Christian Loor, Sophie Gorges
MS/OR, WS 21/22

2. Bonusübung

Zur Lösung des Sudokus als Knotenfärbungsproblems haben wir das gegebene Sudoku in einzelnen Zellen betrachtet (1-81, zeilenweise angeordnet).

Da bei einem Sudoku eine Zahl nur einmal in der jeweiligen Zeile, Spalte und Block enthalten sein darf, wurden alle möglichen Konflikte zwischen den Zellen definiert.

Beispielhaft an Zelle 1 erklärt: jede Zelle in Zeile 1, in Spalte 1 und in Block 1 steht im Konflikt mit Zelle 1 und dürfen nicht dieselbe Zahl enthalten. Daraus ergeben sich Konflikte mit den Zellen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 11, 12, 20 und 21. Alle Konflikte befinden sich im externen Dokument *Kanten.txt.*

Die maximale Anzahl an verwendeten Farben soll 9 betragen, da im Sudoku die Zahlen 1 bis 9 enthalten sein sollen.

In der Aufgabenstellung sind bereits 23 Zellen vordefiniert. Die vorgegeben Werte werden im nächsten Schritt angegeben. Beispielsweise ist für Zelle 6 der Wert 9 vorgegeben.

Im Anschluss erfolgte die Variablendefinition.

Die Zielfunktion minimiert die verwendete Anzahl an Farben für das Modell. Im Grunde gibt es für das Sudoku nur eine richtige Lösung, es gibt keine Kombination von Zahlen, für die das Sudoku besser oder schlechter gelöst sein kann.

Als Nebenbedingungen muss beachtet werden, dass

1. jede Zelle von genau einer Nummer besetzt ist
2. vorgegebene Konflikte zwischen den Zellen existieren
3. bereits fixe Zellenwerte vorgegeben sind

Für das traditionelle Knotenfärbungsproblem wird folgendes Optimierungsproblem benötigt:

Neben der Zielbedingung und den Nebenbedingungen 2-5 haben wir eine weitere Nebenbedingung hinzugefügt, die die bereits vorgegebenen Werte des Sudokus beachtet.

Anstelle von Farben werden direkt die Nummern 1 bis 9 verwendet.

Entscheidungsvariablen: Für eine ausreichend große Menge C von Farben

- $x_{ic} = 1$, wenn Knoten $i \in V$ die Farbe $c \in C$ zugewiesen bekommt, $x_{ic} = 0$ sonst
- $y_c = 1$, wenn Farbe $c \in C$ benutzt wird, $y_c = 0$ sonst

$$
\begin{aligned}
z_{VC} &= \min \sum_{c \in C} y_c && (1)\\
\text{so dass} \quad & \sum_{c \in C} x_{ic} = 1 \quad \text{für alle } i \in V && (2)\\
& x_{ic} + x_{jc} \leq y_c \quad \text{für alle } \{i,j\} \in E, c \in C && (3)\\
& y_c \in \{0,1\} \quad \text{für alle } c \in C && (4)\\
& x_{ic} \in \{0,1\} \quad \text{für alle } i \in V, c \in C && (5)
\end{aligned}
$$

(1) Minimiere die Anzahl der benutzten Farben
(2) Jedem Knoten wird eindeutig eine Farbe zugewiesen
(3) Höchstens einem von zwei adjazenten Knoten kann eine Farbe zugewiesen werden, sofern diese benutzt wird
(4–5) Binäre EV y_c und x_{ic}

Die Lösung des Sudokus sieht wie folgt aus:

(1) 6	(2) 8	(3) 5	(4) 4	(5) 3	(6) 9	(7) 2	(8) 7	(9) 1
(10) 4	(11) 9	(12) 1	(13) 7	(14) 8	(15) 2	(16) 6	(17) 5	(18) 3
(19) 3	(20) 2	(21) 7	(22) 5	(23) 6	(24) 1	(25) 8	(26) 4	(27) 9
(28) 9	(29) 1	(30) 6	(31) 3	(32) 4	(33) 7	(34) 5	(35) 8	(36) 2
(37) 7	(38) 5	(39) 8	(40) 1	(41) 2	(42) 6	(43) 3	(44) 9	(45) 4
(46) 2	(47) 4	(48) 3	(49) 8	(50) 9	(51) 5	(52) 7	(53) 1	(54) 6
(55) 1	(56) 3	(57) 9	(58) 6	(59) 7	(60) 8	(61) 4	(62) 2	(63) 5
(64) 8	(65) 6	(66) 2	(67) 9	(68) 5	(69) 4	(70) 1	(71) 3	(72) 7
(73) 5	(74) 7	(75) 4	(76) 2	(77) 1	(78) 3	(79) 9	(80) 6	(81) 8