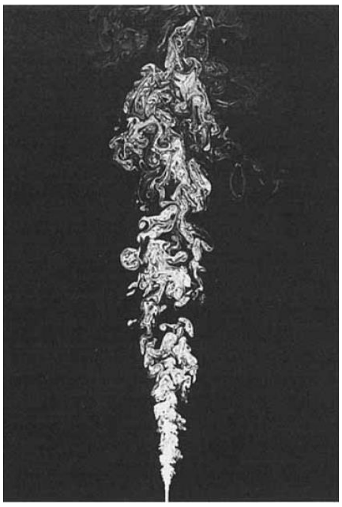
2 Escalas da Turbulência

Cesar J. Deschamps
2025

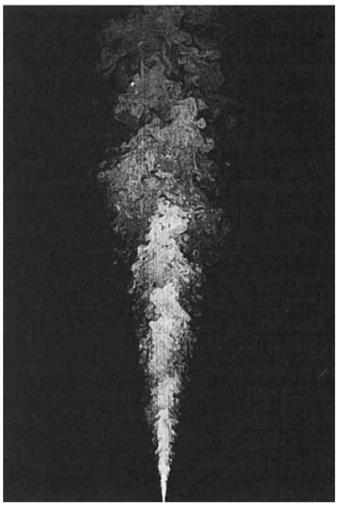
Introdução

- Escoamentos turbulentos possuem várias escalas de movimento, algumas com a dimensão do próprio escoamento e outras muito menores que se tornam cada vez menores à medida que o número de Reynolds aumenta.

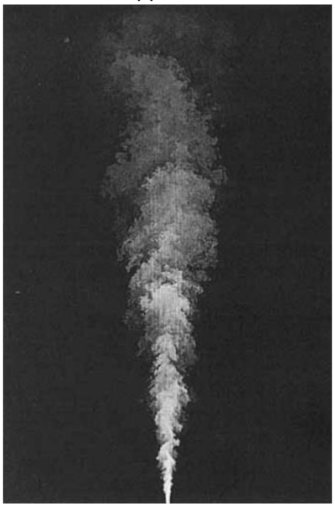
Dahm, W.J.A., Dimotakis, P.E., J. Fluid Mech., v. 217, pp .299-330, 1990.



Re = 1.500



Re = 5.000

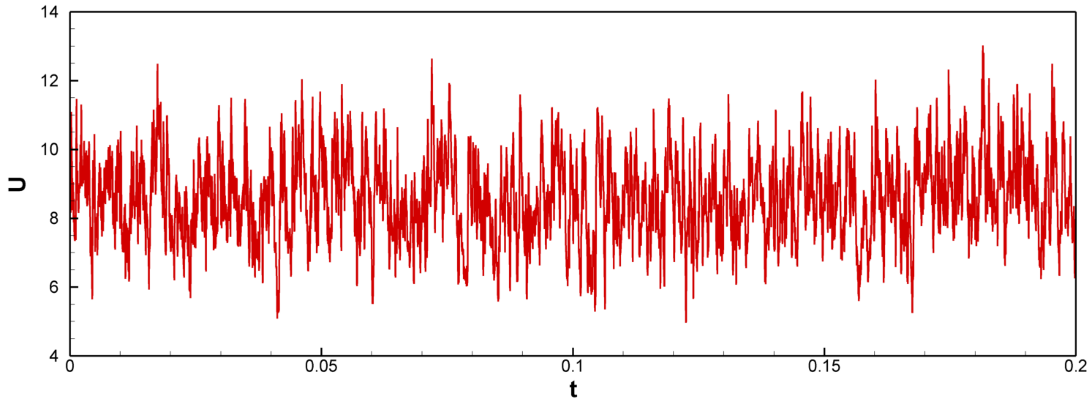


Re = 20.000

Introdução

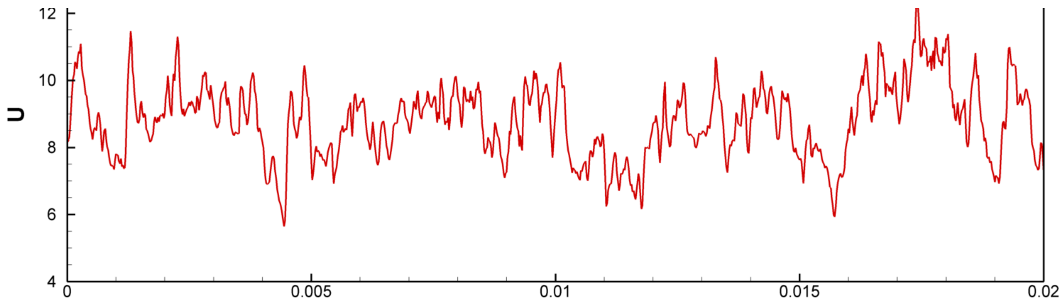
- De fato, o escoamento turbulento contém uma faixa ampla de escalas de comprimento, de velocidade e de tempo.

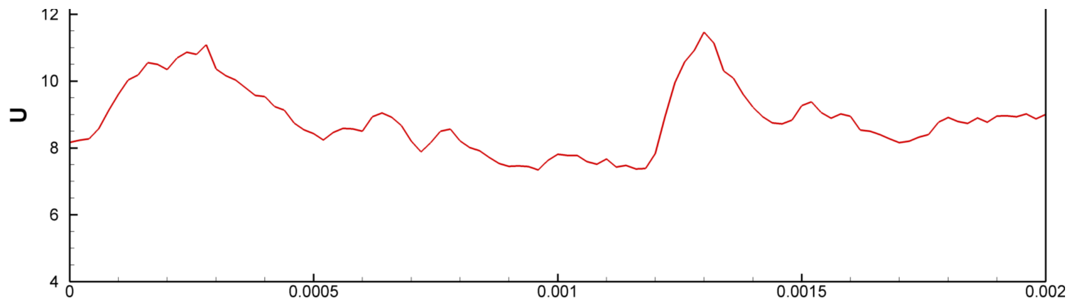
- Conforme indicado na figura abaixo, medições em um ponto fixo de um escoamento turbulento indicam flutuações aleatórias de velocidade.



