Глава 1. Числовые ряды

1.1.Числовые последовательности и ряды

Пусть имеется правило, по которому натуральным числам 1,2,3, … ставятся в соответствие некоторые вещественные числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$, то будем говорить, что задана последовательность или ряд чисел.

Определение. Число aназывают *пределом* последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если в любой его окрестности лежат все числа последовательности, начиная с некоторого номера. При этом принято следующие обозначение предела

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

что означает следующее: последовательность$a_1, a_2, a_3, \ldots$ сходится к числу a.

Пример. Последовательность чисел

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

сходится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Сумму конечного числа членов этогоряда (частичную сумму) обозначать таким образом:

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \,,$$

а предел частичных сумм

$$S \quad = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

будем называть суммой бесконечного ряда$a_1, a_2, a_3, \ldots$ Далее будем говорить, что ряд сходится, если существует конченый предел S частичных сумм S_N, а если конечного предела не существует, то будем считать, что ряд расходится.

Для анализа вопроса о сходимости ряда можно использовать теорему Леонарда Эйлера[1].

Теорема Эйлера. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

---

[1]Леона́рдЭ́йлер (нем. LeonhardEuler; 15 апреля 1707, Базель, Швейцария — 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург, Российская империя) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук, а также физики, астрономии и ряда прикладных наук.

сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю с ростом n.

Доказательство: Рассмотрим разность двух соседних частичных сумм$a_n = S_n - S_{n-1} \to \lim\limits_{N\to\infty} a_n = \lim\limits_{N\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S \quad - S \quad = 0.$

Теорема Эйлера позволяет легко доказывать сходимость или расходимость рядов.

Пример 1. Ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

расходится, поскольку его общий член $a_n = (-1)^{n-1}$не стремится к нулю.

Замечание. Этот вывод базируется на соотношении

$$S \quad = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} S_n.$$

Пример 2. Ряд

$$\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \cdots$$

расходится, поскольку его общий член $a_n = \sin n$не стремится к нулю.

Последнее утверждение удобно доказать от противного. Допустим, что $\sin n \to 0$, тогда и$\sin(n+1) \to 0$, но

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1,$$

поэтому

$$\cos n = \frac{\sin(n+1) - \sin n \cos 1}{\sin 1} \to 0,$$

что входит в противоречие с основным тригонометрическим тождеством:

$$1 = \sin^2 n + \cos^2 n \to 0.$$

Посмотрим на такую расходимость ряда в рамках численного эксперимента, рассмотрев различные частичные суммы:

$$\sum_{n=1}^{10} \sin n = 1.411188371218$$

$$\sum_{n=1}^{11} \sin n = 0.4111981646673$$

$$\sum_{n=1}^{12} \sin n = -0.1253747533331$$

$$\sum_{n=1}^{100} \sin n = -0.1271710136604$$

$$\sum_{n=1}^{1000} \sin n = 0.8139696340732$$

Как видно, вклад в сумму нового слагаемого не меньше, чем вклад предшествующих ему членов, поэтому ряд и расходится.

1.2.Примеры

1.2.1. Геометрическая прогрессия

Если отношение следующего члена ряда к предыдущему остается все время постоянным, то есть

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то ряд

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

называют рядом геометрической прогрессии. Элементы этого ряда можно записать так:

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \ldots.$$

Ограничимся для простоты случаем $a_1 = 1$. Как известно из школьного курса Алгебры сумма Nпервых членов ряда

$$1, q, q^2, q^3, \ldots$$

равна

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

ПустьNбеспредельно возрастает, тогдаq^N стремится к бесконечности или к нулю в зависимости от того, больше $|q|$единицы или меньше.

Утверждение.При $|q| < 1$ряд геометрической прогрессии сходится и его сумма равна

$$a_1(1 + q + q^2 + \cdots) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{a_1}{1 - q};$$

при $|q| \geq 1$этот ряд расходится.

