Formelsammlung - Grundlagen der Mathematik - Stand: 17.01.2014 - Christian Löhle

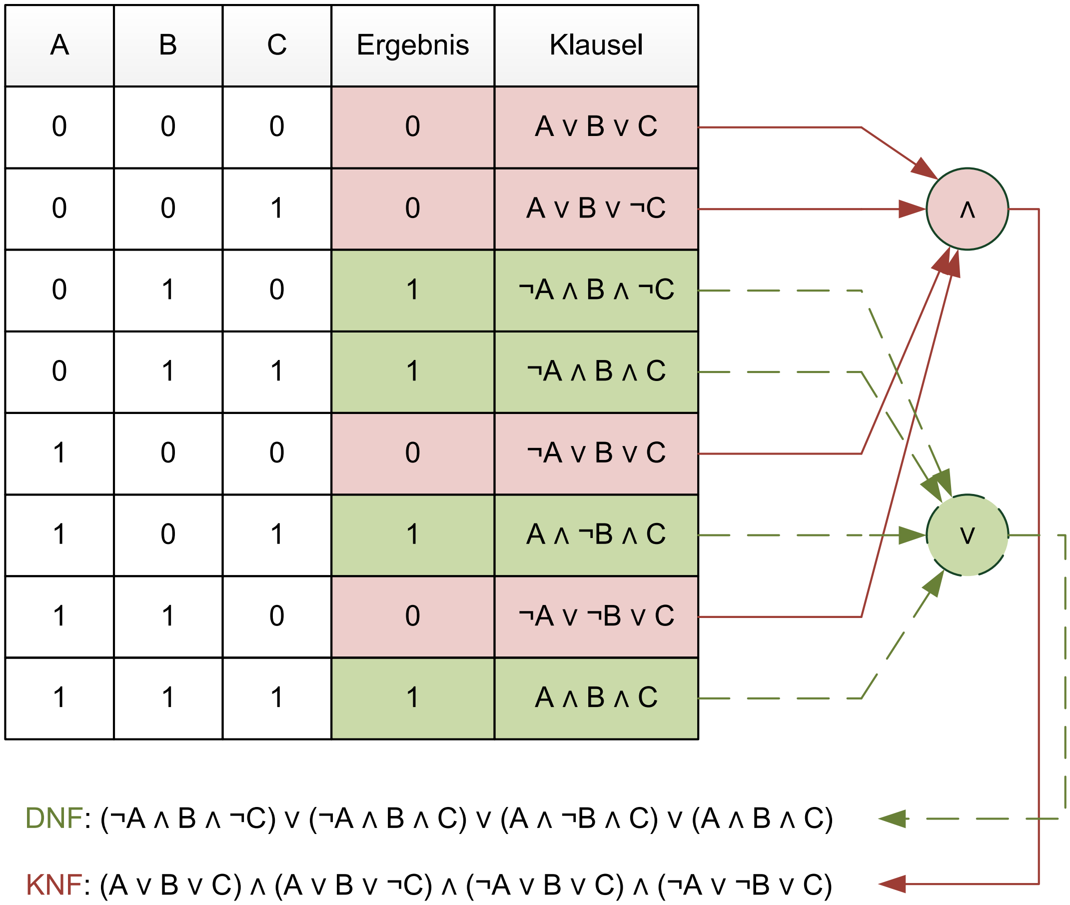
Logik

		Negation	Konjunktion	Disjunktion	Exklusives Oder	Implikation	Äquivalenz
		Nicht A	A und B	A oder B	Entweder A oder B	wenn A dann B	A genau dann wenn B
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Eine Formel F heißt:

- **erfüllbar**, wenn F bei mindestens einer Variabelbelegung 1 ist.
- **unerfüllbar**, wenn F bei jeder Variabelbelegung 0 ist.
- **Tautologie($\top$)/gültig**, wenn F bei jeder Variabelbelegung 1 ist.

