Лекция 6. Квадратичные функции. Задача об экстремуме.

Параболоид

Уравнение

$$ax + by + cz + d = 0$$

задает плоскость в трехмерном пространстве или линейную связь между переменными x,y,z. Если $c \neq 0$, то z -- линейная функция переменных x и y, а названная плоскость – ее график.

Уравнение

$$z = f(x, y)$$

задает поверхность, точки которой однозначно проектируются на плоскость xy: зная первые две координаты точки, лежащей на этой поверхности, можно однозначно восстановить третью по формуле
$z = f(x, y)$. При этом z – функция переменных x и y, а названная поверхность – ее график.

Аналогом параболы в теории функций многих переменных является параболоид.

Определение. Поверхность, заданная уравнением

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

называется параболоидом. При этом еще говорят, что z – квадратичная функция x и y.

$$plot3d(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33})$$

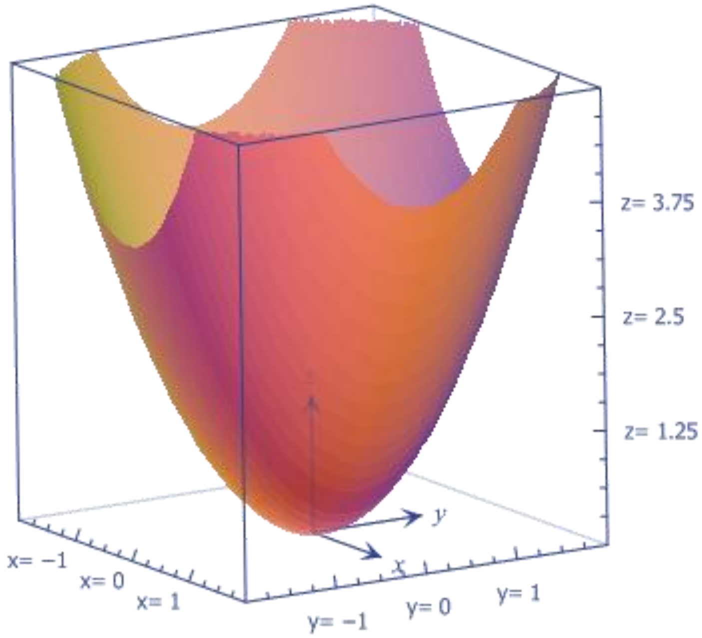

Рис. 1. Параболоид.

Нетрудно заметить, что изменение параметров a_{13}, a_{23}, a_{33} не меняет формы параболоида, но лишь сдвигает всю поверхность относительно осей.

$$plot3d(x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33})$$

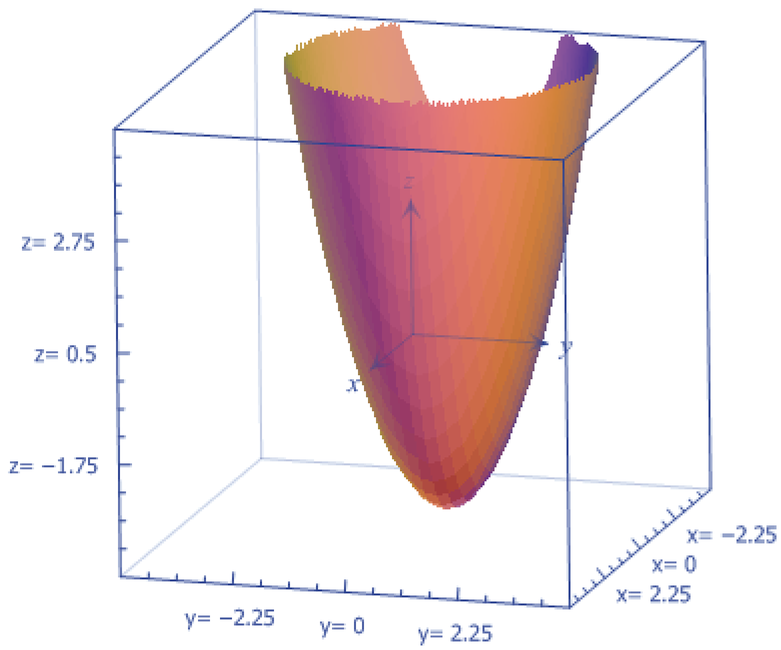

Рис. 2. Параболоид: роль параметров a_{13}, a_{23}, a_{33}

Параметры a_{11}, a_{12}, a_{22} существенно влияют на форму параболоида. Сечение плоскостью, проходящей через ось z является параболой, а от значения этих параметров зависит, будут ли рога этой параболы направлены вверх или вниз.