Указанную формулу можно проверить прямым вычислением:

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{3^n} = 1.49999 \ldots \approx 1.5 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}.$$

1.2.2. Гармонический ряд

Если

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{n}{m},$$

то ряд

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

называют гармоническимрядом

$$a_1, \frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{3}, \dots, \qquad a_n = \frac{a_1}{n}.$$

Это название происходит из музыкальной акустики: такую последовательность образуют периоды обертонов звучащей струны.[2]Ряд назван гармоническим, так как складывается из «гармоник»: k-я гармоника, извлекаемая из струны, — это основной тон, производимый струной длиной $1/k$от длины исходной струны.

Если же

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{n^s}{m^s},$$

то ряд называют обобщенным гармоническим.

Утверждение.Обобщенный гармонический ряд

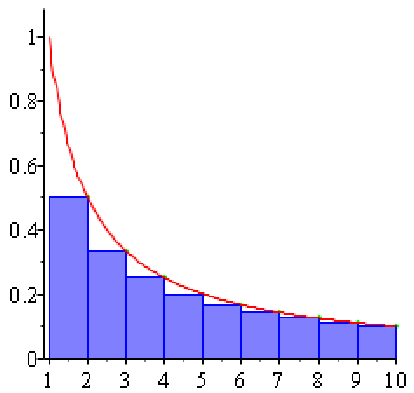
$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

сходится при $s > 1$и расходится при $0 < s \le 1$.

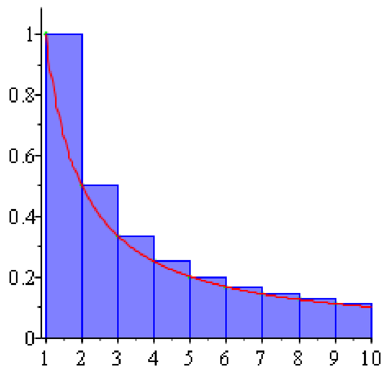
Для доказательства сходимости следует заметить, что справедливо неравенство

$$\int_1^N \frac{dx}{x^s} < 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s} < 1 + \int_1^{N+1} \frac{dx}{x^s}.$$

Это неравенство можно получить из геометрических соображений.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} < \int_1^{10} \frac{dx}{x}$$



$$1 + \frac{1}{2} + .. + \frac{1}{9} > \int_1^{10} \frac{dx}{x}$$

Рис. 1. Графический анализ обобщенного гармонического ряда.

[2]*Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Дополнение о музыкальной акустике.

При $s = 1$ получим

$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \ln(N+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N},$$

откуда видно, что последовательность частичных сумм

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

стремится к бесконечности быстрее, чем $\ln(N+1)$ (имеет место расходимость).

При $s < 1$ получим

$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{x^s} = \frac{1-(N+1)^{-s+1}}{s-1} < 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s},$$

откуда видно, что последовательность частичных сумм стремится к бесконечности быстрее, чемN^{1-s} (имеет место расходимость).

При $s > 1$получим, что

$$S_N = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s} < \int_1^{N} \frac{dx}{x^s} = 1 + \frac{1-N^{-s+1}}{s-1} < 1 + \frac{1}{s-1},$$

то есть частичные суммы все время остаются конечными (имеет место сходимость).

Проанализировать вопрос о сходимости ряда без вычисления его суммы является одним из самых важных задач теории рядов. Когда доказано, что числовой ряд сходится, что можно смело использовать численные методы для приближенного вычисления суммы ряда.

Теорема о монотонной последовательности. Если последовательность

1. монотонно возрастает, то есть $a_{n+1} \geq a_n$ и
2. ограничена сверху, то есть можно указать такое число M, что $a_n \leq M$,

то последовательность имеет конечный предел.

Если применить эту теорему к нашемупримеру, то станет видно, что частичные суммы

$$S_N = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s}$$

образуют монотонно возрастающую и ограниченную сверху числом $1 + \frac{1}{s-1}$ последовательность, которая имеет конечный предел.

Замечание. Функция

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

определена при $s > 1$ и называется дзета-функцией Римана[3].

Эйлер знал, что такой ряд сходится и случайно обнаружил, что сумма при $s = 2$ равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

и забавы ради предложил найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3).$$

Эта шутка оказалась популярной[4] среди математиков. Соотношение, найденное Эйлером, нетрудно проверить прямым вычислением:

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} = 1.63498,$$

где величину

$$\frac{\pi^2}{6} = 1.64493$$

мыполучим ниже в теории рядов Фурье.

