Formelsammlung - Grundlagen der Mathematik - Stand: 09.02.2014 - Christian Löhle

1 Logik

		Negation	Konjunktion	Disjunktion	Exklusives Oder	Implikation	Äquivalenz
		Nicht A	A und B	A oder B	Entweder A oder B	wenn A dann B	A genau dann wenn B
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Eine Formel F heißt:

- **erfüllbar**, wenn F bei mindestens einer Variabelbelegung 1 ist.
- **unerfüllbar**, wenn F bei jeder Variabelbelegung 0 ist.
- **Tautologie($\top$)/gültig**, wenn F bei jeder Variabelbelegung 1 ist.

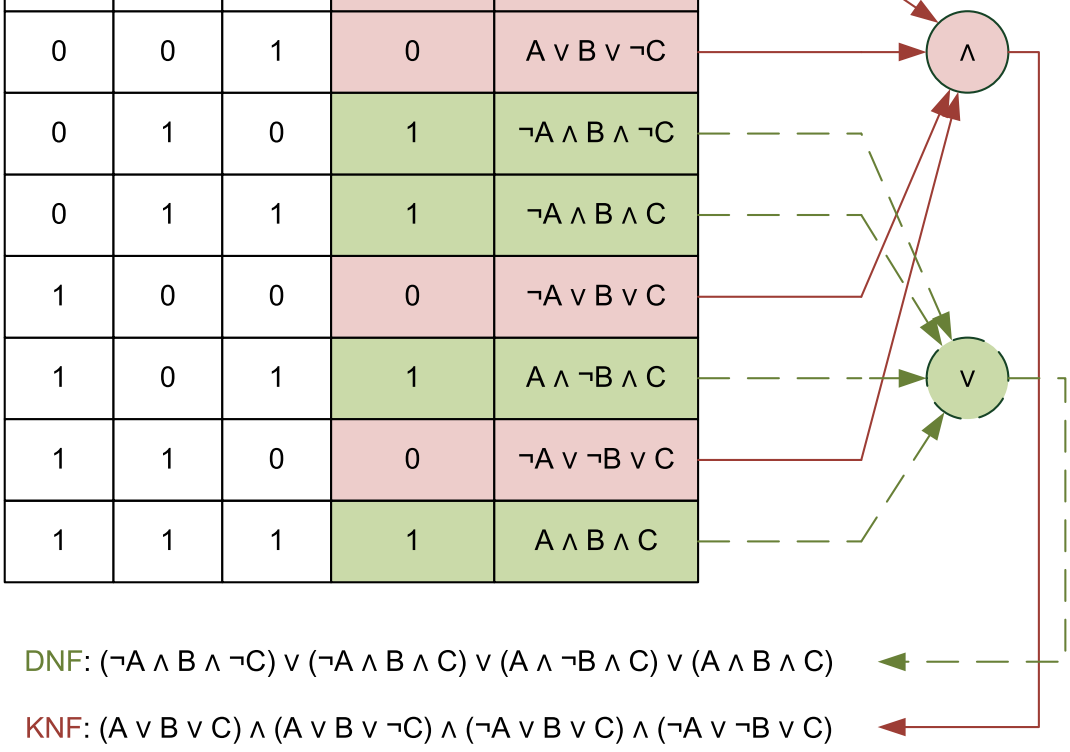
1.1 Rechengesetze

Kommutativgesetze:
$x \wedge y = y \wedge x$
$x \vee y = y \vee y$
Assoziativgesetze:
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
Distributivgesetze:
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Absorptionsgesetze:
$x \wedge (x \vee y) = x$
$x \vee (x \wedge y) = x$
De Morgansche Gesetze:
$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$
Sonstiges:
$x \oplus 0 = x$
$x \oplus 1 = \neg x$
$x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y) = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$
$x \Rightarrow y = \neg x \vee y$

