Семинар 2. Функциональные ряды. Степенные ряды

Функциональные ряды.

Определение. Ряд, членами которого являются функции одной или нескольких переменных, называют функциональным рядом.

Пусть $a_n(x)$ – это функции переменной x, тогда выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$$

можно рассматривать как функцию переменной x, определенную при тех значениях x, при которых выписанный ряд сходится.

Определение. Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

сходится равномерно на отрезке $a \le x \le b$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое независящее от x целое число N_0, что

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n(x)\right| < \varepsilon$$

лишь только $N > N_0$.

Теорема о мажоранте. Если для членов функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

можно указать такие положительные *числа* b_n, что на отрезке $a \le x \le b$ всюду справедливо неравенство

$$|a_n(x)| \le b_n$$

и числовой ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,$$

то исходный функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $a \le x \le b$.

Задача 1. Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

сходится равномерно.

Решение:
Для функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

найдем мажорантный ряд, это

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Данный ряд является сходящимся гармоническим рядом ($q > 1$). Следовательно, по теореме о мажоранте исходный функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно.

Теорема 1. Если ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

сходится равномерно на отрезке $a \leq x \leq b$, а его члены $a_n(x)$ являются непрерывными функциями по переменной x, то сам ряд представляет собой непрерывную функцию переменной x.

Теорема 2. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

сходится равномерно на отрезке $a \leq x \leq b$, а его члены a_n являются непрерывными функциями x, то ряд можно интегрировать почленно:

$$\int_{x=a}^{b} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x=a}^{b} a_n(x)\, dx.$$

Теорема 3. Формула почленного дифференцирования

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n(x)}{dx}$$

справедлива, если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n(x)}{dx}$$

сходятся равномерно на отрезке $a \leq x \leq b$, а производные $a_n(x)$ являются непрерывными функциями по x.

Задача 2. Вычислите

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\right) dx$$

с точностью до ± 0.01.

Решение:

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

равномерно сходится, а все его члены являются непрерывными функциями, следовательно, данный ряд можно почленно интегрировать.

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\sin nx}{n^3} dx$$

Вычислим отдельно

$$\int_0^1 \frac{\sin nx}{n^3} dx = \int_0^1 \frac{\sin nx}{n^3} \frac{1}{n} d(nx) = \frac{1}{n^3} \left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^1 = \frac{-\cos n}{n^4} + \frac{\cos 0}{n^4} = \frac{1-\cos n}{n^4}$$

Получаем сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^4}$$

Оценим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Для полученного ряда справедливо неравенство

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \le 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Оценим мажорантный ряд. Разобьем сумму ряда на два слагаемых

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

Остаток

$$2\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \le \pm 0{,}01$$

Пусть $N = 150$, проверим выполняется ли в этом случае неравенство

$$\frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{n=1}^{150} \frac{1}{n^2} < \pm 0{,}01$$

Таким образом, достаточно взять $N = 150$

$$\sum_{n=1}^{150} \frac{1-\cos n}{n^4} \approx 0{,}58$$

Задача 3. Напишите уравнение касательной к кривой

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

в точке $x = 0$.

Решение:

Уравнение касательной в общем виде:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$$

$$x_0 = 0$$

Найдем $y'(x_0)$ и $y(x_0)$

$$y(x_0) = y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 0}{n^3} = 0$$

Функциональный ряд можно дифференцировать почленно, если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dx}$$

сходятся равномерно на отрезке $a \leq x \leq b$, а производные $a_n(x)$ являются непрерывными функциями по x.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

сходится равномерно. Найдем производную

$$y' = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{\sin nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Данный ряд, также сходится равномерно, а его функции $a_n(x)$ являются непрерывными функциями.

$$y'(x_0) = y'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 0}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Таким образом, уравнение касательной имеет вид:

$$y = \frac{\pi^2}{6} x$$

Самостоятельно:

Вычислите

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\right)dx$$

Решение:
Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

равномерно сходится по теореме о мажоранте, мажоранта

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^2}dx$$

Вычислим

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^2}dx=\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{-\cos nx}{n^3}\Big|_0^{\pi}=\frac{-\cos n\pi}{n^3}+\frac{\cos 0}{n^3}=\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^3}$$

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^3}$$

Степенные ряды

Определение. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

называют рядом по натуральным степеням x или просто степенным рядом.

