

Любым из этих двух способов нетрудно решить систему в общем виде, то есть с буквенными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

ответ:

$$solve(\{a_{11}x + a_{12}y = b_1, a_{21}x + a_{22}y = b_2\})$$

$$\left(x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right).$$

Таблица коэффициентов матрицы

	x	y
1-ое уравнение	a_{11}	a_{12}
2-ое уравнение	a_{21}	a_{22}

которую обычно кратко записывают как

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

называется *матрицей* линейной системы. Знаменатель выражений дляxи y зависит только от матрицы системы, его называют *определителем* или детерминантом матрицы и пишут:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приняв это, решение системы можно записать в виде

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Эти выражение для решения системы называют *формулами Крамера*, хотя в действительности Габриель Крамер (GabrielCramer, 1704-1752) понятием определителя не пользовался. Словами правило Крамера можно сформулировать так:

Правило Крамера. Чтобы отыскать подходящее значение x (первая переменная), следует заменить в матрице системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

первый столбец на столбец правых частей

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

и разделить определитель этой матрицы на определитель системы. Чтобы отыскать подходящее значение y (вторая переменная), следует заменить в матрице системы второй столбец на столбец правых частей и разделить определитель этой матрицы на определитель системы.

Пример. Для системы

$$\begin{cases} 5x + y = 1, \\ x + 2y = 3, \end{cases}$$

имеем

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 9,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 14;$$

откуда

$$\left(x = -\frac{1}{9}, y = \frac{14}{9}\right).$$

Проверка.

$$\mathrm{solve}(\{5x + y = 1, x + 2y = 3\})$$

$$\left(x = -\frac{1}{9}, y = \frac{14}{9}\right)$$

Вырожденные случаи

Правило Крамера работает почти при всех значениях коэффициентов уравнения. Однако может представиться особый или, как еще говорят, вырожденный случай, когда определитель системы равен нулю.

Если

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

то

$$a_{11}\, a_{22} = a_{12}\, a_{21}$$

или

$$a_{11} : a_{21} = a_{12} : a_{22}$$

Обозначим это отношение как μ. Это означает, что коэффициенты первого уравнения

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

больше от коэффициентов второго уравнения

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

в μ раз. Таким образом, система в этом вырожденном случае имеет вид

$$\begin{cases} \mu \cdot (a_{21}x + a_{22}y) = b_1, \\ \quad a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Эта система совместна, то есть вообще имеет решение, в том и только в том случае, когда

$$b_1 = \mu\, b_2$$

то есть когда уравнения системы отличаются только на мультипликативную константу μ.
Уравнение

$$\mu \cdot (a_{21}x + a_{22}y) = \mu\, b_2$$

без ущерба можно просто выкинуть из системы.

Теорема 1. Если определитель системы двух уравнений с двумя неизвестными равен нулю, то возможно два случая:

система не имеет решений,
уравнения системы отличаются только на мультипликативную константу μ, и тогда второе уравнение можно удалить без изменения множества его решений.

Замечание. Запись

$$a_{11} : a_{21} = a_{12} : a_{22}$$

может быть использована даже тогда, когда, напр., $a_{21} = 0$. В этом случае она означает, что

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$$

Поэтому мы не рассматриваем этот случай отдельно.

Пример. Система

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

не имеет решения. Попытка применить

$$solve\{x + y = 1, 2\,x + 2\,y = 1\}$$

выдает ошибку.

