3 Teoria Básica do Escoamento Médio

Cesar J. Deschamps
2025

Introdução

- As médias locais mais simples são as de velocidade, $\overline{U}_i$, e pressão, $\overline{P}$. De acordo como o conceito de média de Reynolds (1895):

$$U_i = \overline{U}_i + u_i \tag{3.1}$$

$$P = \overline{P} + p \tag{3.2}$$

  - Vários escoamentos turbulentos são estatisticamente estacionários e, nesses casos, a simulação do escoamento médio pode desprezar variações temporais;
  - Além disto, as propriedades resultantes dessa média variam muito menos espacialmente do que os valores instantâneos da turbulência;
  - De fato, em algumas situações as propriedades médias podem apresentar variações significativas em apenas uma ou duas direções, reduzindo o custo computacional.

O Escoamento Médio

- O campo de velocidade instantâneo de um escoamento turbulento é descrito pelas equações da continuidade e de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right]\right\}$$

  - Todas as quantidades aparecendo nas equações acima podem apresentar flutuações em seus valores, decorrentes da turbulência.
- Considerando variações desprezíveis de densidade e viscosidade, as equações de Navier-Stokes e da continuidade podem ser escritas como:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.4}$$

O Escoamento Médio

- A média da equação (3.4) resulta:

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.5}$$

  - Uma equação da continuidade para as flutuações pode ser obtida através da subtração de (3.5) de (3.4)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.6}$$

- Por outro lado, a média da equação C.Q.M. fornece

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{3.7}$$

O Escoamento Médio

- Com auxílio de (3.6), o termo de flutuação na equação (3.7) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i u_j}\right) \qquad (3.8)$$

- Assim, a forma final de (3.7) fica

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i u_j}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{-P\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right) - \rho\overline{u_i u_j}\right\} \qquad (3.9)$$

  - O termo relativo às flutuações de velocidade pode ser entendido como um tensor tensão adicional, conhecido como tensor de Reynolds.
  - Esse termo representa a média do fluxo de quantidade de movimento devido à turbulência.
  - O tensor de Reynolds é responsável pela interação entre a turbulência e o escoamento médio.

O Escoamento Médio

- A equação (3.9) difere daquela que seria escrita para o escoamento laminar apenas pela presença do tensor de Reynolds, $\overline{u_i u_j}$.
- O tensor de Reynolds é simétrico:

$$\begin{bmatrix} -\rho\overline{uu} & -\rho\overline{uv} & -\rho\overline{uw} \\ -\rho\overline{vu} & -\rho\overline{vv} & -\rho\overline{vw} \\ -\rho\overline{wu} & -\rho\overline{wv} & -\rho\overline{ww} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{matrix} \rho\overline{uv} = \rho\overline{vu} \\ \rho\overline{uw} = \rho\overline{wu} \\ \rho\overline{vw} = \rho\overline{wv} \end{matrix}$$

  - Logo existem seis componentes independentes do tensor.
  - A determinação destas componentes é o principal objetivo da modelação da turbulência.

O Escoamento Médio

- Em situações de turbulência plenamente desenvolvida, a magnitude do tensor de Reynolds pode ser muito superior ao do tensor viscoso, ou seja,

$$\rho\left\|\overline{u_i u_j}\right\| >> \mu\left\|\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right\| \qquad (3.10)$$

- Este aspecto é uma consequência da característica de números de Reynolds elevados dos escoamentos turbulentos.
  - A variação espacial da velocidade instantânea, $\partial U_i/\partial x_j$, é elevada, mas o mesmo não acontecendo com a variação espacial da velocidade do escoamento médio, $\partial \bar{U}_i/\partial x_j$.
  - Uma exceção ocorre junto a superfícies sólidas, onde a turbulência decai e a variação da velocidade do escoamento médio aumenta, de tal forma que eventualmente o tensor viscoso pode ser até mesmo dominante.

Energia do Escoamento Médio

- A equação (3.9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \qquad (3.18)$$

onde

$$T_{ij} = -\overline{u_i u_j} - \frac{\bar{P}}{\rho}\delta_{ij} + \nu\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right) \qquad (3.19)$$

é o tensor tensão efetivo do escoamento médio.

- Definindo a derivada material

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (3.20)$$

e multiplicando (3.18) por U_i vem que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\bar{U}_i \bar{U}_i\right) = \bar{U}_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \qquad (3.21)$$

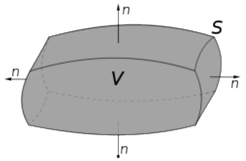
Energia do Escoamento Médio

- A equação (3.21) pode ser integrada em um volume material do escoamento médio, resultando:

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}\overline{U}_i\overline{U}_i\, d\upsilon = \int \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{U}_i T_{ij}\, d\upsilon - \int T_{ij}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\, d\upsilon \qquad (3.22)$$

  - Para um volume fechado com velocidade nula nas fronteiras, o teorema do divergente permite mostrar que o primeiro termo do lado direito de (3.22) é zero.

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \oiint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS$$



Energia do Escoamento Médio

- O segundo termo do lado direito de (3.22) pode ser reescrito usando a definição de T_{ij} e a condição de incompressibilidade, de tal forma que

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}\overline{U}_i\overline{U}_i\, d\upsilon}_{\text{Taxa de variação da energia do esc. médio}} = \underbrace{\int \overline{u_i u_j}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\, d\upsilon}_{\text{Acoplamento do esc. médio com a turbulência}} - \underbrace{\frac{1}{2}\nu\int\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) d\upsilon}_{\text{Taxa de dissipação viscosa do escoamento médio}} \qquad (3.23)$$

  - A forma da dissipação viscosa é desprezível longe de paredes sólidas;
  - O outro termo no lado direito representa a transferência de energia do escoamento médio para a turbulência.

