

1 Logik

		Negation	Konjunktion	Disjunktion	Exklusives Oder	Implikation	Äquivalenz
		Nicht A	A und B	A oder B	Entweder A oder B	wenn A dann B	A genau dann wenn B
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Eine Formel F heißt:

- **erfüllbar**, wenn F bei mindestens einer Variabelbelegung 1 ist.
- **unerfüllbar**, wenn F bei jeder Variabelbelegung 0 ist.
- **Tautologie(\top)/gültig**, wenn F bei jeder Variabelbelegung 1 ist.

1.1 Rechengesetze

Kommutativgesetze:

$$x \wedge y = y \wedge x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

Assoziativgesetze:

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

Distributivgesetze:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Absorptionsgesetze:

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

De Morgansche Gesetze:

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

Sonstiges:

$$x \oplus 0 = x$$

$$x \oplus 1 = \neg x$$

$$x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y) = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$$

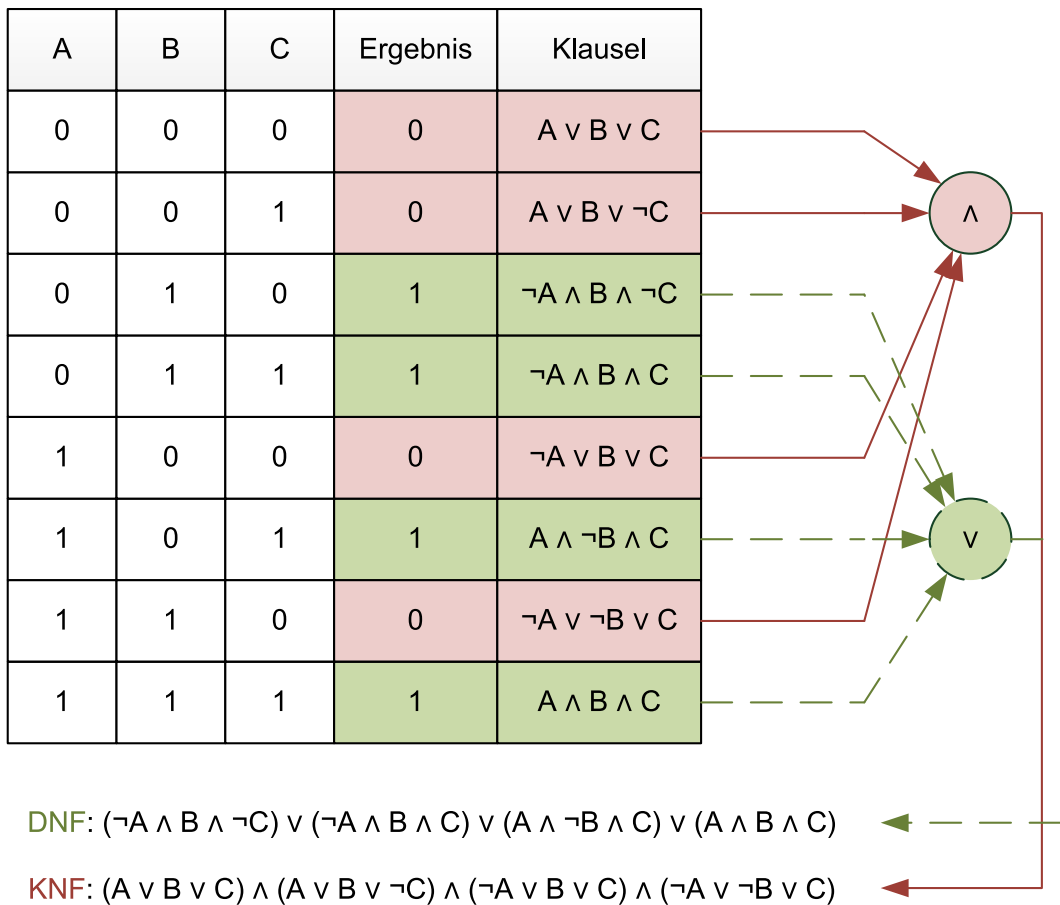
$$x \Rightarrow y = \neg x \vee y$$

1.2 Normalformen

Disjunktive Normalform(DNF) besteht aus einer Disjunktion(\vee) von Konjunktionstermen(\wedge). Nehme die Variabelbelegung(z.B. $A \wedge \neg B \wedge \neg C$) wo F=1 ist und verknüpfe sie mit \vee .