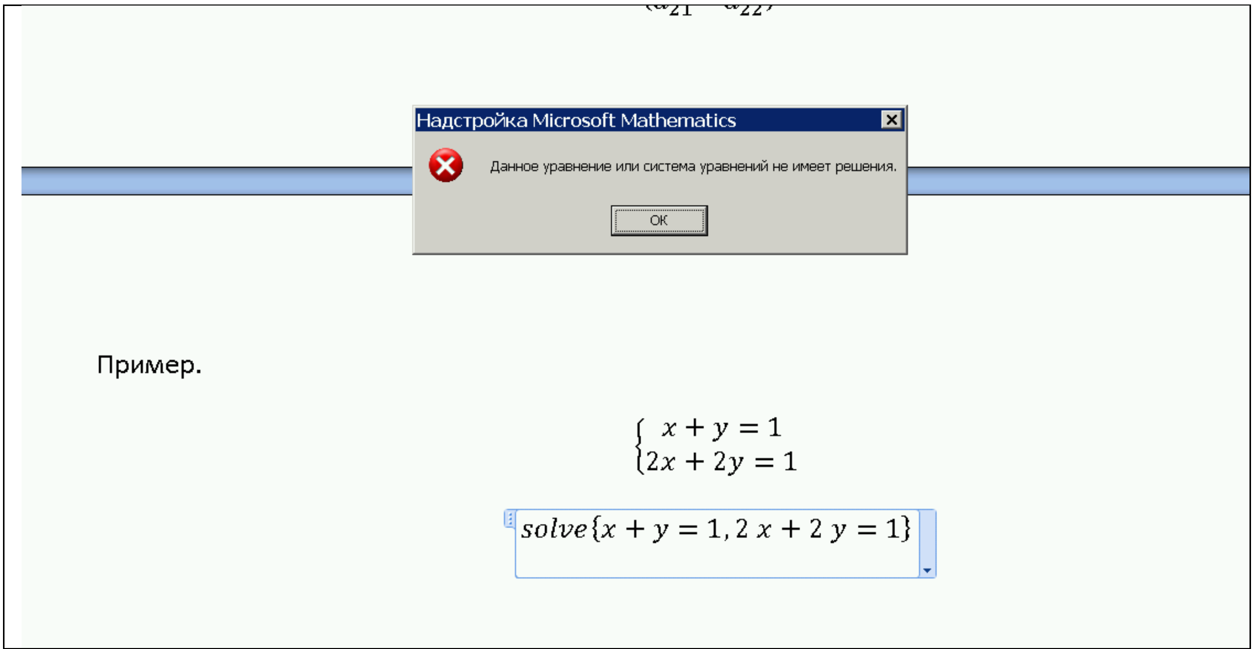

Рис. 1. Ошибка, которую выдает MSMath при попытке решения несовместной системы.

Геометрическая интерпретация

Если интерпретировать xy как декартов координаты, то всякое линейное уравнение

$$ax + by + c = 0$$

задает прямую на плоскости xy. Мы примем это за определение.

Определение. Множество точек на плоскости xy, координаты которых, удовлетворяют уравнению

$$f(x, y) = 0$$

будем называть линией. Множество точек на плоскости xy, координаты которых, удовлетворяют линейному уравнению

$$ax + by + c = 0$$

будем называть прямой линией.

Пример. Уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

задает линию, которую называют окружностью.

Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

-- это значит, найти координаты точек пересечения линий $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$.

Пример. Прямая $y = x$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 1$ в двух точках. Их координаты – корни системы

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Эту систему, как и линейные системы, решают методом исключения. Исключая y, имеем

$$2x^2 = 1$$

У этого квадратного уравнения два корня:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Поэтому искомые точки пересечения суть

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ и } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Две прямые пересекаются в одной точке, поэтому система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет одно решение. Имеется два исключения из этого правила:

линейные уравнения задают пару параллельных прямых, которые не пересекаются, а следовательно, система, составленная из этих уравнений, не имеет решения, линейные уравнения задают одну и ту же прямую линю, а следовательно, система, составленная из этих уравнений, имеет бесконечно много решений.

Нетрудно видеть, что эти случаи совпадают с вырожденными случаями, описанными в теореме 1.

Отсюда в частности видно, что несовпадающие друг с другом прямые

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \text{ и } a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

параллельны в том и только в том случае, когда определитель

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Пример. Система

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

несовместна, поскольку прямые $x + y = 1$ и $2x + 2y = 1$ параллельны.

