Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ №7 Решение однородных линейных рекуррентных соотношений. Числа Фибоначчи.

Однородные линейные рекуррентные соотношения

Определение. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, $n \geq 0$; будем говорить, что задано однородное линейное рекуррентное соотношение (ОЛРС) с постоянными коэффициентами порядка k, если для всех $n \geq 0$ выполняется равенство

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n.$$

где c_1, $c_2, \ldots,$ c_k - постоянные величины.

Данное выражение позволяет вычислить очередной член последовательности по предыдущим k членам. Ясно, что, задав начальные значения $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ можно последовательно определить все члены последовательности. Мы рассмотрим общий метод решения ОЛРС (т.е. поиска $\{a_n\}$ как функции от n). Используем метод производящих функций.

Общий метод решения ОЛРС (1/4)

Для решения задачи достаточно найти производящую функцию

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Введем обозначение

$$K(z) = 1 - c_1 z - c_2 z^2 - \cdots - c_k z^k,$$

и рассмотрим их произведение $C(z) = A(z)K(z)$.

$$C(z) = \left(1 - c_1 z - c_2 z^2 - \cdots - c_k z^k\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n =$$

$$\left(1 - c_1 z - c_2 z^2 - \cdots - c_k z^k\right)(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots) =$$

$$a_0 + (a_1 - c_1 a_0)z + (a_2 - c_1 a_1 - c_2 a_0)z^2 + \cdots + (a_{k-1} - c_1 a_{k-2} - \cdots - c_{k-1} a_0)z^{k-1}$$

$$+ (a_k - c_1 a_{k-1} - \cdots - c_k a_0)z^k + (a_{k+1} - c_1 a_k - \cdots - c_k a_1)z^{k+1} + \cdots$$

$$+(a_{n+k} - c_1 a_{n+k-1} - \cdots - c_k a_n)z^{n+k} + \cdots$$

Таким образом, все коэффициенты z^m при $m \geq k$ равны нулю. Значит, $C(z)$ - многочлен степени не более $k - 1$.

Тогда дробь $A(z) = \frac{C(z)}{K(z)}$ является правильной алгебраической дробью.

Общий метод решения ОЛРС (2/4)

Рассмотрим характеристический многочлен

$$F(z) = z^k - c_1 z^{k-1} - c_2 z^{k-2} \dots - c_k.$$

В поле комплексных чисел $F(z)$ можно разложить на множители следующим образом:

$$F(z) = (z - \alpha_1)^{k_1} (z - \alpha_2)^{k_2} \dots (z - \alpha_r)^{k_r},$$

k_i - кратность корня α_i, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = k$.

Заметим, что

$$z^k F\left(\frac{1}{z}\right) = z^k \left(\frac{1}{z^k} - c_1 \frac{1}{z^{k-1}} - c_2 \frac{1}{z^{k-2}} - \dots - c_k\right) = 1 - c_1 z - c_2 z^2 - \dots - c_k z^k$$
$$= K(z).$$

Тогда разложение на множители $K(z)$ имеет вид

$$K(z) = z^k \left(\frac{1}{z} - \alpha_1\right)^{k_1} \left(\frac{1}{z} - \alpha_2\right)^{k_2} \dots \left(\frac{1}{z} - \alpha_r\right)^{k_r} =$$
$$= (1 - \alpha_1 z)^{k_1} (1 - \alpha_2 z)^{k_2} \dots (1 - \alpha_r z)^{k_r}.$$

Общий метод решения ОЛРС (3/4)

Таким образом ПФ последовательности $\{a_n\}$, $n \geq 0$ имеет вид

$$A(z) = \frac{C(z)}{K(z)} = \frac{C(z)}{(1-\alpha_1 z)^{k_1}(1-\alpha_2 z)^{k_2} \dots (1-\alpha_r z)^{k_r}}$$

Правильная алгебраическая дробь имеет единственное разложение в сумму простейших алгебраических дробей, т.е.

$$A(z) = \frac{\beta_{11}}{(1-\alpha_1 z)} + \frac{\beta_{12}}{(1-\alpha_1 z)^2} + \cdots + \frac{\beta_{1k_1}}{(1-\alpha_1 z)^{k_1}} + \frac{\beta_{21}}{(1-\alpha_2 z)} + \frac{\beta_{22}}{(1-\alpha_2 z)^2} + \cdots + \frac{\beta_{2k_2}}{(1-\alpha_2 z)^{k_2}} \dots + \frac{\beta_{r1}}{(1-\alpha_r z)} + \frac{\beta_{r2}}{(1-\alpha_r z)^2} + \cdots + \frac{\beta_{rk_r}}{(1-\alpha_r z)^{k_r}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\beta_{ij}}{(1-\alpha_i z)^j} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{ij} C_{n+j-1}^{n} (\alpha_i z)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{i=1}^{r} {\alpha_i}^n \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} C_{n+j-1}^{n} \right).$$

Общий метод решения ОЛРС (4/4)

Следовательно,

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i{}^n \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} C_{n+j-1}^{n}\,.$$

Тогда общее решение ОЛРС

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i{}^n P_i(n)\,,$$

где $P_i(n)$ – многочлен степени $k_i - 1$.

На практике вычисление коэффициентов многочленов $P_i(n)$ выполняют методом вариации постоянных, используя начальных значения последовательности $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$.

Числа Фибоначчи (1/2)

Определение. Числа Фибоначчи - числовая последовательность, которая определяется начальными членами $F_0 = F_1 = 1$, и рекуррентным соотношением

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Заметим, что числа Фибоначчи задаются ОЛРС. Найдем корни характеристического многочлена:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Тогда можно получить общий вид решения ОЛРС

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

где коэффициенты C_1, C_2 определяются из системы

$$\begin{cases} F_0 = 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ F_1 = 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}$$

Числа Фибоначчи (2/2)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Решая данную систему, получим

$$C_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, C_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Окончательно получаем для чисел Фибоначчи

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Как видно на данном примере, не всегда решение ОЛРС приводит к результату, по которому удобно вычислять элементы последовательности.