Introdução

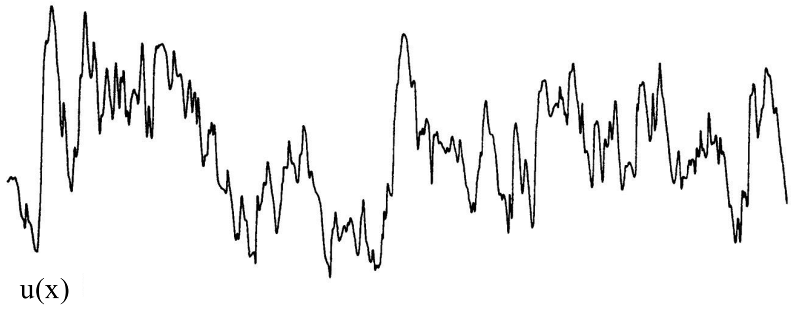
- Através de sucessivas ampliações da figura, variações com escalas de tempo cada vez menores são reveladas, mas eventualmente novas ampliações somente suavizam essas variações temporais.





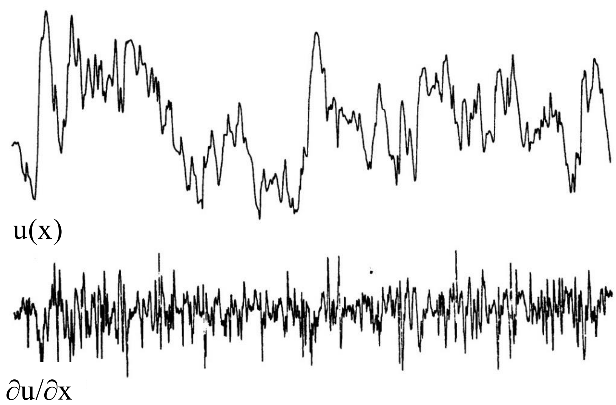
Introdução

- A caracterização das flutuações temporais se aplica também às variações espaciais das propriedades do escoamento.
  - As menores estruturas de movimento que são reveladas pela ampliação da estrutura espacial do campo de velocidade são conhecidas como escalas de Kolmogorov.
  - As escalas de comprimento das maiores e menores estruturas, L e η, são apenas uma ordem de grandeza.



Introdução

- A derivada espacial da velocidade é $\Delta U/\Delta x$ com $\Delta x \rightarrow 0$.
  - Dado o comportamento aleatório do sinal de velocidade, à medida que Δx torna-se menor os valores da derivada variam.
  - Quando Δx torna-se comparável a η, uma derivada bem definida começa então a surgir e tende para um valor definido quando $\Delta x << \eta$.
  - Quando examinada em escalas maiores do que η, a velocidade parece contínua mas não diferenciável.



Introdução

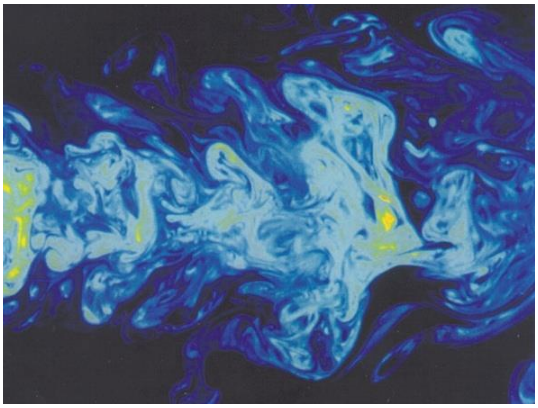
- A energia mecânica do escoamento é dissipada pelo atrito viscoso a uma taxa

$$\Delta = \frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.1)$$

  - Uma vez que as derivadas espaciais de velocidade são determinadas pelas menores escalas de comprimento, as menores estruturas de movimento dominam o processo de dissipação de energia.

O Conceito da Cascata de Energia

- Richardson (1922) postulou o conceito da cascata de energia turbulenta, no qual a turbulência é composta por estruturas de movimento de diferentes tamanhos.
- Estruturas de movimento turbulento (*eddies*) de tamanho ℓ têm uma velocidade característica $u(\ell)$ e escala de tempo $\tau(\ell) = \ell / u(\ell)$.
- Essas estruturas são entendidas como movimentos turbulentos localizados dentro de uma região de tamanho ℓ, sendo no mínimo moderadamente coerente sobre essa região.
- Uma região ocupada por uma grande estrutura pode também conter estruturas menores.



Shraiman, B.I., Siggia, E.D., Nature, v. 405, pp. 639-646, 2000.

O Conceito da Cascata de Energia

- As estruturas de maior tamanho são caracterizadas por uma escala de comprimento comparável à escala do escoamento L e sua velocidade $u_0 = u(L)$ é da ordem de magnitude de $u' = (2/3\ k)^{1/2}$.

- O número de Reynolds dessas estruturas $Re_L = u_0 L/\nu$ é grande (comparável a Re), tal que efeitos diretos da viscosidade são pequenos.

- A fim de entender como a faixa de escalas turbulentas é originada, considere um escoamento com número de Reynolds elevado, contendo somente escalas com O(L) e flutuações de velocidade com O(u').

  - O valor elevado de Re_L implica que o termo viscoso na equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \underbrace{U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\substack{\text{termo} \\ \text{advectivo}}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\substack{\text{termo} \\ \text{viscoso}}} \qquad (2.4)$$

  é pequeno quando comparado ao termo de advecção.

O Conceito da Cascata de Energia

- Na condição de Reynolds elevados, o escoamento se desenvolve como se não houvesse viscosidade:

  - Linhas de vorticidade são carregadas pelo escoamento e são alongadas e dobradas pela advecção;

  - A interação complexa entre as linhas de vórtice e o mecanismo de advecção origina o surgimento de escalas menores.

- De acordo com Richardson, a instabilidade e a quebra de grandes estruturas é o mecanismo de transferência de energia para estruturas menores.

- Essas menores estruturas, por sua vez, sofrem processos de quebra semelhantes e transferem energia para estruturas ainda menores.

