6 Escoamentos Turbulentos com Transferência de Calor

Cesar J. Deschamps
2025

Equações de Transporte

- As equações da conservação da Q.M e da conservação de uma escalar Θ (por exemplo, temperatura) podem ser escritas para quantidades médias:

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j}) + F_i$$

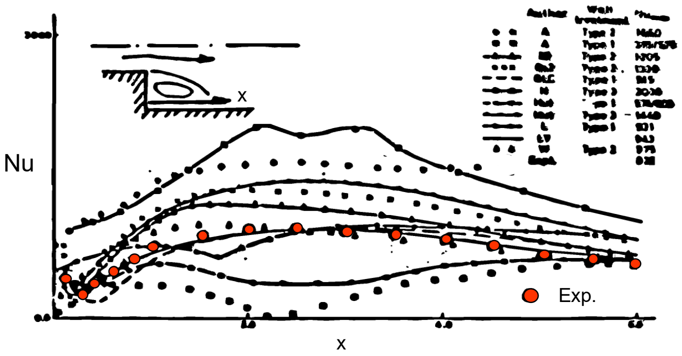
$$\frac{D\Theta}{Dt} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_j \theta}) + S_\Theta$$

- Para um escoamento turbulento estatisticamente estacionário de baixa velocidade, na ausência de termos fontes, a equação para Θ fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial U_j \Theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta}\right]$$

- Em princípio, a equação para Θ tem a mesma forma das equações da Q.M. mas alguns cuidados especiais são necessários na prescrição das condições de contorno.

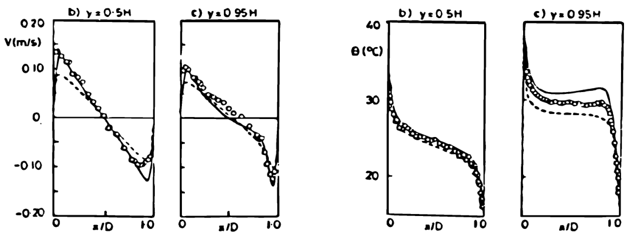
Tratamento de Paredes Sólidas



- Analisando os resultados acima, pode-se perceber que as condições de contorno afetam em muito os resultados numéricos.

Tratamento de Paredes Sólidas

- Para entender a origem desse problema, considere a situação de uma cavidade com as faces verticais mantidas em temperaturas diferentes.

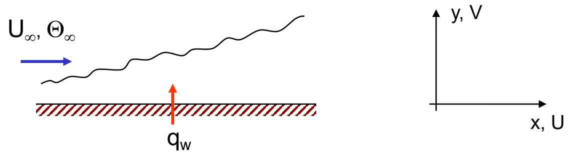


Medições de Ince (1984); Simulação de Ince e Launder (1989).

- Observa-se que os gradientes de velocidade média na parte central da cavidade são significativos;
- Por outro lado, gradientes elevados de temperatura ocorrem praticamente junto às paredes;
- De fato, a transferência de calor na região central da cavidade tem importância secundária;
- Assim, o detalhamento do processo de transferência de calor junto à superfície (2 a 5% da extensão do domínio de solução) é de extrema importância.

Tratamento de Paredes Sólidas

- Pelos motivos colocados, deve-se de alguma forma incluir na modelação os efeitos viscosos e suas interações com a turbulência.
- Considere o escoamento sobre uma placa plana com transferência de calor

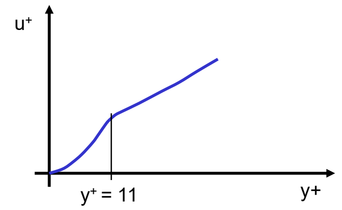


Tratamento de Paredes Sólidas

- Para a transferência de Q.M. adotam-se as seguintes variáveis adimensionais para representar o escoamento junto à parede

$$y^+ = \frac{u^* y}{\nu} \quad ; \quad u^+ = \frac{U}{u^*} \quad \text{, onde} \quad u^* = \left(\frac{\tau_\omega}{\rho}\right)^{1/2}$$

- Com estas variáveis obtém-se a “Lei-da-Parede”