Konjunktive Normalform(KNF) besteht aus einer Konjunktion(\wedge) von Disjunktionstermen(\vee). Nehme die Variabelbelegung(z.B. $A \wedge \neg B \wedge \neg C$) wo F=0 ist, **negiere** sie($\neg A \wedge B \wedge C$) und verknüpfe sie mit \vee .

Normalformen sind möglich, da \wedge , \neg und \vee , \neg eine vollständige Basis für die Aussagenlogik bilden. Um zu zeigen, dass andere Operatoren ebenfalls eine vollständige Basis bilden, muss man \wedge , \neg oder \vee , \neg als Formel bilden.



Lizenz: CC-by-sa 2.0/de Urheber: WikiBasti

2 Mengen

$[n] := \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$A = \{1, 3, 7, 21\} \Rightarrow |A| = 4$

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ ist eine neue Menge, die aus allen Teilmengen von A besteht.

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

2.1 Operationen auf Mengen

- Schnitt: $A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Vereinigung: $A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Differenz (auch $-$): $A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \neg B$
- Symmetrische Differenz: $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2.2 Rechengesetze

- Reflexivität: $A \subseteq A$
- Antisymmetrie: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$
- Transitivität: Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$

Die Mengen-Operationen Schnitt \cap und Vereinigung \cup sind kommutativ, assoziativ und zueinander distributiv:

- Assoziativgesetz: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 - Kommutativgesetz: $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$
 - Distributivgesetz: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - De Morgansche Gesetze: $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ und $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$
 - Absorptionsgesetz: $A \cup (A \cap B) = A$ und $A \cap (A \cup B) = A$
- Differenzmenge:
- Assoziativgesetze: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ und $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
 - Distributivgesetze: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ und $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ und $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ und $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- Sonstiges:
- $A \triangle B = \neg A \triangle \neg B$
 - $A \setminus B = \neg B \setminus \neg A$

2.3 Kartesisches Produkt

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A^2 = A \times A = \{(a, a') \mid a, a' \in A\}$$

Sei $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{x, y\}$ dann gilt:

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$$

$$B \times A = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

Ausserdem: $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n| = |A_1| * |A_2| * |A_3| * \dots * |A_n|$ wenn A_1 bis A_n endlich sind.

3 Summen

Sei $m > n$ dann gilt: $\sum_{k=m}^n a_k = 0$

Gauss: $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Konstantes Glied(wie bei Gauss): $\sum_{k=m}^n x = (n - m + 1)x$

Faktor $\sum_{k=m}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^n a_k$

Geometrische Reihe: $s_n = a_0 \sum_{k=0}^n q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Aufteilung: $\sum_{k=m}^n a(k) = \sum_{k=m}^l a(k) + \sum_{k=l+1}^n a(k)$

3.1 Vollständige Induktion

Die Gaußsche Summenformel lautet: Für alle natürliche Zahlen $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Der Induktionsanfang ergibt sich unmittelbar: $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Der Induktionsschritt wird über folgende Gleichungskette gewonnen, bei der die Induktionsvoraussetzung mit der zweiten Umformung verwendet wird: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

4 Relationen

Eine Relation ist eine Teilmenge des Kreuzprodukt zweier Mengen: $R \subseteq A \times B$

Sei Relation $R \subseteq [4]^2$ und $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 3)\}$, dann ist die Adjazenzmatrix $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Verkettung: $S \circ R := RS := \{(a, d) \in A \times D \mid \exists b \in B \cap C: (a, b) \in R \wedge (b, d) \in S\}$

Umkehrrelation: $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$ Man erhält die Umkehrrelation an einem Graphen indem man die Pfeilspitzen umdreht. An der Adjazenzmatrix muss man alle 1en an der Hauptdiagonalen spiegeln.