$show2d(Ploteq2d(x + y = 1), PlotEq2d(2x + 2y = 1))$

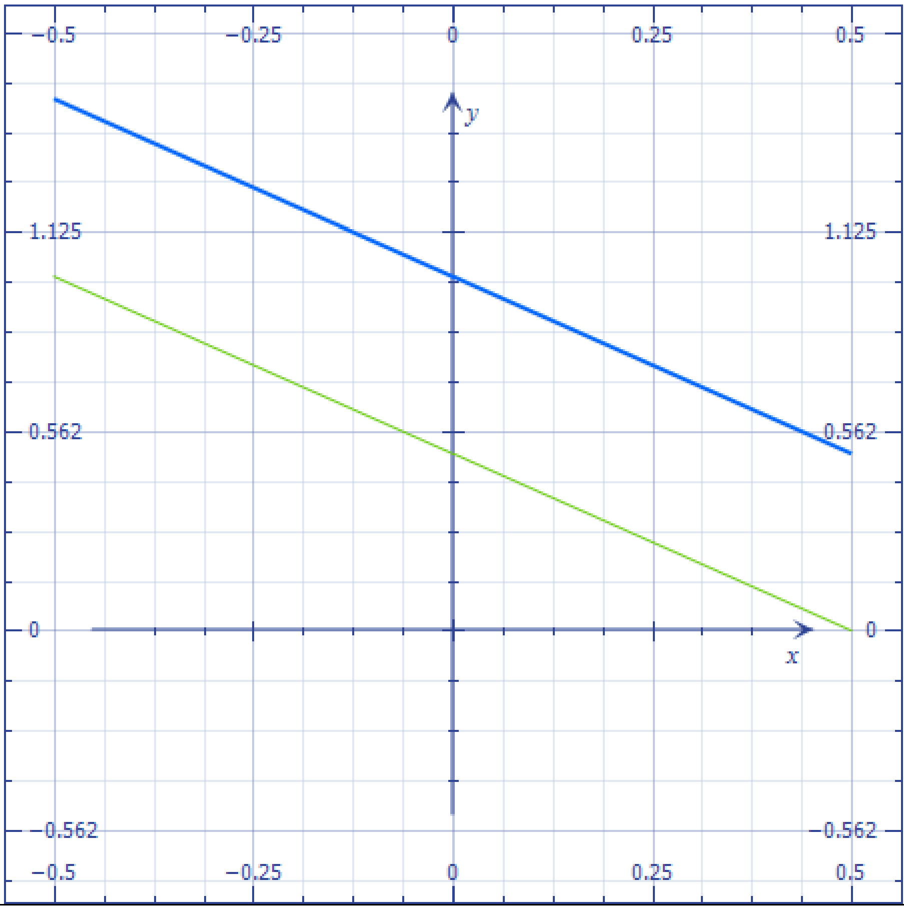

Рис. 2. Параллельные прямые.

Вырожденные случаи

Правило Крамера работает почти при всех значениях коэффициентов уравнения. Однако может представиться особый случай, когда определитель системы равен нулю.

Если

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Системы с тремя неизвестными

Пример

Система

$$solve(\{x + y + z = 1{,}2x + y = 3, x + z = 1\})$$

имеет своим решением

$$\left(x = \frac{3}{2}, y = 0, z = -\frac{1}{2}\right)$$

Общий случай

Рассмотрим общую систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Решив систему в общем виде, то есть с буквенными коэффициентами, получим труднообозримые формулы. Напр., для z выходит

$$solve(\{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3\}, \{x, y, z\})$$

$$z = \frac{b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

Общим знаменателем выражений для x, y и z служит выражение

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

которое опять зависит от элементов матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

но не от столбца правой части системы

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Его называют *определителем* матрицы системы:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Напр.,

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1 - 0 - 0 + 0 + 0 - 4 = -3.$$

Не выяснив принцип, по которому берутся слагаемые и их знаки, применять эту формулу трудно.