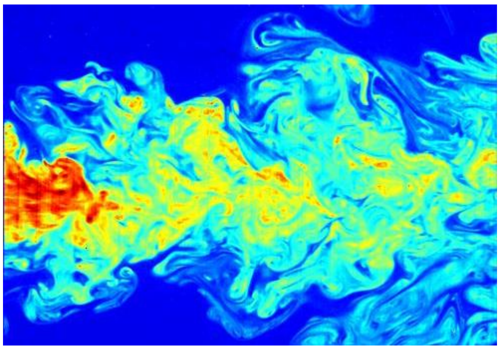
O Conceito da Cascata de Energia

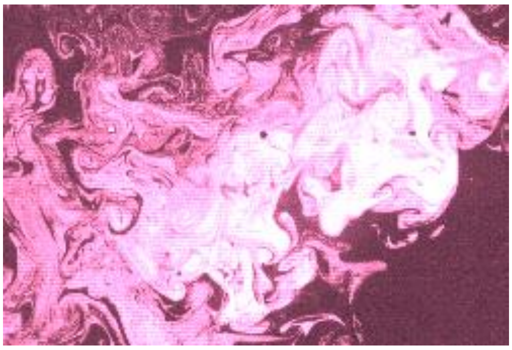
- O surgimento das estruturas menores não é um processo instantâneo, tomando um tempo proporcional a $O(L/u_0)$, uma vez que surgem através da evolução das maiores escalas.
  - As escalas de dimensão menor são criadas por um processo semelhante ao das maiores escalas e originam escalas ainda menores;
  - A viscosidade torna-se mais significativa à medida que as escalas tornam-se menores, devido às derivadas de segunda ordem do termo viscoso em (2.4), como também pela redução do número de Reynolds das pequenas escalas;
  - Assim, a viscosidade atua no sentido de dissipar a energia das menores escalas, impedindo que escalas menores se formem de forma indefinida.

O Conceito da Cascata de Energia

- A cascata de energia continua até que $Re(\ell) = u(\ell)\,\ell/\nu$ é suficientemente pequeno, tal que a estrutura passa a ser estável e a viscosidade a dissipar a sua energia cinética.
- Richardson (1922) sintetizou o conceito da cascata de energia da seguinte forma:

“Big whorls have little whorls,
Which feed on their velocity;
And little whorls have lesser whorls,
And so on to viscosity
(in the molecular sense)”.





O Conceito da Cascata de Energia

- Um aspecto importante do postulado de Richardson é que a dissipação viscosa é o final da sequência do processo de transferência de energia.

- A taxa de dissipação ε é determinada portanto pelo passos do processo, representado pela transferência de energia das maiores estruturas.

- As grandes estruturas possuem energia da ordem de $(u_0)^2$ e escala de tempo $\tau_0 = L/u_0$, tal que a taxa de transferência de energia pode ser aproximada por $(u_0)^2/\ \tau_0 = (u_0)^3/L$.

- Conforme observado experimentalmente em escoamentos livres, o conceito da cascata de energia implica que ε está em balanço com $(u_0)^3/L$ (considerando número de Reynolds elevados).

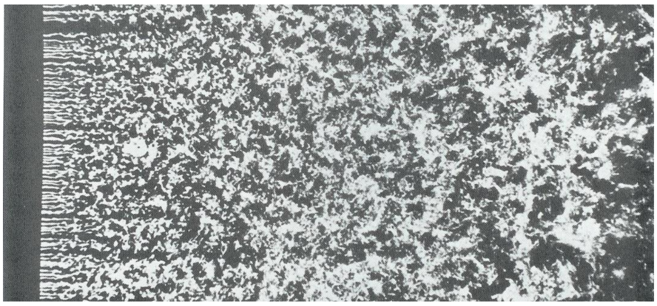
O Conceito da Cascata de Energia

- Na condição de turbulência desenvolvida, o <u>processo de geração de escalas e de transferência de energia é contínuo</u>:
  - Em cada estágio, parte da energia das maiores escalas é usada para gerar escalas menores.
  - As maiores escalas evoluem com uma escala de tempo com $O(L/u_0)$, atuando como uma fonte contínua de energia para as escalas menores que evoluem mais rapidamente (ou seja, possuem menores escalas de tempo).
  - <u>A evolução das maiores escalas é o passo mais lento na cascata e, assim, controla a taxa com que a energia é transferida até a dissipação nas menores escalas</u>.

O Conceito da Cascata de Energia

- A taxa de dissipação se ajusta através do tamanho das menores escalas, de acordo com o suprimento de energia das maiores escalas.

- Se o fornecimento de energia turbulenta é interrompido, as maiores escalas decaem progressivamente em intensidade com uma escala de tempo $O(L/u_0)$, com estruturas menores cada vez mais fracas.



Decaimento da turbulência gerada por uma tela posicionada no escoamento.

As Hipóteses de Kolmogorov

- Várias questões permanecem ainda para ser respondidas:
  - Qual é o tamanho das menores estruturas que são responsáveis pela dissipação de energia?
  - Quando ℓ diminui, as escalas de velocidade e de tempo $u(\ell)$ e $\tau(\ell)$ diminuem, aumentam ou permanecem as mesmas?

- Essas e outras questões são respondidas pela teoria desenvolvida por Kolmogorov (1941), a qual é apresentada na forma de três hipóteses:
  - Hipótese de Isotropia Local
  - Primeira Hipótese de Similaridade
  - Segunda Hipótese de Similaridade

- Como será visto, a teoria demonstra que tanto a escala de velocidade $u(\ell)$ como a escala de tempo $\tau(\ell)$ decrescem com a redução de ℓ.

Hipótese de Isotropia Local de Kolmogorov

- A primeira hipótese é relacionada à isotropia das pequenas escalas de movimento.
  - Geralmente as grandes escalas são anisotrópicas e afetadas pelas condições de contorno do escoamento.
  - Kolmogorov defendeu que as tendências direcionais das grandes escalas são perdidas com a redução de tamanho das estruturas turbulentas.

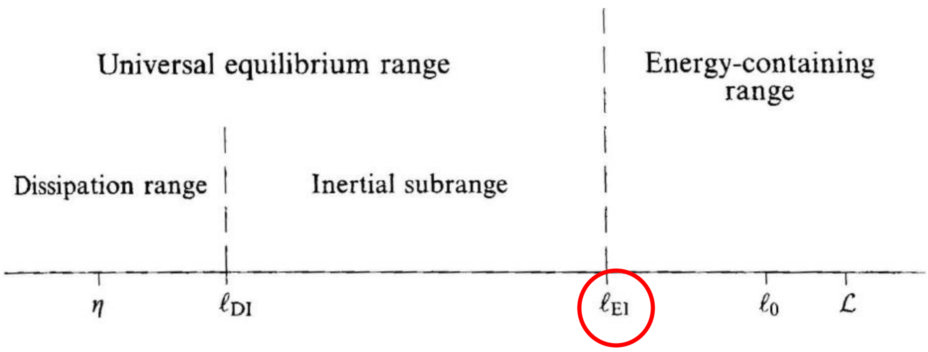
- Desta forma, Kolmogorov propôs a hipótese de isotropia local:

  "Para números de Reynolds suficientemente elevados, os movimentos turbulentos de pequena escala (ℓ << L) são estatiscamente isotrópicos".