4.1 Eigenschaften von Relationen

Reflexivität(R): $\forall a \in A: (a, a) \in R$ Jedes Element steht zu sich selbst in Relation. Die Hauptdiagonale ist 1.

Symmetrie(S): $\forall a, b \in A: (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ Pfeilspitzen sind immer auf beiden Seiten, können dann auch weggelassen werden (ungerichtet Graph). Die Adjazenzmatrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen

Transitivität(T): $\forall a, b, c \in A: (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ Wenn es einen Weg über mehrere Relationen von einem Knoten zum Anderen gibt, müssen diese auch direkt in Relation stehen.

Asymmetrie: $\forall a, b \in A: (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$ Pfeilspitze immer nur auf maximal einer Seite. Keine Reflexivität.

Antisymmetrie(AS): $\forall a, b \in A: (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$ Gleich wie Asymmetrie, aber Reflexivität ist erlaubt.

Totalität(TO): $\forall a, b \in A: (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$ Zwischen zwei beliebigen Knoten gibt es immer eine Relation in mindestens eine Richtung.

R heißt **Äquivalenzrelation** wenn (R), (S) und (T) gelten.

R heißt **Halbordnung** wenn (R), (AS) und (T) gelten. Ein Graph beschreibt nur dann eine Halbordnung, wenn er azyklisch ist.

R heißt **(Totale) Ordnung** wenn sie eine Halbordnung ist und (TO) erfüllt.

Die **Äquivalenzklasse** eines Objektes a ist die Klasse der Objekte, die äquivalent zu a sind. Sei $R \subseteq A^2$.

$[a]_R = \{x \in A \mid (x, a) \in R\} \subseteq M$

Der **Quotient** von R bezüglich R ist die Menge $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ (Die Anzahl Äquivalenzklassen).

4.2 Funktionen

Eine Relation heißt **Funktion**, wenn sie eindeutig ist, sprich von jedem Knoten genau ein Pfeil weggeht. Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu. $f: D \rightarrow Z, x \mapsto y$.

Eine Funktion ist **injektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge höchstens ein Urbild hat. D. h. aus $f(x_1) = y = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.

Sie ist **surjektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge mindestens ein Urbild hat. D. h. zu beliebigem y gibt es ein x, so dass $f(x)=y$.

Gelten diese beiden Eigenschaften für f, nennt man f **bijektiv**. wenn eine Funktion bijektiv ist ihre Umkehrfunktion (f^{-1}) auch eine (bijektive) Funktion.

Die Anzahl der Funktionen $f: A \rightarrow B$ ist $|B|^{|A|}$. Die Anzahl der injektiven Funktionen $f: A \rightarrow B$ ist $|B|^{|A|}$.

4.3 Permutationen

Eine bijektive Funktion $f: [n] \rightarrow [n]$ heißt **Permutation**. Die Adjazenzmatrix einer Permutation hat in jeder Spalte und Zeile genau eine 1. $\varphi^0 = id \quad \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$

Bsp: S_6

k	1	2	3	4	5	6
$\varphi(k)$	4	6	5	2	3	1
φ^2	2	1	3	6	5	4
φ^0	1	2	3	4	5	6

Die Ordnung von φ ist dann wie oft sich φ mit sich selbst verknüpfen lässt bis wieder id herauskommt. Die Ordnung von dem Beispiel wäre 4 da $\varphi^4 = id$. Die inverse Permutation φ^{-1} ist $\varphi^{ord(\varphi)-1}$.