Сравнивая числитель и знаменатель выражения

$$z = \frac{b_1 a_{21} a_{32} - b_1 a_{22} a_{31} - b_2 a_{11} a_{32} + b_2 a_{12} a_{31} + b_3 a_{11} a_{22} - b_3 a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}},$$

можно заметить, что в числителе на месте a_{33}стоит b_3, на месте a_{23} - b_2, а на месте a_{13} - b_1, то есть в числителе стоит определитель, которой получается из определителя системы путем замены последнего столбца на столбец правых частей.

Правило Крамера. Чтобы отыскать подходящее значение x (первая переменная), следует заменить в матрице системы первый столбец на столбец правых частей и разделить определитель этой матрицы на определитель системы. Чтобы отыскать подходящее значение y (вторая переменная), следует заменить в матрице системы второй столбец на столбец правых частей и разделить определитель этой матрицы на определитель системы и т.д.

Пример.

$$\begin{cases} x + y + z = 1\\ 2x + y = 3\\ x + z = 1\end{cases}$$

Решение. Составим матрицу коэффициентов и столбец правых частей:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}1\\ 3\\ 1\end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель системы

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = -2$$

и применяем правило Крамера

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = -3 \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{2},$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; y = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1 \;\Rightarrow\; z = -\frac{1}{2}.$$

Проверка:

$$solve(\{x + y + z = 1, 2x + y = 3, x + z = 1\})$$

$$\left(x = \frac{3}{2}, y = 0, z = -\frac{1}{2}\right)$$

Определители матриц

Мы определили выше определитель явной формулой

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

что удобно для вычисления на ЭВМ, но весьма трудно для восприятия человека. Для вычисления на руках наиболее удобно правило раскрытия определителя по первой строке.

Рассмотрим определитель как функцию элементов первой строки, считая прочие элементы матрицы фиксированными. Имеем:

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$x\, a_{22}a_{33} - x\, a_{23}a_{32} + y\, a_{23}a_{31} - y\, a_{21}a_{33} + z\, a_{21}a_{32} - z\, a_{22}a_{31} =$$

$$x\,(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + y\,(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + z\,(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Таким образом, определитель является линейной однородной функцией элементов первой строки.

В данном случае, коэффициент приxравен

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то есть определителю матрицы 2 на 2, которая получится из исходной вычеркиванием строки и столбца, в которых стоит x. Коэффициент приyравен

$$a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} = -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то есть получается тем же путем, но только со знаком минус. Наконец, коэффициент при z получается тем же путем, но опять со знаком плюс. В итоге мы получаем следующее *правило вычисления определителя по первой строке.*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$+a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = +1\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{pmatrix} = -3 - 2(-6) + 3(-3) = 0.$$

Порядок членов в определителе, посчитанном в MSMath., вполне недвусмысленно указывает на то, что в этом пакете определители считаются именно по этой формуле.

Правило раскрытия определителя не хочется принимать за определение, поскольку оно зачем-то особо выделяет первое уравнение системы. В XIX века предпочитали другие описания этого объекта, наиболее простое для восприятие было предложено Вейерштрассом.

Определение. Функция вида

$$\sum_{i=1}^{n} c_n\, x_n$$

называется линейной однородной функцией переменных $x_1, \dots, x_n$, а константы $c_1, \dots, c_n$– еекоэффициентами.

Определение (Вейерштрасс)**.** Многочлен f от коэффициентов матрицы a_{ij} называется определителем, если выполнены следующие три условия:

f является линейной однородной функцией в связи с элементами любой из строк матрицы,
при перестановке любых двух строк местами, определитель меняет свой знак,
определитель единичной матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

равен 1.

Вейерштрасс доказал, что эти три свойства определяют многочлен однозначно[1].

При вычислении определителя полезно помнить, что определитель с двумя равными строками равен нулю, поскольку при их перестановке определитель с одной стороны меняет знак (2-е свойство), а с другой должен остаться тем же.

Геометрическая интерпретация
Если интерпретировать xyz как декартов координаты, то всякое линейное уравнение

$$ax + by + cz + d = 0$$

задает плоскость в пространстве xyz. Мы примем это за определение.