1.2 Normalformen

Disjunktive Normalform(DNF) besteht aus einer Disjunktion($\vee$) von Konjunktionstermen($\wedge$). Nehme die Variabelbelegung(z.B. $A \wedge \neg B \wedge \neg C$) wo F=1 ist und verknüpfe sie mit $\vee$.
Konjunktive Normalform(KNF) besteht aus einer Konjunktion($\wedge$) von Disjunktionstermen($\vee$). Nehme die Variabelbelegung(z.B. $A \wedge \neg B \wedge \neg C$) wo F=0 ist, **negiere** sie($\neg A \wedge B \wedge C$) und verknüpfe sie mit $\vee$.
Normalformen sind möglich, da $\wedge$, $\neg$ und $\vee$, $\neg$ eine vollständige Basis für die Aussagenlogik bilden. Um zu zeigen, dass andere Operatoren ebenfalls eine vollständige Basis bilden, muss man $\wedge$, $\neg$ oder $\vee$, $\neg$ als Formel bilden.

A	B	C	Ergebnis	Klausel
0	0	0	0	A ∨ B ∨ C
0	0	1	0	A ∨ B ∨ ¬C
0	1	0	1	¬A ∧ B ∧ ¬C
0	1	1	1	¬A ∧ B ∧ C
1	0	0	0	¬A ∨ B ∨ C
1	0	1	1	A ∧ ¬B ∧ C
1	1	0	0	¬A ∨ ¬B ∨ C
1	1	1	1	A ∧ B ∧ C



2 Mengen

[n] := {1, 2, 3, ..., n}
A = {1, 3, 7, 21} ⇒ $|A| = 4$
Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ ist eine neue Menge, die aus allen Teilmengen von A besteht.
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

2.1 Operationen auf Mengen

- Schnitt: $A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Vereinigung: $A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Differenz(auch $-$): $A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \neg B$
- Symmetrische Differenz: $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2.2 Rechengesetze

- Reflexivität: $A \subseteq A$
- Antisymmetrie: $AusA \subseteq BundB \subseteq AfolgtA = B$

- Transitivität: Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$

  Die Mengen-Operationen Schnitt $\cap$ und Vereinigung $\cup$ sind kommutativ, assoziativ und zueinander distributiv:
- Assoziativgesetz: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Kommutativgesetz: $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$
- Distributivgesetz: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- De Morgansche Gesetze: $\neg (A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ und $\neg (A \cap B) = \neg A \cup \neg B$
- Absorptionsgesetz: $A \cup (A \cap B) = A$ und $A \cap (A \cup B) = A$

  Differenzmenge:
- Assoziativgesetze: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ und $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
- Distributivgesetze: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ und $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ und $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ und $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

  Sonstiges:
- $A \triangle B = \neg A \triangle \neg B$
- $A \setminus B = \neg B \setminus \neg A$

2.3 Kartesisches Produkt

$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
$A^2 = A \times A = \{(a, a') \mid a, a' \in A\}$
Sei $A = \{a, b, c\} und B = \{x, y\}$ dann gilt:
$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$
$B \times A = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$
$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$
Ausserdem: $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n| = |A_1| * |A_2| * |A_3| * ... * |A_n|$ wenn A_1 bis A_n endlich sind.

3 Summen

Sei $m > n$ dann gilt: $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$
Gauss: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Konstantes Glied(wie bei Gauss): $\sum_{k=m}^{n} x = (n - m + 1)x$
Faktor $\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$
Geometrische Reihe: $s_n = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Aufteilung: $\sum_{k=m}^{n} a(k) = \sum_{k=m}^{l} a(k) + \sum_{k=l+1}^{n} a(k)$

3.1 Vollständige Induktion

Die Gaußsche Summenformel lautet: Für alle natürliche Zahlen n ≥ 1 gilt $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$)
Der Induktionsanfang ergibt sich unmittelbar: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
Der Induktionsschritt wird über folgende Gleichungskette gewonnen, bei der die Induktionsvoraussetzung mit der zweiten Umformung verwendet wird: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$
$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