$$plot3d(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)$$

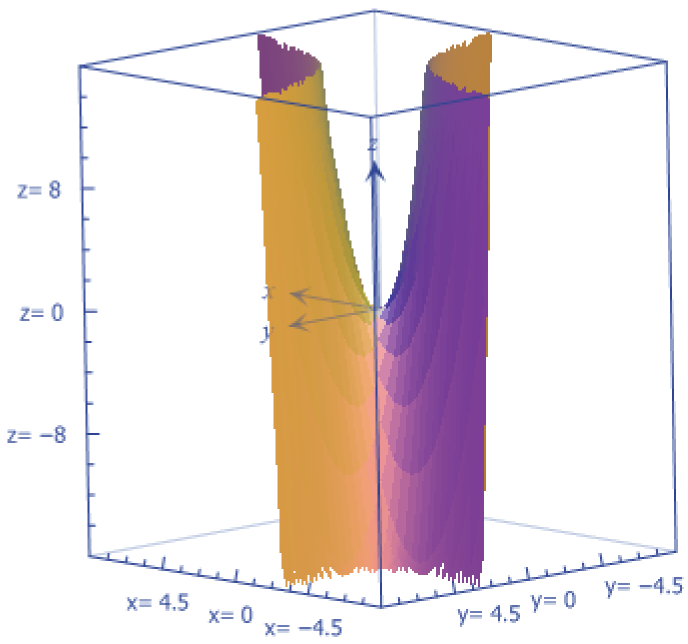

Рис. 3. Параболоид: роль параметров a_{11}, a_{12}, a_{22}.

Задачи на минимум и максимум

Определение. Говорят, что функция $z = f(x, y)$, заданная в некоторой окрестности точки (a, b), имеет максимум, если верно неравенство:

$$f(x, y) \leq f(a, b).$$

Максимум называют строгим, если *строго* неравенство верно при $(x, y) \neq (a, b)$. Максимум называют локальным, если выписанное неравенство выполняется лишь в некоторой окрестности точки (a, b). Точки, в которых функция имеет максимум или минимум, называют точками экстремума.

Задача. Для заданной квадратичной функции

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

найти все точки экстремума.

Определение. Точку, координаты которой удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

называют стационарной точкой параболоида.

Замечание. Стационарная точка играет ту же роль, что вершина параболы в теории функций одной переменной.

Теорема 1. Квадратичная функция может иметь экстремум только в стационарных точках.

Док-во. Если (a, b) -- точка локального максимума, то

$$f(x, b) \le f(a, b),$$

поэтому функция

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xb + a_{22}b^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}b + a_{33}$$

переменной x должна иметь экстремум при $x = a$, для чего необходимо, чтобы

$$\frac{dz}{dx} = 2a_{11}x + 2a_{12} + 2a_{13}$$

обращалась в нуль при $x = a$. Это дает первое уравнение системы. Меняя ролями x и y, получим второе уравнение.

Следствие 1. Если определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

не равен нулю, квадратичная функция может иметь экстремум в одной единственной точке, координаты которой однозначно определяются из системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Пример 1. Функция

$$z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x$$

может иметь экстремум только в точке, координаты которой удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$solve\{x + y + 1 = 0, x + 3\ y = 0\}$$

$$\left(x = -\frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}\right)$$

По графику хорошо видно, что функция имеет в этой точке минимум.

