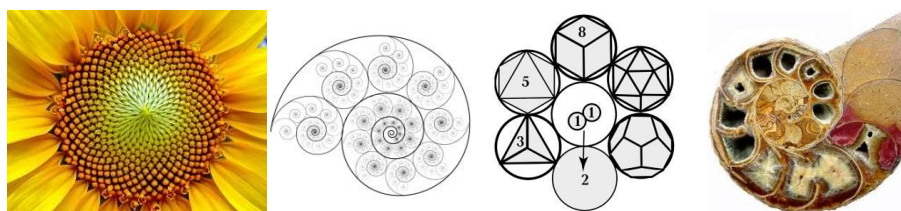


Э.Р. Зарипова, М.Г. Кокотчикова



**ЛЕКЦИИ ПО ДИСКРЕТНОЙ
МАТЕМАТИКЕ
ЧАСТЬ I. КОМБИНАТОРИКА
Учебное пособие**

Москва

2012

Э.Р. Зарипова, М.Г. Кокотчикова

**ЛЕКЦИИ ПО ДИСКРЕТНОЙ
МАТЕМАТИКЕ
ЧАСТЬ I. КОМБИНАТОРИКА
Учебное пособие**

Москва

Российский университет дружбы народов

2012

УДК 519.1

ББК 22.12

Утверждено
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

*Рецензент – доктор физико-математических наук, профессор
Л.А. Севастьянов.*

3 34 Лекции по дискретной математике. Часть I. Комбинаторика, :
[Учеб. пособие.]: Э.Р. Зарипова, М.Г. Кокотчикова. – М.:
РУДН, 2012. – 78 с.

ISBN 978-5209-04949

В пособии излагаются основы комбинаторики и комбинаторных алгоритмов.

Предназначено для студентов I, II курсов математических специальностей.

Подготовлено на кафедре систем телекоммуникаций.

ББК 22.12

© Российский университет дружбы народов, Издательство, 2012

© Э.Р. Зарипова, М.Г. Кокотчикова, 2012.

Лекция 1. Введение в комбинаторику. Некоторые области применения задач комбинаторики. Прямое произведение множеств. Правило суммы и правило произведения для конечных множеств. Принцип Дирихле. Размещения без повторений, размещения с повторениями, сочетания без повторений, сочетания с повторениями, перестановки. Мультимножество

Введение в комбинаторику. Некоторые области применения задач комбинаторики

Представителям самых различных специальностей и профессий приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр, объектов. Вот некоторые примеры:

- задача составления расписания;
- в химии: рассмотрение всевозможных связей между атомами и молекулами;
- решение транспортных задач;
- планы реализации какой-либо продукции;
- задачи составления и декодирования шифров.

Определение 1. Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из данных объектов, называется **комбинаторикой**.

Комбинаторика является частью науки дискретной математики. На рис. 1.1 показаны части дискретной математики.

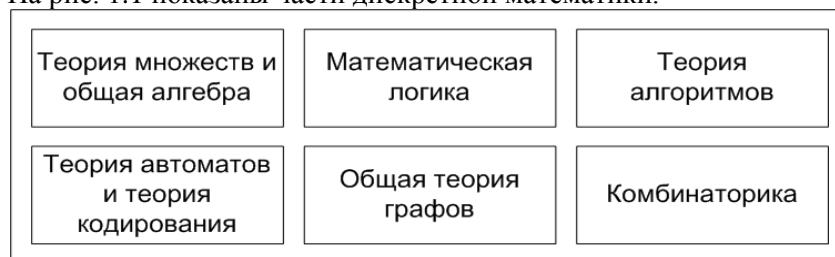


Рис. 1.1. Разделы дискретной математики

Прямое произведение множеств

Определение 2. Множеством называется неупорядоченный набор различных элементов.

Множества обозначаются большими латинскими буквами A, B, C ...

Запись $|A| = n$ означает, что мощность конечного множества A равна n или множество A содержит n элементов.

Определение 3. $A \times B \{(a, b): a \in A, b \in B\}$ – прямое произведение множеств.

Правило суммы и правило произведения

Правило суммы: если объект из множества A можно выбрать m способами, а объект из множества B можно выбрать другими n способами, то выбор "либо из A , либо из B " может быть осуществлен $m + n$ способами.

1. Если на одной тарелке лежат 3 яблока, то выбрать одно яблоко можно 3 способами. Если на другой тарелке лежат 4 груши, то выбрать одну грушу можно 4 способами. А выбрать один фрукт можно $3+4=7$ способами.

Обобщенное правило суммы: если объект из множества A_1 можно выбрать m_1 способами, после этого объект из множества A_2 можно выбрать другими m_2 способами и так далее, объект из множества A_n можно выбрать m_n способами, то выбор "либо из A_1 , либо из A_2 , ... либо из A_n " может быть осуществлен $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ способами.

Правило произведения: если объект из множества A можно выбрать m способами, и после каждого из таких выборов объект из множества B можно выбрать n способами, то выбор " A и B " может быть осуществлен $m \times n$ способами.

2. В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

Решение: Действие, которое должно быть выполнено особым способом, необходимо выполнять первым. Итак, на место водителя можно посадить только одного из трех человек (умеющего водить машину), т.е. существуют три способа занять первое место. Второе место может занять любой из 6 человек, оставшихся после

того, как место водителя будет занято и т.д. Используя принцип умножения, получаем произведение:

$$3 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 6! = 3 \times P(6) = 3.$$

Ответ: 2160 способов.

Принцип Дирихле

Принцип Дирихле: если в n ящиков положено более чем n предметов (кроликов), то хотя бы в одном ящике может лежать 2 и более предметов (кролика).

3. Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату – 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

Решение: Если бы каждый из рабочих мог купить магнитофон, то у них в сумме было бы не менее $5 \times 320 = 1600$ рублей.

4. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Решение: Перед нами миллион «кроликов» – елок и, увы, всего лишь 600 001 клетка с номерами от 0 до 600 000. Каждый «кролик» – елка сажается нами в клетку с номером, равным количеству иголок на этой елке. Так как «кроликов» гораздо больше, чем клеток, то в какой-то клетке сидит по крайней мере два «кролика»: если бы в каждой сидело не более одного, то всего «кроликов»-елок было бы не более 600 001 штуки. Но ведь если два «кролика» – елки сидят в одной клетке, то количество иголок у них одинаково.

Размещения, сочетания, перестановки

Рассмотрим множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Определение 4. Набор элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \in A$ называется выборкой объема r из n элементов, или (n, r) - выборкой.

На рис.1.2 представлены все типы воборок, а далее их определения.

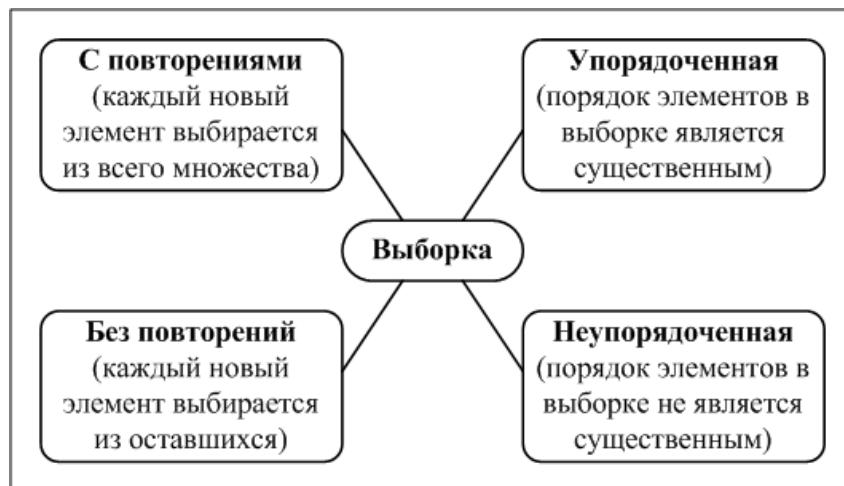


Рис. 1.2. Виды выборки

Определение 5. Упорядоченная выборка без повторений называется **размещением** из n элементов по r .

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} - \text{число различных размещений.}$$

Определение 6. Упорядоченная выборка с повторениями называется **размещением с повторениями** из n элементов по r .

$$\widehat{A}_n^r = n^r - \text{число различных перестановок с повторением.}$$

Определение 7. Неупорядоченная (n, r) - выборка без повторений называется **сочетанием** из n элементов по r .

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!} - \text{число различных сочетаний.}$$

Определение 8. Неупорядоченная (n, r) - выборка с повторениями называется **сочетанием с повторениями** из n элементов по r .

$$\widehat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1} - \text{число различных сочетаний с повторениями.}$$

Определение 9. Упорядоченная (n, n) - выборка без повторений называется **перестановкой** из n элементов (по n).

$$P(n) = n! - \text{число различных перестановок.}$$

#5. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $r=2$. Выписать все изветные выборки и посчитать их количество.

$$\text{Размещения: } ab, ac, ba, bc, ca, cb; A_3^2=6.$$

Размещения с повторениями: $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$;
 $\widehat{A_3^2} = 9$.

Сочетания: ab, ac, bc ; $C_3^2 = 3$.

Сочетания с повторением: aa, ab, ac, bb, bc, cc ; $\widehat{C_3^2} = 9$.

Перестановки: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, $P(3) = 3! = 6$.

6. Сколькими способами читатель может выбрать две книги из шести имеющихся?

Число способов равно числу сочетаний из шести книг по две, т.е. равно: $C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = 15$.

Ответ: 15 способов.

7. Сколько существует способов составить очередь в магазин из 8 человек?

На 1 место можем поставить 8 человек, на 2-е – 7 человек, на 3 – 6 и т. д., получаем:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40\,320 \text{ способов.}$$

Ответ: 40 320 способов.

Мультимножество

Определение 10. **Мультимножеством** называется неупорядоченный набор элементов, которые могут повторяться.

Определение 11. Пусть дано мультимножество $\mathcal{M} = \{a, a, \dots, a, b, b, \dots, b, \dots, x, x, \dots, x\}$, $|\mathcal{M}| = n$, оно содержит k типов элементов, элемент a повторяется r_1 раз, b – повторяется r_2 раз, ... x – r_k раз. Тогда число различных перестановок элементов мультимножества определяется по формуле:

$$P(a, a, \dots, a, b, b, \dots, b, \dots, x, x, \dots, x) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}, \quad \text{где } r_1 + r_2 + \dots + r_k = n.$$

8. Чему равно число способов составить слово из букв слова «КОМБИНАТОРИКА»?

Решение: Число букв равно 13.

$$P(к2, о2, м1, б1, и2, н1, а2, т1, р1) = \frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 389\,188\,800 \text{ способов.}$$

Ответ: 389 188 800 способов.

Лекция 2. Основные тождества, связанные с числом сочетаний. Бином Ньютона. Следствия из теоремы о бинOME Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов

По определению число сочетаний C_n^r – это число различных r -элементных подмножеств n -элементного множества. Числа C_n^r встречаются в формулах решения многих комбинаторных задач.

Основная формула для числа сочетаний

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

позволяет получить ряд простых тождеств. Рассмотрим некоторые из них.

Основные тождества, связанные с числом сочетаний

Теорема 2.1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство.

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k \square.$$

Теорема 2.2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Доказательство.

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k \square$$

Теорема 2.3. $C_n^k C_k^r = C_{n-r}^{k-r} C_n^r$.

Доказательство.

$$C_n^k C_k^r = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-r)!r!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!}; \quad (*)$$

$$C_{n-r}^{k-r} C_n^r = \frac{(n-r)!}{(n-r-k+r)!(k-r)!} \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!}; \quad (**)$$

$$(*) = (**) \square$$

Теорема 2.4 (тождество Коши). $C_{n+r}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i C_r^{k-i}$.

Доказательство.

C_{n+r}^k – это число способов выбрать k предметов из $n+r$ предметов. Предметы можно выбирать в два приема: сначала выбрать i предметов из первых n предметов, а затем выбрать остальные $k-i$

предметов из оставшихся r предметов. \square

Бином Ньютона

Числа сочетаний C_n^r присутствуют в известной формуле бинома Ньютона, откуда они получили название биномиальных коэффициентов.

Теорема 2.4 (Бином Ньютона).

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} \quad (2.1)$$

Доказательство. По индукции.

База индукции: проверим при $n = 1$

$$(x + y)^1 = 1 \cdot x^1 \cdot y^0 + 1 \cdot x^0 y^1 = \sum_{k=0}^1 C_1^k x^k y^{1-k} \quad (2.1) - \text{верно.}$$

Индуктивное предположение. Предположим, что формула (2.1) верна для $n - 1$: $(x + y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-1-k}$.

Шаг индукции. Необходимо доказать, что формула верна для n .