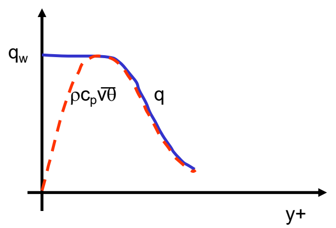


$u^+ = y^+$; subcamada viscosa

$u^+ = 1/\kappa \ln (Ey^+)$; região turbulenta

Tratamento de Paredes Sólidas

- Para a transferência de calor temos algo semelhante



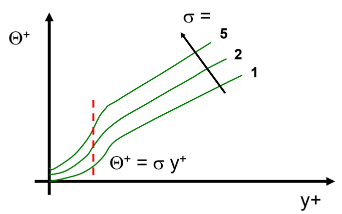
- Números de Prandtl

$$\sigma = \frac{\mu c_p}{\Gamma} \quad \text{Laminar}$$

$$\sigma_t = \frac{\mu_t c_p}{\Gamma_t} \quad \text{Turbulento}$$

Tratamento de Paredes Sólidas

- Assumindo que σ_t é praticamente constante, pode-se perceber que a Lei-da-Parede varia com σ.



$U^+ = f(y^+)$

Analogia de Reynolds

$$\Theta^+ = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \ln \tilde{E} y^+$$

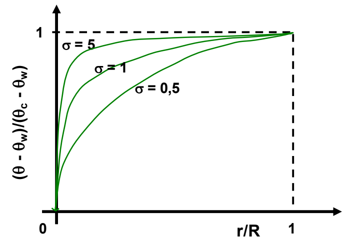
onde

$$\Theta^+ = \frac{\rho c_p u^* (\theta - \theta_w)}{q_w}$$

- Observe que $\tilde{E}$ e $\tilde{\kappa}$ são análogos a E e κ, mas no entanto $\tilde{E}$ depende do número de Prandtl do fluido, σ.

Tratamento de Paredes Sólidas

- Observa-se que a subcamada térmica viscosa varia com σ.
  - Óleos $\sigma \rightarrow O(10^2)$; Ar $\sigma \rightarrow O(1)$; Metais líquidos $\sigma \rightarrow O(10^{-2})$
- Considere o escoamento em uma canalização com Re = 30.000 e o efeito da variação de σ sobre Θ.



Modelação do Fluxo de Calor Turbulento

- A modelação do fluxo de calor associado à turbulência é realizada pela analogia entre os processos de transferência de calor e de Q.M.
- Para transferência de Q.M., a formulação generalizada de Kolmogorov fornece

$$-\rho\overline{u_i u_j} = \mu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

- Para a transferência de calor tem-se

$$-\rho\overline{u_j \theta} = \frac{\mu_t}{\sigma_t}\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}$$

- Desta forma, a equação de transporte para Θ fica

$$\frac{\partial U_j \Theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\right]$$

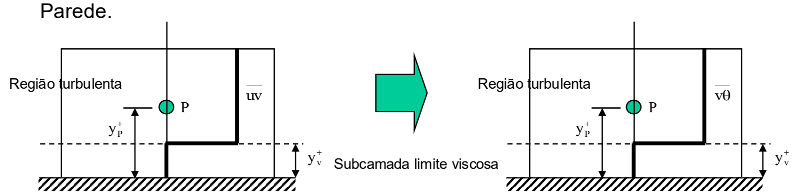
- Assim, usando essa metodologia, necessita-se conhecer somente σ e σ_t para determinar Θ.

Modelação do Fluxo de Calor Turbulento

- Basicamente, existem duas metodologias para o cálculo de escoamentos envolvendo transferência de calor junto a paredes sólidas:
  - <u>Funções-parede</u>
    - Custo da simulação numérica é menor;
    - Erros consideráveis para situações afastadas das condições de equilíbrio local, ou se o número de Prandtl for muito diferente de 1;
    - Necessidade de relações semi-empíricas para as subcamadas térmicas.
  - <u>Modelos de turbulência para baixos números de Reynolds</u>
    - Malhas refinadas junto às paredes e, portanto, maior custo computacional;
    - Fornecem uma descrição detalhada da região junto à parede.

Funções-Parede

- A região junto a uma parede sólida é representada de acordo com a Lei-da-Parede.