Rechengesetze:
Kommutativgesetze:
$x \wedge y = y \wedge x$
$x \vee y = y \vee y$
Assoziativgesetze:
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
Distributivgesetze:
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Absorptionsgesetze:
$x \wedge (x \vee y) = x$
$x \vee (x \wedge y) = x$
De Morgansche Gesetze:
$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$
Sonstiges:
$x \oplus 0 = x$
$x \oplus 1 = \neg x$
$x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y) = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$
$x \Rightarrow y = \neg x \vee y$
Normalformen:
Disjunktive Normalform(DNF) besteht aus einer Disjunktion($\vee$) von Konjunktionstermen($\wedge$). Nehme die Variabelbelegung(z.B. $A \wedge \neg B \wedge \neg C$) wo F=1 ist und verknüpfe sie mit $\vee$.
Konjunktive Normalform(KNF) besteht aus einer Konjunktion($\wedge$) von Disjunktionstermen($\vee$). Nehme die Variabelbelegung(z.B. $A \wedge \neg B \wedge \neg C$) wo F=0 ist, **negiere** sie($\neg A \wedge B \wedge C$) und verknüpfe sie mit $\vee$.
Normalformen sind möglich, da $\wedge$, $\neg$ und $\vee$, $\neg$ eine vollständige Basis für die Aussagenlogik bilden. Um zu zeigen, dass andere Operatoren ebenfalls eine vollständige Basis bilden, muss man $\wedge$, $\neg$ oder $\vee$, $\neg$ als Formel bilden.



Mengen
[n] := {1, 2, 3, ..., n}
A = {1, 3, 7, 21} $\Rightarrow$ $|A| = 4$
Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ ist eine neue Menge, die aus allen Teilmengen von A besteht.
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\mathcal{P}(\{a\}) = \big\{\emptyset, \{a\}\big\}$
$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\big\}$
$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$
$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Operationen auf Mengen:

- Schnitt: $A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Vereinigung: $A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Differenz: $A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
- Symmetrische Differenz: $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Rechengesetze:

- Reflexivität: $A \subseteq A$
- Antisymmetrie: $AusA \subseteq BundB \subseteq AfolgtA = B$
- Transitivität: Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$
  Die Mengen-Operationen Schnitt $\cap$ und Vereinigung $\cup$ sind kommutativ, assoziativ und zueinander distributiv:
- Assoziativgesetz: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- Kommutativgesetz: $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$
- Distributivgesetz: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- De Morgansche Gesetze: $\neg (A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ und $\neg (A \cap B) = \neg A \cup \neg B$
- Absorptionsgesetz: $A \cup (A \cap B) = A$ und $A \cap (A \cup B) = A$
  Differenzmenge:
- Assoziativgesetze: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ und $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
- Distributivgesetze: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ und $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ und $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ und $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
  Sonstiges:
- $A \triangle B = \neg A \triangle \neg B$
- $A \setminus B = \neg B \setminus \neg A = A \cap \neg B$

Kartesisches Produkt:
$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$
$A^2 = A \times A = \{(a,a') \mid a, a' \in A\}$
Sei $A = \{a,b,c\} und B = \{x,y\}$ dann gilt:
$A \times B = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$
$B \times A = \{(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)\}$
$A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$
Ausserdem: $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n| = |A_1| * |A_2| * |A_3| * ... * |A_n|$ wenn A_1 bis A_n endlich sind.

Summen
Sei $m > n$ dann gilt: $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$

Gauss: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Konstantes Glied(wie bei Gauss): $\sum_{k=m}^{n} x = (n-m+1)x$

$\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$

Geometrische Reihe: $s_n = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Aufteilung: $\sum_{k=m}^{n} a(k) = \sum_{k=m}^{l} a(k) + \sum_{k=l+1}^{n} a(k)$

Vollständige Induktion
Die Gaußssche Summenformel lautet: Für alle natürliche Zahlen n $\geq$ 1 gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2})$$

Der Induktionsanfang ergibt sich unmittelbar:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Der Induktionsschritt wird über folgende Gleichungskette gewonnen, bei der die Induktionsvoraussetzung mit der zweiten Umformung verwendet wird:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Relationen

Eine Relation ist eine Teilmenge des Kreuzprodukt zweier Mengen: $R \subseteq A \times B$

Sei Relation R $\subseteq [4]^2$ und R $= \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,4)(4,3)\}$, dann ist die Adjazenzmatrix R $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Verkettung: $S \circ R := RS := \{(a,d) \in A \times D \mid \exists\, b \in B \cap C\colon (a,b) \in R \wedge (b,d) \in S\}$
Umkehrrelation: $R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$ Man erhält die Umkehrrelation an einem Graphen indem man die Pfeilspitzen umdreht. An der Adjazenzmatrix muss man alle 1en an der Hauptdiagonalen spiegeln.