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= (x + y)(x + y)^{n-1} = (x + y) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-1-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x C_{n-1}^k x^k y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} y C_{n-1}^k x^k y^{n-1-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k} = \{ \text{сгруппируем подобные} \} = \\ &= C_{n-1}^0 x^1 y^{n-1} + C_{n-1}^1 x^2 y^{n-2} + \dots + C_{n-1}^{n-2} x^{n-1} y^1 + C_{n-1}^{n-1} x^n y^0 + \\ &+ C_{n-1}^0 x^0 y^n + C_{n-1}^1 x^1 y^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-2} x^{n-2} y^2 + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} y^1 = \\ &= \{ \text{приведем подобные} \} = \\ &= x^1 y^{n-1} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + x^2 y^{n-2} (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + \dots + \\ &+ C_{n-1}^{n-1} x^n y^0 + C_{n-1}^0 x^0 y^n = \{ \text{по свойству } C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k \} = \\ &= x^1 y^{n-1} C_n^1 + x^1 y^{n-1} C_n^2 + \dots + x^{n-2} y^2 C_n^{n-2} + x^{n-1} y^1 C_n^{n-1} + C_n^n x^n y^0 + \\ &+ C_n^0 x^0 y^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}. \quad \square \end{aligned}$$

Следствия из теоремы о бинOME Ньютона

Следствие 1. $(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$.

Доказательство. Пусть $y = 1$ в теореме 2.4.

Тогда $(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k 1^{n-k}$.

Следствие 2. $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.

Доказательство. Пусть $x = 1, y = 1$ в теореме 2.4.

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r \cdot 1^r \cdot 1^{n-r} = \sum_{r=0}^n C_n^r. \square$$

Следствие 3. $\sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r = 0$.

Доказательство. Пусть $x = -1, y = 1$ в теореме 2.4.

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r (-1)^r 1^{n-r} = \sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r. \square$$

Свойства биномиальных коэффициентов

Биномиальные коэффициенты обладают рядом интересных свойств, некоторые сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 2.5. $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$

Доказательство. По следствию 1 к теореме 2.4

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

Дифференцируем по x : $((x + 1)^n)' = (\sum_{k=0}^n C_n^k x^k)'$, отсюда получаем $n(x + 1)^{n-1} = \sum_{k=0}^n C_n^k k x^{k-1}$.

Пусть $x = 1$, тогда $n 2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k k$. \square

Теорема 2.6. $m^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (m - 1)^k$.

Доказательство. По следствию 1 к теореме 2.4:

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

При $x = m - 1$ получаем:

$$((m - 1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (m - 1)^k 1^{n-k} \Leftrightarrow m^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (m - 1)^k \quad \square$$

Лекция 3. Треугольник Паскаля. Некоторые свойства треугольника Паскаля. Свойства шестиугольника для треугольника Паскаля. Разбиение множеств. Числа Стирлинга второго рода

Треугольник Паскаля

Определение 12. Треугольник Паскаля – бесконечная числовая таблица треугольной формы, по боковым сторонам которой стоят 1 и всякое число, кроме этих боковых единиц получается как сумма двух предшествующих (рис. 1.3).

Треугольник Паскаля

0:					1														
1:					1	1													
2:					1	2	1												
3:					1	3	3	1											
4:					1	4	6	4	1										
5:					1	5	10	10	5	1									
6:					1	6	15	20	15	6	1								
7:					1	7	21	35	35	21	7	1							
8:					1	8	28	56	70	56	28	8	1						
9:					1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
10:					1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				
11:					1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
12:					1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		
13:					1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
14:					1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Рис. 3.1. Треугольник Паскаля

Некоторые свойства треугольника Паскаля

- Второе число каждой строки соответствует ее номеру.
- Третье число каждой строки равно сумме номеров строк, ей предшествующих.
- Если вычесть из центрального числа в строке с четным номером соседнее число из той же строки, то получится число Каталана.
- Сумма чисел i -той строки треугольника Паскаля равна 2^n .
- Свойства шестиугольника для треугольника Паскаля:

$$C_{n-1}^{k-1} C_n^{k+1} C_{n+1}^k = C_{n-1}^k C_n^{k-1} C_{n+1}^{k+1}$$

Свойства шестиугольника

$$C_{n-1}^{k-1} C_n^{k+1} C_{n+1}^k = C_{n-1}^k C_n^{k-1} C_{n+1}^{k+1}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} C_n^{k+1} C_{n+1}^k &= \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \end{aligned}$$

$$C_{n-1}^k C_n^{k-1} C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} \quad \square$$

Разбиения множеств

Под **разбиением** n -элементного множества A на k блоков будем понимать произвольное семейство $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$, такое что $B_1 \cup \dots \cup B_k = A$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i < j \leq k$ и $B_i \neq \emptyset$ для $1 \leq i \leq k$. Подмножества B_1, \dots, B_k будем называть блоками се-

мешества π . Множество всех разбиений множества A на k блоков будем обозначать $\Pi_k(A)$, а множество всех разбиений через $\Pi(A)$.

Числа Стирлинга второго рода

Определение 13. Число Стирлинга второго рода $S(n, k)$ есть число разбиений n -элементного множества на k блоков:

$$S(n, k) = |\Pi_k(A)|, \text{ где } |A| = n.$$

Пример 3.1. $S(4, 2) = 7$, так как множество $\{1, 2, 3, 4\}$ можно разбить на 2 блока семью различными способами:

1. $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$
2. $\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$
3. $\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$
4. $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
5. $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$
6. $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$
7. $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$

Очевидно, что $S(n, k) = 0$ для $k > n$. Положим также $S(0, 0) = 1$, так как по определению пустое семейство блоков является разбиением пустого множества.

Докажем теперь тождество, аналогичное тождеству, связанному с треугольником Паскаля.

Теорема 3.1.

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k) \text{ для } 0 < k \leq n, \quad (3.1)$$

$$S(n, n) = 1 \text{ для } n \geq 0, \quad (3.2)$$

$$S(n, 0) = 0 \text{ для } n > 0, \quad (3.3)$$

Доказательство.

Формулы (3.2) и (3.3) очевидны. Докажем (3.1). Рассмотрим множество всех разбиений множества $\{1, \dots, n\}$ на k блоков. Оно распадается на два различных класса: множество тех разбиений, которые содержат одноэлементный блок $\{n\}$, и тех разбиений, для которых n является элементом большего (по крайней мере, двухэлементного) блока. Мощность первого класса равна $S(n-1, k-1)$, т.е. равна числу разбиений множества $\{1, \dots, n-1\}$ на $k-1$ блоков. Мощность второго класса составляет $kS(n-1, k)$, так как каждому разбиению множества $\{1, \dots, n-1\}$ на k блоков соответствует в этом классе

в точности k разбиений, образованных добавлением элемента n поочередно к каждому блоку. \square

Теорема 3.1 позволяет легко вычислять $S(n, k)$ даже для больших значений n и k . В табл.3.1 представлены числа $S(n, k)$ для $0 \leq n, k \leq 8$.

Табл. 3.1. Числа Стирлинга второго рода.

$\frac{k}{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Табл. 3.1 можно трактовать как треугольник Стирлинга, в котором каждое значение кроме крайних, равных единице, можно получить как сумму числа, расположенного над ним и умноженного на k , и числа над ним с левой стороны.

Теорема 3.2. $S(n, k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_n^k S(i, k-1), \quad k \geq 2.$

Доказательство.

Рассмотрим множество всех разбиений множества $A = \{1, \dots, n\}$. Это множество распадается на различные классы, соответствующие разным подмножествам множества A , которые являются блоками, содержащими элемент n . Для каждого b -элементного подмножества $B \subseteq A$, содержащего элемент n , существует в точности $S(n-b, k-1)$ разбиений множества A на k блоков, содержащих B в качестве блока. Действительно, каждое такое разбиение однозначно соответствует разбиению множества $A \setminus B$ на $k-1$ блоков. b -элементное множество $B \subseteq A$, содержащее элемент n , можно выбрать C_{n-1}^{b-1} способами. Следовательно,

$$\begin{aligned}
S(n, k) &= \sum_{b=1}^{n-(k-1)} C_{n-1}^{b-1} S(n-b, k-1) = \\
&= \sum_{b=1}^{n-(k-1)} C_{n-1}^{n-b} S(n-b, k-1) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^i S(i, k-1). \square
\end{aligned}$$

Лекция 4. Числа Белла. Числа Стирлинга первого рода. Беззнаковое число Стирлинга первого рода

Число Белла

Определение 14. Число Белла B_n есть число всех разбиений n -элементного множества $B_n = |\Pi(A)|$, где $|A| = n$.

Другими словами, $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$.

Числа Белла представлены на рис. 4.1.

Теорема 4.3. $B_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_n^i B_i$.

Доказательство.

Множество всех разбиений множества $A = \{1, \dots, n+1\}$ можно разбить на различные классы в зависимости от блока B , содержащего элемент $n+1$ (или в зависимости от множества $A \setminus B$). Для каждого множества $A \setminus B \subseteq \{1, \dots, n\}$ существует в точности $|\Pi(A \setminus B)| = B_{|A-B|}$ разбиений множества A , содержащих B в качестве блока. Группируя классы в зависимости от мощности множества $A \setminus B$, получаем требуемую формулу. \square

n	B_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4 140
9	21 147
10	115 975
11	678 570
12	4 213 597
13	27 644 437
14	190 899 322
15	1 382 958 545
16	10 480 142 147
17	82 864 869 804
18	682 076 806 159
19	5 832 742 205 057
20	51 724 158 235 372

Рис. 4.1. Числа Белла

Числа Стирлинга первого рода

Введем следующее обозначение многочлена:

$$1. [x]_k = x(x-1)\dots(x-k+1).$$

Для частных случаев:

$$2. [x]_0 = 1,$$

$$3. [x]_1 = 1,$$

$$4. [x]_2 = x(x-1),$$

$$5. [x]_3 = x(x-1)(x-2).$$

Определение 15. Числа Стирлинга первого рода $s(n, k)$ есть коэффициенты при последовательных степенях переменной x в многочлене $[x]_n$:

$$[x]_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k.$$

Видно, что $s(n, k) = 0$ для $k > n$.

Свойства чисел Стирлинга первого рода:

$$1^\circ \quad s(0, 0) = 1.$$

$$2^\circ \quad s(n, k) = 0, \quad k > n.$$

$$3^\circ \quad s(n, k) = 1, \quad n \geq 0.$$

$$4^\circ \quad s(n, 0) = 0, \quad n > 0.$$

$$5^\circ \quad s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n-1)!, \quad n \geq 0.$$

Теорема 4.4. Рекуррентная формула для вычисления чисел Стирлинга первого рода

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k), \quad \text{для } 0 < k < n, \quad (4.4)$$

$$s(n, n) = 1, \quad \text{для } n \geq 0, \quad (4.5)$$

$$s(n, 0) = 0, \quad \text{для } n > 0. \quad (4.6)$$

Доказательство.

Формулы (4.5) и (4.6) очевидны. Формулу (4.4) получим, сравнивая коэффициенты при x^k в обеих частях равенства

$$[x]_n = [x]_{n-1} (x - n + 1).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k &= (x - n + 1) \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k) x^k = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k) x^{k+1} - (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k) x^k = \\
 &= \sum_{k=1}^n (s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k)) x^k + \\
 &+ s(n-1, n-1) x^n - (n-1)s(n-1, 0).
 \end{aligned}$$

В табл. 4.3 представлены значения чисел Стирлинга первого рода. □

Табл. 4.3. Числа Стирлинга первого рода

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0
5	0	24	-50	35	-10	1

Беззнаковое число Стирлинга первого рода

Определение 16. Беззнаковое число Стирлинга первого рода $|s(n, k)|$ есть число k циклов из n -элементного множества.

#9. Рассмотрим множество $\{A, B, C, D\}$. Равные циклы из элементов этого множества $[A, B, C, D] = [B, C, D, A] = [C, D, A, B] = [D, A, B, C]$. Неравные циклы: $[A, B, C, D] \neq [B, C, A, D]$

#10. Представление множества $\{A, B, C, D, E, F\}$ в виде цикла (рис. 4.1).

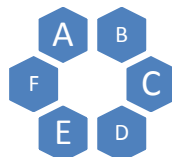


Рис. 4.1. Графическое представление множества в виде цикла

Свойства беззнакового числа Стирлинга первого рода:

1. $|s(0,0)| = 1$
2. $|s(n,k)| = 0, k > n$
3. $|s(n,k)| = 1, n \geq 0$
4. $|s(n,0)| = 0, n > 0$
5. $|s(n,1)| = (n-1)!, n \geq 0$

Теорема 4.5. Рекуррентная формула для вычислений беззнаковых чисел Стирлинга первого рода

$$s(n,k) = |s(n-1,k-1)| + (n-1) |s(n-1,k)|, \text{ для } 0 < k < n, \quad (4.4)$$

Доказательство: см. теорему 4.4. Беззнаковые числа Стирлинга первого рода представлены в табл. 4.4.

Табл. 4.4. Беззнаковые числа Стирлинга первого рода

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0
4	0	6	11	6	1	0
5	0	24	50	35	10	1

Определение 17. С другой стороны, беззнаковое число Стирлинга первого рода $|s(n,k)|$ есть коэффициенты в разложении:

$$(x)^{(n)} = x(x+1) \dots (x+n-1) = \sum_{k=0}^n |s(n,k)| x^k$$

Лекция 5. Формула включений и исключений. Задача о беспорядках

Формула включений и исключений

Определение 18. **Формула (или принцип) включений и исключений** — комбинаторная формула, позволяющая опреде-

лить мощность объединения конечного числа конечных множеств, которые в общем случае могут пересекаться друг с другом.

Обозначим через $|N|$ мощность множества N , из этого сразу следует, что:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

где \cup обозначает объединение, а \cap — пересечение множеств (рис. 5.1).

