Modelagem de Escoamentos Turbulentos. Lista de Exercícios No. 4

Cristian Herledy López Lara

Julho 2025

Questão 1

A relação proposta por Kolmogorov é usada em quase todos os modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta. Explique duas deficiências dessa proposta na previsão de escoamentos turbulentos.

Desenvolvimento

Partindo da equação da hipótese de Boussinesq, generalizada por Kolmogorov temos que

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \tag{1}$$

Para fazer a análise, começamos testando os índices numericamente e abrindo os termos da equação. Primeiro, quando $i = j = 1$

$$-\overline{u_1 u_1} = \nu_t \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{11} = 2\nu_t \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) - \frac{2}{3} k \tag{2}$$

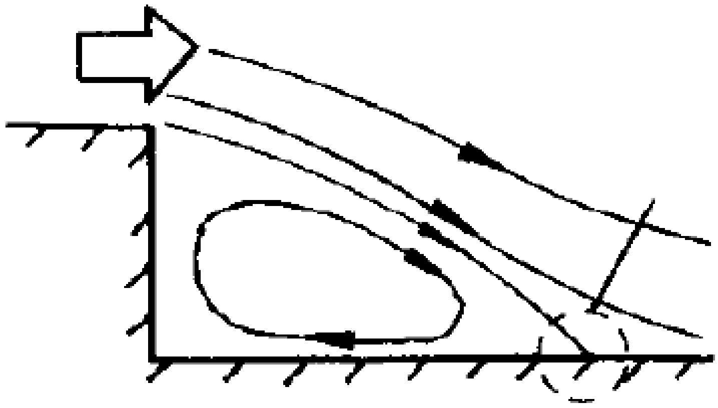
Por exemplo, para o caso do escoamento plenamente desenvolvido $\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = 0$, que precisamente é o termo que

$$-\overline{u_1 u_1} = \frac{2}{3} k = \frac{2}{3} \left(\frac{\overline{uu} + \overline{vv} + \overline{ww}}{2} \right) \tag{3}$$

Pode-se observar que o modelo estã prevendo isotropía com o termo $\overline{uu} \sim \overline{uu} + \overline{vv} + \overline{ww}$, o qual não é correto. Portanto, o modelo está subestimando $\overline{uu}$, falhando em capturar a anisotropia gerada pelo termo gradiente de velocidade.
Em sala de aula foi deducido que em escoamentos reales que $uu \gg vv \sim ww$, por tanto equação 3 não concorda com o que foi observado experimentalmente [2].

Questão 2

Para a situação de escoamento turbulento da figura abaixo, identifique as razões pelas quais um modelo algébrico teria dificuldades em prever os níveis de turbulência corretamente na região de recirculação e na região do reatamento do escoamento.



Desenvolvimento

A fugura mostra um escoamento que passa por um área de recirculação e de reatamento. Os modelos algebraicos sãó baseados no calculo da viscosidade turbulenta definida por a expressão

$$\nu_t = lm^2 \left\| \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right\| \tag{4}$$

.

Na área de recirculação, é esperado que la viscosidade turbulenta seja alta, devido as mudanças abruptas na direcão do escoamento e porque traz informações de memória da turbulência do contato com a parede anterior. Essas informações não están contidas no termo de v_t, que só depemde do gradiente de velocidade $\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}$.

Na parte de reatamento o gradiente de velocidade pode se tornar negativo ou até nulo. Porem, a $\nu_t \leq 0$ o que está subestimando a turbulencia, e não é correto (os coeficientes de transporte de turbulencia não são desprezzíveis).

Questão 3

O modelo RNG $k - \varepsilon$ é uma proposta para a previsão de escoamentos turbulentos. A principal diferença desse modelo em relação ao modelo $k - \varepsilon$ padrão é a equação da dissipação. Explique o efeito do termo R sobre o valor da viscosidade turbulenta em situações de escoamentos com valores elevados de S_{ij}.

Desenvolvimento

Da equação da dissipação

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \alpha \nu_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t S^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + R \tag{5}$$

Vamos analisar o efeito do termo R dado por

$$R = -\frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)\, \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3 k} \tag{6}$$

Neste termo, a expressão $\eta = Sk/\varepsilon$ é contido e traze a informacão do balance entre a producão e a dissipacão da energ ia transportada pela turbulencia. Neste termino, no numerador , emcontra se o tensor taxa de derformação dado pela expresão

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{7}$$

Agora, considerando que

$$R \sim \frac{(1 - \eta/\eta_0)}{1 + \eta^3} \tag{8}$$

Então para escoamentos com altas taxas de deformação S_{ij}, $\frac{\eta}{\eta_0} > 1$ e porem $R < 0$, o que reduz a taxa de dissipaçao.

