M342 Álgebra Computacional

Christian Lomp

FCUP

12 de Outubro de 2011

3. Álgebra linear

Neste capítulo falamos de aspectos computacionais de álgebra linear: matrizes, vectores, sistemas de equações lineares

3.1 Vectores

Para trabalhar com vectores definimos uma classe VETOR.

```
class VETOR
{
    vector<Tipo> data;
  public:
    VETOR(vector<Tipo> d) { data=d; };       // construtor
   ...
}
```

Aqui *Tipo* podia ser substiuido por um típo como *int*, *float* ou classes que definímos como *inteiro*, *racional*, *polinomio*, *modular*.

3.1 Vectores

Soma

Se *Tipo* tem uma operação $+$ definida podemos definir a soma de vectores: para $v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$ define-se a soma por

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n).$$

```
VETOR VETOR::operator + (VETOR b)
{
  vector soma<Tipo>;
  for (int i=0; i<data.size(); i++)
    soma.push_back(data[i]+b.data[i]);
  return VETOR(soma);
};
```

3.1 Vectores

Multiplicação escalar

Se *Tipo* tem uma operação $*$ definida podemos definir a multiplicação escalar: Para $v = (v_1, \ldots, v_n)$ e um escalar λ define-se

$$\lambda v = (\lambda v_1, \lambda + v_2, \ldots, \lambda v_n).$$

```
VETOR VETOR::escalar(Tipo lambda)
{
  vector resultado<Tipo>;
  for (int i=0; i<data.size(); i++)
    resultado.push_back(lambda*data[i]);
  return VETOR(resultado);
};
```

3.1 Vectores

Diferença

Se *Tipo* contém o elemento -1 podemos definir a diferença de vectores por $v - w := v + (-1)w$.

```
VETOR VETOR::operator - (VETOR b)
{
  return (*this)+b.escalar(-1);
};
```

3.1 Vectores

Produto interno

Para dois vectores $v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$ define-se o produto interno por

$$v * w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots v_n w_n.$$

```
Tipo VETOR::operator * (VETOR b)
{
  Tipo produto=0;
  for (int i=0; i<data.size(); i++)
    produto = produto + (data[i]*b.data[i]);
  return produto;
};
```

3.1 Vectores

Quadrado da norma

O quadrado da norma de um vector v é $|v|^2 = v * v$.

```
Tipo VETOR::Norma()
{
  return (*this)*(*this);
};
```

3.2 Matrizes

Para trabalhar com matrizes definimos uma classe MATRIZ que consiste de um vector<VETOR> onde fixamos agora o tipo *Tipo* nos componentes em VETOR.

```
class MATRIZ
{
   vector<VETOR> data;
 public:
   MATRIZ(vector<VETOR> A) { data=A; };
  ...
}
```

Consideramos os componentes do vector *data* por linhas da matriz.

3.2 Matrizes

Soma

A soma de duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ é

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

```
MATRIZ MATRIZ::operator + (MATRIZ b)
{
  vector<VETOR> soma;

  for (int i=0; i<data.size(); i++)

    soma.push_back(data[i]+b.data[i]);

  return MATRIZ(soma);
};
```

3.2 Matrizes

Multiplicação escalar

Para $A = (a_{ij})$ e λ define-se

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

```
MATRIZ MATRIZ::escalar(Tipo lambda)
{
  vector<VETOR> resultado;

  for (int i=0; i<data.size(); i++)

    resultado.push_back(data[i].escalar(lambda));

  return MATRIZ(resultado);
};
```

3.2 Matrizes

Diferença

```
MATRIZ MATRIZ::operator - (MATRIZ b)
{
  return (*this)+b.escalar(-1);
};
```

3.2 Matrizes

Colunas

A j-esima coluna da matriz $A = (a_{ij})$ é o vetor $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$.

```
VETOR MATRIZ::Coluna(int j)
{
  vector<Tipo> col;
  for (int i=0; i<data.size(); i++)
    col.push_back(data[i][j]);
  return VETOR(col);
};
```

3.2 Matrizes

Multiplicação

Para $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ define-se

$$A * B = (\sum_{k=0}^{n} a_{ik} b_{kj}).$$

```
MATRIZ MATRIZ::operator * (MATRIZ b)
{
  MATRIZ produto(data);
  int n=data.size();
  for(int i=0; i<n; i++)
    for(int j=0; j<n; j++)
      produto.data[i][j]=data[i]*b.Coluna(j);
  return produto;
};
```

3.2 Vectores

Determinante

Determinante

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. O determinante de A é

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$n!(n-1) \quad \text{multiplicações}$$

3.2 Vectores

Determinante

Teorema de Laplace

Para qualquer $1 \leq i \leq n$ temos que $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\widehat{A}_{ij}|$. Onde

$$\widehat{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \color{red}{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \dots & \color{red}{a_{ij}} & \dots & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \color{red}{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n!$ multiplicações

3.2 Vectores

Determinante

Eliminação de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{ij} & \dots & a'_{in} \\ 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{nj} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=2}^{n} (k-1)k = \frac{n^3 - n}{3} \quad \text{multiplicações}$$