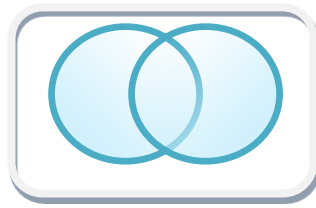


Рис. 5.1 Графическое представление формулы включений и исключений

Эта формула может быть представлена в следующей форме. Пусть $Y = A_i (i = 1, 2, \dots, p)$, т.е. система некоторого множества S , включающего элементы A_1, A_2, \dots, A_p , тогда:

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p| = \sum_{1 \leq i \leq p} |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq p} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots + (-1)^{p-1} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p|,$$

где суммы есть все подмножества множества Y . Эта формула справедлива как для конечных, так и для бесконечных множеств.

11. Даны три подмножества $A_1 = \{2, 3, 7, 9, 10\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 9\}$ и $A_3 = \{2, 4, 9, 10\}$ множества $S = \{1, 2, \dots, 10\}$. Результаты вычислений, соответствующие заданным условиям, представлены в табл. 5.1.

Табл. 5.1. Суммы множеств

	Условие	Набор	Длина
1	A_1	$\{2,3,7,9,10\}$	5
	A_2	$\{1,2,3,9\}$	4
	A_3	$\{2,4,9,10\}$	4
2	$A_1 \cap A_2$	$\{2,3,9\}$	3
	$A_1 \cap A_3$	$\{2,9,10\}$	3
	$A_2 \cap A_3$	$\{2,9\}$	2
3	$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	$\{2,9\}$	2

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ равна (используя формулу):
 $(5 + 4 + 4) - (3 + 3 + 2) + 2 = 7$, то есть следующим семи элементам:
 $\{1,2,3,4,7,9,10\}$.

Определение 19. (В терминах свойств) Предположим, что имеется N объектов, из которых $N(a)$ обладают свойством a ; если, далее, a' означает отсутствие свойства a , то:

$$N(a') = N - N(a),$$

так как каждый объект либо обладает, либо не обладает свойством a . Если речь идет об объектах, могущих обладать двумя свойствами a и b , то число элементов, не обладающих ни одним из них, дается формулой:

$$N(a'b') = N - N(a) - N(b) + N(ab).$$

При вычитании $N(a)$ и $N(b)$ из общего запаса объектов величина $N(ab)$ вычитается дважды, а потому должна быть восстановлена. Этим оправдывается термин «включение и исключение»; процесс состоит во включении всего и исключении лишнего, во включении ошибочно исключенного и так далее, то есть в попеременном включении и исключении.

Основной результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 5.1 (формула включений и исключений). Если из N объектов $N(a)$ обладают свойством a , $N(b)$ — свойством b , $N(ab)$ обладают как свойством a , так и свойством b , $N(abc)$ обладают свойствами a , b и c , то число объектов $N(a'b'c'...) = N(0)$, не обладающих ни одним из этих свойств, находится по формуле:

$$N(a'b'c'...) = N - N(a) - N(b) - \dots + N(ab) + N(ac) + N(bc) + \dots - N(abc) \dots + (-1)^n N(abc\dots) \quad (5.1)$$

Формула (5.1) называется формулой включений и исключений.

Доказательство. (по индукции)

При $n = 1$ формула включений-исключений верна:

$$N(a') = N - N(a).$$

Допустим, что формула верна для $n = m$, докажем ее для $n = m + 1$.

Пусть каждый элемент множества может обладать или не обладать любым из свойств $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$. Применим формулу включений и исключений для свойств a_1, a_2, \dots, a_m :

$$\begin{aligned} N(a_1' \dots a_m') &= \\ &= N - \sum_{i \leq m} N(a_i) + \sum_{i < j \leq m} N(a_i a_j) + \dots + (-1)^m N(a_1 \dots a_m). \end{aligned}$$

Теперь применим формулу для свойств a_1, a_2, \dots, a_m к множеству $N(a_{m+1})$ объектов, для которых выполнено свойство a_{m+1} :

$$\begin{aligned} N(a_1' \dots a_m' a_{m+1}') &= N(a_{m+1}) - \sum_{i \leq m} N(a_i a_{m+1}) + \sum_{i < j \leq m} N(a_i a_j a_{m+1}) + \dots + \\ &+ (-1)^m N(a_1 \dots a_m a_{m+1}). \end{aligned}$$

Наконец, применим формулу для одного свойства a_{m+1} к совокупности $N(a_1' \dots a_m')$ объектов, которые не обладают свойствами a_1, a_2, \dots, a_m :

$$N(a_1' \dots a_m' a_{m+1}') = N(a_1' \dots a_m') - N(a_1' \dots a_m' a_{m+1}).$$

Комбинируя выписанные три формулы, получим формулу включений и исключений для $m + 1$ свойств $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$. Что и требовалось доказать. \square

12. (пояснение к предыдущей формуле).

Рассмотрим множество шаров, которые могут быть окрашены в четыре цвета:

- желтый – свойство 1;
- красный – свойство 2;
- синий – свойство 3;
- зеленый – свойство 4.

Пусть некоторый шар окрашен одновременно в желтый, красный и зеленый цвета. Тогда для него $N_0 = 0$. Теперь рассмотрим, какой вклад он дает в правую часть равенства (5.1).

В первом слагаемом он учитывается 1 раз. Во втором слагаемом он учитывается $C_3^1 = 3$ раза (т.к. $N_1 = 1, N_2 = 1, N_4 = 1$). В третьем слагаемом он учитывается $C_3^2 = 3$ раза (так как $N_{12} = 1, N_{14} = 1, N_{24} = 1$). В четвертом слагаемом он учитывается $C_3^3 = 1$ раз (так как $N_{124} = 1$). В пятом (последнем для рассматриваемого примера) слагаемом он учитывается 0 раз (так как $N_{1234} = 0$).

Таким образом, вклад рассматриваемого шара в правую часть равенства (5.1) равен $1 - 3 + 3 - 1 + 0 = 0$.

Замечание. Формула (5.1) называется формулой включений и исключений.

Замечание. Для четырех свойств диаграмма Эйлера - Вена для формулы (5.1) будет выглядеть следующим образом (рис.5.2):

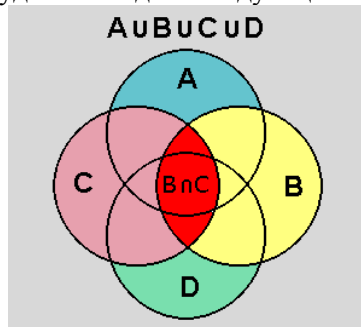


Рис. 5.2. Формула включений и исключений для трех множеств на диаграмме Эйлера – Вена

13. Задача (натуральные числа).

Вычислить количество натуральных чисел, не превосходящих 100, которые не делятся на 2, 3, 5.

Решение: $N = 100$. Обозначим через $N(2)$ количество чисел из N , которые делятся на 2 и далее аналогично. Тогда $N(2) = 50, N(3) = 33, N(5) = 20, N(2, 3) = N(6) = 16, N(2, 5) = N(10) = 10, N(3, 5) = N(15) = 6, N(2, 3, 5) = N(30) = 3$. По формуле включений и исключений получаем:

$$\begin{aligned} N &= 100 - N(2) - N(3) - N(5) + N(2, 3) + N(3, 5) + N(2, 5) - N(2, 3, 5) \\ &= 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 32. \end{aligned}$$

14. Задача 5 (управдом).

Юрий провёл социальный опрос жителей своего подъезда и выяснил, что 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолете. Среди летавших на самолете 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, среди них 15 еще и летали на самолете. От управдома Юрий узнал, что всего в подъезде живет 45 человек. Не врёт ли управдом?

Решение

Управдом врёт. Формула включений и исключений для людей, которые не были в Архангельске, не играют в шахматы, и не летали на самолете дает

$$45 - 25 - 30 - 28 + 16 + 18 + 17 - 15 = -2 < 0.$$

Ответ: Управдом врёт.

Задача о беспорядках

Определить количество перестановок a_1, \dots, a_n чисел $1, \dots, n$ таких, что $a_i \neq i, i = \overline{1, n}$.

Решение. Число всех перестановок $N = n!$

Свойство $s_i : a_i = i, i = \overline{1, n}$.

N_{i_1, \dots, i_r} - число перестановок, оставляющих на месте по крайней мере числа i_1, \dots, i_r , следовательно, $N_{i_1, \dots, i_r} = (n - r)!$.

В $\sum_{i_1 < \dots < i_r} N_{i_1, \dots, i_r}$ имеется C_n^r слагаемых – количество способов выбора чисел i_1, \dots, i_r из $1, \dots, n$. Итак, на основании (5.1):

$$\begin{aligned}
N_0 &= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \dots + (-1)^r C_n^r(n-r)! + \dots \\
&+ (-1)^n C_n^n 0! = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^r \frac{1}{r!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) = \\
&= n! \sum_{r=2}^n (-1)^r \frac{1}{r!}.
\end{aligned}$$

ОТВЕТ: $N_0 = n! \sum_{r=2}^n (-1)^r \frac{1}{r!}.$

Лекция 6. Число элементов, обладающих ровно k свойствами. Задача о встречах. Число элементов, обладающих не менее чем k свойствами

Число элементов, обладающих ровно k свойствами

Лемма 6.1 (вспомогательная)

$$\sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} C_n^k C_k^r = 0, \forall n, r \in N, n \geq r. \quad (6.2)$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k. \quad (6.3)$$

Дифференцируя (6.3) r раз по x , получим

$$n(n-1)\dots(n-r+1)(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^n C_n^k k(k-1)\dots(k-r+1)x^{k-r}.$$

Последнее равенство преобразуется к виду

$$\frac{n!}{(n-r)!} (1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^n C_n^k \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r}.$$

Разделив обе части на $r!$, приходим к соотношению

$$C_n^r (1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^n C_n^k C_k^r x^{k-r}, \text{ которое при } x = -1 \text{ дает}$$

$$\sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} C_n^k C_k^r = 0.$$

Лемма 6.2. Пусть дано N элементов и n свойств s_1, \dots, s_n . Пусть $N_{i_1 \dots i_r}$ - число элементов, обладающих по крайней мере свойствами i_1, \dots, i_r , $r = \overline{1, n}$. Тогда **число элементов $N(r)$, обладающих ровно r свойствами** определяется формулой

$$\begin{aligned} N(r) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} N_{i_1 \dots i_r} + \dots + (-1)^{s-r} C_s^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} N_{i_1 \dots i_s} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-r} C_n^r N_{12 \dots n} = \sum_{s=r}^n (-1)^{n-s} C_s^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} N_{i_1 \dots i_s}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Доказательство. В левой части (6.4) элемент с ровно r свойствами учитывается один раз. В правой части (6.4) элемент с ровно r свойствами учитывается один раз в первом слагаемом и не учитывается далее. Элемент с ровно t свойствами, $t > r$, учитывается $(-1)^{s-r} C_s^r C_t^s$ раз в слагаемом $(-1)^{s-r} C_s^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} N_{i_1 \dots i_s}$.

Поэтому вклад от элементов с ровно t свойствами, $t > r$, составляет $\sum_{s=r}^t (-1)^{s-r} C_s^r C_t^s$. В силу леммы 6.1 эта сумма равна нулю.

Задача о встречах

Определить количество перестановок a_1, \dots, a_n чисел $1, \dots, n$, для которых $a_i = i$ ровно в r местах.

Решение. Пусть свойство s_i : $a_i = i$. Тогда $N_{i_1, \dots, i_s} = (n-s)!$.

В $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} N_{i_1, \dots, i_s}$ имеется C_n^s слагаемых (см. задачу о беспорядках). Далее по формуле (6.4) получаем:

$$\begin{aligned}
N(r) &= (n-r)!C_n^r - C_{r+1}^r(n-(r+1))!C_n^{r+1} + \\
&+ C_{r+2}^r(n-(r+2))!C_n^{r+2} + \dots + (-1)^{s-r}C_s^r(n-s)!C_n^s + \dots \\
&+ (-1)^{n-r}C_n^r 0!C_n^n = \frac{n!}{r!} - \frac{n!}{(r+1)!} \frac{(r+1)!}{r!1!} + \frac{n!}{r!2!} + \dots \\
&+ (-1)^{s-r} \frac{s!}{(s-r)!r!} (n-s)! \frac{n!}{(n-s)!s!} + \dots + (-1)^{n-r} \frac{n!}{(n-r)!r!} = \\
&= \frac{n!}{r!} \left(\frac{1}{2!} + \dots + (-1)^{s-r} \frac{1}{(s-r)!} + \dots + (-1)^{n-r} \frac{n!}{(n-r)!} \right) = \\
&\frac{n!}{r!} \sum_{s=r+2}^n (-1)^{s-r} \frac{1}{(s-r)!}. \\
\text{Ответ: } N(r) &= \frac{n!}{r!} \sum_{s=r+2}^n (-1)^{s-r} \frac{1}{(s-r)!}.
\end{aligned}$$

Лекция 7. Полиномиальная теорема. Методы в комбинаторном анализе. Метод производящих функций. Задача о взвешивании

Полиномиальная теорема

Теорема 7.1 (полиномиальная, обобщение бинома Ньютона).