4 Relationen

Eine Relation ist eine Teilmenge des Kreuzprodukt zweier Mengen: $R \subseteq A \times B$

Sei Relation R $\subseteq [4]^2$ und R $= \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)(4, 3)\}$, dann ist die Adjazenzmatrix R $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Verkettung: $S \circ R := RS := \{(a,d) \in A \times D \mid \exists\, b \in B \cap C \colon (a,b) \in R \wedge (b,d) \in S\}$
Umkehrrelation: $R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$ Man erhält die Umkehrrelation an einem Graphen indem man die Pfeilspitzen umdreht. An der Adjazenzmatrix muss man alle 1en an der Hauptdiagonalen spiegeln.

4.1 Eigenschaften von Relationen

Reflexivität(R): $\forall a \in A \colon (a,a) \in R$ Jedes Element steht zu sich selbst in Relation. Die Hauptdiagonale ist 1.
Symmetrie(S): $\forall a,b \in A \colon (a,b) \in R \Rightarrow\ (b,a) \in R$ Pfeilspitzen sind immer auf beiden Seiten, können dann auch weggelassen werden(ungerichtet Graph). Die Adjazenzmatrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen
Transitivität(T): $\forall a,b,c \in A \colon (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ Wenn es einen Weg über mehrere Relationen von einem Knoten zum Anderen gibt, müssen diese auch direkt in Relation stehen.
Asymmetrie: $\forall a,b \in A \colon (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$ Pfeilspitze immer nur auf maximal einer Seite. Keine Reflexivität.
Antisymmetrie(AS): $\forall a,b \in A \colon (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow\ a = b$ Gleich wie Asymmetrie, aber Reflexivität ist erlaubt.
Totalität(TO): $\forall a,b \in A \colon (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$ Zwischen zwei beliebigen Knoten gibt es immer eine Relation in mindestens eine Richtung.
R heißt **Äquivalenzrelation** wenn (R), (S) und (T) gelten.
R heißt **Halbordnung** wenn (R), (AS) und (T) gelten.
R heißt **(Totale) Ordnung** wenn sie eine Halbordnung ist und (TO) erfüllt.
Die **Äquivalenzklasse** eines Objektes a ist die Klasse der Objekte, die äquivalent zu a sind. Sei R $\subseteq A^2$.
$[a]_R = \{x \in A \mid (x,a) \in R\} \subseteq M$
Der **Quotient** von R bezüglich R ist die Menge A/R = $\{[a[_R \mid a \subseteq A\}$ (Die Anzahl Äquivalenzklassen)
Ein Graph beschreibt nur dann eine Halbordnung, wenn er azyklisch ist.

4.2 Funktionen

Eine Relation heißt **Funktion**, wenn sie eindeutig ist, sprich von jedem Knoten genau ein Pfeil weggeht. Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu. $f \colon D \to Z,\ x \mapsto y$.
Eine Funktion ist **injektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge höchstens ein Urbild hat. D. h. aus $f(x_1) = y = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
Sie ist **surjektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge mindestens ein Urbild hat. D. h. zu beliebigem y gibt es ein x, so dass f(x)=y.
Gelten diese beiden Eigenschaften für f, nennt man f **bijektiv**. wenn eine Funktion bijektiv ist ihre Umkehrfunktion(f^{-1}) auch eine (bijektive) Funktion.
Die Anzahl der Funktionen $f\ :\ A \to B$ ist $|B|^{|A|}$. Die Anzahl der injektiven Funktionen $f\ :\ A \to B$ ist $|B|^{\underline{|A|}}$.