Energia do Escoamento Total

- Multiplicando (3.3) por U_i e integrando em um volume material do escoamento, usando (3.4) e o teorema do divergente, com a hipótese de que a velocidade é nula nas paredes, vem que:

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}U_i U_i\, d\upsilon = -\frac{1}{2}\nu\int\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) d\upsilon = -\int \Delta\, d\upsilon \qquad (3.24)$$

  - Neste caso Δ é a taxa da dissipação de energia pela ação da viscosidade.
  - A energia cinética é transferida espacialmente através da advecção e pelo trabalho realizado sobre a vizinhança, via tensões normais e cisalhantes.
  - Isto não aparece na equação (3.24) pois a mesma representa a integral da taxa da variação de energia.

Energia do Escoamento Total

- Empregando a decomposição (3.1), pode-se expressar a taxa média da dissipação da energia cinética, equação (2.1), como

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \qquad (3.25)$$

  mostrando que a dissipação total pode ser decomposta em uma parcela devido ao escoamento médio e outra devido à turbulência.

- A dissipação instantânea ε e a dissipação média associadas à turbulência são aqui definidas como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \qquad (3.26 \text{ e } 3.27)$$

Energia do Escoamento Total

- Dividindo (3.24) em componentes média e de flutuação e então tirando a média resulta

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}\overline{U_iU_i}\,d\upsilon = -\frac{1}{2}\nu\int\left[\underbrace{\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{Dissipação viscosa do escoamento médio}} + \underbrace{\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}_{\text{Dissipação viscosa da turbulência}}\right]d\upsilon \qquad (3.28)$$

- A dissipação da energia devido ao escoamento médio é geralmente desprezível quando comparada à contribuição turbulenta

$$\frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) << \frac{1}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \qquad (3.29)$$

Equações para Momentos de Segunda Ordem

- Uma equação de transporte para a flutuação de velocidade u_i pode ser obtida, subtraindo-se a equação do escoamento médio (3.7) da equação do escoamento instantâneo (3.3), com o emprego de (3.6) e (3.8) e as decomposições (3.1) e (3.2).

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\overline{U}_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+u_k\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_iu_k-\overline{u_iu_k}\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k} \qquad (3.31)$$

  - Observe que na equação da flutuação de velocidade aparece a velocidade média e vice-versa, indicando que ambas as componentes de velocidade do escoamento são acopladas.
  - O termo de transporte por advecção na equação (3.3) propicia o surgimento de termos lineares e não lineares.

Equações para Momentos de Segunda Ordem

- A fim de obter uma equação para a evolução de $\overline{u_iu_j}$, multiplica-se (3.31) por u_j, adiciona-se o resultado a uma equação similar mas como os índices i e j trocados, e finalmente tira-se a média:

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial t}}_{\text{I}}+\underbrace{\overline{U}_k\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial x_k}}_{\text{II}}=$$

$$\underbrace{-\overline{u_iu_k}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k}-\overline{u_ju_k}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}}_{\text{III}}\underbrace{-\frac{\partial \overline{u_iu_ju_k}}{\partial x_k}}_{\text{IV}}\underbrace{-\frac{1}{\rho}\left[\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_j}}+\overline{u_j\frac{\partial p}{\partial x_i}}\right]}_{\text{V}}+\underbrace{\nu\left[\overline{u_i\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_k}}+\overline{u_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k}}\right]}_{\text{VI}} \qquad (3.32)$$

  - Os termos I e II são de fácil interpretação e não necessitam de detalhamento.
  - O termo III representa a interação entre os campos médio e de flutuação, sendo responsável pela produção e reorientação das tensões de Reynolds.
  - A advecção realizada pelo campo de flutuação de velocidade é representada pelo termo IV.

Equações para Momentos de Segunda Ordem

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial t}}_{\text{I}}+\underbrace{\overline{U}_k\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial x_k}}_{\text{II}}=$$

$$\underbrace{-\overline{u_iu_k}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k}-\overline{u_ju_k}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}}_{\text{III}}\underbrace{-\frac{\partial \overline{u_iu_ju_k}}{\partial x_k}}_{\text{IV}}\underbrace{-\frac{1}{\rho}\left[\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_j}}+\overline{u_j\frac{\partial p}{\partial x_i}}\right]}_{\text{V}}+\underbrace{\nu\left[\overline{u_i\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_k}}+\overline{u_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k}}\right]}_{\text{VI}} \qquad (3.32)$$

  - O termo V descreve os efeitos da pressão, os quais são difíceis de serem descritos porque não são locais.
  - A pressão é relacionada ao campo de velocidade através de uma integral ao longo de todo o domínio.
  - Finalmente, os efeitos dissipativos e difusivos são descritos pelo termo VI, sendo que ambos os fenômenos são dominados pelas pequenas escalas da turbulência.

Equações para Momentos de Segunda Ordem

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\overline{U}_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{\mathrm{II}} =$$

$$\underbrace{-\overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}}_{\mathrm{III}} \underbrace{- \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}}_{\mathrm{IV}} \underbrace{- \frac{1}{\rho}\left[\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}}\right]}_{\mathrm{V}} + \underbrace{\nu\left[\overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}}\right]}_{\mathrm{VI}} \qquad (3.32)$$

- Como indicado na seção 3.1, as equações para o escoamento médio não são fechadas pois possuem momentos de velocidade de segunda ordem.
- A equação (3.32) poderia ser usada para o fornecimento das tensões de Reynolds.
- No entanto, essa equação também não é fechada, já que nenhum dos termos IV, V e VI pode ser expresso através de momentos de segunda ordem de um ponto.