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1+r_2+\dots+r_k=n \\ r_1 \geq 0, \dots, r_k \geq 0}} \frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!} a_1^{r_1} \cdot a_2^{r_2} \cdot \dots \cdot a_k^{r_k}.$$

15. Вычислить коэффициент при t^8 в разложении:
 $(1 - 2t^2 - t^4)^{10}.$

Методы в комбинаторном анализе. Метод производящих функций

В комбинаторном анализе существует целый ряд подходов для изучения комбинаторных объектов и чисел.

1. **Теоретико-множественный подход.** Связан с вычислениями мощностей конечных множеств. Для решения таких вопросов необходима дополнительная информация, т.е.

надо заранее знать мощности некоторых подмножеств (например, принцип включений и исключений).

2. **Алгебраический подход.** Основан на использовании вспомогательных, легко получаемых комбинаторных тождеств для нахождения интересующих исследователя комбинаторных чисел (например, метод рекуррентных соотношений).

3. **Применение формул обращения.** Формулы обращения связывают между собой различные комбинаторные числа и могут быть получены самыми разными способами.

4. **Метод производящих функций.** Используется для перечисления комбинаторных чисел и установления тождеств.

Определение 20. **Метод производящих функций** – математический прием, позволяющий сводить задачи из теории чисел, теории вероятностей и комбинаторики к задачам из анализа.

Рассмотрим на примере задачи о взвешивании.

Задача о взвешивании

Какие грузы можно взвесить гирями $1, 2, 4, 8, \dots, 2^k$ грамм и сколькими способами? (Л. Эйлер, 1750-е гг.)

Решение: Эйлер рассматривал произведение:

$$\alpha(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots(1+z^k) \quad (1)$$

$$\alpha(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_k z^k + \dots \quad (2)$$

A_k - коэффициент при z^k , получается как произведение z в некоторой степени, т.е. A_k - это в точности число разных представлений числа k в виде суммы некоторых чисел $1, 2, 4, 8, \dots, 2^k$.

5 г. = 4+1 г.

103 г. = 64+32+4+2+1 г.

Итак, A_k - ?

Рассмотрим произведение:

$$\left. \begin{array}{rcl} (1-z) & (1+z) & = (1-z^2) \\ (1-z^2) & (1+z^2) & = (1-z^4) \\ (1-z^4) & (1+z^4) & = (1-z^8) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\} (3)$$

Перемножим (3)

$$\begin{aligned} & (1-z)(1+z)(1-z^2)(1+z^2)(1-z^4)(1+z^4)\dots = \\ & = (1-z^2)(1-z^4)(1-z^8)\dots \end{aligned}$$

Получим:

$$(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\dots(1+z^{2^k})\dots = 1$$

Таким образом в силу (1)

$$(1-z)\alpha(z) = 1 \Rightarrow \alpha(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow A_k = 1.$$

Ответ: только одним способом можно взвесить груз весом k грамм гириями **1, 2, 3, 4, 8, ...** и при том \forall груз.

Лекция 8. Производящие функции. Виды производящих функций. Свойства производящих функций. Таблица соответствий производящих функций и последовательностей

Производящие функции

Очень часто работать с последовательностями достаточно сложно. Для облегчения работы с числовой последовательностью можно поставить в соответствие некоторую функцию таким образом, чтобы обычные операции над последовательностями соответствовали бы простым операциям над соответствующими функциями.

Наиболее частым в комбинаторике является сопоставление последовательности ее **производящей функции**.

Определение 21. Пусть $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - произвольная (бесконечная) последовательность чисел. **Производящей функ-**

цией, ФСР (формальным степенным рядом), обозначается $f_a(s)$, для этой последовательности будем называть выражение вида $a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n + \dots$ или в сокращенной записи: $f_a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_ns^n$.

Определение 22. Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция называется **производящим многочленом**.

Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Мы будем рассматривать последовательности натуральных, рациональных, вещественных и комплексных чисел. Производящую функцию, как и обычную функцию, мы будем часто обозначать одной буквой, указывая в скобках ее аргумент, и в качестве индекса указывать букву обозначения последовательности:

$$f_a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_ns^n = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n + \dots$$

Употребляя слово «функция», мы вовсе не имеем в виду, что написанное выражение действительно является функцией. Так, не следует думать, будто мы можем сказать, чему равно «значение $f_a(s_0)$ производящей функции f_a в точке s_0 ». Переменная s является формальной, и сумма ряда

$$a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n + \dots$$

смысла не имеет. Однако верно утверждение $f_a(0) = a_0$, т.е. мы знаем значение производящей функции в нуле.

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином «производящая функция» мы будем также пользоваться термином «формальный степенной ряд».

Виды производящих функций

В комбинаторном анализе чаще всего используют следующие три вида производящих функций.

$$\text{I. } \{a_n\} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ - степенная производящая функция.}$$

$$\text{II. } \{a_n\} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} \text{ - экспоненциальная производящая функция.}$$

III. $\{a_n\} \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ - функция Дирихле.

Свойства производящих функций

По определению производящая функция записывается в следующем виде:

$$\alpha(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_i t^i + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,$$

где $\alpha(t)$ – производящая функция (ПФ) для последовательности $\{a_i\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ и t – формальная переменная.

Свойство 1. Пусть a_k, b_k, c_k – последовательности, причем $c_k = \alpha a_k \pm \beta b_k$; $f_a(t), f_b(t), f_c(t)$ – соответствующие ПФ.

Тогда **сумма и разность производящих функций:**

$$\begin{aligned} f_c(t) = \alpha f_a(t) \pm \beta f_b(t) &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \pm \beta \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha a_i \pm \beta b_i. \end{aligned}$$

Свойство 2. **Произведением производящих функций** $f_a(t)$ и $f_b(t)$ называется производящая функция

$$\begin{aligned} f_a(t) \cdot f_b(t) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) t^2 \\ &+ \dots + (a_0 b_i + \dots + a_i b_0) t^i + \dots \end{aligned}$$

$$A(t)B(t) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) t^2 + \dots$$

Свойство 3. Пусть $f_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_i t^i + \dots$ и $f_b(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_i t^i + \dots$ две производящие функции, причем $f_b(0) = 0$. **Подстановкой производящей функции** f_b в функцию f_a называется производящая функция вида

$$\begin{aligned} f_a(f_b(t)) &= a_0 + a_1 b_1 t + (a_1 b_2 + a_2 b_1) t^2 + (a_1 b_3 + \\ &+ 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) t^3 + \dots \end{aligned}$$

Если, например, $f_b(t) = -t$, то $f_a(f_b(t)) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3$.

Таблица соответствий производящих функций и последовательностей

Таким образом, каждой последовательности ставится в соответствие производящая функция, и наоборот, каждой производящей функции ставится в соответствие последовательность.

Соответствия ПФ и последовательности представлены в табл. 8.1:

Табл. 8.1 Соответствия ПФ и последовательностей

ПФ	Последовательность
$(1+s)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} C_{\alpha}^k s^k$	$\{C_{\alpha}^0, C_{\alpha}^1, C_{\alpha}^2, C_{\alpha}^3, \dots, C_{\alpha}^{\alpha}, 0, 0, 0, \dots\}$
$e^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^k$	$\left\{1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots\right\}$
$\ln\left(\frac{1}{1-s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} s^k$	$\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$ $(a_0 = 0, a_k = \frac{1}{k}, k \geq 1)$
$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$	$\left\{0, 1, -\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, -\frac{1}{7!}, \frac{1}{9!}, \dots\right\}$
$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$	$\left\{1, -\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, -\frac{1}{6!}, \frac{1}{8!}, \dots\right\}$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot x^k$	$\{1, 1, 1, 1, \dots\}$
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$	$\{1, 2, 3, \dots\}$ $(a_k = k+1, k \geq 0)$

Продолжение табл. 8.1.

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$	$a_0 = 0, a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}, k \geq 1$
$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{r+k-1}^k x^k$	$a_k = C_{r+k-1}^k, k \geq 0$

Лекция 9. Дифференцирование и интегрирование производящих функций. Некоторые элементарные производящие функции. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и последовательность из единиц

Дифференцирование и интегрирование производящих функций. Примеры использования

Определение 23. Пусть $f_a(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n + \dots$ - производящая функция. **Производной** производящей функции называется функция

$$(f_a(s))' = a_1 + 2a_2s + 3a_3s^2 + \dots + na_ns^{n-1} + \dots$$

Определение 24. Пусть $f_a(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n + \dots$ - производящая функция. **Интегралом** производящей функции называется функция

$$\int f_a(s) = a_0s + \frac{a_1s^2}{2} + \frac{a_2s^3}{3} + \frac{a_3s^4}{4} + \dots + \frac{a_ns^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Замечание 1: Операция дифференцирования обратна операции интегрирования: $(\int f_a(s) ds)' = f_a(s)$.

Замечание 2: Операция же интегрирования производной приводит к функции с нулевым свободным членом, и поэтому результат, вообще говоря, отличается от исходной функции.

Замечание 3: Нетрудно видеть, что для функций, представимых в виде степенных рядов, формула для производной соответствует обычной. Формула для интеграла соответствует значению интеграла с переменным верхним пределом

$$\int f_a(s) = \int_0^s f_a(\xi) d\xi.$$

Последнее замечание позволяет подсчитывать (т.е. выражать

в терминах элементарных) производящие функции для большого числа разнообразных последовательностей.

16. Вычислим, например, производящую функцию

$$f_a(s) = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}s + \frac{1}{3 \times 4}s^2 + \dots + \frac{1}{(n+1) \times (n+2)}s^n + \dots$$

Умножая функцию f на s^2 и дифференцируя, получаем

$$g_a(s) = (s^2 f(s))' = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \dots = \ln(1-s)^{-1},$$

откуда

$$(s^2 f(s))' = s^{-2} \int \ln(1-s)^{-1} = s^{-2} ((s-1) \ln(1-s)^{-1} + s).$$

То есть

$$\ln(1-s)^{-1} =$$

$$g(s) = \ln(1-s)^{-1}$$

$$s^2 f' = s^{-2} \int \frac{1}{g} = s^{-2} ((s-1)g + s).$$

Некоторые элементарные производящие функции

$$1) \quad (1+s)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}s^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}s^3 + \dots,$$

где $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ и α произвольное число (возможно, комплексное).

Коэффициент при s^n в этой производящей функции называется числом сочетаний из α элементов по n и обозначается через

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!};$$

$$2) \quad e^s = \exp s = 1 + \frac{1}{1!}s + \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{3!}s^3 + \dots;$$

$$3) \quad \ln\left(\frac{1}{1-s}\right) = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \dots;$$

$$4) \quad \sin s = s - \frac{1}{3!} s^3 + \frac{1}{5!} s^5 - \dots ;$$

$$5) \quad \cos s = 1 - \frac{1}{2!} s^2 + \frac{1}{4!} s^4 - \dots .$$

Разложение 1) было введено Ньютоном и называется биномом Ньютона. При целом положительном значении α оно совпадает с обычным определением степени бинома. Отличие в том, что при $\alpha < n$ коэффициенты ряда равны нулю. Пользуясь этим, мы можем получить простейшие комбинаторные тождества. Подставляя, например, значение $s = 1$ получаем (9.1) и $s = -1$ получаем (9.1)

$$C_\alpha^0 + C_\alpha^1 + \dots + C_\alpha^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots + \frac{\alpha!}{\alpha!} = 2^\alpha, \quad (9.1)$$

$$C_\alpha^0 - C_\alpha^1 + \dots + (-1)^\alpha C_\alpha^\alpha = 0 \quad (9.1)$$

для любого целого положительного α .

Кроме того, между введенными элементарными функциями имеются естественные соотношения, которые также связаны с комбинаторными тождествами. Докажем, например, что

$$e^s e^{-s} = 1.$$

Действительно, свободный член произведения равен 1, а при $n > 0$ коэффициент при s^n в произведении равен

$$\frac{1}{n!0!} - \frac{1}{(n-1)!1!} + \frac{1}{(n-2)!2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{0!n!}.$$

Умножая последнее выражение $n!$, получаем левую часть равенства (9.2) при $\alpha = n$, что и доказывает наше утверждение.

$$6) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k ;$$

$$7) \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k ;$$

$$8) \quad \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{r+k-1}^k x^k .$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и по-

следовательность из единиц

Простейшая последовательность — это постоянная последовательность $1, 1, 1, 1, \dots$. Производящая функция для нее имеет вид

$$G(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots, \quad (9.3)$$

и ее несложно выразить через элементарные производящие функции.

Действительно, умножив обе части равенства (9.3) на s , получим $sG(s) = s + s^2 + s^3 + s^4 + \dots = G(s) - 1$, откуда $G(s) = \frac{1}{1-s}$. Та-

ким образом $\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots + s^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} s^k$.

Тот же вывод с незначительными изменениями можно сделать для произвольной последовательности вида a, ar, ar^2, ar^3, \dots :

$$G_{a,r}(s) = a + ars + ar^2s^2 + ar^3s^3 + \dots = a(1 + (rs) + (rs)^2 + (rs)^3 + \dots),$$

откуда $rsG_{a,r}(s) = G_{a,r}(s) - a$ и $G_{a,r}(s) = \frac{a}{1-rs}$. Таким образом

$$\frac{a}{1-rs} = a + ars + ar^2s^2 + ar^3s^3 + \dots + ar^ns^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^ks^k.$$

Приведенные выше выкладки представляют собой не что иное, как известный вывод формулы для суммы геометрической прогрессии. Результат этих выкладок согласуется, как нетрудно видеть, с определением производящей функции $(1-s)^{-1}$.