Интервал сходимости степенного ряда. Для каждого степенного ряда существует замкнутый интервал сходимости

$$|x|\le R$$

R – радиус сходимости. Вычисляется следующим образом:

1. С помощью признака Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\alpha, R=\frac{1}{\alpha}$$

2. С помощью признака Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\alpha, R=\frac{1}{\alpha}$$

Замечание. Необходимо проверять отдельно сходимость ряда на концах интервала сходимости.

Степенные ряды можно дифференцировать и интегрировать почленно (за исключением, быть может, его концов)

Задача 4. Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$$

Решение:

Определим радиус с помощью признака Даламбера:

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$a_{n+1}=\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$(n+1)!=n!\,(n+1)$$

$$(2n+2)!=(2n)!\,(2n+1)(2n+2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2(n+1)^2}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+5n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{4}$$

$$R=4$$

$$|x|\le 4$$

Проверим сходимость на концах полученного интервала, то есть при $x=\pm 4$.

То есть, проверим сходимость рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n 4^n$$

Проверяя сходимость первого ряда по признаку Даламбера, мы получим 1, то есть по данному признаку сходимость не определить. Проверим необходимое условие сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \infty$$

Таким образом, ряд расходится. Аналогично проверяем сходимость второго ряда. Там также не выполняется необходимое условие

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Следовательно, интервал сходимости

$$|x| < 4$$

$$x \in (-4; 4)$$

Задача 5. Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

Решение:

Определим радиус с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{(n+1)^2}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{x^{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n^2+2n+1-n^2}}{2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{2n+1}}{2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}|x^{2n+1}| < 1$$

Если $|x| > 1$,тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+1}|}{2} = \infty$, $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+1}|}{2} = 0$. Таким образом,

$$|x| \le 1$$

Проверим сходимость на концах интервала, то есть проверим сходимость рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$$

Оба этих ряда сходятся, так как первый ряд является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, а у второго ряда его ряд, составленный из модулей равен первому, следовательно, второй ряд также сходится абсолютно. То есть интервал сходимости

$$|x| \leq 1.$$

Самостоятельно:

1. Определить радиус степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}, (a > 0)$$

Решение:

Найдем радиус сходимости с помощью признака Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}} = 1, R = 1$$

?

$$|x| \leq 1$$

Проверим сходимость ряда при $x = \pm 1$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$$

Проверим необходимое условие сходимости ряда ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}} = \begin{cases} \infty, \text{если } 0 < a < 1 \\ 0, \text{если } a > 1 \end{cases}$$

Получаем что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$$

сходится (по интегральному признаку) при $a > 1$ и расходится при $0 < a < 1$.

Аналогично, проверяем сходимость знакопеременного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{\sqrt{n}}}$$

В итоге получаем, что при $0 < a < 1$ интервал сходимости $x \in (-1; 1)$. При $a > 1$ интервал сходимости $x \in [-1; 1]$.

Ряд Тейлора.

Функция, имеющая в рассматриваемой области производные всех порядков, называется *гладкой*. Для любой гладкой функции верна формула *Тейлора*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\cdot(x-a)^{n+1}$$

Определение. Степенной ряд

$$f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2 + \cdots$$

называют рядом Маклорена.

Табл. 1. Сводка наиболее распространенных рядов Маклорена.

1.	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	сходится при всех x
2.	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	
3.	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	
4.	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$	Абсолютно сходится при $\lvert x\rvert < 1$, условно при $x = 1$.
5.	$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^a x^n$, $C_n^a = \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}$	Абсолютно сходится при $\lvert x\rvert < 1$.
	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	Для всех $\lvert x\rvert < 1$.

Задача 6. Разложить в ряд Маклорена функцию $\cos^2 x$

Решение:
Нам известно разложение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Воспользуемся формулой понижения степени для косинуса

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

Разложим в ряд $\cos 2x$

$$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n}$$

Таким образом, $\cos^2 x$ раскладывается следующим образом:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \frac{4x^2}{2!} + \cdots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n}$$

Задача 7. Разложить в ряд Маклорена функцию
$$\frac{1}{1+x^2}$$
Решение:
Нам известен ряд
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
Представим функцию как
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$
В известный ряд вместо x подставляем $-x^2$
$$\frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Самостоятельно:

1. Разложите в ряд Маклорена

   А) $\sin^2 x$

Решение:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \cdots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n}$$

   B) $\cos x^2$

Решение:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$
$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$$

2. Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда:
$$\text{а)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 (x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{3(n+1)^{\frac{1}{2n}}}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{3(n+1)^{\frac{1}{2n}}}\right| = \frac{|x|}{3} < 1$$

$$|x| < 3$$

$$\text{с) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x+3)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$$