Определение. Множество точек в пространстве xyz, координаты которых, удовлетворяют уравнению

$$f(x, y, z) = 0$$

будем называть поверхностью. Множество точек в пространстве xyz, координаты которых, удовлетворяют уравнению

$$ax + by + cz + d = 0$$

[1] Kochendoerffer R. Determinanten und Matrizen, Teubner, 1957. P. 20

будем называть плоскостью.

Пример. Уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

задает поверхность, которую называют сферой.

Напомним несколько фактов из геометрии. Две плоскости пересекаются по прямой линии, поэтому система двух линейных уравнений с 3-мя неизвестными всегда имеет бесконечное число решений.

Замечание. Для поверхностей сказанное не верно. Напр., две сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

и

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

не имеют точек пересечения.

В общем случае, три плоскости пересекаются в одной точке, поэтому система 3 линейных уравнений с 3-мя неизвестными имеет в точности одно решение – координаты точки пересечения.

Пример. Система

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

описывает пересечение трех плоскостей, которые пересекаются в точке

$$\left(x = \frac{3}{2}, y = 0, z = -\frac{1}{2}\right)$$

$show3d(PlotEq3d(x + y + z = 1), PlotEq3d(2x + y = 3), PlotEq3d(x + z = 1))$

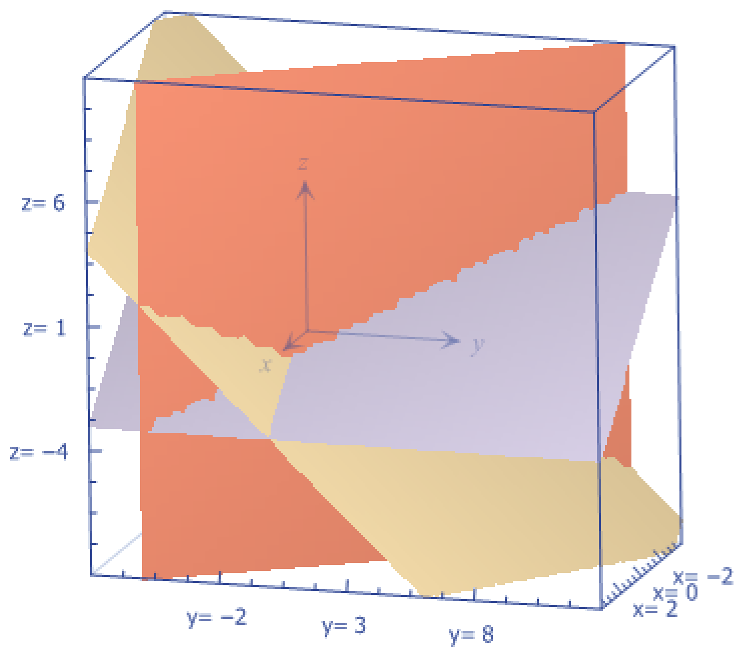

Рис. 3. Пересечение 3-х плоскостей.

Имеется два исключения из этого правила:

две из трех плоскостей параллельны,
третья плоскость проходит через прямую, по которой пересекаются первые две плоскости,
три плоскости совпадают друг с другом

Во всех этих случаях точек пересечения или бесконечно много, или нет ни одной. Это означает, что во всех этих случаях правило Крамера не работает. Нашей ближайшей задачей будет показать, что этими случаями исчерпываются все случаи неприменимости правила Крамера.

Вырожденные случаи

Правило Крамера не применимо, если определитель системы равен нулю. Ключом к исследованию всех вырожденных случаев служит следующее наблюдение.

Система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

всегда совместна, поскольку она всегда имеет решение

$$x = y = z = 0,$$

которое называют тривиальным.

Теорема 2. Система линейных однородных уравнений имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда ее определитель равен нулю.