Лекция 10. Примеры нахождения производящих функций для заданной последовательности. Примеры нахождения для последовательности производящих функций

Примеры нахождения производящих функций для заданной последовательности

Найти производящую функцию $f_a(t)$ для последовательности $\{a_n\}$, если:

- 1) $a_n = 1$ при всех $n \geq 0$;
- 2) $a_n = 1$ при $0 \leq n \leq N$ и $a_n = 0$ при $n > N$;
- 3) $a_n = \alpha^n$;
- 4) $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$;
- 5) $a_n = (-1)^n$;
- 6) $a_n = n$
- 7) $a_n = n(n-1)$
- 8) $a_n = C_m^n$, m - натуральное число;
- 9) $a_n = C_\alpha^n$, α - действительное число;
- 10) $a_n = n^2$;
- 11) $a_n = \sin \alpha n$;
- 12) $a_n = \cos \alpha n$.

Решение:

1) $a_n = 1$, следовательно, последовательность определена общим членом a_n и имеет вид:

$$\{a_n\} \Leftrightarrow \{1, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots\}.$$

Так как $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \Leftrightarrow \{1, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots\}$, функция $f(t) = \frac{1}{1-t}$ определяет последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = 1$.

$$2) 1 + t + \dots + t^N = \frac{1-t^{N+1}}{1-t}, \quad \forall n \ 0 \leq n \leq N.$$

3) Так как $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$, подстановкой $t = \alpha n$ получаем заданную последовательность, т.е. $\frac{1}{1-\alpha n} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^n n^n$.

4) Так как $e^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n$, подстановкой $s = \alpha t$ получаем заданную последовательность, т.е. $e^{\alpha t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} s^n$.

5) Так как $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$, подстановкой $t = -s$ получаем исходную последовательность, т.е. $\frac{1}{1-(-s)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s^k$.

6) Так как сумма ряда для функции $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$, продифференцировав эту функцию, получим ряд её производных:

$$\frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n t^n, \text{ где } a_n = n.$$

7) Аналогично задаче 6) получаем

$$\frac{2t^2}{(1-t)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) t^n, \text{ где } a_n = n(n-1).$$

8) Так как $(1+s)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n s^n$, то подстановкой $\alpha = m$, получаем заданную последовательность, т.е. $(1+s)^m = \sum_{k=0}^{\infty} C_m^n s^n$, где $m \in N$.

9) Аналогично задаче 8) получаем:

$$(1+s)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n s^n, \text{ где } \alpha \in N.$$

10) Если сложить ряды, полученные в 6) и 7), то получим

$$\frac{2t^2}{(1-t)^3} + \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)t^{n-2},$$

$$\frac{2t^2 + t - t^2}{(1-t)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} nt^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 t^n.$$

$$11) \frac{t \sin \alpha}{(1-2t+t^2)}.$$

$$12) \frac{1-t \cos \alpha}{(1-2t \cos \alpha + t^2)}.$$

Примеры нахождения для последовательности производящих функций

13) Найти общий член a_n последовательности, для которой функция $A(t) = (1-t)^{-1}$ является производящей.

Решение:

$$\begin{aligned} A(t) &= (1-t)^{-1} = (1+(-t))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-1}^k (-t)^k = \\ &= 1 + \frac{(-1)}{1!}(-t) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-t)^2 + \\ &+ \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-t)^3 + \dots + \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{k!}(-t)^k = \\ &= 1 + t + t^2 + \dots + t^k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \leftrightarrow \{1, 1, 1, \dots, 1\}. \end{aligned}$$

Ответ: $A(t) = (1-t)^{-1} \leftrightarrow \{1, 1, \dots, 1, \dots\}$, $a_n = 1$.

14): Найти последовательность для ПФ: $f(s) = (1+s)^\alpha$.

Решение:

$$f(s) = (1+s)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k s^k = C_\alpha^0 + C_\alpha^1 s + C_\alpha^2 s^2 + \dots + C_\alpha^k s^k + \dots$$

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

$$f(s) = (1+s)^\alpha \leftrightarrow \{C_2^0, C_2^1, C_2^2, \dots, C_\alpha^k, \dots\}.$$

$$\begin{aligned} (1+s)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha!}{(\alpha-1)!} s + \frac{\alpha!}{(\alpha-2)!2!} s^2 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!k!} s^k + \dots = 1 + \alpha s + \frac{\alpha(\alpha-1)!}{2!} s^2 + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} s^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)}{k!} s^k + \dots \end{aligned}$$

Ответ: ПФ $f(s) = (1+s)^\alpha$

$$\leftrightarrow \left\{ 1; \frac{\alpha}{1!}; \frac{\alpha(\alpha-1)!}{2!}; \dots; \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)}{k!} \right\}.$$

15) Найти последовательность для ПФ $f(s) = \frac{1}{(1-s)^n}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-s)^n} &= 1 + \frac{(-n)}{1!}(-s) + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}(-s)^2 + \dots + \\ &+ \frac{(-n)\dots(-n-k+1)}{k!}(-s)^k = 1 + \frac{n}{1!}s + \frac{n(n+1)}{2!}s^2 + \\ &+ \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}s^3 + \dots + \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}s^k \\ C_{n+k-1}^{n-1} &= \frac{(n+k-1)!}{(n+k-1-n+1)(n-1)!} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} \end{aligned}$$

Ответ:

$$\text{ПФ } f(s) = \frac{1}{(1-s)^n} \leftrightarrow \left\{ 1; \frac{n}{1!}; \frac{n(n+1)}{2!}; \dots; \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \right\}.$$

16) Даны последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. При этом $b_n = \frac{a_n}{n+1}$.

Доказать, что $f_b(z) = \frac{1}{z} \int_0^z f_a(x) dx$.

Решение: по определению ПФ

$$f_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

$$f_b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} z^k = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{k+1} z^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^z x^k dx = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^z a_k x^k dx = \frac{1}{z} \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \frac{1}{z} \int_0^z f_a(x) dx.$$

17) Найти ПФ для $a_k = k^2$.

Решение:

$$f_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)z^k + \sum_{k=0}^{\infty} kz^k =$$

$$= z^2 \sum_{k=0}^{\infty} (z^k)'' + z \sum_{k=0}^{\infty} (z^k)' =$$

$$= z^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right)'' + z \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right)' = z^2 \left(\frac{1}{1-z} \right)'' + z \left(\frac{1}{1-z} \right)' =$$

$$= z^2 \frac{2}{(1-z)^3} + z \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{2z^2 + z(1-z)}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

Ответ: $f_a(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$

18) Найти последовательность для ПФ : $f(z) = \frac{1}{(1-z)^n}.$

Решение:

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^n} = (1+(-z))^{-n}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k z^k =$$

$$= 1 + \frac{-n}{1!}(-z) + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}(-z)^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}(-z)^3 +$$

$$+ \dots + \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!}(-z)^k + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{n}{1!}z + \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}z^k + \dots = \\
&= C_{n-1}^0 + C_n^1 z + C_{n+1}^2 z^2 + \dots + C_{n+k-1}^k z^k + \dots = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k z^k \leftrightarrow \{C_{n-1}^0, C_n^1, C_{n+1}^2, \dots, C_{n+k-1}^k\}.
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } f(z) = \frac{1}{(1-z)^n} \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k z^k.$$

Лекция 11. *Решение однородных рекуррентных соотношений. Общий метод решения рекуррентного соотношения*

Решение однородных рекуррентных соотношений

Определение 25. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$; будем говорить, что задано однородное линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами порядка r , если для членов последовательности $\{a_n\}$ выполняется равенство

$$a_{n+r} = c_1 a_{n+r-1} + c_2 a_{n+r-2} + \dots + c_r a_n, \quad (11.1)$$

где c_1, c_2, \dots, c_r - постоянные величины. Выражение (1) позволяет вычислить очередной член последовательности по предыдущим r членам. Ясно, что, задав начальные значения a_0, a_1, \dots, a_r , можно последовательно определить все члены последовательности. Мы рассмотрим общий метод решения (т.е. поиска $\{a_n\}$ как функции от n) рекуррентного соотношения (11.1).

Общий метод решения рекуррентных соотношений

Для решения задачи достаточно найти производящую функцию

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (11.2)$$

последовательности $\{a_n\}$.

Введем обозначение для полинома

$$K(x) = 1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots - c_r x^r$$

и рассмотрим произведение $A(x)K(x) = C(x)$.

Непосредственным умножением можно убедиться, что $C(x)$ - это полином, степень которого не превышает $r - 1$, так как коэффициенты при x^{n+r} ($n = 0, 1, \dots$) в $A(x)K(x)$, согласно уравнению (11.1), равны

$$a_{n+r} - (c_1 a_{n+r-1} + c_2 a_{n+r-2} + \dots + c_r a_n) = 0.$$

Характеристическим полиномом соотношения (11.1) называется

$$F(x) = x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \dots - c_{r-1} x - c_r.$$

Выполним разложение $F(x)$ на линейные множители

$$F(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} (x - \alpha_2)^{e_2} \dots (x - \alpha_r)^{e_r},$$

где $e_1 + e_2 + \dots + e_r = r$.

Сравнивая $K(x)$ и $F(x)$, запишем $K(x) = x^r F\left(\frac{1}{x}\right)$. Отсюда

$$\begin{aligned} K(x) &= x^r \left(\frac{1}{x} - \alpha_1\right)^{e_1} \left(\frac{1}{x} - \alpha_2\right)^{e_2} \dots \left(\frac{1}{x} - \alpha_r\right)^{e_r} = \\ &= (1 - \alpha_1 x)^{e_1} (1 - \alpha_2 x)^{e_2} \dots (1 - \alpha_r x)^{e_r}, e_1 + e_2 + \dots + e_r = r. \end{aligned}$$

Данное расположение на множители используем для представления

$$A(x) = \frac{C(x)}{K(x)}$$

в виде суммы простых дробей:

$$A(x) = \frac{C(x)}{K(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{e_i} \frac{\beta_{in}}{(1 - \alpha_i x)^n}. \quad (11.3)$$

Таким образом, $A(x)$ является суммой функций вида

$$\frac{\beta}{(1-\alpha x)^n} = \beta \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{n+k-1}) \alpha^k x^k.$$

Тогда выражение (3) примет вид

$$A(x) = \frac{C(x)}{K(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{e_i} \beta_{in} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n+k-1} \alpha^k x^k. \quad (11.4)$$

Данное разложение является производящей функцией

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

последовательности $\{a_n\}$. Для определения $\{a_n\}$

необходимо найти коэффициент при x_n в разложении (11.4).

Лекция 12. Последовательность Фибоначчи. Примеры использования производящих функций. Вычисление корня числа через производящие функции

Последовательность Фибоначчи

Эта последовательность была исследована Леонардо Пизанским, известным как Фибоначчи, в труде «Книга абака» (1202). Он рассматривает развитие идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов, предполагая, что:

- ✓ в «нулевом» месяце имеется пара кроликов (одна новая пара);
- ✓ в первом месяце первая пара производит на свет другую пару (одна новая пара);
- ✓ во втором месяце обе пары кроликов порождают другие пары и первая пара погибает (две новые пары);
- ✓ в третьем месяце вторая пара и две новые пары порождают в общем три новые пары, а старая вторая пара погибает (три новые пары) (рис. 5.1).

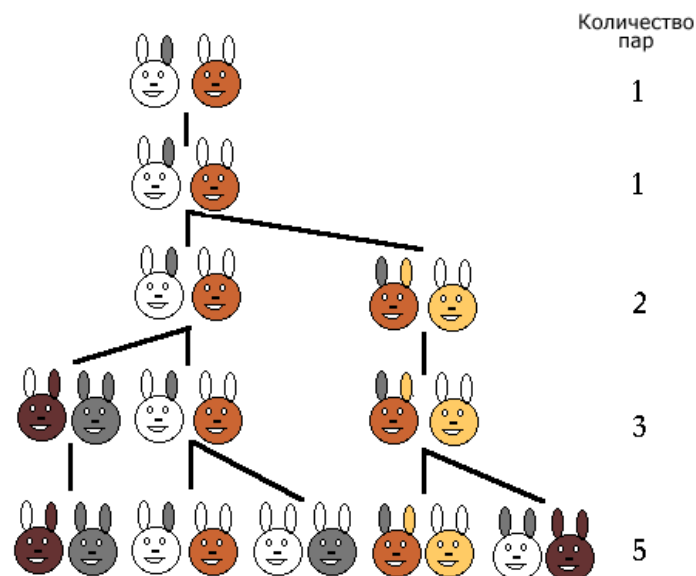


Рисунок 12.1. Популяция кроликов

Из приведенных выше высказываний становится ясно, что Фибоначчи вывел особый ряд чисел. Закономерным является тот факт, что каждая пара кроликов порождает еще две пары на протяжении жизни, а затем погибает. Примечательно, что первые два члена этой последовательности равны 1, следующие же члены равны сумме двух предыдущих.

Знаменитая последовательность Фибоначчи определяется своими начальными членами $f_0 = f_1 = 1$ и соотношением

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \quad (12.1)$$

Из этого соотношения легко получить начало последовательности Фибоначчи

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

в которой каждый член, начиная с f_2 , равен сумме двух предыдущих.