$$z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x$$

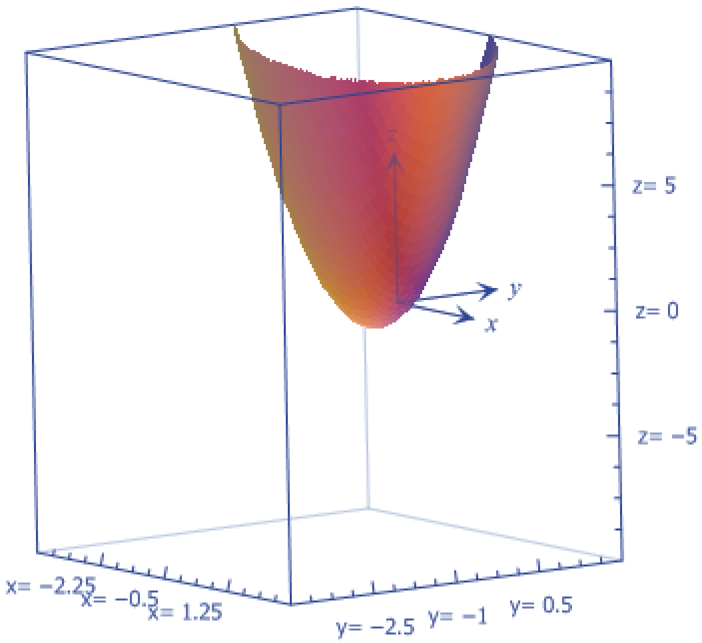

Рис. 4. График функции $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x$.

Пример 2. Функция

$$z = x^2 + 2xy + y^2 + 2x$$

может иметь экстремум только в точках, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Функция не имеет точек экстремума.

$$z = x^2 + 2xy + y^2 + 2x$$

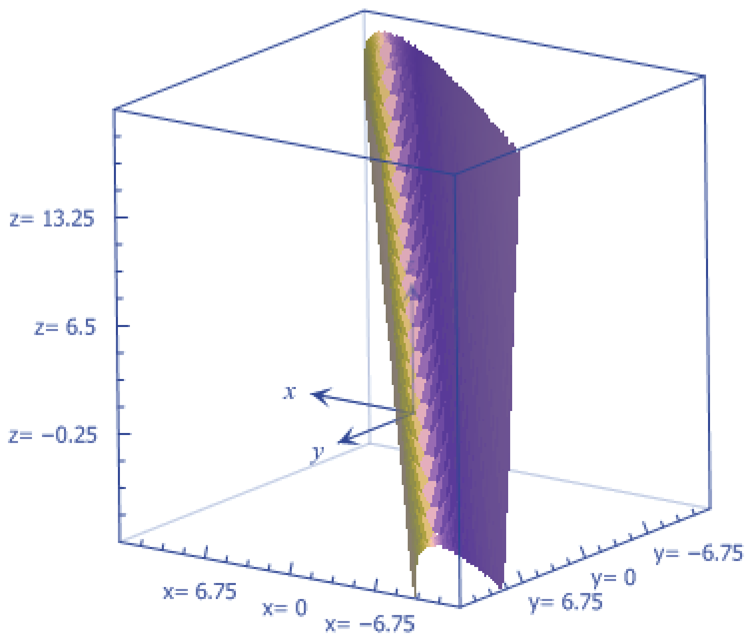

Рис. 5. График функции $z = x^2 + 2xy + y^2 + 2x$.

Пример 3. Функция

$$z = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y$$

может иметь экстремум только в точках, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Все точки прямой

$$x + y + 1 = 0$$

являются стационарными. По графику хорошо видно, что все точки этой прямой – точки нестрого минимума.

$$z = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y$$

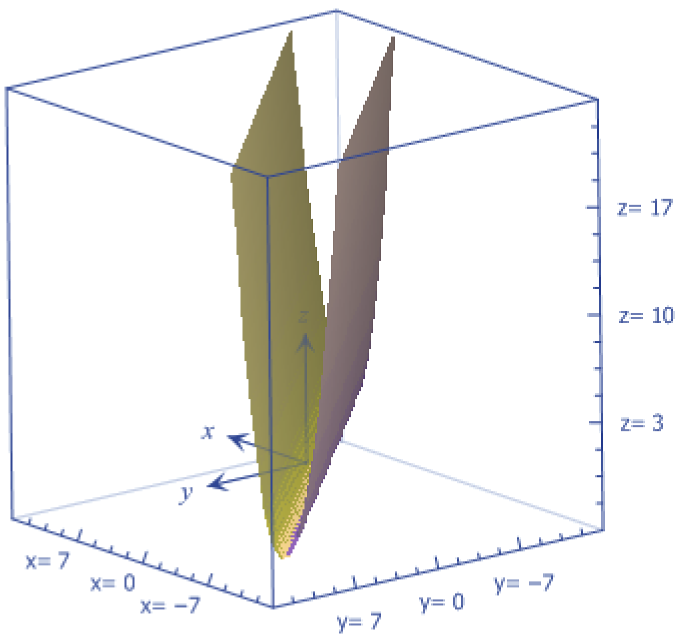

Рис. 6. График функции $z = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y$.

