Modelagem de Escoamentos Turbulentos.
Lista de Exercícios No. 2

Cristian Herledy López Lara

Junho 2025

Questão 1

A partir do conjunto de dados fornecido no arquivo Re125.txt para a velocidade instantânea medida em um ponto de um jato (coluna 1: tempo em segundos; coluna 2: velocidade em m/s), e considerando amostras para intervalos de tempo T = 0,005; 0,05; 0,5 e 5s:
i. Obtenha a velocidade média e desvio padrão;
ii. Explique eventuais diferenças entre os resultados para os três períodos T supracitados.

Desenvolvimento

A velocidade média e o desvio padrão são calculados para cada intervalo mostrando os seguintes valores:

Periodo T [s]	U media [m/s]	Desvio padrão [m/s];
0 - 0,005	8,8854	1,0636
0 - 0,05	8,5692	1,1724
0 - 0,5	8,5342	1,2415
0 - 5	8,5417	1,2330

Tabela 1: Valores de velocidade media e desvio padrão para diferentes intervalos

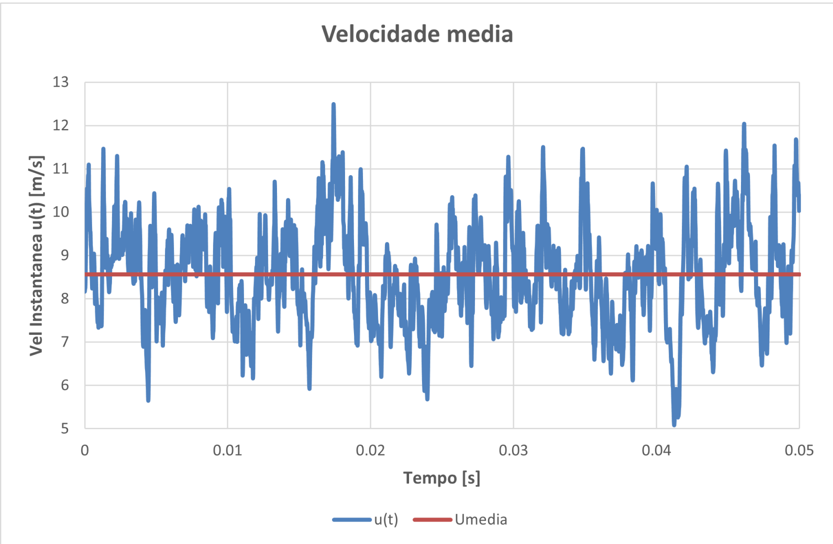

Figura 1: Velocidade instantanea e velocidade media ate $t = 0,05s$

O gráfico a seguir mostra a evolução da velocidade média e do desvio padrão. Ambas as grandezas convergem para um valor à medida que o tempo avança. Isso ocorre porque há mais dados para calcular a média da amostra em $t = 5s$. As grandes e pequenas escalas terão passado pelo dispositivo de medição um número maior de vezes, o que permite estatísticas turbulentas mais homogêneas e, portanto, a medição do escoamento em regime permanente.

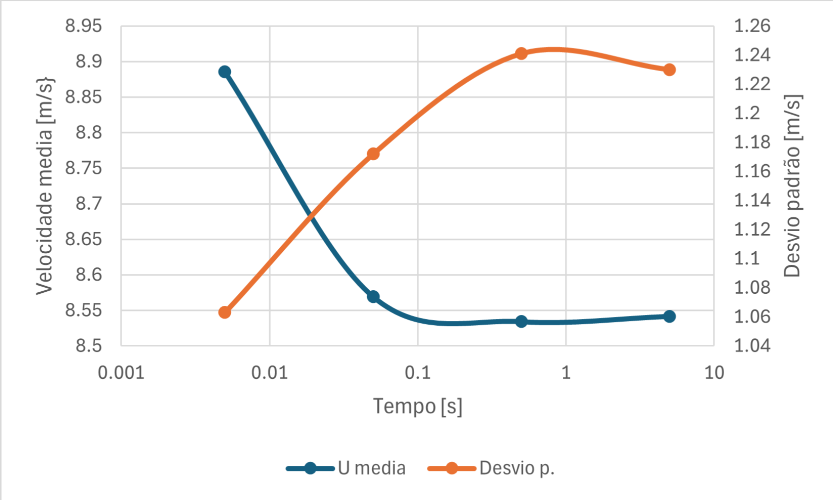

Figura 2: Velocidade media e desvio padrao nos intervalos de tempo analisados

Questão 2

A partir dos dados do arquivo Re125.txt:

i. Determine a energia cinética turbulenta, k, assumindo a condição de isotropia;

A energia cinética turbulenta é calculada com a expressão

$$k = \overline{u_i u_i}/2 \tag{1}$$

Que para un escoamento isotrópico pode ser escrito como

$$k = \overline{u1u1 + u1u1 + u1u1}/2 \;=\; \frac{3}{2}\overline{u_1 u_1}^2 \;=\; 2,26\,\frac{m^2}{s^2} \tag{2}$$

ii. Faça um gráfico para o coeficiente de correlação temporal e avalie a escala de comprimento L das grandes escalas;

Para o cálculo de correlação temporal , primeiro é necesario encomtrar o valor da correlação de velocidade no ponto $(r = 0)$ dado pela expressão

$$\mathbf{R}_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t)\, u_j(\mathbf{x}, t')}$$

Sendo $\tau = t - t'$. Logo, a correlação de velocidades é calculada como

$$\rho_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathbf{R}_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})}{u'_i u'_j} \tag{3}$$

Para finalmente determinar a correpondente correlação temporal

$$\Theta_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \tag{4}$$

O gráfico a seguir mostra como se comporta a correlação temporal em uma parcela da amostra de dados selecionada até $\tau = 0,02$, já que com todos os dados não é fácil visualizar a tendência da curva.

