Российский университет
дружбы народов

Курс лекций «Линейная алгебра»

Лекция 1. Матрицы и действия с ними

Матрицы и действия с ними

Матрицы

Определение. Прямоугольную таблицу $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

содержащую m строк n столбцов, называют матрицей размера m на n. Если количество строк равно количеству столбцов($m = n$), то такие матрицы называются квадратными матрицами.

Если матрица содержит один столбец ($n = 1$) или одну строку ($m = 1$), такие матрицы называют векторами: $(a_1 \dots a_n)$ или $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Матрицы

Матрицы обозначают заглавными буквами

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Элементы матриц обозначают той же буквой, но строчной и с индексами a_{ij}.

Первый индекс обозначает номер строки матрицы, второй индекс номер столбца. Таким образом, элемент a_{23} - это элемент матрицы, находящейся на второй строке в третьем столбце.

Матрицы. Примеры

Матрица размера 2×3 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Квадратная матрица размера 3×3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, элемент

$a_{12} = 2$

Вектор длины 3 : $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)$ (размерность матрицы 1×3)

Сложение матриц

Определение. Под суммой двух матриц одинакового размера понимают матрицу, элементы которой равны сумме элементов этих матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение матриц на число

Под произведением матрицы на число понимают матрицу того же размера, элементами которой служат элементы исходной матрицы, умноженные на это число:

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Сложение матриц и умножение на число. Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 2+0 & 3-2 \\ 4+6 & 5+2 & 6+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

Перемножение матриц

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

То есть, матрицу A размерностью $n \times m$ можно умножить на матрицу B размерностью $k \times l$, только в том случае, если $m = k$. При это размерность полученной матрицы C будет $n \times l$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = ?$$

Перемножение матриц

Произведением матрицы A размерностью $m \times n$ на матрицу B размерностью $n \times p$ называется матрица C размерностью $m \times p$ элементы которой вычисляются следующим образом:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

где $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p, k = 1, \dots, n.$

Перемножение матриц. Пример

Умножим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Размерность матрицы A: $3x2$, размерность матрицы B: $2x3$, число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, следовательно можно производить умножение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+0\cdot 4 & 2\cdot 3+0\cdot 1 & 2\cdot 0+0\cdot 1 \\ 1\cdot(-2)-2\cdot 4 & 1\cdot 3-2\cdot 1 & 1\cdot 0-2\cdot 1 \\ 3\cdot(-2)+5\cdot 4 & 3\cdot 3+5\cdot 1 & 3\cdot 0+5\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ -10 & 1 & -2 \\ 16 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

Перемножение матриц. Свойства

Умножение матриц ассоциативно, но некоммутативно, то есть $A(BC) = (AB)C$, но $AB \neq BA$

Из предыдущего примера $C = AB = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ -10 & 1 & -2 \\ 16 & 14 & 5 \end{pmatrix}$,

при этом $\tilde{C} = BA = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

Как видно $\tilde{C} \neq C$

Умножение матрицы на вектор. Пример

Умножим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ на вектор $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Линейное пространство и кольцо

Линейное пространство

Определение. Множество называется линейным пространством, если для всех элементов этого множества определены операции сложения и умножения на число и выполняются следующие свойства:

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. Существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$
4. Существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
6. $1x = x$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Здесь x, y, z – элементы линейного пространства, а α, β – числа. Множество матриц одного размера образуют линейное пространство.

Линейное пространство. Пример

Столбцы длины 2 образуют линейное пространство. Его элементами будут

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \dots$$

Проверим выполняются ли свойства линейных пространств

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\alpha(\beta x) = \begin{pmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta x_2 \end{pmatrix} = (\alpha\beta)x$
$x + (y + z) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{pmatrix}$ $= (x + y) + z$	$1x = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$
Для $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ верно, что $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$(\alpha + \beta)x = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)x_1 \\ (\alpha + \beta)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \alpha x_2 + \beta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix}$ $= \alpha x + \beta x$
Для $-\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, что $x + (-x) = 0$	$\alpha(x + y) = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + y_1) \\ \alpha(x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \alpha x + \alpha y$

Кольцо

<u>Определение</u>. Множество, в котором введено сложение и умножение элементов, называют кольцом. При этом выполняются следующие свойства:

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. *Существует такой элемент 0, что* $x + 0 = x$
4. *Существует такой элемент* $-x$*, что* $x + (-x) = 0$
5. $x(yz) = (xy)z$
6. *Существует такой элемент* e*, что* $ex = xe = x$
7. $(x + y)z = xz + yz$
8. $z(x + y) = zx + zy$

Здесь x, y, z – элементы кольца

Кольцо матриц 2×2

Матрицы $n \times n$ образуют кольцо, так как для них введены операции сложения и умножения, а также выполняются все свойства кольца.