Equações para Momentos de Segunda Ordem

- Uma equação para a energia cinética turbulenta pode ser obtida fazendo i = j na equação (3.32) e dividindo o resultado por 2, fornecendo:

$$\underbrace{\frac{\partial 1/2\overline{q^2}}{\partial t}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\overline{U}_k \frac{\partial 1/2\overline{q^2}}{\partial x_k}}_{\mathrm{II}} = \underbrace{-\overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}}_{\mathrm{III}} \underbrace{- \frac{\partial 1/2\overline{q^2 u_k}}{\partial x_k}}_{\mathrm{IV}} \underbrace{- \frac{1}{\rho}\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}}}_{\mathrm{V}} + \underbrace{\nu \overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}}}_{\mathrm{VI}} \qquad (3.33)$$

- Novamente os termos de (3.33) podem ser interpretados como a seguir:
  - Os termos I e II correspondem à variação local e ao transporte advectivo de $\overline{q^2}/2$;
  - O termo III representa a produção de energia cinética turbulenta pela interação entre o escoamento médio e a turbulência e possui sinal contrário ao termo similar que aparece na equação (3.23).
  - O transporte advectivo de $\overline{q^2}/2$ pelas escalas turbulentas é descrita pelo termo IV;
  - O termo V é associado à transferência de energia através de efeitos de pressão;
  - Finalmente, o termo VI corresponde aos efeitos viscosos (dissipação e difusão).

Equações para Momentos de Segunda Ordem

- O termo VI na equação (3.33) pode ser reescrito como:

$$\nu \overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} = \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\overline{u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}\right\}}_{\text{Transporte viscoso}} - \underbrace{\overline{\varepsilon}}_{\text{Dissipação de energia turbulenta}} \qquad (3.34)$$

- O transporte difusivo simplesmente transfere energia de um ponto para outro, não produzindo qualquer variação na energia total do domínio;
- O termo difusivo é desprezível para número de Reynolds elevados, com exceção de regiões junto a paredes sólidas;
- Já o termo associado à dissipação nunca pode ser desprezado.

Equações para Momentos de Segunda Ordem

- A equação(3.33) pode ser reescrita com auxílio de (3.34), (3.5) e (3.6):

$$\frac{\partial 1/2\overline{q^2}}{\partial t} = \underbrace{-\overline{u_i u_j}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_{\text{Produção}} - \underbrace{\overline{\varepsilon}}_{\text{Dissipação turbulenta}} \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\underbrace{1/2\overline{q^2}\,\overline{U}_j}_{\text{advecção do escoamento médio}} \underbrace{- \overline{u_j\left(1/2q^2 + \frac{p}{\rho}\right)} - \nu \overline{u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}_{\text{Difusão}}\right\}}_{\text{Transporte de energia turbulenta}} \qquad (3.35)$$

- A integração de (3.35) ao longo de um volume com velocidade nula nas fronteiras, e o uso do teorema do divergente, indica que o termo de transporte resulta nulo;
- Ou seja, o termo entre chaves não é responsável pelo aumento ou diminuição da energia no escoamento.

Equações para Momentos de Segunda Ordem

- Para turbulência homogênea, a equação (3.35) torna-se

$$\frac{d\,\overline{1/2q^2}}{dt} = \underbrace{-\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\text{Produção}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipação turbulenta}} \qquad (3.37)$$

  - Observa-se que na ausência de gradientes de velocidade, o termo de produção da energia cinética turbulenta torna-se nulo e, assim, a turbulência decai.

- Assumindo a condição de turbulência homogênea, a equação (3.32) pode ser escrita como:

$$\frac{d\overline{u_i u_j}}{dt} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho}\overline{p\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_i \partial u_j}{\partial x_k \partial x_k}} \qquad (3.38)$$

A Taxa da Dissipação da Energia Turbulenta

- Como já discutido, os gradientes de velocidade são dominados pelas pequenas escalas de movimento.
  - Desta forma, a taxa de dissipação da energia total, Δ, é determinada pela parcela associada à turbulência, ε. Usando a relação

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (3.39)$$

que vem de (3.6), pode-se reescrever (3.27) como

$$\varepsilon = \nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (3.40)$$

  - Uma expressão similar pode ser obtida em função de flutuações de vorticidade, $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$. Assim,

$$\varepsilon = \nu\overline{\omega_i\omega_i} + 2\nu\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (3.41)$$

A Taxa da Dissipação da Energia Turbulenta

- Para turbulência homogênea,

$$\varepsilon = \nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \nu\overline{\omega_i\omega_i} \qquad (3.42)$$

  - Embora seja estritamente válida para a condição de turbulência homogênea, a equação (3.42) também é uma aproximação razoável fora de camadas viscosas, desde que o número de Reynolds do escoamento seja elevado.
  - Isso se deve ao fato de que as derivadas de segunda ordem são dominadas pelas pequenas escalas da turbulência, enquanto que derivadas de quantidades médias, tais como $\overline{u_i u_j}$, são de ordem de grandeza muito menor.
  - Argumentos similares podem ser usados para demonstrar que a parcela viscosa do termo de transporte da equação (3.35) pode ser desprezado fora de camadas viscosas.

A Taxa da Dissipação da Energia Turbulenta

- Em síntese, considerando regiões distantes de camadas viscosas, a taxa de dissipação da energia do escoamento é dominada pelas pequenas escalas quando o número de Reynolds é elevado.
  - A taxa de dissipação $\varepsilon = O(\overline{u'^3}/L)$ evidencia o fato de que as grandes escalas determinam a taxa de suprimento de energia dissipada nas pequenas escalas.