Анализируячастичные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

можно подумать, что сходимость или расходимость ряда зависит исключительно от того, стремится ли общий член a_n к нулю с ростом n, или нет. Кажется, что прибавляя всякий раз все меньшее число, мы обязательно получим конечную сумму. Однако, на самом деле, это не так, например, гармонический ряд расходится

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty,$$

несмотря на то, что его общий член $a_n = \frac{1}{n}$стремится к нулю. Таким образом, обратная теорема Эйлера не является верной.

Проанализировать расходимость гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

---

[3]Георг Фридрих Бернхард Риман (нем. GeorgFriedrichBernhardRiemann; 17 сентября 1826 года, Брезеленц, Ганновер — 20 июля 1866 года, Селаска, Италия, близ Лаго-Маджоре) — немецкий математик, механик и физик.

[4] Число $\zeta(3)$ получило название постоянной Апери в честь Роже Апери (фр. RogerApéry, 14 ноября 1916, Руан, Франция — 18 декабря 1994, Кан, Франция) — математик французско-греческого происхождения), доказал иррациональность числа $\zeta(3)$. За прогрессом в ее вычислении можно следить на numbers.computation.free.fr.

в рамках численного эксперимента не просто: суммарастет очень медленно, как логарифм числа членов:

$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = 2.92897$	$\ln 10 = 2.30259$
$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = 5.18738$	$\ln 100 = 4.60517$
$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n} = 7.48547$	$\ln 1000 = 6.90776$

Может показаться, что если увеличить число членов суммы еще в 10 раз, то мы получим число, первые цифры которого уже не будут меняться с ростом числа членов ряда, как так же может показаться, что график функции $y = \ln x$имеет горизонтальную асимптоту.

1.2.3. Ряд Лейбница

Знакоперемнный ряд Лейбница[5]

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

сходится (сходиться условно).

Доказательство. Последовательность

$$S_{2N} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N}\right)$$

монотонно возрастает. Если расставить скобки иначе, видно, что

$$S_{2N} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - \frac{1}{2N} < 1\,,$$

поэтому последовательность S_{2N}имеет конечный предел S. Так как имеет место следующее соотношение

$$S_{2N+1} = S_{2N} + \frac{1}{2N+1} \to S + 0 = S,$$

то все частичные суммы S_M,начиная с некоторогоM, попадут в любую заданную окрестность точкиS, а это и означает, что исходный ряд сходится.

Замечание.В теории степенных рядов мы обнаружим, что сумма ряда равна $\ln 2$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots = \ln 2\,;$$

а пока мы можем лишь проверить это равенство в рамках численного эксперимента:

---

[5]Го́тфрид Ви́льгельм Ле́йбниц (GottfriedWilhelmLeibniz или нем. GottfriedWilhelmvonLeibniz, 21 июня (1 июля) 1646 — 14 ноября 1716) — саксонский философ, логик, математик, механик, физик, криптограф, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед.

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0.6931471805599$$

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0.6926474305598$$

$$\ln 2 = 0.69315$$

Ряд Лейбница является хорошим примером того, что в сходящемся ряде нельзя переставлять местами бесконечное число слагаемых. Например, переместим в ряде Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

члены так, чтобы после одного положительного следовали два отрицательных:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots$$

В обоих рядах одни и те же члены, только написаны они в другом порядке. Частичная сумма 3N членов последнего ряда равна

$$S'_{3N} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{4N-2} - \frac{1}{4N}\right)$$

Складывая первые два числа в скобках (частичная сумма содержит конченое число членов и с ней можно проделывать любые арифметические манипуляции), получим

$$S'_{3N} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4N-2} - \frac{1}{4N}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N}\right)\right].$$

Сравнивая выражение в квадратных скобках с частичной суммой ряда Лейбница, имеем

$$S'_{3N} = \frac{1}{2} S_{2N} \to \frac{1}{2} S.$$

Замечая, что S'_{3N+1}и S'_{3N+2} имеют тот же предел, что и S'_{3N}, видим, что ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

сходится, но его суммавдвое меньше суммы ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Таким образом, сходящиеся условно знакопеременные ряды представляют собой весьма сложный объект для исследования, работать с которыми можно при условии, если мы ограничим себя в самых обычных арифметических манипуляциях с членами рядов. Можно заметить, что такие проблемы не возникают при анализе абсолютно сходящихся рядов.