Матрицы 2×2 образуют кольцо, в котором матрица

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

служит нулевым элементом, а матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

служит единичным элементам, ее называют единичной матрицей. Чтобы доказать это, следует проверить выполнение аксиом.

Кольцо матриц 2×2

Задание. Проверить выполнение всех свойств кольца для матриц

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

Кольцо матриц 2×2

Замечание. Умножение матриц не удовлетворяет одному свойству, присущему умножению чисел, в большинстве случаев $XY \neq YX$.

Кольца, в которых не выполняется это равенство, называются **некоммутативными.**

Кольцо матриц 2×2. Умножение на число

Множество матриц 2×2 является не только кольцом, но и линейным пространством. При этом умножение на число согласовано с умножением на матрицу так

$$\alpha X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} X, \text{ поскольку}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} \end{pmatrix}.$$

Кольцо матриц

Теорема. Множество матриц размера $n \times n$ образует некоммутативное кольцо, нулем в котором служит нулевая матрица, все элементы которой равны нулю, а единице – матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Транспонирование матрицы

Операция, которая превращает матрицу с элементами a_{ij} в матрицу с элементами a_{ji}, называется **транспонированием.** То есть матрица, полученная из данной заменой каждой ее строчки столбцом с тем же номером, называется матрицей транспонированной к данной. Обозначается A^T.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ в } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ в } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Свойства транспонированной матрицы

Транспонированная матрица обладает следующими свойствами:

1. $(A^T)^T = A,$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T,$
3. $(AB)^T = B^T A^T.$

Транспонирование матрицы. Пример

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

тогда

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 16 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы. Пример

Транспонированная матрица C

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix},$$

при этом

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выполняется свойство $(AB)^T = B^T A^T$

Транспонирование матрицы. Задание

Доказать свойства транспонированных матриц для матриц 2 на 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Вычисление и свойства определителя

Определитель (детерминант)

Определение. Определитель (или детерминант) — это скалярная величина, которая может быть вычислена и поставлена в однозначное соответствие любой квадратной матрице.

Определитель матрицы A обозначается как $\det A$, $|A|$, или Δ.

Минор

<u>Определение</u>. Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$ –го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца. Обозначается m_{ij}.

Для определителя $detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}$ минором элемента

a_{12} будет $m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Алгебраическое дополнение

Определение. Алгебраическим дополнением элемента матрицы a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Обозначается $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, m_{ij}$.

Например, $A_{11} = +m_{11}$, так как $i + j = 1 + 1 = 2 \to (-1)^2 = +1$,

а $A_{32} = -m_{32}$, так как $i + j = 3 + 2 = 5$.

Вычисление определителя

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

Вычисление определителя. Пример

Вычислим определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Раскроем определитель по первой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - 2 \cdot (5 \cdot 1 - 2 \cdot 0) + 3 \cdot (5 \cdot 3 - 1 \cdot 0) = -5 - 10 + 45$$

$$= 30$$

Свойства определителя

1. $detA = detA^T$.
2. $\det AB = \det A \det B$
3. Если определить содержит хотя бы одну нулевую строку (или столбец), то этот определить равен нулю.
4. Если в определителе две строки (столбца) совпадают, то он равен нулю.
5. При перестановке двух соседних строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.
6. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Свойства определителя

7. Если все элементы какой-либо строки (столбца) пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

8. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы параллельной строки (столбца) , умноженные на любое число.

9. Если элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель представляется в виде суммы определителей.

10. Определитель диагональной и треугольной матриц равен произведению диагональных элементов.

Свойства определителя. Задание

Проверим свойство 1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы, то есть $detA = detA^T$.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, транспонированная матрица

имеет вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Свойства определителя. Задание

Вычислим определители матриц:

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{\underline{a_{13}a_{21}a_{32}}} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31}.$$

$$detA^T = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + \underline{\underline{a_{21}a_{32}a_{13}}} + \underline{a_{31}a_{12}a_{23}} -$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}.$$

$$\Downarrow$$

$$detA = detA^T$$

Остальные свойства доказать самостоятельно.

Обратная матрица

Обратная матрица

Определение. Решение матричного уравнения

$$AX = XA = E,$$

если таковое существует, называют матрицей, обратной к A; пишут $X = A^{-1}$.