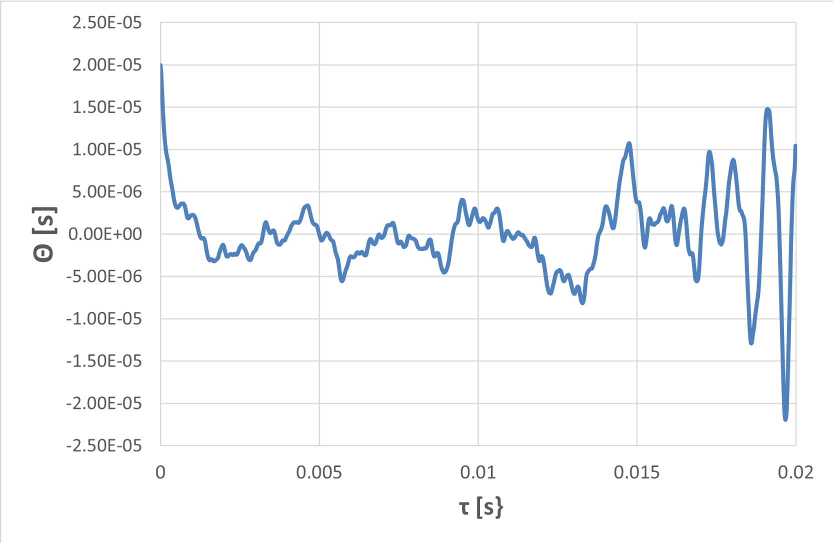

Figura 3: Evolução da correlação temporal em função de τ

Para determinar o valor da escala de comprimento para grandes escalas L, são tomados valores positivos da expressão (4) levando a sua forma integral ao calculo pelas somas em serie; uma vez que esses valores positivos correspondem à correlação direta das flutuações com o atraso. Este valor representa o tempo médio de passagem das estruturas turbulentas pelo dispositivo de medição.

Segregando o primeiro intervalo de valores positivos Θ_1 no intervalo da figura 3, obtém-se a curva

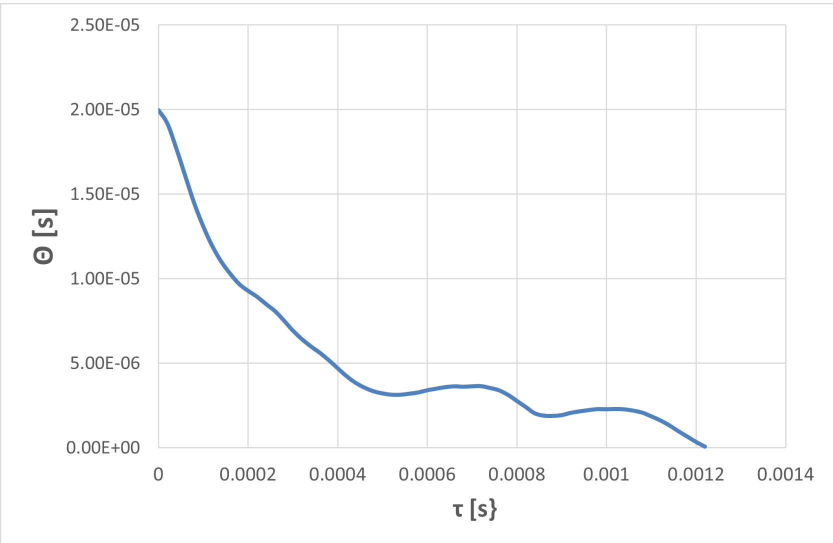

Figura 4: Evolução da correlação temporal ate $\Theta_1 = 0$

Agora, da seguinte expressão, L pode ser calculada

$$\Theta = \frac{L}{U} \;\rightarrow\; L = 0,003059\ m \tag{5}$$

iii. Avalie o número de Reynolds das grandes escalas, ReL, a partir das medições

O número de Reynolds é avaliado, tomando o valor da viscosidade do ar @ $298,15K$

$$Re_L = \frac{u' \cdot L}{\nu} = \frac{1,2330 m/s \cdot 0,0030 m}{1,5e^{-5} m^2/s} \;=\; 251,5 \tag{6}$$

iv. Obtenha estimativas paras as escalas de Kolmogorov (comprimento, tempo e velocidade)
v. Avalie a dissipação turbulenta