Wenn zwei verschiedene Permutationen verknüpft werden, ist dies nicht kommutativ. Bei $\tau \circ \pi$ wird zuerst π angewendet und auf das Resultat dann τ .

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Die Vorgehensweise um die nächstgrößte Permutation zu bestimmen ist:

1. Bestimme längstes abfallend-sortiertes Endstück.
2. Erhöhe vorgehende Zahl kleinstmöglich mit einer der Ziffer rechts davon.
3. Sortiere Endstück aufsteigend.

5 Graphentheorie

Ein ungerichteter Graph $G=(V,E)$ heißt **Baum**, falls G azyklisch und zusammenhängend ist.

Ein ungerichteter Graph $G=(V,E)$ heißt **Wald**, falls G azyklisch ist. Die Anzahl der benachbarten Knoten eines Knoten v nennt man **grad**(v). Ist $\text{grad}(v) = 1$ heißt der Knoten **Blatt**.

Ein ungerichteter Graph heißt **k-regulär**, falls jeder Knoten genau Grad k besitzt.

Man nennt einen Graph **planar**, wenn man ihn ohne Überschneidungen zeichnen kann. Der **Satz von Kuratowski** besagt, dass K_5 und $K_{3,3}$ die einzig nichtplanaren Graphen sind, ein nichtplanarer Graph muss also einer der beiden Graphen als Minor enthalten.

Anzahl **Gebiete**(mit Äußerem Gebiet): $|E| - |V| + 2$

Für einen planaren Graphen lässt sich folgende Abschätzung machen: $|E| \leq 3|V| - 6$, hat er mindestens 3 Knoten dann auch: $|E| \leq 2|V| - 4$. Ist diese Abschätzung nicht erfüllt ist G nicht planar, ist sie erfüllt folgt daraus aber nicht dass G planar ist.

Die **Knotenfärbung** eines Graphen ist, wenn man die Knoten so färbt, dass zwei Knoten die in Relation zueinander stehen nicht dieselbe Farbe haben. Die **chromatische Zahl** χ ist die geringste Anzahl an Farben die der Graph benötigt. Bei Kreisen C_n ist $\chi = 2$ wenn n gerade, und $\chi = 3$ wenn n ungerade. Ein Graph hat genau dann $\chi = 2$, wenn er bipartit ist.

Ein **Matching** ist eine Auswahl an Kanten die disjunkt sind, also sich nicht an einem Knoten "berühren". Wenn das Matching an jedem Knoten eine Kante beinhaltet, ist es maximal und heißt auch **perfektes Matching**. Das perfekte Matching von C_n besteht aus $\frac{n}{2}$ Kanten wenn n gerade ist und $\frac{n-1}{2}$ wenn nicht. Bei dem vollständigem Graphen $K_{n,m}$ beinhaltet das perfekte Matching n Kanten und es gibt m^n verschiedene perfekte Matchings, vorausgesetzt $n \leq m$ (bei beiden).

Zwei Graphen heißen **isomorph**, wenn sie, bis auf Umbenennung der Knoten, gleich sind $n \leq m$.

6 Kombinatorik

	Ohne Zurücklegen	Mit Zurücklegen
Ohne Reihenfolge	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k}$
Mit Reihenfolge	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Rechenregeln:

- wenn $k > n$ dann gilt $\binom{n}{k} = 0$

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

- $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

6.1 Binomialtheorem

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

- $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

- $(x+y+z)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k,l} x^k y^l z^{n-k-l}$ wobei $\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$

6.2 Kürzeste Gitterwege

Vom Ursprung $(0,0)$ bis $b(b_1, b_2)$: $w((0,0), b) = \binom{b_1+b_2}{b_1} = \binom{b_1+b_2}{b_2}$.

Von Punkt $a(a_1, a_2)$ nach $b(b_1, b_2)$: $w(a, b) = \binom{b_1-a_1+b_2-a_2}{b_1-a_1} = \binom{b_1-a_1+b_2-a_2}{b_2-a_2}$.

