Семинар 3. Подготовка к контрольной работе №1

1. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

Решение:

Чтобы проверить абсолютную сходимость знакопеременного рядя, проверим сходимость ряда, составленного из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n|$$

Проверим необходимое условие:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}|(-1)^n| = 1 \neq 0$$

Необходимое условие не выполняется, следователь ряд абсолютно сходиться не будет.

Ответ: нет

2. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

Решение:

Чтобы проверить абсолютную сходимость знакопеременного рядя, проверим сходимость ряда, составленного из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right|$$

Необходимое условие выполняется

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Подберем мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится, следовательно, исследуемый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right|$$

сходится абсолютно.

Ответ: да

3. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$?

Решение:

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$$

равномерно сходится по теореме о мажоранте, мажоранта

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ответ: да

4. Найдите радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n!}$$

Решение:

Определим радиус с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}} \frac{n+1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| x^{(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| x^{(n+1)} \right| < 1$$

Если $|x| > 1$, тогда $\lim_{n\to\infty}\left|x^{(n+1)}\right| = \infty$,

$|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty}\left|x^{(n+1)}\right| = 0$. Таким образом,

$$|x| < 1$$

Отсюда получаем $R = 1$

Ответ: 1

5. Найдите коэффициент при x^5 в разложении в ряд Маклорена функции xe^{x^2}

Решение:

Нам известно разложение в ряд Маклорена для функции e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Разложим в ряд e^{x^2}

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$

Теперь домножим полученный ряд на x

$$xe^{x^2} = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

Коэффициент при x^5 равен

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

6. Найдите коэффициент при x^5 в разложении в ряд Маклорена производной функции xe^{x^2}

Решение:

Разложение в ряд Маклорена функции xe^{x^2} имеет следующий вид

$$xe^{x^2} = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

Данный ряд сходится равномерно при $|x| \leq 1$. Продифференцируем почленно данный ряд

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^{2n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$$

Полученный ряд также равномерно сходится, следовательно, можно почленно дифференцировать.

Распишем сумму до x^5

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=1+3x^2+\frac{5}{2!}x^4+\frac{7}{3!}x^6\ldots$$

Как видно, в разложении отсутствует x^5, следовательно коэффициент при x^5 равен 0.

Ответ: 0.

7. Найдите коэффициент при $\cos 3x$ в ряде Фурье для четной функции, имеющей период 2π и равной x^2 при $0 < x < \pi$.

Решение:

Функция четная, поэтому ряд сводится к сумме четных членов

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

По условию необходимо найти коэффициент при $\cos 3x$, то есть нужно найти коэффициент a_3.

$$a_3=\frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\pi}x^2\cos 3x\,dx=$$

$$\frac{2\,\pi^2\,9\sin(3\pi)+4\,\pi\,3\cos(3\pi)-4\sin(3\pi)}{27\pi}=\frac{-4}{9}$$

Ответ: $-\frac{4}{9}$

8. Найдите коэффициент при $\sin 3x$ в ряде Фурье для нечетной функции, имеющей период 2π и равной x^2 при $0 < x < \pi$.

Решение:

Поскольку функция – нечетная, ее ряд Фурье сводится к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\,,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

По условию необходимо найти коэффициент при $\sin 3x$, то есть нужно найти коэффициент b_3.

$$b_3 = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} x^2 \sin 3x \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\,(\pi\, 3 \sin(3\pi) + \cos(3\pi))}{27} - \frac{\pi^2 \cos(3\pi)}{3} - \frac{2}{27} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-2}{27} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{27} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{27\pi} = \frac{18\pi - 8}{27\pi}$$

Ответ: $\frac{18\pi-8}{27\pi}$

9. Сходится ли ряд Фурье для четной функции, имеющей период 2π и равной x при $0 < x < \pi$, равномерно по $x \in \mathbb{R}$?

Решение:

Функция четная, поэтому ряд сводится к сумме четных членов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Неизвестные коэффициенты находятся по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi n \sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

Таким образом, получаем ряд

$$\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

Проверим сходится ли равномерно по $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

Данный ряд сходится равномерно по теореме о мажоранте, мажоранта

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx\right| \le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Ответ: да (сходится равномерно)