1.3. Абсолютная сходимость

Рассмотрим последовательность частичных сумм

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} |a_n| \,,$$

котораяс ростом Nмонотонно возрастает и в пределе может сколь угодно близко подойти к конечному числу (ряд абсолютно сходится,предел равен S), а может неограниченно возрастать $S_N \to +\infty$ (ряд расходится).

При этом из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

но не наоборот!

Определение. Если ряд из$|a_n|$ сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

то говорят, что ряд изa_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится *абсолютно*(или, как еще говорят, безусловно).

При преобразовании членов, входящих в сумму абсолютно сходящегося ряда, можно смело выполнять те же операции, что и с конечными суммами:

- если в сходящемся ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

объединить члены произвольным образом в группы, не меняя их положения, то сумма не изменится;

- если в абсолютно сходящемся ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

переставить члены в любом порядке, то сумма не изменится;

- для любого сходящегося ряда верно
$$c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c a_n\,;$$
- для любых двух сходящихся рядов верно
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Доказательства этих свойств мы опускаем.[6]

1.4.Мажоранта

Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
сходится, то его сумму можно вычислить с заданной точностью ε, просуммировав достаточное число первых членов суммы. Изначально нам, однако, не известно, сколько именно членов нужно взять, чтобы вычислить сумму ряда с точностью до второго или третьего знака после запятой. Может получиться так, что это число весьма велико и превосходит возможности современных ЭВМ, но в некоторых конкретных случаях это число можно подобрать. Приведем в качестве примера следующую задачу.

Задача. Вычислить сумму
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$$
с точностью до ± 0.01.

Решение. Разобьем сумму ряда на два слагаемых
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{3^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$$
и оценим сверху второй член, его обычно называют остатком. Поскольку справедливо неравенство $|\sin n| \le 1$, то
$$\frac{|\sin n|}{3^n} \le \frac{1}{3^n},$$
а для остатка справедлива оценка
$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{N+1}} \frac{3}{2} = \frac{1}{2\,3^N}.$$
Следовательно, остаток будет меньше $\varepsilon = 0.01$ при тех значениях N, при которых

[6] [ФГМ], гл. XI, § 4.

$$\frac{1}{2\,3^N} \leq \varepsilon.$$

Для завершения решения задачи остается решить неравенство:

$$3^N \geq \frac{1}{2\varepsilon},$$

$$N \ln 3 \geq \ln \frac{1}{2\varepsilon},$$

$$N \geq \ln \frac{1}{2\varepsilon} : \ln 3 = \ln \frac{100}{2} : \ln 3 = 3.56088$$

Таким образом, сложив 4 первых члена, мы получим величину, которая отличается от суммы ряда не более чем на $\varepsilon = 0.01$.

Ответ: с указанной точностью сумма ряда совпадает с суммой 4 первых членов, которая равна

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{\sin n}{3^n} = \frac{\sin(1)}{3} + \frac{\sin(2)}{9} + \frac{\sin(3)}{27} + \frac{\sin(4)}{81} = 0.37741$$

Проверка: взяв, скажем, 100 членов, получим те же цифры в первых двух позициях после запятой:

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{\sin n}{3^n} = 0.37353.$$

Описанный прием допускает естественное обобщение.

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

называют *мажорантой* для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

если для всехnвыполняется неравенство

$$|a_n| \leq b_n.$$

Таким образом, если сумма первых Nчленов мажоранты соответствует требуемой точности, то и сумма первых Nчленов исходного ряда будет соответствовать требуемой точности.

Задача. Вычислите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

с точностью до ± 0.01.

Решение. Поскольку

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2},$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

является мажорантой для исходного. Например, возьмем 100 первых членов, тогда сумма

$$\left(\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\pi^2}{6} = -0.00995\,.$$

Таким образом, взяв первые 100 членов, мы получим требуемую точность.