Muss man über Punkt $c(c_1, c_2)$ gehen gibt es $w((0,0), c) * w(c, b)$ Wege, ist c gesperrt, zieht man die Wege, die über c gehen von den gesamten Wegen ab.

Wenn Punkt c und d gegeben sind und mindestens einer der beiden besucht werden muss, rechnet man die Wege über c aus addiert die Wege über d und zieht davon die Wege die über beide gehen wieder ab.

7 Zahlentheorie

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $m > 0$, ist m **Teiler von** n , falls $\exists t \in \mathbb{Z} n = t * m$. Kurz: $m \setminus n$.

Die Menge aller Teiler ist $T_n = \{ m \mid m \setminus n \}$. $T_{m,n} = T_m \cap T_n$.

Der **größte gemeinsame Teiler** von n und m ist: $\max T_{m,n}$. Das **kleinste gemeinsame Vielfache** ist: $\min \{ k \mid m \setminus k \wedge n \setminus k \}$.

Es gilt $kgV(m, n) * ggT(m, n) = mn$ oder $kgV(m, n) = mn / ggT(m, n)$.

Lemmas: 1) $\forall a, b \in \mathbb{Z} T_{m,n} \subseteq T_{am+bn}$ 2) $\forall a \in \mathbb{Z} T_{m,n} = T_{m,n-am}$ 3) $T_{m,n} = T_{ggT(m,n)}$

Der **euklidische Algorithmus** $euklid(m, n)$ bestimmt den ggT: (für $m < n$)

if $m = 0$ *return* n

else $euklid(n \bmod m, m)$

Der ggT lässt sich als Linearkombination von m und n darstellen, berechnet wird diese mithilfe des **erweiterten euklidischen Algorithmus**:

n	m	q	r	x	y
84	60	1	24	-2	$1 - (-2) * 1 = 3$
60	24	2	12	1	$0 - 1 * 2 = -2$
24	12	2	0	0	1

Hierbei muss auch wieder $m \leq n$ gelten. Allgemein betrachtet (Zeile 0 ist die unterste):

$$q_i = \lfloor \frac{n_i}{m_i} \rfloor \quad r_i = n_i \bmod m_i$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = x_1 = 1 \quad x_i = y_{i-1} \quad y_i = x_{i-1} - q_i * y_{i-1}$$

Als Probe: $n_i * x_i + m_i * y_i = ggT(m, n)$ gilt in jeder Zeile.

7.1 Kongruenzen

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \setminus (a - b)$$

Seien $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$ Dann gilt:

$$1) a + c \equiv b + d \pmod{m} \quad 2) a - c \equiv b - d \pmod{m} \quad 3) ac \equiv bd \pmod{m}$$

Ist $a \equiv b \pmod{m}$, dann ist $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

Die Division gilt nur wenn der Quotient teilerfremd zu m ist: Sei $d \perp m$ und $ad \equiv bd \pmod{m}$, dann gilt $a \equiv b \pmod{m}$.

ist $a \perp m$, dann hat die Kongruenz $ax \equiv b \pmod{m}$ die in \mathbb{Z}_m eindeutige Lösung $x = a^{-1}b \bmod m$. Man erhält a^{-1} indem man den erweiterten euklidischen Algorithmus auf a und m anwendet.

Die Anzahl der teilerfremden Zahlen m in \mathbb{Z}_m wird als **eulersche φ -Funktion** bezeichnet: $\varphi(m) = |\mathbb{Z}_m^*|$

Es gilt: $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

Für Primzahlen: $\varphi(p) = p - 1$

Für Primzahlpotenzen: $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

$$\text{z.B. } \varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 2^3 \cdot (2 - 1) = 2^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 8$$

Allgemein: $\varphi(n) = \prod_{p \mid n} p^{k_p-1} (p - 1) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

$$\text{z.B. } \varphi(84) = \varphi(2^2 * 3 * 7) = 84 * \left(1 - \frac{1}{2}\right) * \left(1 - \frac{1}{3}\right) * \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 24$$