  - Deve ser observado que o termo "isotropia local" refere-se à isotropia das pequenas escalas somente.

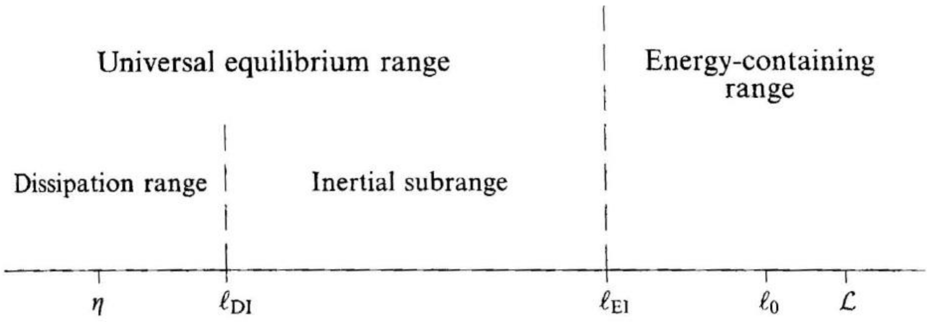
Hipótese de Isotropia Local de Kolmogorov

- Assim, toda informação geométrica das grandes escalas, determinada pelos escoamento médio e pelas condições de contorno, é perdida.
  - Como consequência, as grandezas estatísticas das pequenas escalas de movimento são de certa forma universais para qualquer escoamento turbulento com número de Reynolds elevado.
  - É oportuno introduzir uma escala de comprimento ℓ_{EI} (com $\ell_{EI} \cong 1/6\ \ell_0$) como a demarcação entre as grandes estruturas anisotrópicas ($\ell > \ell_{EI}$) e as pequenas estruturas isotrópicas ($\ell < \ell_{EI}$).



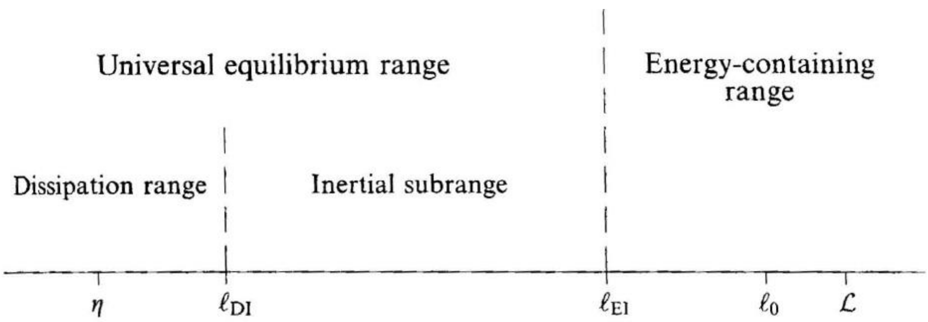
Primeira Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

- De que parâmetros a condição de estatiscamente universal depende?
  - Na cascata de energia ($\ell < \ell_{EI}$), os dois processos dominantes são a transferência de energia para escalas menores e a dissipação viscosa.
  - Assim, uma hipótese plausível é que os parâmetros importantes são a taxa com que as menores escalas recebem energia das grandes escalas (denotada por $\Im_{EI}$) e a viscosidade cinemática ν.



Primeira Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

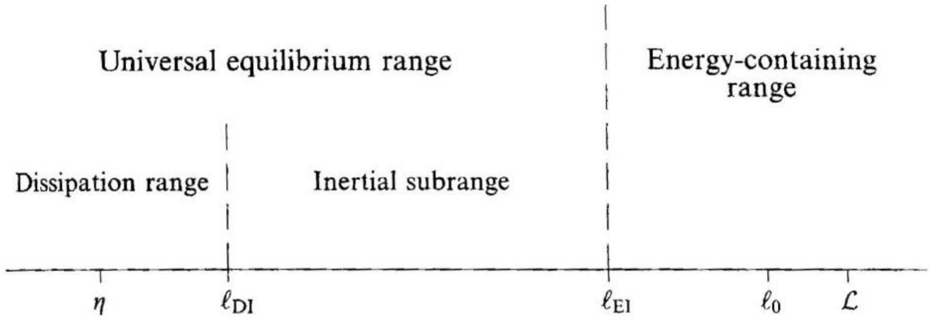
- A taxa de dissipação ε é determinada pela taxa de transferência de energia $\Im_{EI}$, tal que essas duas taxas são praticamente iguais, isto é, $\varepsilon \cong \Im_{EI}$.
- A hipótese de que a condição de estatiscamente universal das pequenas escalas é determinada por ν e pela taxa de transferência de energia das grandes escalas $\Im_{EI}$ pode ser expressa da seguinte forma:
- Primeira hipótese de similaridade de Kolmogorov: Em qualquer escoamento turbulento com número de Reynolds suficientemente elevado, a estatística dos movimentos de pequenas escalas ($\ell < \ell_{EI}$) possui uma forma universal que é unicamente determinada através de ν e ε.



Primeira Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

- A faixa de tamanho ($\ell < \ell_{EI}$) é denominada como faixa de equilíbrio universal.

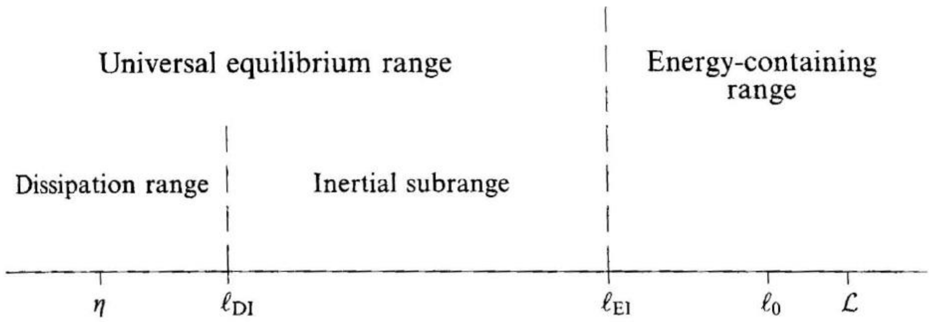
- Nesse intervalo, as escalas de tempo $\ell/u(\ell)$ são pequenas quando comparadas com L/u_0, podendo rapidamente manter um equilíbrio dinâmico com a taxa de transferência de energia das grandes estruturas.



