Домашнее задание №2

1. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{4n!}$$

- признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n)^2}{4(n+1)!} \times \frac{4n!}{(n-1)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{4n!}{(n-1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n-1)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ ряд сходится

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n-1}{3^n}$

Признак даламбера

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2-(n+1)-1}{\cancel{3^{n+1}}} \times \frac{\cancel{3^n}}{4n^2-n-1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2-n-2}{3(4n^2-n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cancel{n^2}}{12\cancel{n^2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4}{12} = \frac{1}{3} < 1$

$\lim_{n\to\infty} \Sigma a_n = \frac{1}{3} < 1$ ряд сходится

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{6^n(n+4)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{6^{n+1}(n+5)} \times \frac{6^n(n+4)}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}}{6^{n+1}(n+5)} \times \frac{6^n(n+4)}{\cancel{(n+1)!}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+4)}{6(n+5)(1)} = \frac{n^2}{6n}$

$\lim_{n\to\infty} \Sigma a_n =$ ряд расходится

4- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+3}{3n^2}\right)^{3n+2}$

признак Коши

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2n^2+3}{3n^2}\right)^{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n^2}(2+\frac{3}{n^2})}{\cancel{n^2}(3)}\right)^{2+\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{9} < 1$ ряд сходится

5- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-5n+3}{3n-1}\right)^{(n+1)^2}$

Признак Коши

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\left|\frac{-5n+3}{(3n+1)}\right|\right)^{(n+1)^2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{-5n+3}{3n-1}\right)^{n^2+2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-5n+3}{3n-1}\right)^{n+2+\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}(-5+\frac{3}{n})}{\cancel{n}(3-\frac{1}{n})}\right)^{n+2+\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{5}{3}\right)^{n+6} = 0 < 1$ ряд сходится

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n+1)-1}{4n+3}$

* Признак Коши.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}(3-\frac{1}{n})}{n(4+\frac{3}{n})}\right)^{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} = 0 < 1$ ряд сходится