Convecção

Lista de exercicios 4

Cristian Herledy Lopez Lara

Exercício 1

Determine o número de Nusselt para uma esfera isotérmica (Ts) de diâmetro D envolta por um fluido quiescente mantido a $Tf(Ts < Tf)$ no limite onde o número de Rayleigh baseado em D tende a zero.

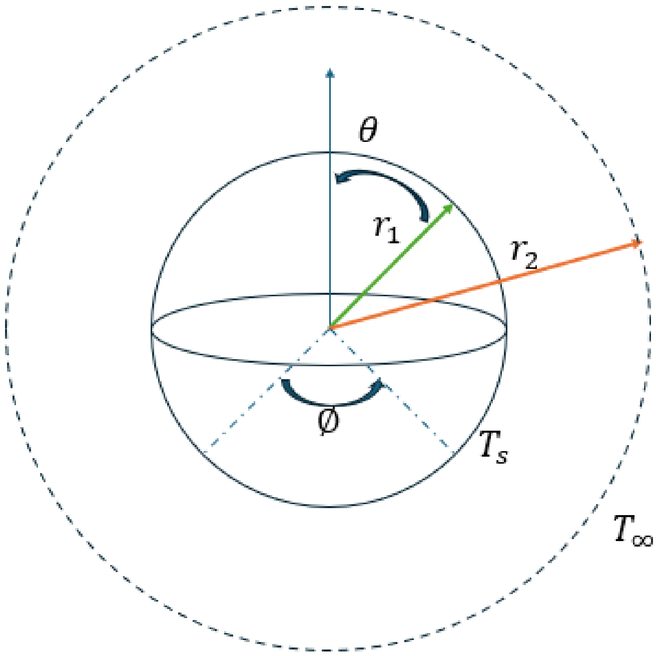

Figura 1: Diagrama esfera envolta por fluido quiecente com coordenadas esfericas

Desenvolvimento

Partindo da análise do problema com a equação de conservação de energia

$$\rho c_P \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (1)$$

Considerando que há simetria da esfera nas direções ϕ, θ e como o fluido está quiescente

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (2)$$

Integrando para encontrar T como uma função do r

$$\int \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)dr = 0 \tag{3}$$

$$\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + C_1 = 0 \tag{4}$$

Integrando novamente

$$T = -\frac{1}{r}C_1 + C_2 \tag{5}$$

As condiçoes de contorno são

$$@r = r_1, T = Ts \ ; \ @r = r2, T = T_{inf} \tag{6}$$

$$C_1 = (T_{inf} - Ts)r_1 \ \therefore \ C_2 = T_{inf} \tag{7}$$

Usando a lei de Fourier e a equação de transferência de calor por convecção para equilibrar a troca de energia entre a esfera e o fluido

$$q'' = h\Delta T = -k\frac{dT}{dr}|_{r=r1} \tag{8}$$

Calculando a derivada

$$\frac{dT}{dr}|_{r=r1} = (Ts - T_{inf})\frac{r_1}{r^2}|_{r=r2} \tag{9}$$

Sustituindo em (8)

$$h\Delta T = k\frac{(Ts - T_{inf})}{r_1} \tag{10}$$

Da definição para o numero de Nusselt

$$Nu_D = \frac{hD}{k} \ \rightarrow \ h = \frac{Nu_D K}{D} \tag{11}$$

Em (10) fica então ($D = 2r_1$)

$$\frac{q''D}{\Delta Tk} = k\frac{(Ts - T_{inf})}{r_1}\frac{2r_1}{k(Ts - T_{inf})} \tag{12}$$

$$Nu_D = 2 \tag{13}$$

Observa-se que o número de Nusselt não depende de nenhuma variável do fluxo. Portanto, devido à velocidade zero do fluido, a transferência de calor da esfera para o fluido é um processo dominado pela condução, onde o calor viaja por convecção da superfície da esfera T_s até atingir T_{inf}.

Exercício 4.17

Cálculo do tempo de resfriamento de uma garrafa em um refrigerador na posição vertical e horizontal por análise de escala

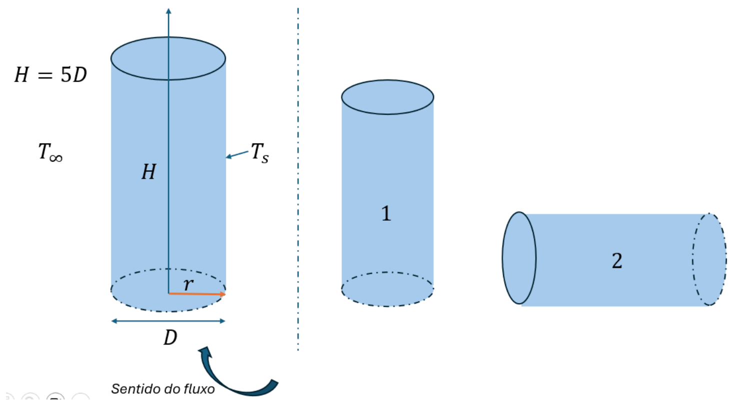

Figura 2: Diagrama garrafa em coordenadas cilindricas, e posiçoes vertical e horizontal