- Para números de Reynolds elevados, a turbulência associada às pequenas escalas apresenta um caráter aproximadamente isotrópico.
  - Isto acontece porque estruturas turbulentas cada vez menores são geradas à medida que o número de Reynolds aumenta, com as suas estatísticas sendo cada vez mais independentes das grandes escalas.
  - Supondo turbulência isotrópica, o termo viscoso em (3.38) pode ser aproximado através da seguinte relação:

$$-2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = -\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \qquad (3.45)$$

O Efeito da Pressão

- Aplicando o divergente na equação de Navier-Stokes, (3.3), e usando (3.4), resulta uma equação de Poisson para a pressão:

$$\nabla^2 P = -\rho \frac{\partial^2 U_i U_j}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (3.46)$$

a qual pode ser escrita em termos de grandezas médias

$$\nabla^2 \overline{P} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\overline{U}_i \overline{U}_j + \overline{u_i u_j}\right\} \qquad (3.47)$$

- Subtraindo-se (3.47) de (3.46) fornece uma equação para a flutuação de pressão

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\overline{U}_i u_j + \overline{U}_j u_i + u_i u_j - \overline{u_i u_j}\right\} \qquad (3.48)$$

O Efeito da Pressão

- Soluções para (3.47) e (3.48) podem ser obtidas com o emprego de funções de Green e expressas como a soma de duas parcelas:
  - uma integral de volume, representando as fontes no lado direito;
  - uma integral de superfície sobre as fronteiras, representando uma solução da equação de Laplace satisfazendo as condições de contorno.

- Para o caso de escoamentos sem a presença de fronteiras:

$$\overline{P}(\mathbf{x}) = \frac{\rho}{4\pi}\iiint \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j}\left\{\overline{U}_i(\mathbf{x'})\overline{U}_j(\mathbf{x'}) - \overline{u_i u_j}(\mathbf{x'})\right\}\frac{d^3\mathbf{x'}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|} \qquad (3.49)$$

e

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\rho}{4\pi}\iiint \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j}\left\{\overline{U}_i(\mathbf{x'})u_j(\mathbf{x'}) + \overline{U}_j(\mathbf{x'})u_i(\mathbf{x'}) + u_i(\mathbf{x'})u_j(\mathbf{x'}) - \overline{u_i u_j}(\mathbf{x'})\right\}\frac{d^3\mathbf{x'}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|} \qquad (3.50)$$

  - O termo $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ representa a diminuição com a distância dos efeitos de uma fonte de pressão na posição **x**' sobre o ponto em **x**.

O Efeito da Pressão

- Utilizando as expressões anteriores, pode-se avaliar as correlações pressão-velocidade na equação da energia cinética turbulenta:

$$\overline{p(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x})} = \frac{\rho}{4\pi}\iiint \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j}\left\{\overline{U}_i(\mathbf{x'})\overline{u_j(\mathbf{x'})u_k(\mathbf{x})} + \overline{U}_j(\mathbf{x'})\overline{u_i(\mathbf{x'})u_k(\mathbf{x})} + \overline{u_i(\mathbf{x'})u_j(\mathbf{x'})u_k(\mathbf{x})}\right\}\frac{d^3\mathbf{x'}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x'}|} \qquad (3.51)$$

- A equação (3.51) fornece a correlação pressão-velocidade de um ponto em termos de correlações duplas e triplas de velocidade de dois pontos:
  - Uma situação similar ocorre se (3.50) é empregada para expressar a correlação pressão-velocidade na equação de transporte das tensões de Reynolds, (3.32);
  - O surgimento de correlações triplas reflete o problema de fechamento, enquanto que correlações de dois pontos se devem a efeitos não locais;
  - A integral em (3.51) é limitada espacialmente porque os momentos de velocidade tendem a zero quando a separação entre dois pontos, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, ultrapassa o comprimento de correlação da turbulência.

O Efeito da Pressão

- De acordo com a equação (3.48), e como refletido em (3.50), a flutuação de pressão é afetada por dois tipos de termos fontes.
  - O primeiro relaciona-se a produtos de médias e flutuações de velocidade e é **linear** em relação à flutuação;
  - O segundo é quadrático (**não linear**) em relação à flutuação de velocidade.

- Tais termos fontes produzem duas componentes de flutuação de pressão:
  - $p^{(1)}$ – parte devido ao termo fonte linear

$$\nabla^2 p^{(1)} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\overline{U}_i u_j + \overline{U}_j u_i\right\} \qquad (3.52)$$

  - $p^{(2)}$ – parte devido ao termo fonte não linear

$$\nabla^2 p^{(2)} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{u_i u_j - \overline{u_i u_j}\right\} \qquad (3.53)$$

  - As duas componentes, $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$, podem ter efeitos bem distintos na evolução da turbulência, sendo que $p^{(2)}$ não depende diretamente do escoamento médio.

O Efeito da Pressão

- O termo de pressão não aparece na equação da energia cinética turbulenta para turbulência homogênea, (3.37).

$$\frac{d\,\frac{1}{2}\overline{q^2}}{dt} = \underbrace{-\overline{u_i u_j}\,\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_{\text{Produção}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipação turbulenta}} \qquad (3.37)$$

  - Logo, esse termo deve apenas redistribuir energia entre as diferentes direções, aproximando ou afastando a turbulência da condição de isotropia.
  - Isso pode ser mostrado pela correlação pressão-taxa-de-deformação na equação (3.38) para o tensor de Reynolds $\overline{u_i u_j}$, cuja diferença em relação à forma isotrópica, $\overline{u_i u_j} = q^2\,\delta_{ij} / 3$, é uma medida de anisotropia.

$$\frac{d\overline{u_i u_j}}{dt} = -\overline{u_i u_k}\,\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\,\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho}\overline{p\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]} - 2\nu\,\overline{\frac{\partial u_i \partial u_j}{\partial x_k \partial x_k}} \qquad (3.38)$$

O Efeito da Pressão

- A correlação pressão-taxa-de-deformação em (3.38) pode ser escrita como

$$\frac{1}{\rho}\overline{p\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]} = \frac{1}{\rho}\overline{p^{(1)}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]} + \frac{1}{\rho}\overline{p^{(2)}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]} \qquad (3.54)$$

através da decomposição nas partes linear e não linear.