4.3 Permutationen

Eine bijektive Funktion $f \colon$ [n]→[n] heißt **Permutation**. Die Adjazentmatrix einer Permutation hat in jeder Spalte und Zeile genau eine 1. $\varphi^0 = id$ $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$
Bsp: S_6

k	1	2	3	4	5	6
$\varphi(k)$	4	6	5	2	3	1
φ^2	2	1	3	6	5	4
φ^0	1	2	3	4	5	6

Die Ordnung von φ ist dann wie oft sich φ mit sich selbst verknüpfen lässt bis wieder id herauskommt. Die Ordnung von dem Beispiel wäre 4 da $\varphi^4 = \varphi^0$. Die inverse Permutation φ^{-1} ist $\varphi^{ord(\varphi)-1}$.
Wenn zwei verschiedene Permutationen verknüpft werden, ist dies nicht kommutativ. Bei $\tau \circ \pi$ wird zuerst π angewendet und auf das Resultat dann τ.
z.B. $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
Die Vorgehensweise um die nächstgrößte Permutation zu bestimmen ist:

1. Bestimme längstes abfallend-sortiertes Endstück.
2. Erhöhe vorgehende Zahl kleinstmöglich mit einer der Ziffer rechts davon.
3. Sortiere Endstück aufsteigend.

5 Graphentheorie

Ein ungerichteter Graph G=(V,E) heißt **Baum**, falls G azyklisch und zusammenhängend ist.
Ein ungerichteter Graph G=(V,E) heißt **Wald**, falls G azyklisch ist. Die Anzahl der benachbarten Knoten eines Knoten v nennt man **grad(v)**. Ist grad(v) = 1 heißt der Knoten **Blatt**.
Man nennt einen Graph **planar**, wenn man ihn ohne Überschneidungen zeichnen kann. Der **Satz von Kuratowski** besagt, dass K5 und K3,3 die einzig nichtplanaren Graphen sind, ein nichtplanarer Graph muss also einer der beiden Graphen als Minor enthalten.
Anzahl Gebiete(mit Äußerem Gebiet): $|E| - |V| + 2$
Für einen planaren Graphen lässt sich folgende Abschätzung machen: $|E| \leq 3|V| - 6$, hat er mindestens 3 Knoten dann auch: $|E| \leq 2|V| - 4$. Ist diese Abschätzung nicht erfüllt ist G nicht planar, ist sie erfüllt folgt daraus aber nicht dass G planar ist.
Die Knotenfärbung eines Graphen ist, wenn man die Knoten so färbt, dass zwei Knoten die in Relation zueinander stehen nicht dieselbe Farbe haben. Die chromatische Zahl χ ist die geringste Anzahl an Farben die der Graph benötigt. Bei Kreisen C_n ist $\chi = 2$ wenn n gerade, und $\chi = 3$ wenn n ungerade. Ein Graph hat genau dann $\chi = 2$, wenn er bipartit ist.
Ein Matching ist eine Auswahl an Kanten die disjunkt sind, also sich nicht an einem Knoten "berühren". Wenn das Matching an jedem Knoten eine Kante beinhaltet, ist es maximal und heißt auch perfektes Matching. Das perfekte Matching von C_n besteht aus $\frac{n}{2}$ Kanten wenn n gerade ist und $\frac{n-1}{2}$ wenn nicht. Bei dem vollständigem Graphen $K_{n,m}$ ist es n, vorausgesetzt $n \leq m$.
Zwei Graphen heißen isomorph, wenn sie, bis auf Umbenennung der Knoten, gleich sind.

6 Kombinatorik

	Ohne Zurücklegen	Mit Zurücklegen
Ohne Reihenfolge	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n+k-1}{k}$
Mit Reihenfolge	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Rechenregeln:

- wenn $k > n$ dann gilt $\binom{n}{k} = 0$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Binomialtheorem:
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$,
$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
- $(x+y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k,l} x^k y^l z^{n-k-l}$ wobei $\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$