Desenvolvimento

Primeiro, as equações constitutivas para o problema são estabelecidas. Ecuação de continuidad

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{vr}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

Ecuação de momento em Z

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial vz}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z} \right] - \rho g \tag{15}$$

Ecuação de energia

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial vz}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z} \right] \tag{16}$$

Como a espessura da camada limite térmica é consideravelmente menor que o comprimento característico do problema $\delta_t \ll H$,

$$\frac{\partial}{\partial r} \gg \frac{\partial}{\partial z} \tag{17}$$

Considerando que o efeito da pressão é proporcional ao gradiente de pressão hidrostática, que apenas os termos que dependem da direção radial são levados em consideração no operador ∇ de difusão e que fazendo uso da definição do coeficiente de expansão volumétrica

Ecuação de momento em Z

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = +\nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial vz}{\partial r} \right) \right] + g\beta(T - T_\infty) \tag{18}$$

Ecuação de energia

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial vz}{\partial r} \right) \right] \tag{19}$$

Com uma análise de escala verifica-se que $(T - T_\infty \sim \Delta T)$, $z \sim H$, $r \sim \delta_T$, $v_r \sim U$

$$\frac{g\beta \Delta T \delta_t^2}{\nu} \sim \frac{H}{\delta_t^2} \tag{20}$$

$$\delta_t^4 \sim \left(\frac{\alpha H \nu}{g\beta \Delta T} \right)^{\frac{1}{4}} \tag{21}$$

Como $Nu \sim \frac{H}{\delta_t}$

$$Nu \sim \left(\frac{g\beta \Delta T H^3 \nu}{\nu \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \tag{22}$$

Onde para fluidos com Prandtl maior que a unidade $Nu \sim Ra^{\frac{1}{4}}$.

Agora, o intercambio do calor entre o ar e a garrafa obedece ao equilíbrio da primeira lei da termodinâmica onde

$$\dot{m} C_p \frac{dT}{dt} = hA(T_s - T_{inf}) \tag{23}$$

Onde h é o coeficiente de trasnferencia de calor, $A(A = 2\pi r H + 2\pi r^2)$ é a área superficial do cilindoO objetivo é encontrar uma relação entre o tempo de resfriamento e a troca de calor convectiva (lado direito da equação) para as posições 1 e 2. Considerando que o calor removido em ambos os arranjos é o mesmo

$$Q_1 = Q_2 \tag{24}$$

$$h_1 A_1 (T_s - T_{inf}) t_1 = h_2 A_2 (T_s - T_{inf}) t_2 \tag{25}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{h_2 A_2}{h_1 A_1} \tag{26}$$

Para análise de escala, a área do cilindro na posição vertical e horizontal é proporcional a H

$$A \sim H \quad ; \quad \frac{H_1}{H_2} = 5 \tag{27}$$

Pela definição do número de Nusselt

$$Nu_H = \left(\frac{hH}{k}\right) \sim Ra^{\frac{1}{4}} \tag{28}$$

$$h \sim \frac{Ra^{\frac{1}{4}}k}{H} \tag{29}$$

E pela definição do número de Nusselt

$$Ra \sim \frac{g\beta\Delta T H^3}{\alpha\nu} \quad \rightarrow \quad Ra \sim H \tag{30}$$

A equaçao 13 fica então

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{Ra_2^{\frac{1}{4}}k}{H}}{\frac{Ra_1^{\frac{1}{4}}k}{H}} \tag{31}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{H_2^{\frac{1}{4}}}{H}}{\frac{H_1^{\frac{1}{4}}}{H}} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{32}$$

Sustituindo com a equação 14

$$\frac{t_1}{t_2} = (5)^{\frac{1}{4}} = 1.5 \tag{33}$$

A garrafa na posição horizontal diminuirá sua temperatura 50 % mais rápido do que na posição horizontal.

Referências

[1] Adrian Bejan, Convection Heat Transfer. Durham, North Carolina, 3rd Edition, 2004.

[2] K. Jafarpur, et al, Laminar free convective heat transfer from isothermal spheres: a new analytical method. University of Waterloo, Canada. 1991.