- Se a turbulência for isotrópica em algum momento e não existirem fronteiras, o segundo termo de (3.54) é nulo.
  - Isso acontece dessa forma pois $p^{(2)}$ não depende do escoamento médio, e sim somente da turbulência.
  - Assim, o segundo termo em (3.54) deve ser um tensor isotrópico na forma de uma constante multiplicando δ_{ij}.
  - O traço desse tensor é nulo devido à condição de incompressibilidade, (3.6), do campo de flutuação de velocidade;

O Efeito da Pressão

- A componente linear da pressão, $p^{(1)}$, resulta da interação da turbulência com o escoamento médio e não tem razão para ser nula mesmo que a turbulência seja isotrópica em algum instante.
  - O termo $p^{(1)}$ pode ser expresso através de correlações duplas de velocidade de dois pontos, mas a solução da integral resultante requer métodos espectrais.
- Para entender o efeito da pressão basta descrever dois casos limites:
  - O primeiro deles refere-se à turbulência sem a presença de escoamento médio, para a qual o termo linear de pressão não aparece.
  - O limite oposto ocorre quando o escoamento médio deforma e distorce a turbulência.
    - Se a deformação do escoamento médio for suficientemente forte, não haverá tempo para a interação da turbulência consigo mesma.
    - Esta é a base da teoria de deformação rápida da turbulência, na qual a evolução da turbulência é descrita exclusivamente pelos termos lineares.
  - As observações acima explicam as denominações “rápido” e “lento” adotadas para os termos linear e não linear de pressão.

Turbulência Homogênea sob Cisalhamento Uniforme

- Considere um escoamento médio estacionário sob cisalhamento uniforme, com apenas a componente de velocidade $\overline{U}_1(x_2)$ não nula.
  - O perfil de velocidade médio varia linearmente com x_2:

$$\overline{U}_1 = s x_2 \qquad (3.93)$$

onde s é uma constante, cujo recíproco (s^{-1}) tem dimensão de tempo e fornece uma escala de tempo associada ao cisalhamento médio.

- A turbulência é considerada homogênea tal que

$$\frac{\partial\,\overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = 0 \qquad (3.94)$$

  - Logo, a turbulência não aparece na equação do escoamento médio (3.9).

Turbulência Homogênea sob Cisalhamento Uniforme

- A turbulência evoluirá com o tempo, mas permanecerá homogênea.
  - O número de Reynolds será considerado suficientemente elevado tal que efeitos da viscosidade sobre as grandes escalas são desprezados.
  - A equação da energia turbulenta (3.37) é:

$$\frac{d\overline{{}^{1/2}q^2}}{dt} = -s\,\overline{u_1u_2} - \bar{\varepsilon} \qquad (3.95)$$

e fornece um indicativo da importância da tensão $\overline{u_1u_2}$.

Turbulência Homogênea sob Cisalhamento Uniforme

- A equação (3.38) para $\overline{u_iu_j}$ pode ser escrita como

$$\frac{d\overline{u_iu_j}}{dt} = -s\begin{bmatrix} 2\overline{u_1u_2} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2u_3} \\ \overline{u_2^2} & 0 & 0 \\ \overline{u_2u_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho}\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \qquad (3.96)$$

  - O caso a ser analisado considera uma condição inicial de isotropia, embora a mesma seja desfeita pela ação da deformação do escoamento médio.
  - A condição de simetria para reflexão em torno de $x_3 = 0$ permanece ao longo do tempo e, assim, $\overline{u_1u_3} = \overline{u_2u_3} = 0$.

Turbulência Homogênea sob Cisalhamento Uniforme

- Inicialmente, $\overline{u_1u_2} = 0$ e a energia turbulenta decai então, de acordo com a equação (3.95) e $\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2}$.
  - A componente da equação (3.96) para $\overline{u_1u_2}$ pode ser escrita como

$$\frac{d\overline{u_1u_2}}{dt} = -s\,\overline{u_2^2} + \frac{1}{\rho}\overline{p\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}} \qquad (3.97)$$

  - De acordo com dados experimentais para $s > 0$, para a condição de número de Reynolds elevados a dissipação viscosa é pequena e $\overline{u_1u_2}$ torna-se negativa devido ao primeiro termo de (3.97);
  - Quando $\overline{u_1u_2}$ torna-se negativa, o termo de produção em (3.95) começa a contrabalançar o termo de dissipação e a turbulência decai menos rapidamente;
  - Eventualmente, a parcela associada a $\overline{u_1u_2}$ excede a dissipação e a intensidade da turbulência aumenta.

Turbulência Homogênea sob Cisalhamento Uniforme

- O segundo termo em (3.97) atua na direção contrária do primeiro, tentando reduzir a magnitude de $\overline{u_1u_2}$, e segue a equação de Poisson, (3.48):

$$\nabla^2 p = -2\rho s\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (3.98)$$

  - Como já discutido, os termos no lado direito têm efeitos bem distintos sobre a evolução da turbulência.
    - O primeiro é linear em relação à flutuação de velocidade, $p^{(1)} = s\Pi$, enquanto que o segundo termo se deve à não linearidade, sendo denotado por $p^{(2)}$.
  - Assim, a equação (3.97) pode ser expressa como

$$\frac{d\overline{u_1u_2}}{dt} = -s\,\overline{u_2^2} + \underbrace{\frac{s}{\rho}\overline{\Pi\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)}}_{\text{Linear}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\overline{p^{(2)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)}}_{\text{Não linear}} \qquad (3.99)$$

  - A dissipação é desprezada pois contribui com uma parcela pequena na equação de $\overline{u_1u_2}$.