A viscosidade turbulenta é dada pela expressão

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{9}$$

Portanto, ao reduzir o valor de ε, tem como efeito um aumento da viscosidade turbulenta. Permitindo aos modelos baseados no calculo de ν_t capturar melhor os efeitos em escoamentos com grandes gradientes de velocidade.

Questão 4

Indique a vantagem de uma característica particular dos modelos de turbulência SST e Realizável.

Desenvolvimento

Os dois modelos presentam uma vantagem comum: ajustam seus parâmetros ddependendo das condições locais do escoamento

- No modelo SST, isso ocorre por meio da função F_1 [1] ajustando a transição entre modelos locamente dentro da camada limite.
- No modelo realizável, o parâmetro C_μ varia garantindo tensões coerentes com as mudanças da turbulência do escoamento.

Questão 5

Explique a necessidade do uso do perfil logarítmico de velocidade na prescrição da condição de contorno de paredes sólidas em modelos de turbulência para altos números de Reynolds.

Desenvolvimento

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(E\,y^+) \tag{10}$$

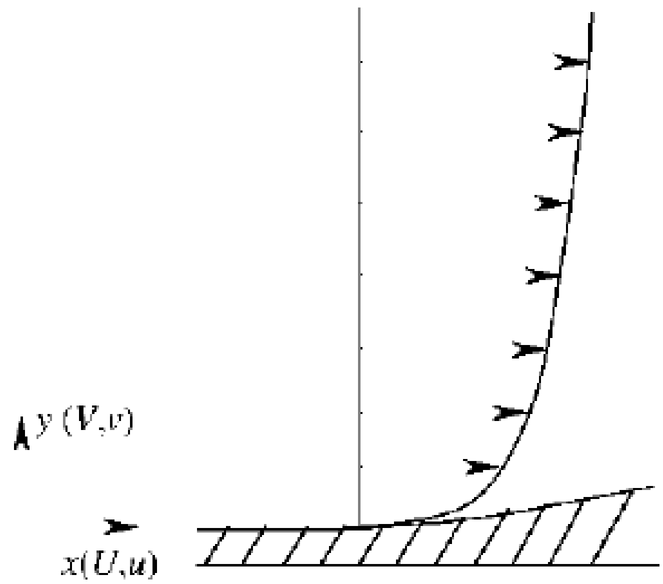
O uso do perfil logarítmico é necessário na prescrição da condição de contorno de paredes sólidas em modelos de turbulência com altos números de Reynolds, pois modelos de turbulencia como $k-\varepsilon$ ou $k-\omega$, não resolvem adequadamente os gradientes de velocidade proximo a parede. Em escoamentos con alta velocidade (alto número de Reynolds), a camada límite é bastante mais fina. Assim, estos modelos requerem uma discretização espacial muito pequena para capturar os efeitos do transporte difusivo molecular, o que resulta computacionalmente muito caro.

O perfil logarítmico fornece uma aproximação adequada para o escoamento na camada límite, garantindo uma transição suave entre a parede e o interior do escoamento.

Além disso, o perfil logarítimico fornece o cálculo certo da condiçao de contorno de tensão cisalhante prescrita muito próximo a superficie onde $y^+ < 11$, que logo é acoplada com o escoamento dominado por $\overline{u_i u_j}$.

Questão 6

Considere um escoamento turbulento incompressível sobre uma superfície côncava como ilustrada abaixo.



A partir da análise do termo de produção para as tensões de Reynolds, demonstre que mesmo uma curvatura suave da superfície pode afetar de forma significativa a tensão cisalhante junto à parede.

Desenvolvimento

Partindo da equaçao do termo de produçao temos que

$$P_{ij} \equiv -\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \tag{11}$$

Calculando para $i = 1, j = 2$, para o analise do efeito em $\overline{uv}$

$$P_{12} \equiv -\overline{u_1 u_k}\frac{\partial U_2}{\partial x_k} - \overline{u_2 u_k}\frac{\partial U_1}{\partial x_k} \tag{12}$$

Abrindo para k

$$P_{12} \equiv -\overline{u_1 u_1}\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \overline{u_2 u_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \overline{u_1 u_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \overline{u_2 u_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \tag{13}$$