- A distribuição de Θ pode ser representada através de uma simples Lei-da-Parede

$$\Theta^+ = \frac{\rho c_p(\Theta_w - \Theta)u^*}{q_w} = \frac{1}{\tilde{\kappa}}\ln \tilde{E}\, y^+ \quad ; \quad y_p^+ > y_{v,\theta}^+$$

- Duas situações podem ser consideradas

$$y_p^+, q_w, \Theta_p \text{ e } \sigma \quad \text{conhecidos} \quad \rightarrow \quad \Theta_w$$
$$y_p^+, \Theta_w, \Theta_p \text{ e } \sigma \quad \text{conhecidos} \quad \rightarrow \quad q_w$$

Funções-Parede

- Usando

$$U^{+} = \frac{1}{\kappa} \ln E y^{+}$$

pode-se mostrar que

$$\Theta^{+} = \frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} \left[U^{+} + \frac{1}{\kappa} \ln(\tilde{E} / E) \right]$$

ou

$$\Theta^{+} = \sigma_t \left[U^{+} + P(\sigma / \sigma_t) \right] \quad \text{, onde} \quad \frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} = \sigma_t$$

Funções-Parede

- P (σ, σ_t) é a “função de Jayatallike”.
  - Uma proposta de para a função P foi apresentada por Spalding (1967):

$$P(\sigma, \sigma_t) = 9{,}24 \left[(\sigma / \sigma_t)^{3/4} - (\sigma / \sigma_t)^{1/4} \right]$$

  - Outra proposta foi derivada por Jayatallike (1969) a partir de dados experimentais

$$P(\sigma, \sigma_t) = 9{,}24 \left[(\sigma / \sigma_t)^{3/4} - 1 \right] \left[1 + 0{,}28 \exp(-0{,}0076 / \sigma_t) \right]$$

  - A analogia de Reynolds se aplica para $\sigma_t = 1$ e P (σ, σ_t) = 0.
  - A função P (σ, σ_t) fornece uma medida das diferentes resistências aos transportes de calor e quantidade de movimento.
  - Quando σ é menor do que σ_t, P é negativo.

Funções-Parede

- Outra proposta para Θ^{+} foi apresentada por Kader (1981):

$$\Theta^{+} = y^{+} e^{-\Gamma} \sigma + \left[2{,}12 \ln(1 + y^{+}) + \beta(\sigma) \right] e^{-1/\Gamma}$$

em que

$$\beta(\sigma) = (3{,}85 \sigma^{1/3} - 1{,}3)^2 + 2{,}12 \ln(\sigma)$$

$$\Gamma = \frac{0{,}01 (\sigma y^{+})^2}{1 + 5 \sigma y^{+}}$$

- A relação acima é válida na região turbulenta da parede (y+ > 11,1).

Funções-Parede

- A primeira relação para Θ^{+} fornece Nu = 0 quando C_f = 0 (por exemplo, pontos de separação ou reatamento).
  - Uma representação um pouco melhor para Θ^{+} pode ser obtida pela substituição

$$\tau_{\omega} / \rho \rightarrow C_{\mu}^{1/2} k$$

    na Lei da Parede.
  - Assim,

$$\Theta^{+} = \frac{\rho c_p c_{\mu}^{1/4} k_p^{1/2} \left(\Theta_w - \Theta_p \right)}{q_w} \, ; \qquad y_p^{+} = \frac{\rho c_{\mu}^{1/4} k_p^{1/2}}{\nu}$$

  - A energia cinética das flutuações é obtida da equação de k no modelo k-ε.

Modelos para Baixos Números de Reynolds

- Esta categoria de modelo pode ser aplicada ao longo de todo o domínio de cálculo, incluindo regiões junto a superfícies sólidas.
  - Modelo do comprimento de Mistura (Van Driest)

$$\nu_t = lm^2\left\{\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right]\right\}^{1/2} \quad ; \quad lm = C_\ell y\left[1-\exp(-Ay^+)\right]; \quad \sigma_t \to \text{prescrito}$$

  - Modelo a uma equação (Wolfshtein,1969)

$$\nu_t = c_\mu k^{1/2}\ell_\mu \qquad ; \varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\ell_\varepsilon}$$
$$\ell_\mu = c_\ell y(1-\exp(-AR_t)) \qquad ; \ell_\varepsilon = c_\ell y(1-\exp(-A_\varepsilon R_t))$$
$$R_t = k^2/\nu\varepsilon \qquad ; \sigma_t \to \text{prescrito}$$