Turbulência Homogênea sob Cisalhamento Uniforme

- O termo de pressão não linear é nulo para turbulência isotrópica e, assim, seu valor inicial é zero na presente situação.

$$\frac{d\overline{u_1u_2}}{dt}=-s\,\overline{u_2^2}+\underbrace{\frac{s}{\rho}\overline{\Pi\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)}}_{\text{Linear}}+\underbrace{\frac{1}{\rho}\overline{p^{(2)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)}}_{\text{Não linear}} \qquad (3.99)$$

  - O termo linear atua imediatamente com a deformação do escoamento e o efeito do termo não linear aumenta com a anisotropia da turbulência.
- Vamos considerar uma deformação média constante, $s > 0$, aplicada em uma condição inicial de turbulência isotrópica.
  - O aumento de $-\overline{u_1u_2}$ se deve ao primeiro termo da equação (3.99), enquanto que os dois termos de correlação de pressão-deformação atuam contra este crescimento.

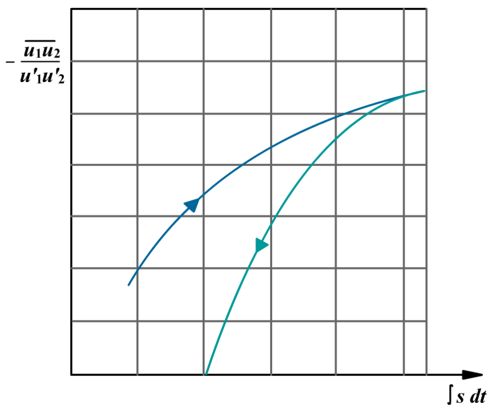
Turbulência Homogênea sob Cisalhamento Uniforme

- Considera-se então que a deformação seja repentinamente revertida, tal que $-\overline{u_1u_2}$ comece a diminuir, retrocedendo sua trajetória.
  - Imediatamente após a troca do sinal de s, o primeiro e o segundo termos da direita de (3.99) trocarão seus sinais.
  - No entanto, o mesmo não acontecendo com o terceiro termo pois depende somente da turbulência.

$$\frac{d\overline{u_1u_2}}{dt}=-s\,\overline{u_2^2}+\underbrace{\frac{s}{\rho}\overline{\Pi\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)}}_{\text{Linear}}+\underbrace{\frac{1}{\rho}\overline{p^{(2)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)}}_{\text{Não linear}} \qquad (3.99)$$

Turbulência Homogênea sob Cisalhamento Uniforme

- Como o terceiro termo atua no sentido de reduzir $-\overline{u_1u_2}$, a mesma retornará mais rapidamente a zero do que o previsto pela teoria da distorção rápida.
  - Haverá histerese e a turbulência não retornará à condição de isotropia.



Turbulência Homogênea sob Cisalhamento Uniforme

- À medida que a turbulência aumenta sua intensidade, os termos não lineares tornam-se mais importantes.
  - Para tempos elevados, observa-se que ocorre um estado de equilíbrio, no qual a razão das diferentes componentes $\overline{u_iu_j}$ tende a um valor limite.
  - Em particular, observa-se que a correlação $|\overline{u_1u_2}|/u'_1u'_2$ alcança um valor limite em torno de 0,5.

Turbulência Homogênea sob Planos de Deformação Sucessivos

- O escoamento médio corresponde ao campo de deformação plano

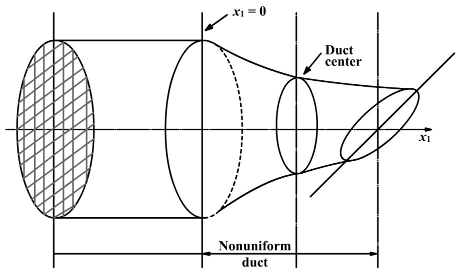
$$\overline{U}_1 = \text{constante} \quad ; \quad \overline{U}_\beta = D_{\beta\gamma} x_\gamma \tag{3.107}$$

onde β e γ podem assumir valores iguais a 2 e 3.

- Assim, a deformação média acontece somente no plano x_2-x_3.
- As componentes da taxa de deformação, $D_{\beta\gamma}(t)$, podem depender do tempo e são simétricas, ou seja, $D_{23} = D_{32}$, tal que a vorticidade média é zero.
- Além disto, pela equação da continuidade, seu traço $D_{\beta\beta} = D_{22} + D_{33} = 0$.
- Como $D_{\beta\gamma}$ é simétrico e seu traço é nulo, a mesma pode ser colocada na forma diagonal em qualquer instante de tempo através de uma rotação do sistema de coordenadas em torno do eixo x_1, resultando $D_{22} = -D_{33} = D$ e $D_{23} = D_{32} = 0$.
- Assim, o campo de deformação $D_{\beta\gamma}(t)$ pode ser especificado através do registro temporal de D e da orientação dos eixos principais de $D_{\beta\gamma}$ no plano x_2-x_3.