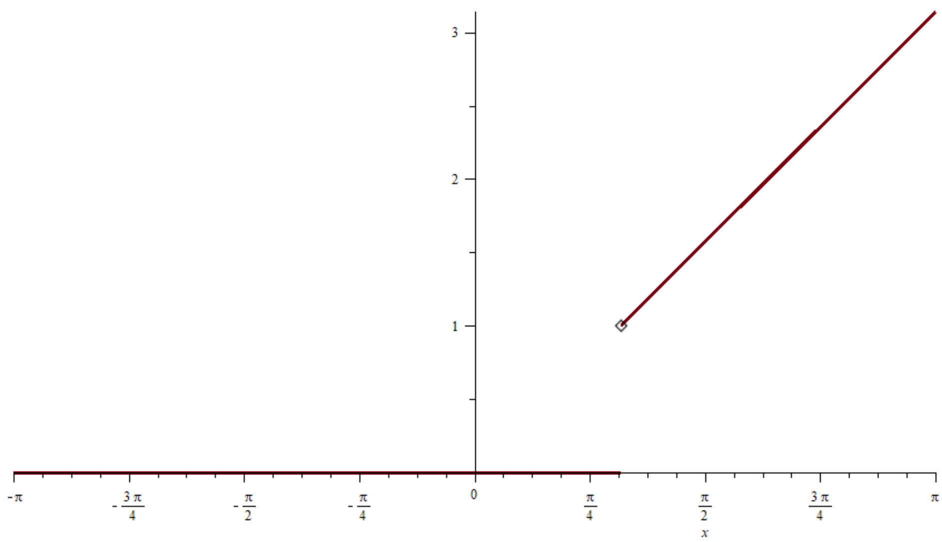
10. Функция $f(x)$ имеет период 2π, равна 0 при $-\pi \le x < 1$ и x при $1 < x \le \pi$. К какому значению сходится её ряд Фурье в точке $x = 1$?

Решение:

Известно

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 1 \\ x, & 1 < x \le \pi \end{cases}$$

Построим график функции



По теореме Дирихле ряд Фурье для кусочно-гладкой 2π-периодической функции $f(x)$ сходится во всех точках вещественной оси, причем равенство

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = f(x)$$

справедлива во всех точках, в которых функция не терпит разрыва.

Если же в точке $x = c$ функция терпит разрыв, то

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nc + b_n \sin nc) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}$$

Данная функция в точке $x = 1$ терпит разрыв, слева от 1 функция равна 0, справа от 1 функция равна 1. Таким образом, в точке $x = 1$ ряд сходится к следующему значению:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n + b_n \sin n) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Задания по теме «Ряды Фурье»

1. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \le 0 \\ 1, \qquad 0 \le x \le \pi \end{cases},$$

определённую на интервале $-\pi \le x \le \pi$.

Решение:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Найдем неопределенные коэффициенты

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x=-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{x=-\pi}^{0} f(x)dx + \int\limits_{x=0}^{\pi} f(x)dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{x=-\pi}^{0} 0dx + \int\limits_{x=0}^{\pi} dx \right)$$
$$= \frac{1}{\pi}(\pi - 0) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{x=-\pi}^{0} 0 \cos nx \, dx + \int\limits_{x=0}^{\pi} \cos nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{x=-\pi}^{0} 0 \sin nx \, dx + \int\limits_{x=0}^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}$$
$$= \frac{-\cos n\pi + \cos 0}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n}$$

Ответ:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n} \sin nx$$

2. Запишите ряд Фурье для *четной* функции, совпадающей с $\cos x$ на отрезке $0 < x < \pi$.

Решение:

Функция четная, следователь

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

Найдем неопределенные коэффициенты

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\pi}\cos x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\pi}\frac{1}{2}\big(\cos\big(x(1+n)\big)+\cos\big(x(1-n)\big)\big)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{x=0}^{\pi}\cos x(1+n)\,dx + \int\limits_{x=0}^{\pi}\cos x(1-n)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x(1+n)}{1+n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{\sin x(1-n)}{1-n}\bigg|_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\pi(1+n)-\sin 0}{1+n} + \frac{\sin\pi(1-n)-\sin 0}{1-n}\right) = 0\ (n \neq 1)$$

Найдем коэффициент при $n = 1$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\pi}\cos x\cos x\,dx = 2$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\pi}\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\sin x|_0^{\pi} = 0$$

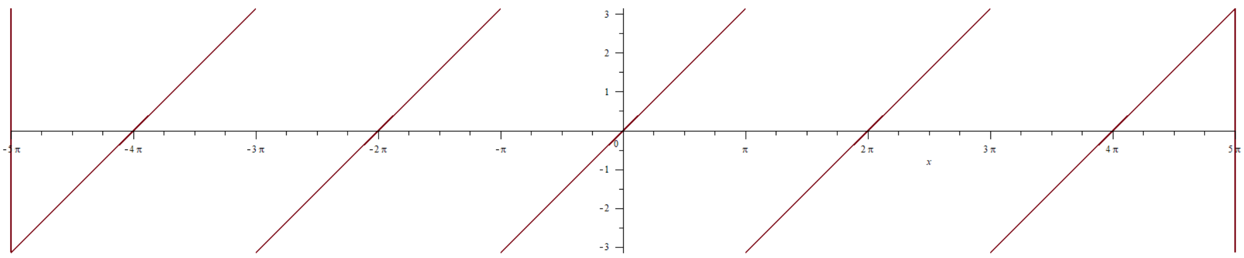
Ряд Фурье:

$$2\cos x$$

3. Разложите в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, равную x при$-\pi < x < \pi$. К чему сходится этот ряд при $x = \pi$? Сходится ли этот ряд равномерно при всех x?