Чтобы вывести формулу производящей функции запишем определение ПФ для чисел Фибоначчи

$$Fib(s) = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots \quad (12.2)$$

Далее умножим обе части равенства (12.2) на $s + s^2$. Получим

$$\begin{aligned}(s + s^2)Fib(s) &= s + s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 5s^5 + \dots + \\ &+ s^2 + s^3 + 2s^4 + 3s^5 + \dots = \\ &= s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + 8s^5 + \dots\end{aligned}$$

или $(s + s^2)Fib(s) = Fib(s) - 1$,

откуда

$$Fib(s) = \frac{1}{1 - s - s^2}. \quad (12.3)$$

Полученную формулу можно понимать как композицию двух производящих функций $(1 - s)^{-1}$ $s + s^2$, т.е.

$$Fib(s) = 1 + (s + s^2) + (s + s^2)^2 + (s + s^2)^3 + \dots$$

Такое разложение, однако, не очень удобно, так как в его членах перемешаны различные степени переменных и оно не дает явной формулы для коэффициентов. Полезнее представить дробь в виде суммы двух элементарных дробей:

$$\frac{1}{1 - s - s^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - s_2} - \frac{1}{s - s_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{s_1 \left(1 - \frac{s}{s_1} \right)} - \frac{1}{s_2 \left(1 - \frac{s}{s_2} \right)} \right),$$

где $s_1 = (-1 + \sqrt{5})/2$, $s_2 = (-1 - \sqrt{5})/2$ - корни уравнения $1 - s - s^2 = 0$. Из последнего разложения немедленно получаем

$$Fib(s) = \frac{1}{\sqrt{5}s_1} \left(1 + \frac{s}{s_1} + \frac{s^2}{s_1^2} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{5}s_2} \left(1 + \frac{s}{s_2} + \frac{s^2}{s_2^2} + \dots \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} (s_1^{-1-n} - s_2^{-1-n}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}} (s_1^{n+1} - s_2^{n+1}) = \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).\end{aligned} \quad (12.4)$$

Ответ: явная формула для вычисления числа Фибоначчи имеет вид

$$f_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}s_1} \left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Примеры использования производящих функций

17. Найти $\sum_{i=1}^t C_{n-i}^j$.

Решение: Обозначим $x_{ij} = C_{n-i}^j$. Для каждого фиксированного i будем рассматривать x_{ij} как последовательность, задаваемую индексом j . Тогда $X_i(s) = (1+s)^{n-i}$.

Нам необходимо определить последовательность $y_j = \sum_{i=1}^t x_{ij}$.

ПФ для y_j имеет вид:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \sum_{i=1}^t X_i(s) = \sum_{i=1}^t (1+s)^{n-i} = (1+s)^n \sum_{i=1}^t \left(\frac{1}{1+s} \right)^i = \\ &= \frac{(1+s)^n}{s} - \frac{(1+s)^{n-t}}{s}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{(1+s)^n}{s}$ и $\frac{(1+s)^{n-t}}{s}$ являются сдвигами начала для функций $(1+s)^n$ и $(1+s)^{n-t}$ соответственно,

$$y_j = \sum_{i=1}^t C_{n-i}^j = C_n^{j+1} - C_{n-t}^{j+1}.$$

18. Найти $\sum_{k=2}^{n-1} (n-k)(n-k)C_{n-1}^{n-k}$.

Решение: Запишем исходную сумму в виде $\sum_{k=1}^{n-2} k^2 C_{n-1}^k$.

Обозначим $x_k = k^2 C_{n-1}^k$, $y_k = k C_{n-1}^k$, $z_k = C_{n-1}^k$.

Соответствующие ПФ имеют вид:

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 C_{n-1}^k s^k = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 C_{n-1}^k s^k,$$

$$Y(s) = \sum_{k=1}^{n-1} k C_{n-1}^k s^k, Z(s) = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k s^k = (1+s)^{n-1}.$$

Так как $y_k = k z_k$, $Y(s) = sZ'(s)$ и $x_k = k y_k$, то

$$\begin{aligned} X(s) &= sY'(s) = sZ'(s) + s^2 z''(s) = \\ &= s(n-1)(1+s)^{n-2} + s^2(n-1)(n-2)(1+s)^{n-3}. \end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$X(1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 C_{n-1}^k, \text{ то искомая сумма равна}$$

$$X(1) - (n-1)^2 = n(n-1)2^{n-3} - (n-1)^2.$$

Ответ: $\sum_{k=1}^{n-2} k^2 C_{n-1}^k = n(n-1)2^{n-3} - (n-1)^2.$

Вычисление корня числа через производящие функции

19. Найти: $\sqrt{30}$.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

Замена $\left\{ n = \frac{1}{2}, y = 1 \right\}$ приводит к

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k x^k$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{n!}{(n-1)!1!}x + \frac{n!}{(n-2)!2!}x^2 + \dots + \frac{n!}{(n-k)!k!}x^k$$

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}x^k$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k\right)}{k!}x^k + \dots$$

$$\sqrt{30} = \sqrt{25+5} = 5\sqrt{1+\frac{1}{5}}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{30} = 5\left(1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \dots\right) = 5,2\dots$$

Лекция 13. Числа Каталана. Последовательность Каталана и производящая функция Каталана. Алгоритм расстановки скобок

Числа Каталана

N -е число Каталана C_n можно определить одним из следующих способов:

Количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$, т. е. таких последовательностей из n левых и n правых скобок, в которых количество открывающих скобок равно количеству закрывающих, и в любом ее префиксе открывающих скобок не меньше, чем закрывающих.

Например, для $n=3$ существует 5 таких последовательностей: $((()))$, $()(())$, $()()()$, $(())()$, $((())$.

Числа Каталана — числовая последовательность, встречающаяся в удивительном числе комбинаторных задач.

Эта последовательность названа в честь бельгийского математика Каталана (Catalan), жившего в 19 веке, хотя на самом деле она была известна ещё Эйлеру (Euler), жившему за век до Каталана.

Последовательность Каталана и производящая функция Каталана

Первые несколько чисел Каталана C_n (начиная с нулевого):

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...

Определение 26. **Последовательность Каталана** определяется рекуррентным соотношением

$$C_0 = 1, C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0.$$

20. При $n = 5$, $C_5 = 14 = 1 \times 5 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times 1$.

Определение 27. **Производящая функция Каталана** задается формулой:

$$Cat(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \dots = 1 + s + 2s^2 + 5s^3 + \dots (13.1)$$

Соотношение (13.1) означает, что производящая функция Каталана удовлетворяет следующему соотношению:

$$Cat(s) = s Cat(s) Cat(s) + 1,$$

из которого легко найти саму **производящую функцию**

$$Cat(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s}}{2s}.$$

Этот вид производящей функции позволяет найти **явную формулу для чисел Каталана**. Согласно общей формуле бинома Ньютона имеем:

$$C_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \dots ((2n-1)/2) 4^{n+1}}{2(n+1)!}$$

или, умножая числитель и знаменатель на $n!$ и сокращая на 2^{n+1} , получаем

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Эта формула дает и более простое **рекуррентное соотношение для чисел Каталана**:

$$C_{n+1} = C_n \frac{4n+2}{n+2}.$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты. Известно не менее 40 их различных определений.

Числа Каталана встречаются в большом количестве задач комбинаторики. В нашем случае n -ое число Каталана – это количество корректных скобочных последовательностей, состоящих из n открывающих и n закрывающих скобок.

В задаче для вычисления будем использовать рекуррентную формулу: $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$.

Алгоритм расстановки скобок

Для задания порядка вычислений в алгебраических выражениях в них расставляют скобки. Если стереть все элементы алгебраического выражения, кроме скобок, то, что останется, и будет правильной скобочной структурой. Например, $((()())())$.

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим правилам:

- 1) число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;
- 2) любой начальный отрезок правильной скобочной структуры содержит левых скобок не меньше, чем правых.

Наоборот, любая скобочная структура, удовлетворяющая условиям 1) и 2), является правильной скобочной структурой.

Будем считать условия 1), 2) определением правильной скобочной структуры. Приведем правильные примеры с числом пар скобок 1, 2 и 3:

1 - $()$; 2 - $()()()$; 3 - $()()()()()()()()()$

Каждой левой скобке в правильной скобочной структуре соответствует парная ей правая скобка. Эта скобка выделяется следующим правилом: двигаясь от выбранной левой скобки вправо считаем разность между числом левых и правых пройденных скобок (включая выбранную). Первая правая скобка, для которой эта разность обращается в ноль, считается парной к исходной левой скобке.

Лекция 14. Генерирование комбинаторных объектов. Перестановки. Сочетания. Разбиение чисел. Подмножества множеств

Перестановки

Определение 28. Если $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ и $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ - перестановки, то δ лексикографически меньше τ , если и только если для некоторого $k \geq 1$ мы имеем $\delta_j = \tau_j$, для всех $j < k$ и $\delta_k < \tau_k$.

Иными словами, последовательность перестановок на множестве $\{1, \dots, n\}$ представлена в лексикографическом порядке, если

она записана в порядке возрастания получающихся чисел. Например: лексикографическая последовательность перестановок трех элементов имеет вид: 123, 132, 213, 231, 312, 321. То есть каждая тройка больше предыдущей.

Алгоритм лексикографического порождения перестановок может быть следующим. Начиная от перестановки $(1, 2, \dots, n)$, мы переходим далее от $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ и ее последующей путем просмотра Π справа налево в поисках самой правой позиции, в которой $\pi_i + \pi_{i+1}$. Найдя ее, мы теперь ищем π_j , наименьший элемент, расположенный справа от π_i и больший π_i ; затем осуществляется транспозиция элементов π_i и π_j и отрезок π_{i+1}, \dots, π_n переворачивается. Например, для $n=8$ и $\Pi = (2, 6, 5, 8, 7, 4, 3, 1)$ мы имеем $\pi_i = 5$, $\pi_j = 7$, меняя их местами, получаем $(2, 6, 7, 8, 5, 4, 3, 1)$. Переворачивая отрезок π_{i+1}, \dots, π_n , получаем новую перестановку $(2, 6, 7, 1, 3, 4, 5, 8)$, следующую за Π в лексикографическом порядке.

Следующий алгоритм реализует эту процедуру (в квадратных скобках даны комментарии).

Листинг 14.1. Алгоритм генерации перестановок в лексикографическом порядке

```

for j=0 to n do  $\pi_j \leftarrow j$ ;
i  $\leftarrow$  1;
while i  $\neq$  0 do
begin
    вывести  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ ;
    [Найти самое правое место, где  $\pi_i < \pi_{i+1}$ .]
    i  $\leftarrow$  n-1;
    while  $\pi_i > \pi_{i+1}$  do i  $\leftarrow$  i-1;
    [Найти  $\pi_j$ , наименьший элемент справа от  $\pi_i$  и больший  $\pi_i$ ]
    j  $\leftarrow$  n;
    while  $\pi_i > \pi_j$  do j  $\leftarrow$  j-1;
    [Поменять местами  $\pi_i$  и  $\pi_j$  и затем перевернуть  $\pi_{i+1}, \dots, \pi_n$ ]
     $\pi_i \leftrightarrow \pi_j$ 

```

```

     $r \leftarrow n;$ 
     $s \leftarrow i+1;$ 
    while  $r > s$  do
    begin
         $\pi_r \leftrightarrow \pi_s;$ 
         $r \leftarrow r-1;$ 
         $s \leftarrow s+1;$ 
    end;
end.

```

Алгоритм начинает работу с распечатки $\Pi=(1,2,\dots,n)$ и заканчивает ее при $i=0$, что происходит в случае, когда $\pi_1 > \pi_2 > \dots > \pi_n$, т.е. когда получена последняя в лексикографическом порядке перестановка.

Сочетания

Пусть основным множеством является множество натуральных чисел $(1,2,\dots,n)$. Необходимо сгенерировать все сочетания мощности k . Рассмотрим генерацию в лексикографическом порядке. Например, для $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ сочетаний из пяти предметов по три получается следующий лексикографический порядок: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.

Алгоритм лексикографической генерации сочетаний может быть следующим.

Начиная с сочетания $(1,2,\dots,k)$, следующее сочетание находится просмотром текущего сочетания справа налево с тем, чтобы определить место самого правого элемента, который еще не достиг своего максимального значения. Этот элемент увеличивается на единицу, а всем элементам справа от него присваиваются новые наименьшие возможные значения. Например, если $n=6$ и мы получили сочетание (1236), то следующим будет сочетание (1245).

Следующий алгоритм реализует эту процедуру.

Листинг 14.2. Алгоритм генерации сочетаний

```
 $C_0 \leftarrow -1;$   
for  $i=1$  to  $k$  do  $C_i \leftarrow 1;$   
 $j \leftarrow 1;$   
while  $j \neq 0$  do  
  begin  
    вывести  $(C_1, C_2, \dots, C_k);$   
     $j \leftarrow k;$   
    while  $C_j = n - k + j$  do  $j \leftarrow j - 1;$   
     $C_j \leftarrow C_j + 1;$   
    for  $i=j+1$  to  $k$  do  $C_i = C_{i-1} + 1;$   
  end.
```

Разбиения чисел

Рассмотрим задачу генерации разбиений натурального числа n в последовательность неотрицательных целых чисел (p_1, \dots, p_k) , так что $p_1 + \dots + p_k = n$ и порядок чисел p_i не важен. Таким образом не делается различий между $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$.