Então

$$P_{12} \equiv -\overline{uu}\frac{\partial V}{\partial x} - \overline{vu}\frac{\partial U}{\partial x} - \overline{uv}\frac{\partial V}{\partial y} - \overline{vv}\frac{\partial U}{\partial y} \tag{14}$$

$$P_{12} \equiv -\overline{uu}\frac{\partial V}{\partial x} - \overline{vv}\frac{\partial U}{\partial y} - \left(\overline{vu}\frac{\partial U}{\partial x} - \overline{uv}\frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{15}$$

Os termos dentro dos parênteses são iguais a zero pela equação da continuidade, ficando

$$P_{12} \equiv -\overline{uu}\frac{\partial V}{\partial x} - \overline{vv}\frac{\partial U}{\partial y} \tag{16}$$

Obtem-se que, mesmo quando $\frac{\partial V}{\partial x} \ll \frac{\partial U}{\partial y}$, a magnitude da tensão normal $uu \gg vv$ junto a parede, faz que o primeiro termo tenha mais peso na produçao de $\overline{uv}$.

Questão 7

Rotta (1951) propôs a seguinte forma modelada para o termo de redistribuição de energia em escoamentos onde as taxas de deformação do escoamento são nulas. Explique como esse termo funciona em escoamentos com anisotropia.

$$\phi_{ij,1} = -c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}\right) \tag{17}$$

Desenvolvimento

O termo mostrado (termo rápido) actua na redistribução de energ ia turbulenta. Em regiões de alta anisotropía, perto da parede poe exemplo, as magnitudes de los termos da tensão normal de Reynolds tem valores diferentes [2]

Valores típicos de tensões em escoamentos ($\overline{u_i u_j}/k$)

	$\overline{u_1^2}$	$\overline{u_2^2}$	$\overline{u_3^2}$	$\overline{u_1 u_2}$
Escoamento livre	0,95	0,47	0,55	0,32
Escoamento junto á parede	1,20	0,25	0,55	0,25

Portanto, no exemplo da tabela, como $uu \gg vv \sim ww$, podemos analisar o termo para i=j

$$\phi_{11,1} = -c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_1 u_1} - \frac{2}{3}k\delta_{11}\right) \tag{18}$$

$$\phi_{22,1} = -c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_2 u_2} - \frac{2}{3}k\delta_{22}\right) \tag{19}$$

$$\phi_{33,1} = -c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_3 u_3} - \frac{2}{3}k\delta_{33}\right) \tag{20}$$

Pode-se notar que, olhando os valores da tabela, que $\phi_{11,1} > 0$ e $\phi_{22,1}, \phi_{33,1} < 0$. Porem, $\overline{uu}$ vai diminuir, mesmo que $\overline{vv}$ e $\overline{ww}$ aumentan. Ou seja, o termo de Rotta preve a redistribução da energia turbulenta levando a un escoamento mais isotrópico.

Questão 8

Vimos que a equação de ε é uma das principais fontes de erro nos modelos de turbulencia. No caso do modelo de transporte de $\overline{u_i u_j}$, como podemos identificar se eventuais falhas na previsão de $\overline{u_i u_j}$ provém de erros da equação de ε ou das formas modeladas dos termos de redistribuição e difusão

Desenvolvimento Podem se revisar varios pontos no transporte de $\overline{u_i u_j}$ [2]

- Da questão anterior, o termo de redistribução $\phi_{ij,1}$ tem um efeito significativo no cãlculo de $\overline{u_i u_j}$. Se as propocões de $\overline{u_i u_j}$ não comcordan com a física do problema, a anisotropía não será bem resuelta e por tanto a energía turbulenta será errada. Pode ser validado com seguimento da anisotropía en regiões donde podam ser esperadas, como proximo das paredes.
- O termo de transporte difusivo podem producir oscilaciones não físicas em áreas de altos gradientes. Pode ser pode ser detectado com flutuações anormais de $\overline{u_i u_j}$
- O termo mais relevante e o termo de dissipaçao ε. Da equação (9) pode ser visto que $\nu \sim \varepsilon^{-1}$. Porem, erros no calculo dos valores de $\overline{u_i u_j}$, podem vir de estimaciones erradas da trasnferencia de energía das grandes as pequenas escalas.

Referências

[1] Cesar Deschamps, Modelos de viscosidade turbulenta Cap 4. UFSC Florianopolis, SC, Notas de aula, 2025.

[2] Cesar Deschamps, Modelos dr trasnporte para as tensões de Reynolds. Cap 5. UFSC Florianopolis, SC, Notas de aula, 2025.