Решение:

График функции



$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2 - \pi^2}{2} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0$$

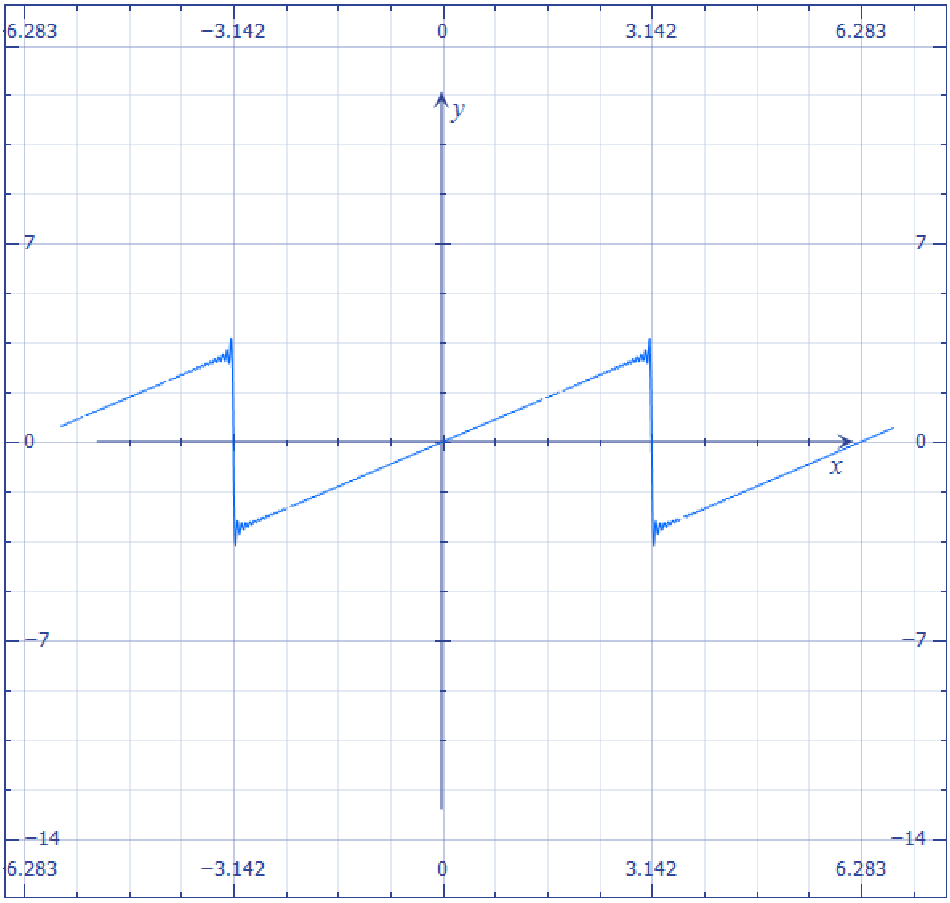
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin(\boldsymbol{\pi} n)}{n^2} - \frac{2\boldsymbol{\pi}\cos(\boldsymbol{\pi} n)}{n}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Ряд Фурье:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$$

График частичной суммы ряда

$$\left(plot2d\left(2\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}\right)\right)$$



При $x = \pi$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi = 0$$

4. Найдите коэффициент при x^7 в разложении в ряд Маклорена функции $x\sin 2x$

Решение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\sin 2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1}$$

$$x\sin 2x = 2x^2 - \frac{8x^4}{3!} + \frac{32x^6}{5!} - \frac{128x^8}{7!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+2}$$

Коэффициент при x^7 равен 0.

5. Найдите коэффициент при x^7 в разложении в ряд Маклорена производной функции $x^2\,cos\,2x$

Решение:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$x^2\cos 2x = x^2 - \frac{4x^4}{2!} + \frac{16x^6}{4!} - \frac{64x^8}{6!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n}x^{2n+2}$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n}x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n}x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n+1}(n+1)x^{2n+1}$$

$$= 2x \quad - \frac{16x^3}{2!} + \frac{96x^5}{4!} - \frac{512x^7}{6!} \ldots$$

Коэффициент при x^7 равен $-\frac{512}{720} = -\frac{32}{45}$