Modelagem de Escoamentos Turbulentos.
Lista de Exercícios No. 3

Cristian Herledy López Lara

Junho 2025

Questão 1

Obtenha a equação de transporte para o tensor de Reynolds

Desenvolvimento
Partindo da equação de conservação de movimimento linear

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \tag{1}$$

Aplicando o conceito da media de Reynolds $A = \overline{A} + a$ para cada termo:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \tag{2}$$

$$U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \overline{U_k}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{U_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \tag{5}$$

A equação completa fica então

$$\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U_k}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{U_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \tag{6}$$

Agora tomando só os termos da fluctuação turbulenta

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \tag{7}$$

Multiplicando por u_j cada termo da equação

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} \tag{8}$$

$$u_j \overline{U_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \overline{U_k}\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - \overline{U_k} u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{9}$$

$$u_j u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \tag{10}$$

$$u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \tag{11}$$

$$u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k \partial x_k} - u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \tag{12}$$

Escrevendo a equação completa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - \overline{U_k} u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \\ \frac{u_j}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k \partial x_k} - u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \tag{13}$$

Da mesma forma, obtemos a equação para a flutuação u_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - \overline{U_k} u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - u_j u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \\ \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k \partial x_k} - u_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \tag{14}$$

Somando a equação 14 da equação 13 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i u_j u_k}{\partial x_k} = \\ \frac{1}{\rho} \left(u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \nu \left(u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \tag{15}$$

E aplicando os termos da media

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} = \\ \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \right) + \nu \left(\overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_j}}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \tag{16}$$

Questão 2

Simplifique a equação da energia cinética turbulenta $k = (u_i u_i)/2$ para o caso de um escoamento médio turbulento plenamente desenvolvido em um duto.

<u>Desenvolvimento</u>

Agora novamente da equação de transporte do tensor de Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} = \\ \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \right) + \nu \left(\overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_j}}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \tag{17}$$

Façendo i=j e dividindo por 2 obtemos

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_k}\frac{\partial k}{\partial x_k} + k\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + k\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_k\frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}\right) + \nu\left(\overline{u_i}\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k}\right) \tag{18}$$

Para escoamento plenamente desenvolvido, a velocidade media na direçao i não muda com relaçao a j, então $\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} = 0$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_k}\frac{\partial k}{\partial x_k} + u_k\frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}\right) + \nu\left(\overline{u_i}\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k}\right) \tag{19}$$

Periodo T [s]	U media [m/s]	Desvio padrão [m/s];
0 - 0,005	8,8854	1,0636
0 - 0,05	8,5692	1,1724
0 - 0,5	8,5342	1,2415
0 - 5	8,5417	1,2330

Tabela 1: Valores de velocidade media e desvio padrão para diferentes intervalos

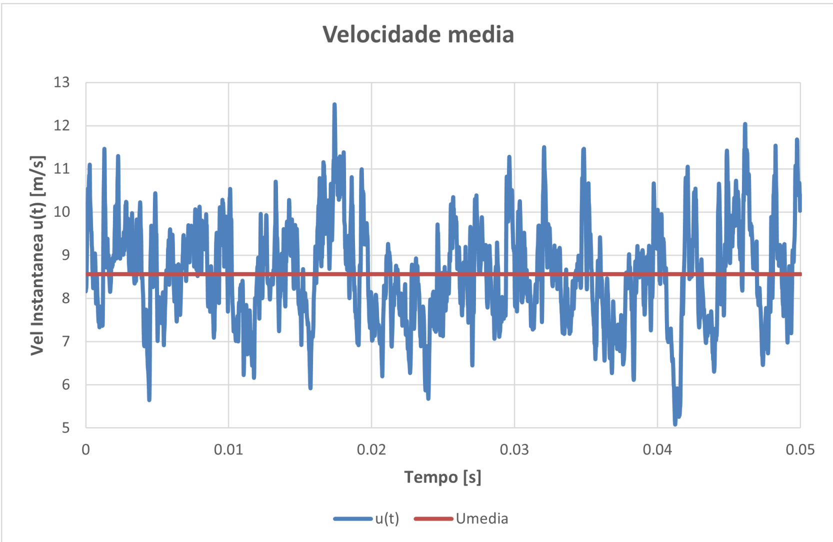

Figura 1: Velocidade instantanea e velocidade media ate $t = 0,05s$

O gráfico a seguir mostra a evolução da velocidade média e do desvio padrão. Ambas as grandezas convergem para um valor à medida que o tempo avança. Isso ocorre porque há mais dados para calcular a média da amostra em $t = 5s$. As grandes e pequenas escalas terão passado pelo dispositivo de medição um número maior de vezes, o que permite estatísticas turbulentas mais homogêneas e, portanto, a medição do escoamento em regime permanente.

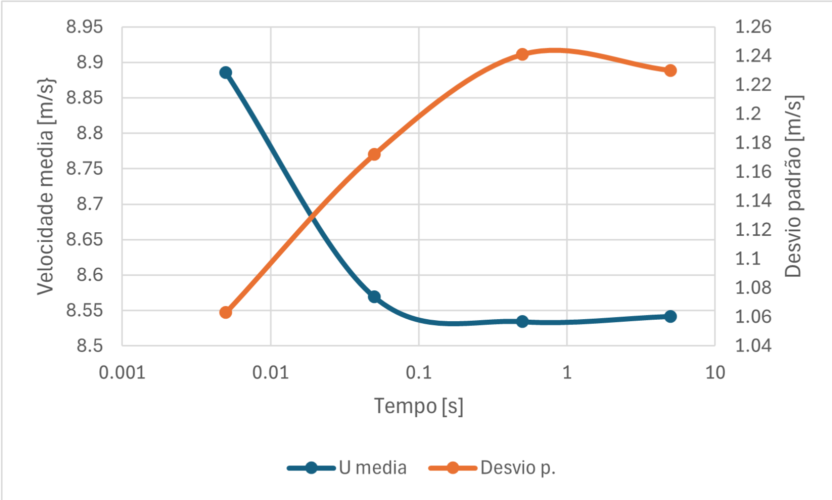

Figura 2: Velocidade media e desvio padrao nos intervalos de tempo analisados

Questão 2

A partir dos dados do arquivo Re125.txt:
i. Determine a energia cinética turbulenta, k, assumindo a condição de isotropia;

A energia cinética turbulenta é calculada com a expressão

$$k = \overline{u_i u_i}/2 \tag{20}$$

Que para un escoamento isotrópico pode ser escrito como

$$k = \overline{u1u1 + u1u1 + u1u1}/2 \ = \ \frac{3}{2}\overline{u_1 u_1}^2 \ = \ 2,26\ \frac{m^2}{s^2} \tag{21}$$

ii. Faça um gráfico para o coeficiente de correlação temporal e avalie a escala de comprimento L das grandes escalas;

Para o cálculo de correlação temporal , primeiro é necesario encomtrar o valor da correlação de velocidade no ponto ($r = 0$) dado pela expressão

$$\mathbf{R}_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t)\, u_j(\mathbf{x}, t')}$$

Referências

[1] Cesar Deschamps, Escalas da turbulencia Cap 2. UFSC Florianopolis, SC, Notas de aula, 2025.