Primeira Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

- Assim, dados os parâmetros ν e ε, as escalas de comprimento, de velocidade e de tempo podem ser determinadas de forma única, as quais são referenciadas como escalas de Kolmogorov:

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \quad ; \quad u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad ; \quad \tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$$



Primeira Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

- Duas quantidades derivadas dessas relações indicam que as escalas de Kolmogorov caracterizam as menores estruturas de movimento.
  - Em primeiro lugar, o número de Reynolds baseado nas escalas de Kolmogorov é igual a unidade, i.e., $Re = u_\eta \eta / \nu = 1$.
  - Isto é consistente com a noção de que a cascata de energia é composta por estruturas que tornam-se menores e menores até o número de Reynolds ser suficientemente pequeno para a dissipação ser efetiva.
  - Em segundo lugar, a taxa de dissipação é dada por:

$$\varepsilon = \nu (u_\eta / \eta)^2 = \nu / \tau_\eta^2$$

mostrando que $u_\eta/\eta = 1/\tau_\eta$ fornece uma caracterização consistente dos gradientes de velocidade das estruturas dissipativas.

Primeira Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

- As razões entre as pequenas e as grandes escalas podem ser determinadas da definição das escalas de Kolmogorov

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \quad ; \quad u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad ; \quad \tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$$

e da hipótese que toda a energia transferida pelas maiores escalas é dissipada pelas menores escalas através da ação do atrito viscoso.

$$\varepsilon \cong (u_0)^3/\ell_0:$$

- Assim,

$$\eta/\ell_0 \sim Re_L^{-3/4} \quad ; \quad u_\eta/u_0 = Re_L^{-1/4} \quad ; \quad \tau_\eta/\tau_0 = Re_L^{-1/2}$$

Escalas Moleculares e Turbulentas

- Escoamentos turbulentos podem ser descritos pela hipótese do contínuo?
  - Da teoria da cinética dos gases

$$\nu \sim c\xi$$

onde ν viscosidade cinemática;
c velocidade do som no meio;
ξ caminho livre médio das moléculas.

  - Assim

$$\frac{\xi}{\eta} \sim \frac{Ma}{Re_L^{1/4}} << 1$$

onde

$$Ma = \frac{u_0}{c}$$

pode ser interpretado como o número de Mach da turbulência.

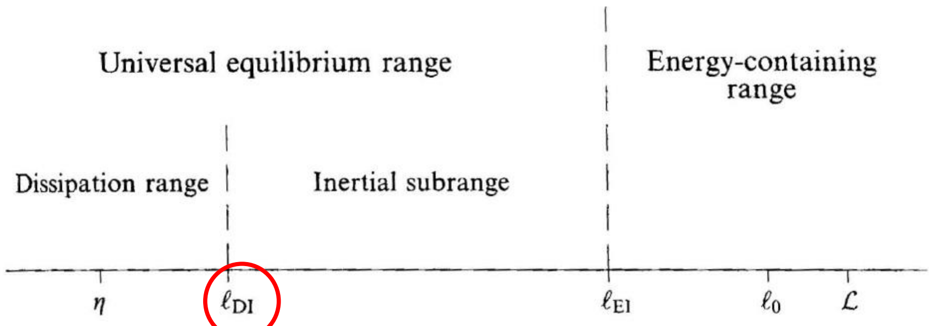
Segunda Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

- Para número de Reynolds elevados, o tamanho η das pequenas escalas é muito menor do que o tamanho L das grandes escalas e a razão η/L decresce com o aumento do número de Reynolds Re.
  - Como consequência, existe uma faixa de escalas ℓ que são muito pequenas quando comparadas com L e muito grandes quando comparadas com η, ou seja, $L >> \ell >> \eta$.
- Considerando que $\ell >> \eta$, supõe-se que seus números de Reynolds sejam elevados e, assim, seus movimentos pouco afetados pela viscosidade.
- Segunda Hipótese de Similaridade de Kolmogorov:

  Em todo escoamento turbulento com número de Reynolds elevado, a estatística dos movimentos de escala ℓ na faixa $L >> \ell >> \eta$ é universal e independente de ν.

Segunda Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

- É conveniente definir uma escala de comprimento $\ell_{DI} = 60\,\eta$ para definir o intervalo da segunda hipótese de similaridade como $\ell_{DI} < \ell < \ell_{EI}$.
  - A escala de comprimento ℓ_{DI} divide a faixa de equilíbrio universal em dois sub-intervalos: a faixa inercial ($\ell_{DI} < \ell < \ell_{EI}$) e a faixa dissipativa ($\ell < \ell_{DI}$).
  - Como o nome sugere, e conforme a segunda hipótese de similaridade, os movimentos na faixa inercial são determinados por efeitos inerciais e efeitos viscosos podem ser desprezados.
  - Pode ser mostrado que a maior parte da energia cinética turbulenta está contida nas estruturas na faixa $\ell_0/6 < \ell < 6\ell_0$, sendo denominada faixa de energia.



Segunda Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

- Para uma determinada escala de comprimento na faixa inercial, ℓ, as correspondentes escalas de velocidade e de tempo podem ser formadas de ℓ e ε:

$$u(\ell) = (\varepsilon\ell)^{1/3} = u_\eta(\ell/\eta)^{1/3} \sim u_0(\ell/\ell_0)^{1/3}$$

$$\tau(\ell) = (\ell^2/\varepsilon)^{1/3} = \tau_\eta(\ell/\eta)^{2/3} \sim \tau_0(\ell/\ell_0)^{2/3}$$

- Como consequência da segunda hipótese de similaridade, na faixa inercial as escalas de velocidade e de tempo decrescem quando ℓ decresce.
- No desenvolvimento da cascata de energia, a quantidade de importância central é a taxa na qual a energia é transferida, $\Im(\ell)$, das estruturas maiores do que ℓ para aquelas menores do que ℓ.
  - Se o processo de transferência de energia é realizado por estruturas fundamentalmente de tamanho ℓ, então a ordem de magnitude de $\Im(\ell)$ pode ser escrita como $u(\ell)^2/\tau(\ell)$.