Док-во. (i) Пусть определитель равен нулю

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда

$$+a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Это означает, что выбрав

$$x = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad y = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad z = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

мы удовлетворим первому уравнению системы

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0.$$

Подставив эти значения во второе уравнение системы

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0,$$

мы получим в левой части

$$+a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{23}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

или

$$\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

У этого определителя совпадают 1 и 2 строки, поэтому он равен нулю. Стало быть, второе уравнение тоже удовлетворяется. Аналогично доказывается, что удовлетворяется и третье уравнение системы.

Если среди определителей

$$x = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad y = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad z = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

имеются отличные от нуля, то теорема доказана, в противном случае

$$a_{22}: a_{32} = a_{23}: a_{33}, \qquad a_{21}: a_{31} = a_{23}: a_{33}, \qquad a_{21}: a_{31} = a_{22}: a_{32}$$

или

$$a_{21}: a_{31} = a_{22}: a_{32} = a_{23}: a_{33}$$

Это означает, что второе и третье уравнение отличаются только на мультипликативную константу, то они задают одну и ту же плоскость и поэтому утверждение очевидно.

(ii) Пусть однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

Тогда

$$x = cx_0, \qquad y = cy_0, \qquad z = cz_0$$

при любом значении мультипликативной константы c тоже будет решением системы. Следовательно, система имеет бесконечное число решений и к ней не применимо правило Крамера. Это означает, что определитель системы равен нулю.

Теорема 3. Если определитель неоднородно системы равен нулю, то эта система или имеет бесконечно много решений, или ни одного.

Док-во. Пусть система

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

имеет решение

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1.$$

Если ее определитель равен нулю, то в силу пред. теоремы однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

В таком случае, выражения

$$x = x_1 + cx_0, \qquad y = y_1 + cy_0, \qquad z = z_1 + cz_0$$

тоже дают решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Таким образом, эта система имеет бесконечное число решений, что и тр. д.

Доказанная теорема означает, что в том случае, когда не работает правило Крамера, система или имеет бесконечно много решений, или ни одного. Возвращаясь к геометрической интерпретации можно сказать, что множество точек пересечения трех плоскостей

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

не сводится к одной точке тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю.

Выяснить, совместна ли система уравнений, или нет проще всего школьными методами.

Пример 1. Определитель системы

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

равен нулю, поэтому к ней не применимо правило Крамера. Применим метод исключения. Из первого уравнения

$$x + 2y + 3z = 1$$

получается, что

$$x = 1 - 3\,z - 2\,y$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$4(1 - 3\,z - 2\,y) + 5y + 6z - 2 = 0$$

или

$$2 - 6\,z - 3\,y = 0,$$

а подставляя в третье уравнение, получим

$$7(1 - 3\,z - 2\,y) + 8y + 9z = 0$$

или

$$7 - 12\,z - 6\,y = 0.$$

Теперь из второго уравнения получается

$$y = \frac{2}{3} - 2\,z,$$

подстановка этого выражения в третье уравнение дает

$$7-12\,z-6\left(\frac{2}{3}-2\,z\right)=0$$

или

$$3=0$$

что невозможно. Поэтому система несовместна.

Пример 2. Определитель системы

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=2 \\ 7x+8y+9z=3 \end{cases}$$

равен нулю, поэтому к ней не применимо правило Крамера. Применим метод исключения. Из первого уравнения

$$x+2y+3z=1$$

получается, что

$$x=1-3\,z-2\,y$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$4(1-3\,z-2\,y)+5y+6z-2=0$$

или

$$2-6\,z-3\,y=0,$$

а подставляя в третье уравнение, получим

$$7(1-3\,z-2\,y)+8y+9z-3=0$$

или

$$4-12\,z-6\,y=0.$$

Таким образом, получается два уравнения, отличающихся с точностью до мультипликативной константы. Отбрасывая одно из них имеем лишь систему 2- уравнений с 3-мя неизвестными:

$$solve\{x=1-3\,z-2\,y, 2-6\,z-3\,y=0\}$$

$$\left(x=z-\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}-2\,z\right)$$

При этом z можно придавать любые значений. Итак, система имеет бесконечно много решений.