Разбиения числа n на l компонентов можно генерировать в возрастающем лексикографическом порядке, начиная с $p_1 = p_2 = \dots = p_{l-1} = 1$ и продолжая процесс следующим образом. Для получения следующего разбиения из текущего просматриваем элементы справа налево, останавливаясь на самом правом p_i , таком, что $p_l - p_i \geq 2$. Заменяем затем p_j на p_{i+1} для $j=i+1, \dots, l-1$ и после этого заменяем p_l на $n - \sum_{j=1}^{l-1} p_j$.

Например, если $n=12$ и $l=5$, а разбиение имеет вид (11334) , то 4 на 2 больше самой правой 1 и следующее разбиение будет иметь вид (12225) .

Когда ни один из элементов разбиения не отличается от последнего больше, чем на 1 , процедура заканчивается.

Следующий алгоритм реализует эту процедуру.

Листинг 14.3. Алгоритм генерации разбиения чисел

```
l ← 1;
pl ← n;
p0 ← 1;
while l ≤ n do
begin
    вывести (p1, ..., pl);
    i ← l-1;
    while pl-pi < 2 do i ← i-1;
    if i ≠ 0 then for j=l-1 to i by -1 do pj ← pi+1;
    else for j=1 to l do pj ← 1;
    l ← l+1;
    pl ← n -  $\sum_{j=1}^{l-1} p_j$ ;
end.
```

Подмножества множества

Порождение подмножеств множества (a_1, a_2, \dots, a_n) эквивалентно порождению n - разрядных двоичных наборов: a_i принадлежит подмножеству, если и только если i -й разряд равен 1. Таким образом, задача порождения всех подмножеств множества сводится к задаче порождения всех возможных двоичных последовательностей длины n .

Следующий алгоритм описывает эту процедуру.

Листинг 14.4 Алгоритм генерации подмножеств множества.

```
for i=0 to n do bi ← 0;
while bn ≠ 1 do
begin
    вывести (bn-1bn-2...b0);
    i ← 0;
    while bi = 1 do
begin
        bi ← 0;
        i ← i+1;
    end;
    bi ← 1;
end.
```

Литература

1. Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Севастьянов Л.А., Спесивов С.С. Комбинаторика. Алгоритмы на графах: Учебно-методическое пособие. М.: РУДН, 2002.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 2007.
3. Ландо С.К. Комбинаторика. Режим доступа. URL: <http://www.mccme.ru/iun/ancient/combs93.html>
4. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М., 2007.
5. Шапорев С.Д. Дискретная математика: Курс лекций и практических занятий. Спб., БХВ-Петербург, 2005.
6. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
7. Кнут Д., Грэхем Ф., Поташник О. Конкретная математика. Основание информатики/ Пер. с англ. 2-е изд., испр. М., 2006.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Комбинаторные алгоритмы»

1. Место дисциплины в структуре ООП

Цикл, к которому относится дисциплина: вариативная часть математического и естественнонаучного цикла Б.2.

Требования к входным знаниям и умениям: необходима математическая подготовка в пределах школьной программы.

Студенту необходимо:

знать основные понятия теории множеств, базовые понятия и основные методы теории алгоритмов;

уметь: Анализировать выводы, полученные при решении задач.

Компетенции: ОК-10, ПК-3, ПК-4, ПК-8, ПК-15:

ОК-10 способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

ПК-3 способность разрабатывать и реализовывать процессы жизненного цикла информационных систем, программного обеспечения, сервисов систем информационных технологий, а также методы и механизмы оценки и анализа функционирования средств и систем информационных технологий; способность разработки проектной и программной документации, удовлетворяющей нормативным требованиям;

ПК-4 способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат, фундаментальные концепции и системные методологии, международные и профессиональные стандарты в области информационных технологий, способность использовать современные инструментальные и вычислительные средства (в соответствии с профилем подготовки);

ПК-8 способность профессионально владеть базовыми математическими знаниями и информационными технологиями, эффективно применять их для решения научно-технических и прикладных задач, связанных с развитием и использованием информационных технологий;

ПК-15 понимание концепций и абстракций, способность использовать на практике базовые математические дисциплины, включая: Математический анализ I, Математический анализ II, Алгебра и геометрия, Дискретная математика, Математическая

логика и теория алгоритмов.

Дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей: Теория автоматов и формальных языков, Теория вероятностей и математическая статистика, Теория конечных графов, Алгоритмы и анализ сложности, Модели на гиперграфах, Прикладные задачи ТМО, курсовая работа.

2. Цели и задачи дисциплины

Основной целью освоения дисциплины является знание основополагающих понятий, результатов и методов математической логики и теории алгоритмов. Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса: освоение теории множеств, навыки работы с пропозициональными и предикатными исчислениями, знание формулировок и доказательств основных теорем курса.

Задачей дисциплины является развитие логического мышления у студентов и изучение основ математической логики и теории алгоритмов. Развиваются навыки формализации и описания дискретных математических объектов.

3. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины «Комбинаторные алгоритмы» студент должен:

знать:

- концепции дисциплин: Дискретная математика, Комбинаторные алгоритмы;
- основные законы теоретического исследования;

уметь:

- использовать основные законы теоретического исследования; решать прикладные задачи по дисциплине «Комбинаторные алгоритмы»;
- разрабатывать и реализовывать процессы жизненного цикла информационных систем, программного обеспечения, сервисов систем информационных технологий, а также методы и механизмы оценки и анализа функционирования средств и систем информационных технологий, относящихся к дисциплине «Комбинаторные алгоритмы»;

владеть:

- современным математическим аппаратом;
- вычислительными средствами;
- базовыми математическими знаниями.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет _____ четыре _____ зачетные единицы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры
		1
Аудиторные занятия (всего)	72	72
В том числе:		
Лекции	36	36
Практические занятия (ПЗ)	-	-
Семинары (С)	-	-
Лабораторные работы (ЛР)	36	36
Самостоятельная работа (всего)	36	36
В том числе:	-	-
Курсовой проект (работа)	-	-
Расчетно-графические работы	-	-
Реферат	-	-
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>	-	-
Самостоятельная проработка дополнительного материала	70	70
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	2, экз	2, экз
Общая трудоемкость (часов)	144	144
Зач. ед.	4	4

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Введение в комбинаторику. Правило суммы и правило произведения	Области применения комбинаторики. Основные определения теории множеств. Определение множества, мощности множества, прямого произведения множеств. Правило суммы и правило произведения множеств
2.	Перестановки и сочетания. Мультимножества. Биномиальные коэффициенты	Выборка объема g из n элементов, типы выборок. Определение: размещение, размещение с повторением, сочетание, сочетание с повторением, перестановка, мультимножество. Формула для вычисления различных перестановок элементов мультимножества. Доказательство основных тождеств, связанных с числом сочетаний (сумма, произведение). Общее определение биномиального коэффициента. Биномиальный коэффициент в факториальной форме. Биномиальная теорема. Произведение биномиальных коэффициентов. Доказательство основных свойств биномиальных коэффициентов. Полиномиальная теорема
3.	Треугольник Паскаля. Разбиения множеств. Числа Стирлинга первого	Свойство шестиугольника треугольника Паскаля. Упорядоченные разбиения множества.

	го и второго рода	Неупорядоченные разбиения множества. Разбиения чисел. Числа Стирлинга первого и второго рода. Доказательство формул для вычисления чисел Стирлинга первого и второго рода. Числа Белла. Рекуррентное соотношение для вычисления чисел Белла. Беззнаковые числа Стирлинга первого рода. Свойства беззнаковых чисел Стирлинга первого рода. Формула для вычисления беззнаковых чисел Стирлинга первого рода
4.	Принцип включения и исключения	Формула обращения. Задача о беспорядках. Задача о встречах. Формула для вычисления числа предметов, обладающих ровно n свойствами. Формула для вычисления числа предметов, обладающих не менее, чем k свойствами
5.	Производящие функции. Схемы выбора	Определение и свойства. Идея метода производящих функций. Линейные операции с производящими функциями. Сдвиг начала влево и сдвиг начала вправо. Частичные суммы и дополнительные частичные суммы. Изменение масштаба. Свёртка. Вычисление производящих функций для последовательностей. Свойства класса ПФ. Экспоненциальная ПФ. ПФ для (n, r) сочетаний с ограниченным числом повторений. ПФ для (n, r) сочетаний с неограниченным числом повторе-

		ний
6.	Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения	Однородные линейные рекуррентные соотношения. Неоднородные линейные рекуррентные соотношения. Метод решения однородных линейных рекуррентных соотношений. Доказательство 4-х положений для нахождения общих решений рекуррентных соотношений. Решение неоднородных линейных рекуррентных соотношений
7.	Поиск с возвратом. Генерация перестановок и сочетаний	Поиск с возвратом. Использование исчерпывающего поиска. Задача прохождения лабиринта. Общий алгоритм поиска с возвратом. Дерево полного прохода алгоритма. Процедура поиска с возвратом. Оценка сложности алгоритма. Порождение перестановок. Генерация сочетаний

5.2. Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Трудоемкость (час.)
1.	Введение в комбинаторику. Правило суммы и правило произведения	Решение задач на прямое произведение множеств, правило суммы и правило произведения. Решение задач на сочетания, перестановки и размещения, мультимножество	2
2.	Перестановки и сочетания. Мультимножества. Биноми-	Решение задач на сочетания, перестановки и размещения, мультимножество. Доказательства тождеств при	6

	альные коэф- фициенты	помощи формулы бинома Ньютона	
3.	Треугольник Паскаля. Раз- биения мно- жеств. Числа Стирлинга пер- вого и второго рода	Свойство шестиугольника для треугольника Паскаля. Доказательство свойств би- номиальных коэффициентов. Вычисление чисел Стирлин- га первого и второго рода. Вычисление чисел Белла. Применение чисел Стирлин- га первого и второго рода, чисел Белла	6
4.	Принцип вклю- чения и исклю- чения	Решение задач на свойство включения и исключения. Задача о шляпах. Вычисле- ние числа предметов, обла- дающих ровно n свойствами. Вычисление числа предме- тов, обладающих не менее чем k свойствами в рамках типовых задач.	6
5.	Производящие функции. Схе- мы выбора	Решение задач на использо- вание полиномиальной тео- ремы. Таблица производя- щих функций. Вычисление производящих функций для последователь- ностей	6
6.	Однородные и неоднородные линейные ре- куррентные соотношения	Задачи на нахождение фор- мулы для членов последова- тельности через соответ- ствующую производящую функцию	6
7.	Поиск с воз- вращением. Генерация пе- рестановок и сочетаний	Задачи на генерацию сочетаний и перестановки и метод поиска с возвращением. Разбор алгоритмов	4

5.3. Практические занятия (семинары) не предусмотрены

6. Балльно-рейтинговая система оценки знаний, шкала оценок

Рейтинговая система оценки знаний студентов

Работа в семестре

Максимальное число баллов, набранных в семестре, – 100

Вид задания	Число заданий	Кол-во баллов	Сумма баллов
1. Посещение лекций	—	—	—
2. Лабораторные работы	—	—	—
3. Практические занятия	—	—	—
4. Домашние задания	—	—	—
5. Контрольные работы	2	30, 30	60
6. Рубежная аттестация	—	—	—
7. Работа на семинаре	1	10	10
8. Реферат	—	—	—
9. Коллоквиум	1	10	10
10. Итоговая аттестация (экзамен)	1	20	20
ИТОГО			100

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (в соответствии с приказом ректора № 996 от 27.12.2006 г.)

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 - 100	5	95 - 100	5+	A

		86 - 94	5	B
69 - 85	4	69 - 85	4	C
51 - 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 - 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

1. График проведения письменных контрольных работ формируется в соответствии с календарным планом курса.
2. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
3. Переписывание контрольных работ согласно распоряжению по факультету. Переписывание проводится однократно в сроки, установленные преподавателем.
4. Использование источников (в том числе конспектов лекций и лабораторных занятий) во время выполнения письменной контрольной работы возможно только с разрешения преподавателя.
5. Дата и время, которое отводится студенту на выполнение письменной работы (контрольной тестовой работы), устанавливается преподавателем. По завершении отведенного времени студент должен сдать работу преподавателю, вне зависимости от того, завершена она или нет.
6. При выставлении баллов за посещение занятий учитывается наличие лекционного материала и активная работа студента на семинаре.
7. Студент допускается к итоговой контрольной работе с любым количеством баллов, набранным в семестре, но при условии, что у студента имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
8. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F, и студент должен повторить эту дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, то есть FX, то студенту разрешается добор необходимого (до 51) количества

баллов. Добор баллов осуществляется путем повторного одноразового выполнения предусмотренных контрольных мероприятий, при этом, по усмотрению преподавателя, аннулируются соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.

9. Итоговая контрольная работа содержит 2 вопроса из перечня теоретических и практических вопросов по курсу. Итоговая контрольная работа проводится письменно, на итоговый контроль знаний отводится 1 час, письменная работа оценивается от 0 до 20 баллов независимо от оценки, полученной в семестре.