Достаточные условия экстремума

Лемма. Пусть (a, b) – стационарная точка квадратичной функции

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

тогда

$$z = a_{11}(x - a)^2 + 2a_{12}(x - a)(y - b) + a_{22}(y - b)^2 + c,$$

где

$$c = a_{11}a^2 + 2a_{12}ab + a_{22}b^2 + 2a_{13}a + 2a_{23}b + a_{33}.$$

Положим для краткости

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \qquad \xi = \frac{x - a}{r}, \qquad \eta = \frac{y - b}{r}$$

тогда

$$z - c = f(x, y) - f(a, b) = r^2(a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2)$$

Выражение $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$ – квадратичная форма относительно переменных ξ, η, принимающих значение на единичной окружности

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Определение. Квадратичная форма

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$$

называется:

1. строго положительно определенной, если $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 > 0$ на единичной окружности;
2. нестрого положительно определенной, если $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 \geq 0$ на единичной окружности, причем это выражение обращается в нуль в некоторых точках;
3. строго отрицательно определенной, если $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 < 0$ на единичной окружности;
4. нестрого положительно определенной, если $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 \leq 0$ на единичной окружности, причем это выражение обращается в нуль в некоторых точках;
5. знакопеременной, если $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$ принимает как положительные, так и отрицательные значения на единичной окружности.

Теорема 2. Пусть (a, b) – стационарная точка квадратичной функции

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Если квадратичная форма $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$

1. строго положительно определена, то в точке (a,b) достигается строгий и глобальный минимум,
2. нестрого положительно определена, то в точке (a,b) достигается нестрогий, но глобальный минимум,
3. строго отрицательна определена, то в точке (a,b) достигается строгий и глобальный максимум,
4. нестрого отрицательно определена, то в точке (a,b) достигается нестрогий, но глобальный максимум,
5. знакопеременна, то точка (a,b) не является точкой экстремума, даже локального.

Док-во. В силу леммы знак

$$f(x, y) - f(a, b)$$

определяется знаком квадратичной формы

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2.$$

Если форма строго положительно определена, то

$$f(x, y) - f(a, b) > 0$$

при всех x, y. Если форма определена не строго, то в некоторой точке (ξ_0, η_0) форма обращается в нуль и в точках

$$x = a + r\xi_0, \quad y = b + r\eta_0$$

при произвольно малом r будет выполняться равенство

$$f(x, y) - f(a, b) = 0$$

Это означает, что в сколь угодно близко к точке (a,b) строгость

$$f(x, y) - f(a, b) > 0$$

неравенства будет нарушаться. Поэтому при всех (x,y) будет выполняться только нестрогое неравенство, а стало быть минимум будет нестрогим. Случаи 3-4 рассматриваются аналогично. В случае 5 имеются точки, в которых форма имеет разные знаки, поэтому даже в произвольно малой окрестности точки (a,b) разность

$$f(x, y) - f(a, b)$$

будет менять знак. Следовательно, в этой точке нет даже локального экстремума. Теорема доказана.

Случай 5 не имеет аналогов в теории функций одной переменной.

Определение. Если форма $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$ является знакопеременной, то стационарную точку квадратичной функции называют седлом.

На занятии № 6 было доказано, что на единичной окружности форма $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$ принимает значения, заключенные между собственными значениями матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Задачи на экстремум

Задача 1. Укажите все точки экстремума квадратичной функции

$$z = x^2 + xy + y^2 + 2x - 4y + 2.$$

Решение.

Шаг 1. Стационарные точки определяются из системы

$$solve\{2\,x+y+2=0, x+2\,y-4=0\}$$

$$\left(x=-\frac{8}{3}, y=\frac{10}{3}\right)$$

Шаг 2. Собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

являются корнями уравнения

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}=0$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \text{ или } \lambda=\frac{3}{2}$$

Оба корня – положительные, следовательно, форма

$$x^2+xy+y^2$$

положительно определенная, а стационарная точка – точка минимума.