Kürzeste Gitterwege
Es gibt w(s,t) = $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$ kürzeste Wege von s nach t in einem a×b-Gitter.
Ist der Punkt c gesperrt dann gibt es $w(s,t) - \binom{a+c}{a} * \binom{b+c}{c}$ Wege.
Wenn Punkt c und d gegeben sind und mindestens einer der beiden besucht werden muss gilt: $w(a,c) * w(c,b) + w(a,d) * w(d,b) - w(a,c) * w(c,d) * w(d,b)$.
Umformuliert: $\binom{a+c}{a} * \binom{b+c}{c} - \binom{a+d}{a} * \binom{b+d}{b} - \binom{a+c}{a} * \binom{c+d}{c} * \binom{b+d}{b}$

7 Zahlentheorie

Für m,n $\in \mathbb{Z}$ und $m > 0$, ist m **Teiler von** n, falls $\exists t \in \mathbb{Z}\ n = t * m$. Kurz: $m \backslash n$.
Die Menge aller Teiler ist $T_n = \{\ m \mid m \backslash n\ \}$. $T_{m,n} = T_m \cap T_n$.
Der **größte gemeinsame Teiler** von n und m ist: max $T_{m,n}$. Das **kleinste gemeinsame Vielfache** ist: min $\{\ k \mid m \backslash k\ \wedge\ n \backslash k\ \}$.
Es gilt $kgV(m,n) * ggT(m,n) = mn$ oder $kgV(m,n) = mn/ggT(m,n)$.
Lemmas: 1) $\forall a,b \in \mathbb{Z}\ \ T_{m,n} \subseteq T_{am+bn}$ 2) $\forall a \in \mathbb{Z}\ \ T_{m,n} = T_{m,n-am}$ 3) $T_{m,n} = T_{ggT(m,n)}$
Der **euklidische Algorithmus** $euklid(m,n)$ bestimmt den ggT:(für $m < n$)
$if\ m = 0\ return\ n$
$else\ euklid(n\ mod\ m, m)$
Der ggT lässt sich als Linearkombination von m und n darstellen, berechnet wird diese mithilfe des **erweiterten euklidischen Algorithmus**:

n	m	q	r	x	y
84	60	1	24	-2	$1-(-2)*1=3$
60	24	2	12	1	$0-1*2=-2$
24	12	2	0	0	1

Hierbei muss auch wieder $m \leq n$ gelten. Allgemein betrachtet(Zeile 0 ist die unterste):
$q_i = \lfloor \frac{n_i}{m_i} \rfloor \qquad r_i = n_i\ mod\ m_i$
$x_0 = 0\ y_0 = x_1 = 1 \qquad x_i = y_{i-1} \qquad y_i = x_{-1} - q_i * y_{-1}$
Als Probe: $n_i * x_i + m_i * y_I = ggT(m,n)$ gilt in jeder Zeile.

7.1 Kongruenzen

$a \equiv b\ (mod\ m) \iff m \backslash (a-b)$
Seien $a \equiv b\ (mod\ m)$ und $c \equiv d\ (mod\ m)$ Dann gilt:
1) $a + c \equiv b + d\ (mod\ m)$ 2) $a - c \equiv b - d\ (mod\ m)$ 3) $ac \equiv bd\ (mod\ m)$
Ist $a \equiv b\ (mod\ m)$, dann ist $a^n \equiv b^n\ (mod\ m)$
Die Division gilt nur wenn der Quotient teilerfremd zu m ist: Sei $d \perp m$ und $ad \equiv bd\ (mod\ m)$, dann gilt $a \equiv b\ (mod\ m)$.
ist $a \perp m$, dann hat die Kongruenz $ax \equiv b\ (mod\ m)$ die in $\mathbb{Z}_m$ eindeutige Lösung $x = a^{-1}b\ mod\ m$. Man erhält a^{-1} indem man den erweiterten euklidischen Algorithmus auf a und m anwendet.
Die Anzahl der teilerfremdem Zahlen m in $\mathbb{Z}_m$ wird als **eulersche φ-Funktion** bezeichnet: $\varphi(m) = |\mathbb{Z}_m^*|$
Es gilt: $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$
Für Primzahlen: $\varphi(p) = p - 1$
Für Primzahlpotenzen: $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$
z.B. $\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 2^3 \cdot (2-1) = 2^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 8$
Allgemein: $\varphi(n) = \prod_{p|n} p^{k_p - 1}(p-1) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$
z.B. $\varphi(84) = \varphi(2^2 * 3 * 7) = 84 * (1 - \frac{1}{2}) * (1 - \frac{1}{3}) * (1 - \frac{1}{7}) = 24$