Turbulência Homogênea sob Planos de Deformação Sucessivos

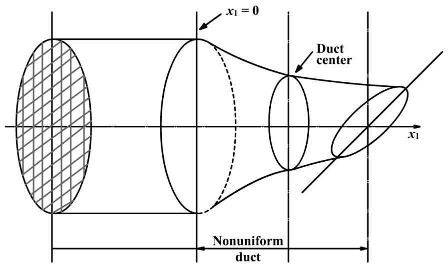
- A turbulência é homogênea e não aparece na equação (3.9) do escoamento médio.



- O escoamento médio é tal que a turbulência permanece homogênea, se essa for sua condição inicial.
- A turbulência pode ser gerada por uma grelha e carregada pelo escoamento em um duto, cujo formato da seção transversal muda ao longo do comprimento, de tal forma a gerar o escoamento representado por (3.107).
- A turbulência gerada é aproximadamente homogênea, mas evolui ao longo do comprimento e mais a jusante não é exatamente homogênea.

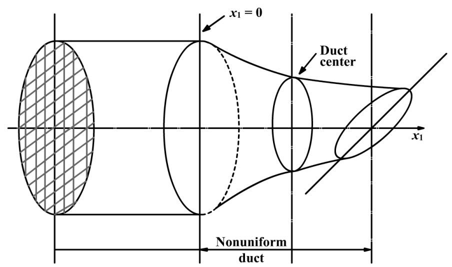
Turbulência Homogênea sob Planos de Deformação Sucessivos

- Considerando que o tamanho das grandes escalas turbulentas é muito menor do que a escala de comprimento para a evolução da turbulência, $\overline{U}_1/|D|$, devido a efeitos de deformação significativos, pode-se acompanhar uma porção turbulenta ao longo do duto.
  - Em qualquer posição no duto, a turbulência é localmente homogênea e com boa aproximação evolui com $t = x_1 / \overline{U}_1$.
  - Na ausência de deformação e uma vez que efeitos da grelha tenham desaparecido, a turbulência é aproximadamente isotrópica, mas torna-se anisotrópica quando submetida à deformação.



Turbulência Homogênea sob Planos de Deformação Sucessivos

- Inicialmente, considera-se o caso de $D_{\beta\gamma}$ constante, fornecendo uma orientação fixa para os eixos principais de deformação.
  - Por simplicidade, o sistema de coordenadas é escolhido tal que os eixos principais estão nas direções x_2 e x_3, correspondente uma taxa de alongamento constante $D > 0$ em x_2 e uma taxa de compressão D em x_3.
  - A quantidade D^{-1} possui dimensão de tempo e a deformação acumulada pode ser avaliada pelo produto Dt.



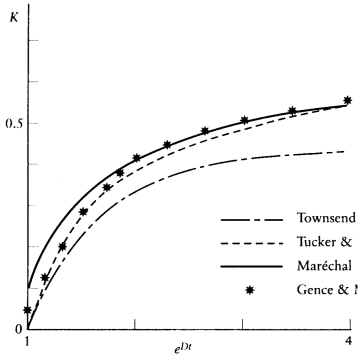
Turbulência Homogênea sob Planos de Deformação Sucessivos

- Dada a simetria da turbulência inicial e do campo de deformação médio sob reflexão em cada plano de coordenadas, $\overline{u_i u_j} = 0$ para $i \neq j$ e, assim, $\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2}$ são as únicas componentes diferentes de zero.

- A isotropia inicial implica que a turbulência é estatisticamente axissimétrica em relação a x_1.

- Uma medida da extensão da perda da simetria da turbulência pode ser obtida de

$$K = \frac{\overline{u_3^2} - \overline{u_2^2}}{\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}}$$



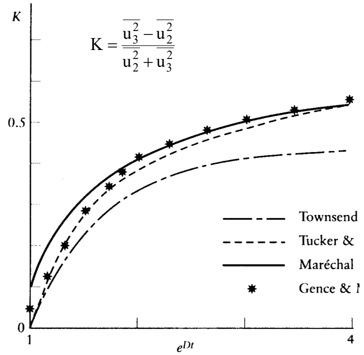
- A figura acima mostra resultados experimentais para K em função de e^{Dt}, inicialmente próxima de zero, tornando-se positiva pelo efeito do alongamento e tendendo a um valor limite para um tempo elevado.

Turbulência Homogênea sob Planos de Deformação Sucessivos

- O aumento nos valores de K pode ser explicado de forma qualitativa a partir de argumentos baseados no alongamento de vórtices.

- O alongamento na direção x_2 tenderá a aumentar a vorticidade $w_2 = \partial u_1/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_1$, aumentando por consequência as magnitudes de u_1 e u_3.

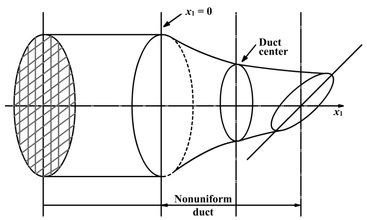
- O oposto acontece com w_3 devido à compressão em x_3, trazendo uma diminuição nas magnitudes de u_1 e u_2.



- Desta forma, segue que $\overline{u_3^2}$ deveria aumentar e $\overline{u_2^2}$ diminuir e, por esta razão, para um valor inicial de K = 0 tem-se que K > 0 em instantes seguintes.

Turbulência Homogênea sob Planos de Deformação Sucessivos

- A segunda metade do duto pode ser rotacionada de um ângulo arbitrário em torno do eixo x_1 do duto.
  - Esta rotação representa uma mudança brusca no eixo principal de $D_{\beta\gamma}$ que pode variar de um ângulo $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, enquanto a taxa de deformação $|D|$ permanece constante.