Ответ: функция имеет единственную точку экстремума, а именно точку $\left(-\frac{8}{3},\frac{10}{3}\right)$, в которой функция имеет глобальный строгий минимум.

$$z=x^2+xy+y^2+2x-4y+2$$

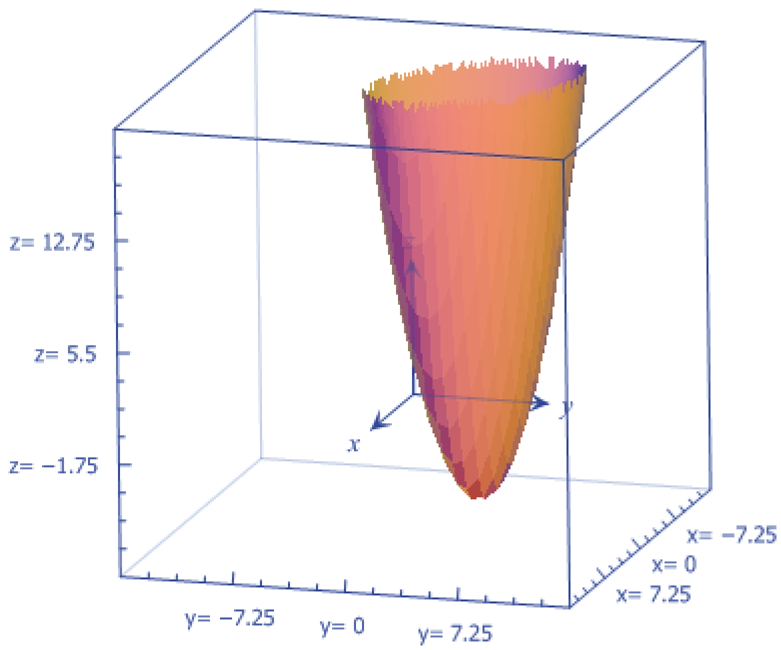

Рис. 7. График функции $z = x^2 + xy + y^2 + 2x - 4y + 2$.

Задача 2. Укажите все точки экстремума квадратичной функции

$$z = x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 4y + 2.$$

Решение.

Шаг 1. Стационарные точки определяются из системы

$$solve\{2\,x - 4y + 2 = 0, -4x + 2\,y - 4 = 0\}$$

$$(x = -1, y = 0)$$

Шаг 2. Собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

являются корнями уравнения

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = -1 \text{ или } \lambda = 3$$

Корни имеют разные знаки, следовательно, форма

$$x^2 + xy + y^2$$

знакопеременная, а стационарная точка – седло.

Ответ: функция не имеет точек экстремума.

$$z = x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 4y + 2$$

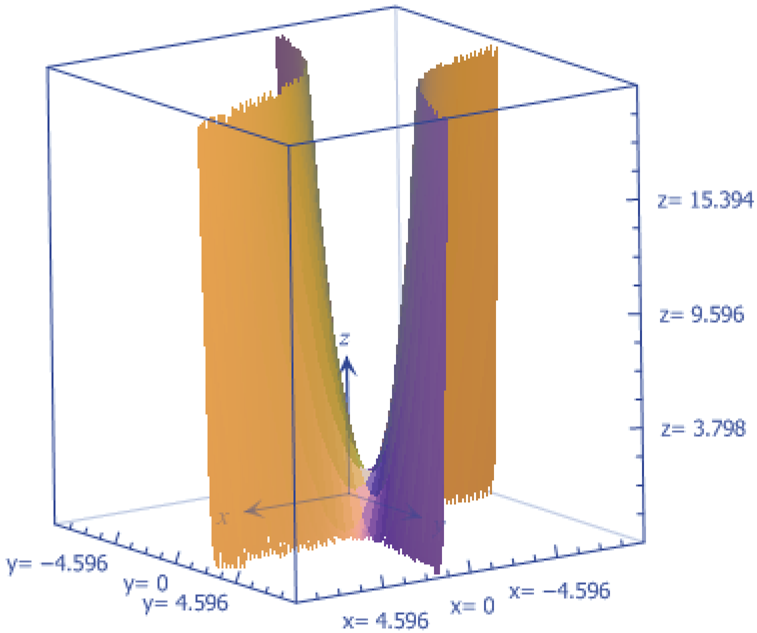

Рис. 8. График функции $z = x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 4y + 2.$

Задача 3. Укажите все точки экстремума квадратичной функции

$$z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2.$$

Решение. Шаг 1. Стационарные точки определяются из системы

$$solve\{2\,x - 2y + 2 = 0, -2x + 2\,y = 0\}$$

Эта система не имеет решений.