7. Примерная тематика курсовых проектов (работ)

1. Числа Каталана. Алгоритм расстановки скобок n сомножителей.
2. Числа Фибоначчи.
3. Фибоначчиева система счисления.
4. Числа Люка.
5. Числа Стирлинга первого и второго рода.
6. Числа Белла.
7. Задача о Ханойской башне ([2] стр. 17-21).
8. Задача о разрезании пиццы ([2] стр. 21-25).
9. Элементы комбинаторики. Перестановки и сочетания с повторениями и без повторений. ([1], стр. 253-255). Задачи: 1.1 - 1.5, придумать и решить дополнительно 5 задач.
10. Элементы комбинаторики. Перестановки и сочетания с повторениями и без повторений. ([1], стр. 253-255]). Задачи: 1.6 - 1.10, придумать и решить дополнительно 5 задач.

11. Биномиальные коэффициенты ([2], стр.195 с доказательством).
12. Свойства биномиальных коэффициентов. Задачи 1.13 из [1].
13. Свойства биномиальных коэффициентов. Задачи 1.18 из [1].
14. Формула включений и исключений. Задачи 2.4 и 2.5 из [1], дополнительно придумать 3 задачи и решить их.
15. Формула включений и исключений. Задачи 2.2 2), 3) из [1], дополнительно придумать 3 задачи и решить их.
16. Возвратные последовательности, производящие функции, рекуррентные соотношения (стр. 265 [1]). Задачи 3.2 из [1], придумать 3 задачи и решить.
17. Возвратные последовательности, производящие функции, рекуррентные соотношения (стр. 265 [1]). Задачи 3.3 из [1], придумать 3 задачи и решить.
18. Возвратные последовательности, производящие функции, рекуррентные соотношения (стр. 265 [1]). Задачи 3.5 из [1], придумать 3 задачи и решить.
19. Производящие функции. Задачи 3.8 из [1]. Самостоятельно придумать 2 задачи и решить.
20. Производящие функции. Задачи 3.9 из [1]. Самостоятельно придумать 2 задачи и решить.
21. Производящие функции. Задачи 3.10 из [1]. Самостоятельно придумать 2 задачи и решить.
22. Производящие функции. Задачи 3.11 четные номера из [1]. Самостоятельно придумать 2 задачи и решить.
23. Производящие функции. Задачи 3.11 нечетные номера из [1]. Самостоятельно придумать 2 задачи и решить.

24. Производящие функции. Задачи 3.23 из [1]. Самостоятельно придумать 4 задачи и решить.

Литература

1. Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Севастьянов Л.А., Спесивов С.С. Комбинаторика. Алгоритмы на графах: Учебно-методическое пособие. М.: РУДН, 2002.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 2007.
3. Ландо С.К. Комбинаторика. Режим доступа. URL: <http://www.mccme.ru/iuam/ancient/combs93.html>
4. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М., 2007.
5. Шапорев С.Д. Дискретная математика: Курс лекций и практических занятий. Спб., БХВ-Петербург, 2005.
6. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
7. Кнут Д., Грэхем Ф., Поташник О. Конкретная математика. Основание информатики/ Пер. с англ. 2-е изд., испр. М., 2006.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1. Информация о преподавателях (ссылка на страницу)

Зарипова Эльвира Ринатовна, старший преподаватель
<http://www.telesys.pfu.edu.ru/about/zaripova.html>

Кокотчикова Мария Геннадьевна, старший преподаватель
<http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=1160>

II. Литература

а) основная литература

1. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М., 2007. 400 с.
2. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учебное пособие. М.: Лаборатория базовых знаний. 2001. 288 с.
3. Иванов Б.Н. Дискретная математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 408 с.
4. Шапорев С.Д. Дискретная математика: Курс лекций и практических занятий. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 400 с.
5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 416 с.

б) дополнительная литература

6. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, Бином. Лаборатория знаний, 2006. 704 с.
7. Окулов С.М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. 424 с.
8. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2008. 384 с.

в) программное обеспечение не предусмотрено

III. Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

Не предусмотрено

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, корп. 1, учебные лаборатории кафедры систем телекоммуникаций:

- ▲ ауд. 110: проектор DMS800 с интерактивной доской Board 1077, ноутбук Toshiba Satellite 17/300GB Intel Core2 2.4 GHz (10 шт.)
- ▲ ауд. 114: проектор DMS800 с интерактивной доской Board 1077, ноутбук Toshiba Satellite 17/300GB Intel Core2 2.4 GHz (10 шт.)
- ▲ ауд. 116: проектор DMS800 с интерактивной доской Board 1077, HP xw7800, Intel Core2 2.4 GHz (8 шт.)

10. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

На освоение дисциплины отводится один семестр. В качестве итогового контроля знаний предусмотрен экзамен.

Для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов рекомендуется использовать вопросы и задания подобные перечисленным ниже.

Типовые задачи для промежуточного контроля знаний

1. Формулы сочетаний, перестановок, размещений элементов множества.
2. Формула числа перестановок мультимножества.
3. Формула включений и исключений.
4. Доказательство тождеств с использованием формулы бинома Ньютона.
5. Разбиение множеств на всевозможные подмножества, разбиение множеств на определенное число подмножеств. Разбиение множеств на циклы.
6. Полиномиальная теорема.
7. Нахождение производящих функций для заданных последовательностей.

8. Нахождение последовательностей по производящим функциям.
9. Решение однородных рекуррентных соотношений.
10. Решение неоднородных рекуррентных соотношений.

Типовые вопросы для итогового контроля знаний

1. Области применения комбинаторики. Определение множества, мощности множества, прямого произведения множеств. Правило суммы и правило произведения множеств.
2. Выборка объема r из n элементов, типы выборок. Определение: размещение, размещение с повторением, сочетание, сочетание с повторением, перестановка, мультимножество. Формула для вычисления различных перестановок элементов мультимножества.
3. Основные тождества, связанные с числом сочетаний (с доказательством).
4. Бином Ньютона (2 способа доказательства).
5. Свойства биномиальных коэффициентов (с доказательством).
6. Треугольник Паскаля. Свойство шестиугольника треугольника Паскаля (с доказательством).
7. Разбиение множества. Числа Стирлинга второго рода. Свойства чисел Стирлинга второго рода (с доказательством). Формула для вычисления чисел Стирлинга второго рода через предыдущие (с доказательством). Формула для вычисления чисел Стирлинга второго рода через сумму произведения сочетаний и предыдущих чисел Стирлинга второго рода (с доказательством).
8. Числа Белла. Рекуррентное соотношение для вычисления чисел Белла (с доказательством).
9. Числа Стирлинга первого рода. Формула для вычисления чисел Стирлинга первого рода (с доказательством).
10. Беззнаковые числа Стирлинга первого рода. Свойства беззнаковых чисел Стирлинга первого рода (с доказательством). Формула для вычисления беззнаковых чисел Стирлинга первого рода (с доказательством).

11. Формула включений и исключений (с доказательством).
12. Решение задачи о беспорядках.
13. Формула для вычисления числа предметов, обладающих ровно n свойствами (с доказательством). Формула для вычисления числа предметов, обладающих не менее, чем k свойствами.
14. Решение задачи о встречах.
15. Полиномиальная теорема (с доказательством).
16. Идея метода производящих функций.
17. Вычисление производящих функций для заданных последовательностей. И наоборот, вычисление последовательностей для производящих функций.
18. Производящие функции (ПФ). Виды ПФ. Определение суммы последовательности и суммы ПФ. Определение произведения (свертки) последовательностей и ПФ. Умножение ПФ на действительное число.
19. Свойства класса ПФ.
20. Операции с ПФ (с доказательством): линейные операции, сдвиг начала вправо, сдвиг начала влево, частичные суммы, дополнительные частичные суммы, изменение масштаба, свертка.
21. ПФ для (n, r) сочетаний с ограниченным числом повторений.
22. ПФ для (n, r) сочетаний с неограниченным числом повторений.
23. Экспоненциальная ПФ.
24. Метод решения однородных линейных рекуррентных соотношений. Доказательство 4-х положений для нахождения общих решений рекуррентных соотношений. Решение неоднородных линейных рекуррентных соотношений.
25. Поиск с возвратом. Использование исчерпывающего поиска. Задача прохождения лабиринта. Общий алгоритм поиска с возвратом. Дерево полного прохода алгоритма. Процедура поиска с возвратом. Оценка сложности алгоритма.
26. Генерация перестановок.
27. Порождение сочетаний

Содержание

Лекция 1. Введение в комбинаторику. Некоторые области применения задач комбинаторики. Прямое произведение множеств. Правило суммы и правило произведения для конечных множеств. Принцип Дирихле. Размещения без повторений, размещения с повторениями, сочетания без повторений, сочетания с повторениями, перестановки. Мультимножество	3
Введение в комбинаторику. Некоторые области применения задач комбинаторики.....	3
Прямое произведение множеств	4
Правило суммы и правило произведения	4
Принцип Дирихле.....	5
Размещения, сочетания, перестановки	5
Мультимножество	7
Лекция 2. Основные тождества, связанные с числом сочетаний. Бином Ньютона. Следствия из теоремы о бинOME Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов	8
Основные тождества, связанные с числом сочетаний	8
Бином Ньютона.....	9
Следствия из теоремы о бинOME Ньютона	10
Свойства биномиальных коэффициентов.....	10
Лекция 3. Треугольник Паскаля. Некоторые свойства треугольника Паскаля. Свойства шестиугольника для треугольника Паскаля. Разбиение множеств. Числа Стирлинга второго рода.....	11
Треугольник Паскаля.....	11
Некоторые свойства треугольника Паскаля	12
Свойства шестиугольника.....	12
Разбиения множества.....	12
Числа Стирлинга второго рода.....	13
Лекция 4. Числа Белла. Числа Стирлинга первого рода. Беззнаковое число Стирлинга первого рода.....	15
Число Белла.....	15
Числа Стирлинга первого рода.....	16

Беззнаковое число Стирлинга первого рода.....	17
Лекция 5.Формула включений и исключений. Задача о беспорядках	18
Формула включений и исключений	18
Задача о беспорядках	23
Лекция 6.Число элементов, обладающих ровно k свойствами. Задача о встречах.	
Число элементов, обладающих не менее чем k свойствами	24
Число элементов, обладающих ровно k свойствами	24
Задача о встречах.....	25
Лекция 7.Полиномиальная теорема. Методы в комбинаторном анализе. Метод производящих функций. Задача о взвешивании	26
Полиномиальная теорема	26
Методы в комбинаторном анализе. Метод производящих функций.....	26
Задача о взвешивании	27
Лекция 8.Производящие функции. Виды производящих функций. Свойства производящих функций. Таблица соответствий производящих функций и последовательностей.....	28
Производящие функции	28
Виды производящих функций.....	29
Свойства производящих функций.....	30
Таблица соответствий производящих функций и последовательностей	31
Лекция 9.Дифференцирование и интегрирование производящих функций. Некоторые элементарные производящие функции. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и последовательность из единиц	32
Дифференцирование и интегрирование производящих функций. Примеры использования.....	32
Некоторые элементарные производящие функции	33
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и последовательность из единиц	34

Лекция 10.Примеры нахождения производящих функций для заданной последовательности. Примеры нахождения для последовательности производящих функций	36
Примеры нахождения производящих функций для заданной последовательности.....	36
Примеры нахождения для последовательности производящих функций	38
Лекция 11.Решение однородных рекуррентных соотношений. Общий метод решения рекуррентного соотношения	41
Решение однородных рекуррентных соотношений	41
Общий метод решения рекуррентных соотношений	42
Лекция 12.Последовательность Фибоначчи. Примеры использования производящих функций. Вычисление корня числа через производящие функции	43
Последовательность Фибоначчи	43
Примеры использования производящих функций.....	46
Вычисление корня числа через производящие функции	47
Лекция 13.Числа Каталана. Последовательность Каталана и производящая функция Каталана. Алгоритм расстановки скобок.....	48
Числа Каталана	48
Последовательность Каталана и производящая функция Каталана	49
Алгоритм расстановки скобок	50
Лекция 14.Генерирование комбинаторных объектов. Перестановки. Сочетания. Разбиение чисел. Подмножества множеств	50
Перестановки	50
Сочетания	52
Разбиения чисел.....	53
Подмножества множества	54
Литература	55
Учебно-методический комплекс по дисциплине «Комбинаторные алгоритмы» ..	56
1. Место дисциплины в структуре ООП	57
2. Цели и задачи дисциплины	58
3. Требования к результатам освоения дисциплины.....	58

4. Объем дисциплины и виды учебной работы	59
5. Содержание дисциплины	60
5.2. Лабораторный практикум	62
5.3. Практические занятия (семинары) не предусмотрены	64
6. Балльно-рейтинговая система оценки знаний, шкала оценок	64
7. Примерная тематика курсовых проектов (работ).....	66
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	69
I. Информация о преподавателях (ссылка на страницу).....	69
II. Литература.....	69
III. Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы	70
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины	70
10. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины	70

Учебное издание

Эльвира Ринатовна Зарипова
Мария Геннадьевна Кокотчикова

Лекции по дискретной математике.
Часть I. Комбинаторика

Учебное пособие

Издание подготовлено в авторской редакции

Технический редактор Н.А.Ясько

Тематический план 2012 г. №12

Подписано в печать 07.08.12

Усл.печ.л. 4,65

Тираж 200, Заказ 370

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография ИПК РУДН
ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41