Ответ: с требуемой точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} = 1.20201.$$

Заглянув на сайт numbers.computation.free.fr, можно найти, что на самом деле, сумма равна

$$1.202056903159594285399738161511449990764986292340498.$$

1.5.Признаки абсолютной сходимости

Техника использования мажоранты вошла в употребление на рубеже XVIII-XIXвеков благодаря Кристофу Гудерману[7], составившему в частности таблицы гиперболических функций. Его единственный ученик – Карл Вейерштрасс[8]– перенес эти методы на доказательства теорем о сходимости.[9]

Мажорантный признак.Ряд, для которого можно указать сходящуюся мажоранту, сходится абсолютно.

Доказательство этого утверждения основано на том факте, что из неравенства

$$|a_n| \leq b_n$$

следует такая оценка

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n.$$

Из сходимости мажоранты

---

[7]Кристоф Гудерман (нем. ChristophGudermann; 25 марта 1798, Финенбург, — 25 сентября 1852, Мюнстер) — немецкий математик, известный главным образом как учитель Карла Вейерштрасса.

[8]Карл Тéодор Вильгéльм Вéйерштрасс (нем. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß; 31 октября 1815 — 19 февраля 1897) — немецкий математик.

[9][Klein], гл. 6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

следует, что при достаточно больших значениях Nостаточная сумма

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$$

мала, а, следовательно, произвольно мал по абсолютному значению и остаток исходного ряда. Таким образом, этот ряд сходится.

Замечание. Употребление неравенств для рядов, сходимость которых не доказана, требует некоторых пояснений, которые на самом деле вовсе не просты и требуют некоторого погружения в теорию вещественных чисел.[10]

Пример. Ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n},$$

поскольку его мажоранта

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

сходится по теореме о геометрической прогрессии.

Признак Даламбера[11]. Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha.$$

Если $\alpha < 1$, торяд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится абсолютно, если же $\alpha > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Если $\alpha < 1$, тодля любого $\varepsilon > 0$, и в частности такого, что $q = \alpha + \varepsilon < 1$,можно указать такое N, начиная с котороговерно

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \alpha + \varepsilon,$$

[10] Краткие сведения о теории вещественных чисел по Дедекинду можно найти во Введении к курсу Г.М. Фихтенгольца.

[11]Жан Леро́н Д’Аламбе́р (д’Аламбер, Даламбер; фр. JeanLeRondD'Alembert, d'Alembert; 16 ноября 1717 — 29 октября 1783) — французский учёный-энциклопедист. Широко известен как философ, математик и механик. Член Парижской академии наук (1740), Французской Академии (1754), Петербургской (1764) и других академий.

то есть

$$|a_n| < (\alpha + \varepsilon)^{n-N} |a_N|.$$

Подобрав число Mстоль большим, чтобы выполнялись неравенства

$$|a_1| < M, \dots, |a_N| < M(\alpha + \varepsilon)^N,$$

видим, что рядгеометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(\alpha + \varepsilon)^n$$

является мажорантой для исходного ряда.

Еслиже $\alpha > 1$, то начиная с некоторого номера верно

$$|a_{n+1}| \geq |a_n|,$$

поэтому a_nне может стремиться к нулю с ростом n.

Пример. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

сходится, поскольку при $n \to \infty$

$$\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Признак Коши[12].Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \alpha.$$

Если $\alpha < 1$, торяд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится абсолютно, если же $\alpha > 1$, то ряд расходится.

Пример. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

[12]Огюсте́н Луи́ Коши́ (фр. AugustinLouisCauchy; 21 августа 1789, Париж — 23 мая 1857, Франция) — французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

сходится, поскольку при $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0.$$

Вычислить этот предел можно, используя формулу Стирлинга,[13]

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Рекомендация.При решении задач, в которых предлагается исследовать сходимость рядов, следует выбрать тотпризнак (Даламбера или Коши), который ведет к вычислениюболее простых пределов.

---

[13]Джеймс Сти́рлинг (англ. JamesStirling, май 1692 год —5 декабря 1770 года) — шотландский математик.