Um die **Anzahl der Teiler** von n zu berechnen, braucht man die Primfaktorzerlegung ($\prod p^k$). $|T_n| = \prod (k + 1)$

Exponentiation (nur wenn $a \perp m$): $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

$$\text{z.B. } 5^{99} \pmod{84} \quad \varphi(84) = 24 \longrightarrow 5^{24} * 5^{24} * 5^{24} * 5^3 = 1 * 1 * 1 * 125 \equiv 41 \pmod{84}$$

7.2 Lineare Kongruenzen(Chinesischer Restsatz)

Ist ein Gleichungssystem der folgenden Art gegeben:

$$x \equiv a_1 \text{ mod } m_1$$

$$x \equiv a_2 \text{ mod } m_2$$

Dann bestimmt man x_1 und x_2 mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus jeweils über m_1 und m_2 (sofern teilerfremd, ansonsten hat das Gleichungssystem keine Lösung):

$$m_2 * x_1 \equiv 1 \text{ mod } m_1$$

$$m_1 * x_2 \equiv 1 \text{ mod } m_2$$

Dann gilt: $x = a_1 * m_2 * x_1 + a_2 * m_1 * x_2$.

Das Ergebnis ist nun ($\text{mod } m_1 * m_2$) zu betrachten. Alle Lösungen haben also die Form $x + m_1 * m_2 * t$, wobei $t \in \mathbb{Z}$.

8 Algebraische Strukturen

(G, \circ) heißt **Gruppe** falls folgende Eigenschaften gelten:

(AG) Assoziativgesetz: $\forall a, b, c, \in G \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

(N) Neutrales Element: $\exists e \in G \forall a \in G \quad a \circ e = a$

(I) Inverses Element: $\forall a \in G \exists b \in G \quad a \circ b = e$

Die Verknüpfung muss außerdem abgeschlossen über G sein. Falls auch auch das Kommutativgesetz(KG) $a \circ b = b \circ a$ gilt, heißt die Gruppe kommutativ(oder abelsch).

Ist $U \subseteq G$ und (U, \circ) ebenfalls eine Gruppe, heißt sie **Untergruppe**. $\{e\}$ und G sind **triviale Untergruppen**.

Sei (G, \circ) endliche Gruppe und $a \in G$. Dann ist $\langle a \rangle = \{a^0, a^1, a^2, \dots\}$ die von a **erzeugte Untergruppe**. a heißt **Generator** oder **erzeugendes Element** von G .

$|U|$ heißt **Ordnung** von $\langle a \rangle$, $a^{\text{ord}(a)} = e$. $|U|$ teilt immer $|G|$.

$(R, +, \cdot)$ heißt **Ring** falls:

1) $(R, +)$ ist kommutative Gruppe. 2) (AG) $\forall a, b, c, \in G \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

3)(DG) $\forall a, b, c, \in G \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

R ist kommutativer Ring falls $\forall a, b \in R \quad a \cdot b = b \cdot a$

R ist Ring mit **Eins(-Element)** falls $\exists 1 \in R \quad a \cdot 1 = a$

8.1 RSA

Wähle zwei ungleiche Primzahlen p und q .

$$N = p * q$$

$$\varphi(N) = (p - 1) * (q - 1)$$

Wähle eine zu $\varphi(N)$ teilerfremde Zahl e , für die gilt $1 < e < \varphi(N)$.

Berechne den Entschlüsselungsexponenten d als Multiplikatives Inverses(erweiterter euklidischer Algorithmus) von e bezüglich des Moduls $\varphi(N)$. Es soll also die folgende Kongruenz gelten:

$$e * d \equiv 1 \text{ mod } \varphi(N)$$

Verschlüsseln: $c \equiv m^e \text{ mod } N$

Entschlüsseln: $m \equiv c^d \text{ mod } N$

Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101