Системы n уравнений

Понятие определителя можно распространить на квадратные матрицы любого размера таким образом, чтобы правило Крамера без изменений распространялось на системы n уравнений с n неизвестными без изменений.

Правило Крамера. Чтобы отыскать подходящее значение x (первая переменная), следует заменить в матрице системы первый столбец на столбец правых частей и разделить определитель этой матрицы на определитель системы. Чтобы отыскать подходящее значение y (вторая переменная), следует заменить в матрице системы второй столбец на столбец правых частей и разделить определитель этой матрицы на определитель системы и т.д.

Определение определителя по Вейерштрассу остается в силе, равно как и правило вычисления определителя по первой строке. Разумеется, MSMathyмеет вычислять определители любого порядка. Напр.,

$$det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix} = 8.$$

Теоремы 2 и 3 остаются в силе в любой размерности. Иными словами, если правило Крамера не применимо (то есть если определитель равен нулю), то система или имеет бесконечно много решений, или ни одного.

Правило Крамера и теория определителей создавались для решения следующих двух задач, хотя, как мы увидим в дальнейшем, находят приложения и в других областях.

Задача 1. По правилу Крамера найдите x-совую координату решения системы

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 2 \\ 2x + 3y = 3 \\ z - t = 4 \end{cases}$$

Решение.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = -7$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = -30$$

$$x = \frac{30}{7}$$

Проверка.

$$solve\{x + y + z + t = 1, x - y + z + 2\,t = 2, 2\,x + 3\,y = 3, z - t = 4\}$$

$$\left(x = \frac{30}{7}, y = -\frac{13}{7}, z = \frac{9}{7}, t = -\frac{19}{7}\right)$$

Задача 2. При каких значениях параметра t совместна система

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5ty + 6z = 0? \\ x + y + tz = 0 \end{cases}$$

Решение. Эта система может быть несовместна, только если ее определитель равен нулю.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5t & 6 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} = 0$$

$$5\,t^2 - 23\,t + 18 = 0$$

$$t = 1 \text{ или } t = \frac{18}{5}$$

Если $t = 1$, то получается система

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения x, получим

$$x = 1 - 3\,z - 2\,y$$

Подставляя это в оставшиеся два, получим систему

$$\begin{cases} 4 - 6\,z - 3\,y = 0 \\ 1 - 2\,z - y = 0 \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 3, сразу видим, что система несовместна.

Если $t = \frac{18}{5}$, то получается система

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 18y + 6z = 0 \\ x + y + \dfrac{18}{5}z = 0 \end{cases}$$

Тем же путем убеждаемся, что она тоже не совместна.

Ответ: система совместна при всех значениях t, отличных от 1 и $\frac{18}{5}$.

Домашнее задание

Теоретические вопросы

1. Что такое матрица? Что такое определитель?
2. Сформулируйте правило вычисление определителя по первой строке. Докажите его для матриц размера 3 на 3.
3. Сформулируйте правило Крамера. Докажите его для случая систем с 2-мя неизвестными.
4. Что можно сказать о решении системы
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$
если ее определитель равен нулю? Дайте ответу геометрическую интерпретацию.
5. Что можно сказать о решении системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0, \end{cases}$$

если ее определитель равен нулю? Дайте ответу геометрическую интерпретацию.

6. Что можно сказать о решении системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_{3,} \end{cases}$$

если ее определитель равен нулю?

Задачи

1. Вычислите следующие определители.
   a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,
   b) $\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,
   c) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Решите по правилу Крамера систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + z = 0, \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

по правилу Крамера и одним из школьных методов. Сравните ответы.

4. При каких значениях параметра t система

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + ty = 3 \end{cases}$$

совместна?

5. При каких значениях параметра t система

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 3tz = t \end{cases}$$

совместна?

6. При каких значениях t система из пред. номера имеет бесконечно много решений?
7. При каких значениях параметра t система

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + ty + z = 2 \\ 3x + 3y + 4tz = 0 \end{cases}$$

совместна?

8. При каких значениях t система из пред. номера имеет бесконечно много решений?