Eigentschaften von Relationen:
Reflexivität(R): $\forall a \in A\colon (a,a) \in R$ Jedes Element steht zu sich selbst in Relation. Die Hauptdiagonale ist 1.
Symmetrie(S): $\forall a,b \in A\colon (a,b) \in R \Rightarrow\ (b,a) \in R$ Pfeilspitzen sind immer auf beiden Seiten, können dann auch weggelassen werden(ungerichtet Graph). Die Adjazenzmatrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen
Transitivität(T): $\forall a,b,c \in A\colon (a,b) \in R\ \wedge\ (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ Wenn es einen Weg über mehrere Relationen von einem Knoten zum Anderen gibt, müssen diese auch direkt in Relation stehen.
Asymmetrie: $\forall a,b \in A\colon (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$ Pfeilspitze immer nur auf maximal einer Seite. Keine Reflexivität.
Antisymmetrie(AS): $\forall a,b \in A\colon (a,b) \in R\ \wedge\ (b,a) \in R \Rightarrow\ a = b$ Gleich wie Asymmetrie, aber Reflexivität ist erlaubt.
Totalität(TO): $\forall a,b \in A\colon (a,b) \in R\ \vee\ (b,a) \in R$ Zwischen zwei beliebigen Knoten gibt es immer eine Relation in mindestens eine Richtung.
R heißt **Äquivalenzrelation** wenn (R), (S) und (T) gelten.
R heißt **Halbordnung** wenn (R), (AS) und (T) gelten.
R heißt **(Totale) Ordnung** wenn sie eine Halbordnung ist und (TO) erfüllt.
Die **Äquivalenzklasse** eines Objektes a ist die Klasse der Objekte, die äquivalent zu a sind. Sei R $\subseteq A^2$.
$[a]_R = \{x \in A \mid (x,a) \in R\} \subseteq M$
Der **Quotient** von R bezüglich R ist die Menge A/R = $\{[a[_R \mid a \subseteq A\}$ (Die Anzahl Äquivalenzklassen)
Ein Graph lässt sich zu einer Halbordnung erweitern, wenn er azyklisch ist(da Symmetrie $\implies$ azyklisch)

Eine Relation heißt **Funktion**, wenn sie eindeutig ist, sprich von jedem Knoten genau ein Pfeil weggeht. Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu. $f\colon D \to Z,\ x \mapsto y$.
Eine Funktion ist **injektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge höchstens ein Urbild hat. D. h. aus $f(x_1) = y = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
Sie ist **surjektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge mindestens ein Urbild hat. D. h. zu beliebigem y gibt es ein x, so dass f(x)=y.
Gelten diese beiden Eigenschaften für f, nennt man f **bijektiv**. wenn eine Funktion bijektiv ist ihre Umkehrfunktion(f^{-1}) auch eine (bijektive) Funktion.
Eine bijektive Funktion $f\colon$ [n]→[n] heißt **Permutation**. Die Adjazentmatrix einer Permutation hat in jeder Spalte und Zeile genau eine 1.
Die Vorgehensweise um die nächstgrößten Permutation zu bestimmen ist:

1. Bestimme längstes abfallend-sortiertes Endstück.
2. Erhöhe vorgehende Zahl kleinstmöglich mit einer der Ziffer rechts davon.
3. Sortiere Endstück aufsteigend.

Graphentheorie

Ein ungerichteter Graph G=(V,E) heißt **Baum**, falls G azyklisch und zusammenhängend ist.
Ein ungerichteter Graph G=(V,E) heißt **Wald**, falls G azyklisch ist. Die Anzahl der benachbarten Knoten eines

Knoten v nennt man **grad(v)**. Ist grad(v) = 1 heißt der Knoten **Blatt**.
Man nennt einen Graph **planar**, wenn man ihn ohne Überschneidungen zeichnen kann. Der **Satz von Kuratowski** besagt, dass K5 und K3,3 die einzig nichtplanaren Graphen sind, ein nichtplanarer Graph muss also einer der beiden Graphen als Minor enthalten.

Kombinatorik

	Ohne Zurücklegen	Mit Zurücklegen
Ohne Reihenfolge	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n+k-1}{k}$
Mit Reihenfolge	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Rechenregeln:

- wenn $k > n$ dann gilt $\binom{n}{k} = 0$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Binomialtheorem:
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$,
$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
- $(x+y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k,l} x^k y^l z^{n-k-l}$ wobei $\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$

Kürzeste Gitterwege
Es gibt w(s,t) = $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$ kürzeste Wege von s nach t in einem a×b-Gitter.
Ist der Punkt c gesperrt dann gibt es w(s,t) - $\binom{a+c}{a} * \binom{b+c}{c}$ Wege.
Wenn Punkt c und d gegeben sind und mindestens einer der beiden besucht werden muss gilt: $w(a,c) * w(c,b) + w(a,d) * w(d,b) - w(a,c) * w(c,d) * w(d,b)$.
Umformuliert: $\binom{a+c}{a} * \binom{b+c}{c} - \binom{a+d}{a} * \binom{b+d}{b} - \binom{a+c}{a} * \binom{c+d}{c} * \binom{b+d}{b}$