  - Modelo a duas equações (Launder e Sharma, 1974)
    - Descrevem efeitos na subcamada através de parâmetros tais como y^+ ou R_t (= $k^2/\nu\varepsilon$).
    - σ_t é prescrito

Determinação de σ_t

- As difusões turbulentas de quantidade de movimento e energia térmica podem ser escritas através das seguintes formas:

$$-\overline{uv} = \nu_t\frac{\partial U}{\partial y} \qquad -\overline{v\theta} = \alpha_t\frac{\partial \Theta}{\partial y}$$

- Desta forma, o número de Prandtl turbulento, σ_t, pode ser avaliado como

$$\sigma_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} = \frac{\overline{uv}\,\dfrac{\partial\Theta}{\partial x_j}}{\overline{v\theta}\,\dfrac{\partial U}{\partial y}}$$

- As quatro quantidades indicadas acima são de difícil medição e isto explica os poucos dados experimentais existentes para σ_t e a grande dispersão entre os mesmos.

Determinação de σ_t

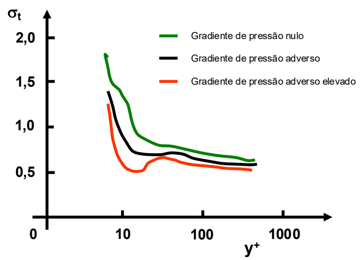
- O número de Prandtl turbulento, σ_t, varia com y^+, σ e Re mas infelizmente não existe uma relação geral conhecida.
  - Rotta (1964) sugeriu a seguinte relação para o escoamento de ar sobre placa plana

$\sigma_t = 0{,}9 - 0{,}4\ (y/\delta)^2$

  - Kays e Moffat por outro lado propuseram

$\sigma_t = 1{,}43 - 0{,}17\ (y^+)^{1/4}$

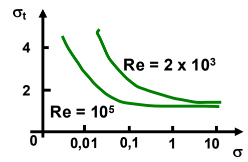
- Algumas medições são disponíveis como, por exemplo, aquelas de Blackwell (1972).



Determinação de σ_t

- Jischa (1982) sugere que para $\sigma < 1$

$$\sigma_t = 0{,}9 + 1{,}82\frac{1}{\sigma\,Re^{0{,}888}}$$



- Análises aproximadas de Reynolds (1975) e Deissler (1963) também sugerem que σ_t varia muito quando $\sigma \to 0$ e tende a 0,9 quando $\sigma \to \infty$.

- Na região logarítmica, σ_t parece ser uma função do número de Peclet turbulento, $Pe_t = (\mu_t/\mu)Pr$.

$$\sigma_t = 2{,}0/Pe_t + 0{,}85$$

Determinação de σ_t

- Simulações numéricas diretas (SND) indicam que σ_t se aproxima de 1,0 na região de y+ entre 0 e 5.
- Para metais líquidos, a difusão molecular é dominante e o valor de σ_t não é importante.
- Dados experimentais para ar sugerem o gradiente de pressão afeta σ_t , com gradientes adversos de pressão ($\partial p/\partial x > 0$) reduzindo σ_t e vice-versa para gradientes favoráveis ($\partial p/\partial x < 0$).
- Por outro lado, a rugosidade da superfície praticamente não afeta σ_t. Para paredes completamente rugosas, a subcamada limite viscosa não está presente e os dados disponíveis se restringem à região logarítmica.
- Uma discussão detalhada sobre σ_t é fornecida em Kays (1994).

Referências

- Ince, N.Z., Launder, B.E., “On the computation of buoyancy-driven turbulent flow in rectangular enclosures”, *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol. 10, pp. 110-117, 1989.
- Kader, B.A., “Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers”, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 24, pp. 1541-1544, 1981.
- Kays, W. M. “Turbulent Prandtl Number – Where Are We?”, *Transactions of the ASME - Journal of Heat Transfer*, , vol. 116, pp. 284-295, 1994.
- Jayatilleke, C.L.V., “The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sublayer to momentum and heat transfer”. *Prog. Heat Mass Transfer ,vol.* 1, pp. 193, 1969.
- Spalding, D.B., “Monograph on turbulent boundary layers”. *Technical Report TWF/TN/*33, Imperial College, Mechanical Engineering Department, 1967.
- Wolfshtein, M. The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 12:301-318, 1969.