Задача. Найти матицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

Решение. В задаче требуется найти такую матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

чтобы выполнялось

$$AX = XA = E.$$

Обратная матрица

Уравнение $AX = E$ дает

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} + 2\,x_{21} & x_{12} + 2\,x_{22} \\ 3\,x_{11} + x_{21} & 3\,x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы слева должны равняться элементам матрицы справа

$$\begin{pmatrix} x_{11} + 2\,x_{21} & x_{12} + 2\,x_{22} \\ 3\,x_{11} + x_{21} & 3\,x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

При это первый столбец содержит только переменные x_{11} и x_{21}, а второй столбец переменные x_{12} и x_{22}, то есть получаем две независимые системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

Для отыскания первого столбца матрицы X получается система двух уравнений

$$\begin{cases} x_{11} + 2\,x_{21} = 1, \\ 3\,x_{11} + x_{21} = 0, \end{cases}$$

причем матрицей этой системы будет исходная матрица A. Эта система имеет одно решение

$$x_{11} = -\frac{1}{5}, \qquad x_{21} = \frac{3}{5}.$$

Обратная матрица

Аналогично, второй столбец матрицы X можно найти из системы

$$\begin{cases} x_{12} + 2\,x_{22} = 0 \\ 3\,x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases}$$

матрицей которой опять служит A. Её решение единственно и равно

$$x_{12} = \frac{2}{5}, \qquad x_{22} = -\frac{1}{5}.$$

Обратная матрица

Поэтому уравнение $AX = E$ имеет единственное решение:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Осталось проверить, что это решение удовлетворяет $XA = E$:

$$XA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

Теорема. Если определитель матрицы A равен нулю, то она не обратима.

Пусть A – матрица, определитель которой равен нулю ($\det A = 0$). Обратная матрица – это решение уравнения:

$$AX = XA = E,$$

Если решение существует, то выполняется равенство:

$$\det(AX) = \det E \text{ или } \det A \det X = \det E$$

При этом $\det E = 1$, а $\det A \det X = 0$, таким образом, существование решения рассматриваемого уравнения влечет $0 = 1$.

Обратная матрица

Если определитель матрицы A не равен нулю, то она имеет обратную матрицу и ее можно записать в виде дроби

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B,$$

где B – матрица, элементами которой служат многочлены относительно a_{ij}.

Вычисление обратной матрицы

Вычисление обратной матрицы n на n

Правило вычисления. Чтобы найти матрицу, обратную к матрице A, нужно

1. вычислить определить матрицы A,
2. составить матрицу миноров элементов матрицы A,
3. изменить знаки в шахматном порядке (по принципу: если $i+j-\text{четное}, \text{знак}\ "+"$, если $i+j-\text{нечетное}, \text{знак}\ "-"$),
4. траспонировать эту матрицу,
5. разделить получившуюся матрицу на определитель матрицы A.

Вычисление обратной матрицы. Матрицы 2 на 2

При $n = 2$ можно выписать явную формулу для обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Вычисление обратной матрицы. Матрицы 3 на 3

Задача. Составить матрицу, обратную к

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Шаг 1. $\det A = -34.$

Вычисление обратной матрицы

Шаг 2.

$$\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -14 \\ -10 & -8 & -2 \\ -14 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

Шаг 3. Меняем знаки в шахматном порядке:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -14 \\ 10 & -8 & 2 \\ -14 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Шаг 4. Транспонируем эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 & -14 \\ 5 & -8 & 1 \\ -14 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

Шаг 5. Делим на определитель:

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 & -14 \\ 5 & -8 & 1 \\ -14 & 2 & 4 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{17} & -\frac{5}{17} & \frac{7}{17} \\ -\frac{5}{34} & \frac{4}{17} & -\frac{1}{34} \\ \frac{7}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

Проверка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & -\frac{5}{17} & \frac{7}{17} \\ -\frac{5}{34} & \frac{4}{17} & -\frac{1}{34} \\ \frac{7}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{17} & -\frac{5}{17} & \frac{7}{17} \\ -\frac{5}{34} & \frac{4}{17} & -\frac{1}{34} \\ \frac{7}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое линейное пространство? Почему множество всех матриц одной и той же размерности является линейным пространством?
2. Что такое кольцо? Почему множество всех матриц 2 на 2 является кольцом?
3. Почему решения матричных уравнений $AX = E$ и $XA = E$ совпадают? При каких условиях эти уравнения разрешимы?
4. Что такое обратная матрица?
5. Что такое транспонирование матрицы? Чему равны $(AB)^T$ и $\det A^T$?
6. Сформулируйте необходимые и достаточные условия, при которых квадратная матрица А имеет обратную.