Um die Anzahl der Teiler von n zu berechnen, braucht man die Primfaktorzerlegung($\prod p^k$). $|T_n| = \prod (k+1)$
Exponentation: $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m)$
z.B. $5^{99}(mod\ 84) \quad \varphi(84) = 24 \longrightarrow 5^{24} * 5^{24} * 5^{24} * 5^3 = 1 * 1 * 1 * 125 \equiv 41 \ (mod\ 84)$

7.2 Lineare Kongruenzen(Chinesischer Restsatz)

Ist ein Gleichungssystem der folgenden Art gegeben:
$x \equiv a_1\ mod\ m_1$
$x \equiv a_2\ mod\ m_2$
Dann bestimmt man x_1 und x_2 mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus jeweils über m_1 und m_2:
$m_2 * x_1 \equiv 1\ mod\ m_1$
$m_1 * x_2 \equiv 1\ mod\ m_2$
Dann gilt: $x = a_1 * m_2 * x_1 + a_2 * m_1 * x_2$.

8 Algebraische Strukturen

$(G, \circ)$ heißt **Gruppe** falls folgende Eigenschaften gelten:
(AG) Assoziativgesetz: $\forall a, b, c, \in G \qquad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
(N) Neutrales Element: $\exists e \in G\ \forall a \in G \qquad a \circ e = a$
(I) Inverses Element: $\forall a \in G\ \exists b \in G \qquad a \circ b = e$
Die Verknüpfung muss außerdem abgeschlossen über G sein. Falls auch auch das Kommutativgesetz(KG) $a \circ b = b \circ a$ gilt, heißt die Gruppe kommutativ(oder abelsch).
Ist $U \subseteq G$ und $(U, \circ)$ ebenfalls eine Gruppe, heißt sie **Untergruppe**. {e} und G sind **triviale Untergruppen**.
Sei $(G, \circ)$ endliche Gruppe und $a \in G$. Dann ist $< a >= \{a^0, a^1, a^2, ...\}$ die von a **erzeugte Untergruppe**. a heißt **Generator** oder **erzeugendes Element** von G.
$|U|$ heißt **Ordnung** von $< a >$, $a^{ord(a)} = e$. $|U|$ teilt immer $|G|$.
$(R, +, \cdot)$ heißt **Ring** falls:
1) $(R, +)$ ist kommutative Gruppe. 2) (AG) $\forall a, b, c, \in G \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3)(DG) $\forall a, b, c, \in G \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
R ist kommutativer Ring falls $\forall a, b \in R \quad a \cdot b = b \cdot a$
R ist Ring mit **Eins(-Element)** falls $\exists 1 \in R \quad a \cdot 1 = a$

8.1 RSA

Wähle zwei ungleiche Primzahlen p und q.
$N = p * q$
$\varphi(N) = (p-1) * (q-1)$
Wähle eine zu $\varphi(N)$ teilerfremde Zahl e, für die gilt $1 < e < \varphi(N)$.
Berechne den Entschlüsselungsexponenten d als Multiplikatives Inverses(erweiterter euklidischer Algorithmus) von e bezüglich des Moduls $\varphi(N)$. Es soll also die folgende Kongruenz gelten:

$$e * d \equiv 1 \bmod \varphi(N)$$

Verschlüsseln: $c \equiv m^e \bmod N$
Entschlüsseln: $m \equiv c^d \bmod N$

Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101