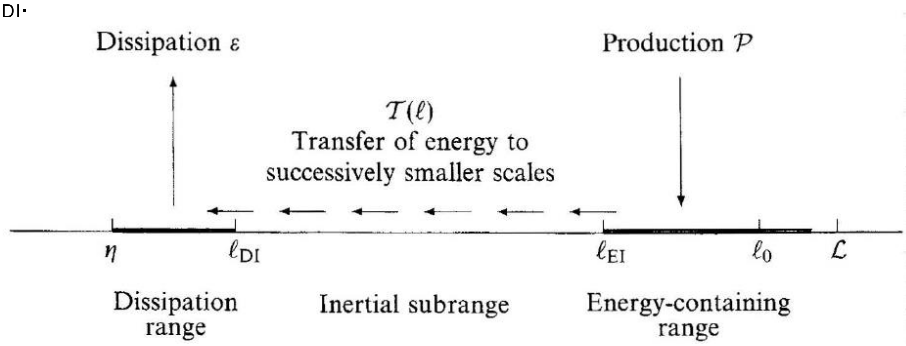
Segunda Hipótese de Similaridade de Kolmogorov

- A identidade

$$u(\ell)^2 / \tau(\ell) = \varepsilon$$

que resulta das equações anteriores é particularmente interessante, pois sugere que $\Im(\ell)$ é independente de ℓ na faixa inercial.

- Assim, $\Im_{EI} \equiv \Im(\ell_{EI}) = \Im(\ell) = \Im_{DI} \equiv \Im(\ell_{DI}) = \varepsilon$ para $\ell_{EI} > \ell > \ell_{DI}$.
  - Isto é, a transferência de energia das grandes escalas, $\Im_{EI}$, define a taxa de transferência de energia na faixa inercial, $\Im(\ell)$, que entra na faixa dissipativa, $\Im_{DI}$.



Conceito de Média de Reynolds

- Reynolds adotou uma descrição estatística da turbulência, decompondo a velocidade instantânea em uma parcela de valor médio e outra de flutuação associada à turbulência:

$$U_i = \overline{U}_i + u_i \qquad (2.2)$$

  - Embora a velocidade média possa também variar com o tempo, suas variações não apresentam as características de variação turbulenta;
  - As variações no escoamento médio podem acontecer ao longo de escalas de tempo e/ou comprimento maiores.
  - Um escoamento turbulento estatisticamente estacionário possui um valor de velocidade média que não varia.

Conceito de Média de Reynolds

- A energia cinética do escoamento, por unidade de massa, pode ser representada por:

$$\frac{1}{2}\overline{U_i U_i} = \underbrace{\overline{U}_i \overline{U}_i / 2}_{\substack{\text{energia do} \\ \text{escoamento} \\ \text{médio}}} + \underbrace{\overline{u_i u_i}/2}_{\substack{\text{energia} \\ \text{turbulenta}}} \qquad (2.3)$$

  - O segundo termo em (2.3) é a média da energia cinética turbulenta, denotado usualmente por k (= $\overline{u_i u_i}/2$), e é uma medida importante da intensidade turbulenta;
  - Grandezas relacionadas à energia cinética turbulenta são representadas por

$$\overline{q^2} = \overline{u_i u_i}$$

ou através de u' , definida como

$$u'^2 = \overline{q^2}/3 \qquad \text{tal que} \qquad u'^2 = (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2})/3$$

  - A energia cinética turbulenta é praticamente determinada pela energia das maiores escalas turbulentas.

Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- A turbulência homogênea é uma das classes mais simples de escoamento turbulento, na qual as propriedades estatísticas não variam com a posição.
  - Embora difícil de ser encontrada na prática, a condição de homogeneidade pode ser gerada pela passagem de um escoamento através de uma tela.
  - A justificativa do estudo da turbulência homogênea é a sua simplicidade e o seu auxilio no entendimento de escoamentos mais complexos.

- Considere um campo de turbulência homogênea, **u**(**x**, t), e defina as correlações de velocidade como

$$R_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t) = \overline{u_i(\mathbf{x},t)u_j(\mathbf{x}',t)} \qquad (2.5)$$

  - Pela condição de homogeneidade, R_{ij} não deveria mudar se as posições **x** e **x**' fossem alteradas pelo mesmo vetor deslocamento, implicando que R_{ij} é somente uma função da separação **r** = **x** – **x**' :

$$\overline{u_i(\mathbf{x},t)u_j(\mathbf{x}',t)} = R_{ij}(\mathbf{r},t) \qquad (2.6)$$

Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- Os valores de flutuações de velocidade geralmente se descorrelacionam à medida que a distância entre os pontos em questão aumenta, ou seja:

$$R_{ij}(\mathbf{r},t) = \overline{u_i(\mathbf{x},t)u_j(\mathbf{x}',t)} \rightarrow 0 \qquad (2.9)$$

quando $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$.

- A ordem de magnitude de $|\mathbf{r}|$ ao longo do qual R_{ij} decai para zero é conhecida como escala de correlação e representa as maiores escalas de comprimento da turbulência.

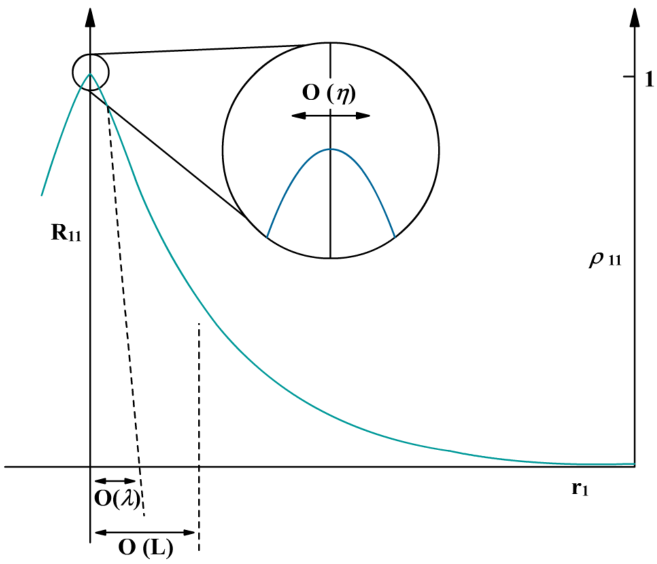
- A matriz da correlação de um ponto em **r** = 0

$$R_{ij}(0,t) = \overline{u_i u_j} \qquad (2.10)$$

é simétrica.

Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- A figura abaixo ilustra a variação de uma das diagonais de R_{ij} e as ordens de magnitude de diversas escalas, incluindo a correlação de comprimento L.
  - A variação de R_{11} está representada em relação à coordenada r_1, ou seja R_{11} (r_1, r_2= r_3=0).