Ответ: функция не имеет точек экстремума.

Задача 4. Укажите все точки экстремума квадратичной функции

$$z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 2.$$

Решение.

Шаг 1. Стационарные точки определяются из системы

$$solve\{2\,x - 2\,y + 2 = 0, -2\,x + 2\,y - 2 = 0\}$$

Эта система имеет бесконечно много решений:

$$(x = y - 1, y \in \mathbb{R})$$

Шаг 2. Собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

являются корнями уравнения

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ или } \lambda = 2$$

Форма

$$x^2 - 2xy + y^2$$

принимает значения между 0 и 2 и потому является нестрого положительной.

Ответ: функция имеет бесконечно много точек, в которых функция имеет нестрогий минимум, все эти точки составляют прямую $x = y - 1$.

$$z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 2$$

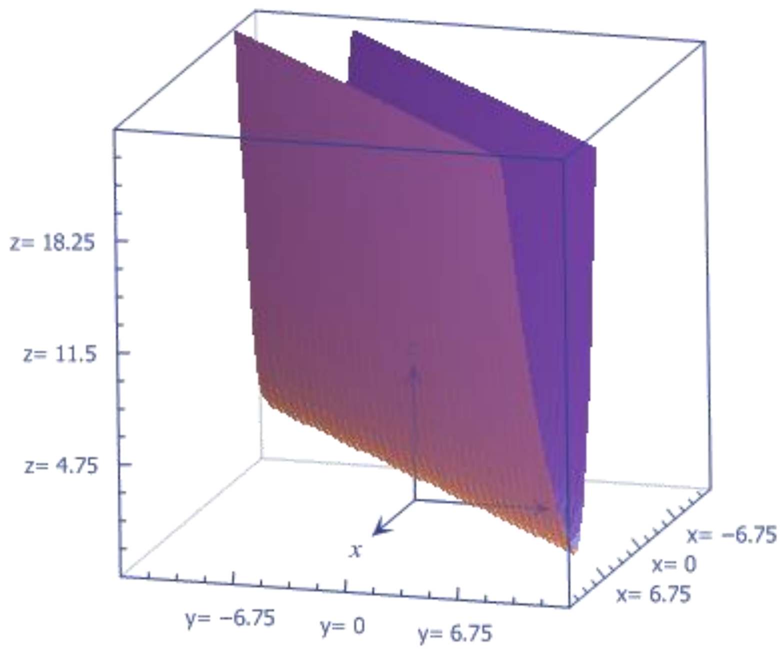

Рис. 9. График функции $z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 2$.

Критерий Сильвестра

Ключевым моментом при решении задач на экстремум является определения знаков корней квадратного уравнения

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}\, a_{22} - {a_{12}}^2 = 0.$$

По формулам Виета

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11}\, a_{22} - {a_{12}}^2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}.$$

Сумму диагональных элементов матрицы называют следом (trace) матрицы, поэтому последнюю формулу записывают в виде

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

По знакам этих двух выражений можно определить знаки корней. Сформулируем это правило, принадлежащее Сильвестру, в виде таблицы.

Форма	$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
Строго положительно определенная	+	+
Нестрого положительно определенная	0	+
Строго отрицательно определенная	+	-
Нестрого отрицательно определенная	0	-
Знакопеременная	-	Неважно

Тривиальный случай, когда матрица состоит из одних нулей не рассматривается.

Как следствие теоремы 3 сразу имеем:

Квадратичная функция имеет:	$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
строгий минимум	+	+
нестрого минимум	0	+
строгий максимум	+	-
нестрогий максимум	0	-
седло	-	Неважно

1. Найдите точки экстремума следующих функций. Укажите какой именно экстремум имеется в найденных точках (min/max, строгий/нестрогий, глобальный/локальный).
   a.) $z = x^2 + 4xy - 8y^2 - 2x + 2y + 3$
   b.) $z = x^2 + 2xy + y^2$
   c.) $z = -x^2 - xy - y^2 - 2x - 4y + 3$
   d.) $z = x^2 + 2x - y^2 + 2x - 1$