Para avaliar as escalas de Kolmogorov e a dissipação turbulenta as seguintes considerações serão feitas para usar a nomenclatura das equações da aula

- $\ell_0 = L$
- $u_0 = u'$
- $\tau_0 = \ell_0 / u_0$

$$\varepsilon \equiv \frac{(u_0)^3}{\ell_0} \;\equiv\; \frac{(1,2330 m/s)^3}{0,0030 m} \;\equiv\; 625 m^2/s^3 \tag{7}$$

$$\frac{\eta}{\ell_0} \sim Re_L^{-3/4} \;\rightarrow\; \eta \sim Re_L^{-3/4} \cdot \ell_0 \;\rightarrow\; 251,5^{-3/4} \cdot 0,0030 m \sim 4,84x10^{-}5m \tag{8}$$

$$\frac{u_\eta}{u_0} = Re_L^{-1/4} \rightarrow u_\eta = Re_L^{-1/4} \cdot u_0 \rightarrow 251,5^{-1/4} \cdot 1,2330 m/s = 0,3096 m/s \tag{9}$$

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_0} = Re_L^{-1/2} \rightarrow \tau_\eta = Re_L^{-1/2} \cdot \tau_0 \rightarrow 251,5^{-1/2} \cdot 0,0024 s = 1,51x10^{-4} s \tag{10}$$

Em resumo das escalas de Kolmogorov obtem-se que:

- $\varepsilon \equiv 625 m^2/s^3$
- $\eta = 4,84x10^{-}5m$
- $u_\eta = 0,3096 m/s$
- $\tau_\eta = 1,51x10^{-4} s$

Os resultados obtidos refletem o regime turbulento de grandes escalas, onde $Re > 1$ mostra que grandes estruturas contêm uma grande parcela da energia inercial.
A dissipação turbulenta mostra a taxa de transferência de energia para as escalas viscosas.

O valor de ℓ_0 é consistente com a escala de comprimento que divide a faixa inercial da faixa dissipativa $\ell_{DI} = 60\eta \rightarrow 0,0030m \approx 60 \cdot 4,84x10^{-}5m$. Este valor é necessário para definir a escala para a segunda hipótese de similaridade.

A velocidade u_η e muito menor que as velocidades media e de fluctuação. Isso da uma ideia sobre como escalas grandes e pequenas se desacoplaram.

O tempo característico das pequenas estruturas τ_η é significativamente menor que o tempo integral τ_0, mostrando que a dissipação ocorre rapidamente.

vi. Determine a transformada de Fourier para energia cinética instantânea da turbulência e forneça uma interpretação do resultado, identificando as faixas de energia, inercial e de dissipação das escalas turbulentas.

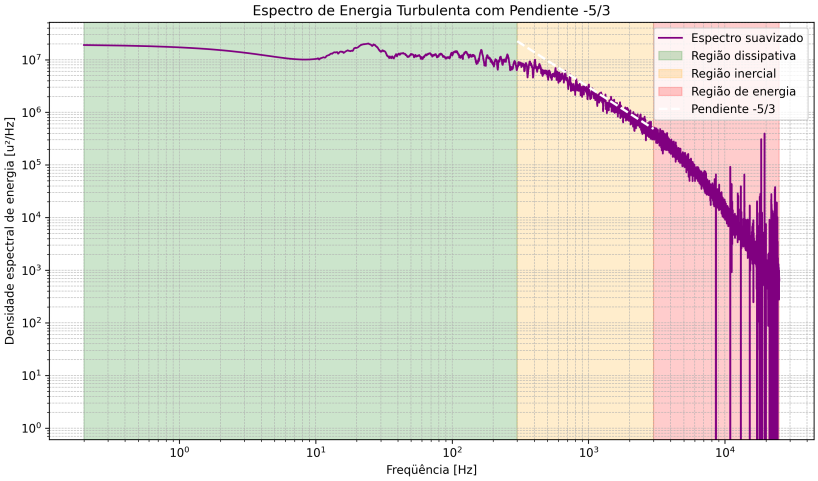

Figura 5: Transformada de Fourier para energia cinética instantânea da turbulência

As divisões das diferentes regiões podem ser vistas no anterior grafico. A transição da faixa de energia (onde a maior parte da energia turbulenta está contida) concorda com a relação ao intervalo $\ell_0/6 < \ell < 6\ell_0$, começando em torno de 1200 Hz. Nessa faixa, ocorre a produção de energia turbulenta que será trasnferida as pequenas escalas passando pela faixa inercial.

En tanto, a região de dissipação cobre $\approx 60\%$ do espectro, sendo esta a faixa onde ocorre a dissipação de energia das pequenas escalas ao escoamento. Para os dados analisados, o limite para esta região é da ordem de 10^2 Hz, o que coincide com a expressão dada para ℓ_{DI}.

A região inercial (em amarelo) é o intervalo de frequências onde ocorre a transferência de energia sem dissipação, da escala L até escalas menores. Nesta faixa, o espectro tende a seguir a lei de Kolmogorov $\approx f^{-5/3}$:

Referências

[1] Cesar Deschamps, Escalas da turbulencia Cap 2. UFSC Florianopolis, SC, Notas de aula, 2025.