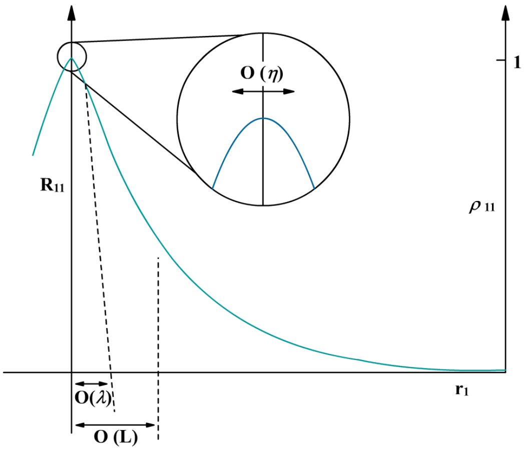
Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- As correlações de velocidade podem ser expressas de forma adimensional através do coeficiente de correlação

$$\rho_{ij}(\mathbf{r},t)=\frac{R_{ij}(\mathbf{r},t)}{u'_i\,u'_j} \qquad (2.11)$$

com u'_1 e u'_2 sendo os desvios padrões nas direções x_1 e x_2, respectivamente.

  - Os elementos diagonais de ρ_{ij} assumem o valor limite igual a 1 em **r** =0, representando uma correlação completa.

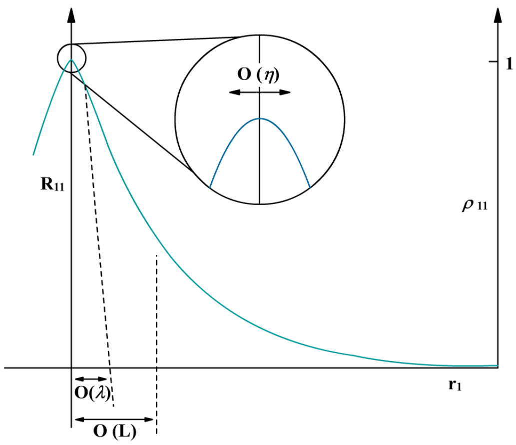


Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- Uma vez que ρ_{ij} são adimensionais, as suas integrações em relação a qualquer uma das direções, por exemplo r_1 assume a dimensão de comprimento, de tal forma que:

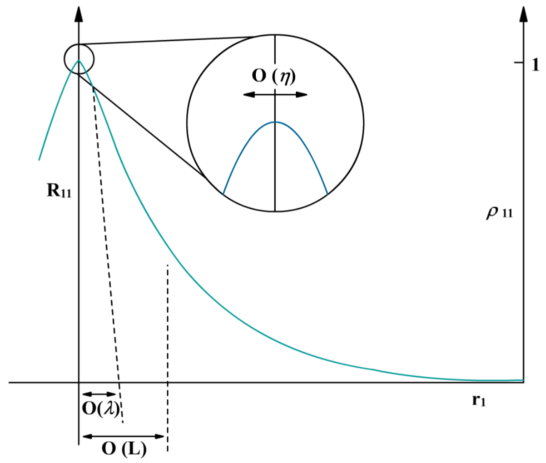
$$L_{ij}^{[1]}=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{ij}(r_1,r_2=r_3=0)\,dr_1 \qquad (2.12)$$

  - <u>As quantidades $L_{ij}^{[k]}$ fornecem uma medida quantitativa da correlação escala de comprimento e, suas avaliações por meio de integrais, explica o fato de serem referenciadas como “escalas integrais”</u>.



Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- Verifica-se que a variação de ρ_{ij} em uma região de |**r**| pequenos é um tanto distinta, como evidenciado no detalhe ampliado da figura abaixo.
  - A derivada de ρ_{11} é zero em **r** =0, decorrente de $\rho_{11}(\mathbf{r}) = \rho_{11}(-\mathbf{r})$.
  - A função decresce de ρ_{11} = 1 em |**r**| = 0 e alcança um ponto de gradiente máximo.
  - Este comportamento de ρ_{11} acontece para |**r**| da ordem de magnitude das escalas de Kolmogorov, η.



Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- O valor médio do quadrado da diferença entre as velocidades de dois pontos é dada:

$$\overline{[u_1(\mathbf{x},t) - u_1(\mathbf{x}',t)]^2} = 2[u'^2_1 - R_{11}(\mathbf{r},t)] = 2u'^2_1[1 - \rho_{11}(\mathbf{r},t)] \tag{2.13}$$

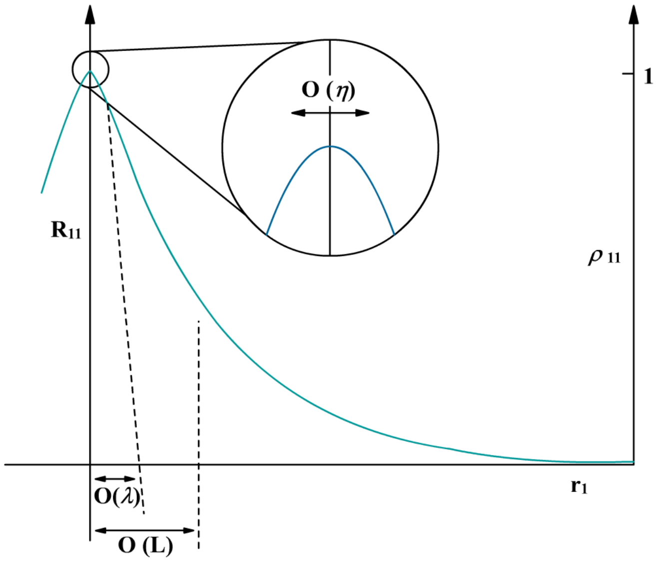
cuja soma das componentes resulta

$$(\Delta u)^2 = \overline{[\mathbf{u}(\mathbf{x},t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}',t)]^2} = 2\sum_{i=1}^{3} u'^2_i [1 - \rho_{ii}(\mathbf{r},t)] \tag{2.14}$$

  - Naturalmente, em **r** = 0, $\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33} = 1$ e $\Delta u = 0$.
  - Por outro lado, quando |**r**| = O(L), o coeficiente de correlação torna-se pequeno e, assim, Δu = O(u'). Quando |**r**| $\rightarrow \infty$, $\rho_{ii} \rightarrow 0$ e $\Delta u \rightarrow 6^{1/2}u'$.
  - Ou seja, a diferença de velocidade característica entre dois pontos separados por uma distância da O(L) é comparável à velocidade característica da turbulência u'.

Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- Para valores $r = |r| << \eta$, as funções correlação podem ser expandidas através de uma série de Taylor em torno de r = 0, resultando na curva tracejada da figura abaixo.
  - Para valores tão pequenos de r, $(1-\rho_{ii})$ é proporcional a r^2 e assim, de (2.14), Δu é proporcional a r.
  - <u>A dependência linear de Δu em relação a r é uma consequência do fato de que o campo de velocidade torna-se suave quando visto em escalas com $O(\eta)$</u>.



Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- Para a turbulência isotrópica as propriedades estatísticas de u_i são independentes da direção e da reflexão em relação a qualquer plano.
  - Isto permite que todas as componentes de correlação, $R_{ij}(\mathbf{r})$, sejam escritas em termos de somente duas funções escalares de $r = |\mathbf{r}|$.
  - Para o momento, no entanto, simplesmente observa-se que as correlações de um único ponto têm a forma:

$$\overline{u_i u_j} = u'^2 \delta_{ij} \qquad (2.27)$$

  quando a turbulência é isotrópica.
  - Isto é uma consequência de um resultado geral matemático para um tensor cujas componentes não são alteradas por uma rotação arbitrária de eixos.

Correlações de Velocidade e Escalas Espaciais

- Embora a condição de homogeneidade tenha sido usada na apresentação das propriedades de correlação, muitos dos conceitos explorados anteriormente não dependem dessa condição.
  - Por exemplo, a escala de correlação pode ser definida como a separação requerida para a descorrelação significativa da velocidade turbulenta.
  - Além disto, observa-se que as propriedades da turbulência são mais semelhantes à situação homogênea quanto menor for a escala considerada.
  - Ou seja, mesmo que o comportamento das grandes escalas não seja homogêneo, os resultados para as pequenas escalas estão em linha com a da condição de homogeneidade.
  - É como se o processo de geração das pequenas escalas esquecesse as não homogeneidades presentes nas grandes escalas, com exceção das não uniformidades associadas ao suprimento de energia.

Correlações Temporais e Escalas de Tempo

- Correlações de velocidade podem ser definidas em um ponto espacial fixo e com diferentes separações temporais

$$R_{ij}^{(t)}(\mathbf{x},t,t') = \overline{u_i(\mathbf{x},t)u_j(\mathbf{x},t')} \qquad (2.28)$$

  - A descorrelação acontece quando $|t - t'| \rightarrow \infty$, com a turbulência se comportando como se fosse referente a duas realizações independentes ou a dois pontos espaciais distantes.

- Escoamentos estatisticamente estacionários são analogias temporais da turbulência homogênea, uma vez que são funções apenas do atraso $\tau = t - t'$:

$$R_{ij}^{(t)}(\mathbf{x},\tau) = \overline{u_i(\mathbf{x},t)u_j(\mathbf{x},t')} \qquad (2.29)$$

e, portanto,

$$R_{ij}^{(t)}(\mathbf{x},-\tau) = \overline{u_i(\mathbf{x},t')u_j(\mathbf{x},t)} = R_{ji}^{(t)}(\mathbf{x},\tau) \qquad (2.30)$$

Correlações Temporais e Escalas de Tempo

- As correlações com atraso nulo (t = t’) correspondem a momentos de velocidade de um mesmo ponto

$$R_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \tau = 0) = \overline{u_i u_j} \qquad (2.31)$$

- Coeficientes de correlação podem ser definidos como

$$\rho_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{R_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \tau)}{u'_i \, u'_j} \qquad (2.32)$$

- O correspondente tempo de correlação integral pode ser expresso da seguinte forma:

$$\Theta_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \tau) \, d\tau \qquad (2.29)$$

o qual geralmente varia com a posição no escoamento.

Correlações Temporais e Escalas de Tempo

- Essas definições de correlações e escalas de tempo são conhecidas como *Eulerianas* e, em muitos casos, representam estruturas turbulentas sendo carregadas através de um ponto em questão, ao invés da evolução da própria turbulência.
  - O escoamento a jusante de uma grelha se desenvolve aproximadamente como um escoamento uniforme com flutuação de velocidade u’, pequena comparada à velocidade média U.
  - As grandes escalas da turbulência são caracterizadas por u’ e pela escala de comprimento L, fornecendo uma escala de tempo L/u’.

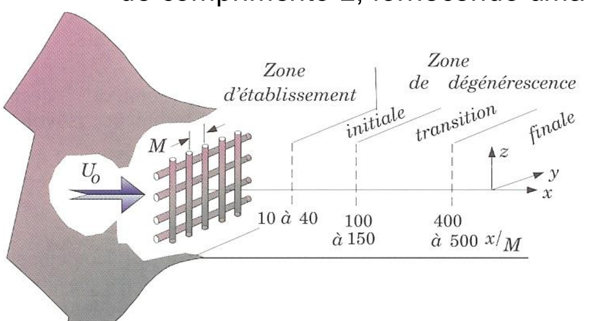
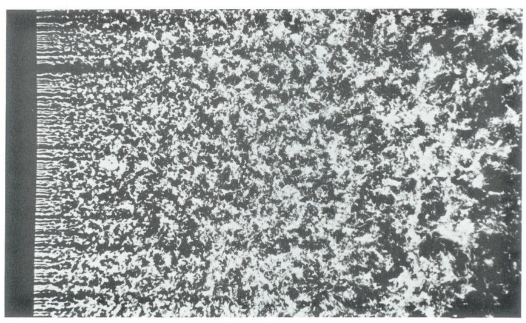


Fig. 1: Configuration expérimentale de turbulence de grille.



Correlações Temporais e Escalas de Tempo

- As escalas de comprimento L são carregadas através de um ponto fixo de acordo com uma escala de tempo L/U, geralmente muito menor do que a escala de tempo das grandes escalas, uma vez que u' << U.
  - Dessa forma, pode-se imaginar que a turbulência é simplesmente carregada através do ponto sem ter tempo para o registro local de sua evolução.
  - Esta ideia é frequentemente referenciada como hipótese de Taylor e a turbulência é dita estar "congelada".

Correlações Temporais e Escalas de Tempo

- Assim, um sensor em um ponto fixo do escoamento registra o campo de velocidade que é transportado com velocidade U através de sua posição;
  - Correlações temporais para um atraso τ são então diretamente relacionadas a correlações espaciais com separação $U\tau$ na direção do escoamento.
  - <u>Em particular, o tempo de correlação é relacionado com escala de correlação espacial através de $\Theta = L/U$</u>.