  - Independente de α, na primeira metade do duto o comportamento da turbulência é aquele para $D_{\beta\gamma}$ constante, com $\overline{u_3^2} > \overline{u_2^2}$.
  - Após a mudança do campo de deformação, a turbulência passa a se reajustar aos novos eixos de deformação e, em geral, os eixos principais de $\overline{u_i u_j}$ giram em torno de x_1 tentando se realinhar com os novos eixos de deformação.
  - Contudo, se $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi/2$, os eixos principais não se alteram, ocorrendo somente uma troca de sinal em D no segundo caso.

Turbulência Homogênea sob Planos de Deformação Sucessivos

- Ao invés da quantidade K, torna-se mais conveniente analisar esta situação com o uso do tensor simétrico adimensional

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{q^2} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \qquad (3.109)$$

  - O tensor b_{ij} é nulo para turbulência isotrópica.
  - Uma vez que b_{ij} é simétrico, o mesmo pode ser colocado na forma diagonal através da rotação das coordenadas para seus eixos principais, os quais são os mesmos daqueles de $\overline{u_i u_j}$ antes da alteração repentina da deformação.
  - Uma vez que K > 0, $\overline{u_3^2} > \overline{u_2^2}$ e

$$b_{33} - b_{22} > 0 \qquad (3.110)$$

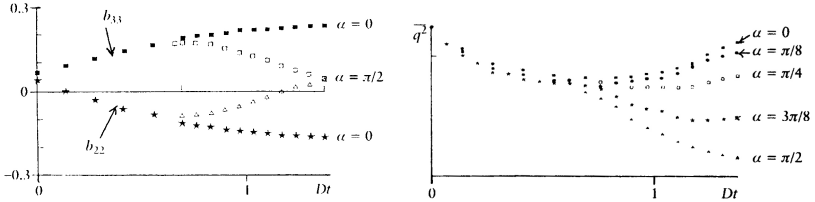
antes da mudança do campo de deformação.

Turbulência Homogênea sob Planos de Deformação Sucessivos

- A equação (3.37) para a energia turbulenta é

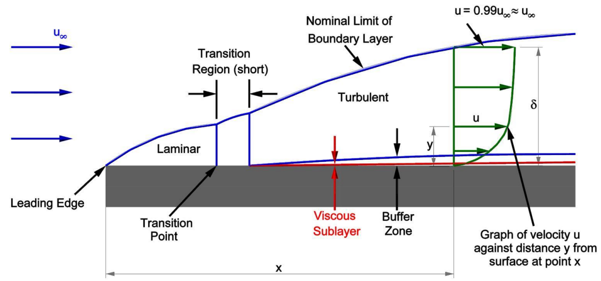
$$\frac{d\frac{1}{2}\overline{q^2}}{dt} = D\left(b_{33} - b_{22}\right)\overline{q^2} - \overline{\varepsilon} \qquad (3.111)$$

  - Quando o termo de produção é positivo, energia é transferida à turbulência e dissipada pelo atrito viscoso.
  - Na primeira metade do duto, a produção turbulenta é positiva e a anisotropia aumenta.
  - Para $\alpha = \pi/2$, o sinal de D é invertido na segunda metade e a produção torna-se negativa (backscatter) e a anisotropia diminui.



Camada Limite Turbulenta

- Existem duas regiões distintas que compõem a camada limite turbulenta sobre uma parede:
  - Região viscosa, na qual os transportes viscoso e turbulento são importantes;
  - Região externa, muito mais espessa, onde o transporte turbulento é dominante.
- As escalas de comprimento da turbulência decrescem em direção à parede, tal que na região viscosa $L/\eta = O(1)$ e, assim, todas as escalas são afetadas pela viscosidade.



Camada Limite Turbulenta

- Uma das quantidades mais importantes na caracterização da camada limite turbulenta é a velocidade de fricção u_*, definida a partir da tensão na parede

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial \overline{U}_x}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (3.131)$$

e expressa como

$$u_* = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}} \qquad (3.132)$$

- A velocidade de fricção é adotada para avaliar muitas das propriedades da camada limite.

Camada Limite Turbulenta

- Na região viscosa, uma análise da ordem de grandeza dos termos da equação (3.11) mostra que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial y} - \overline{u_x u_y}\right) = 0 \qquad (3.190)$$

que pode ser integrada, fornecendo

$$\nu \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial y} - \overline{u_x u_y} = u_*^2 \qquad (3.191)$$

através do emprego de $\overline{u_x u_y}$ em $y = 0$.

  - A equação (3.191) indica que a soma das tensões viscosa e turbulenta, é constante.

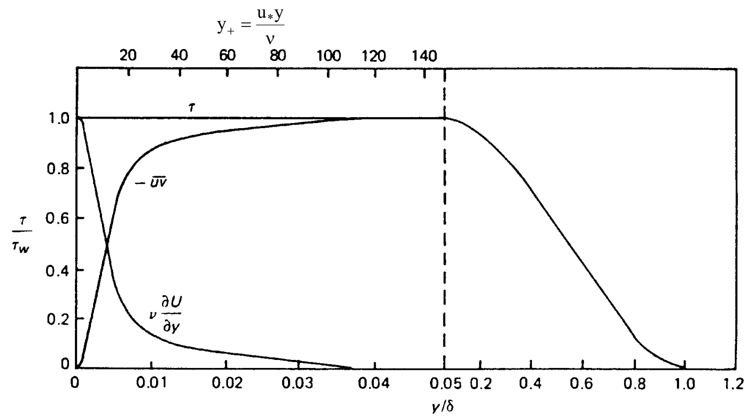
- Na parede, a tensão de Reynolds é zero, enquanto que se afastando da parede e entrando na camada inercial, a tensão viscosa é desprezível, resultando

$$-\overline{u_x u_y} = u_*^2 \qquad (3.192)$$

  - Assim, a tensão de Reynolds na camada inercial é aproximadamente constante e igual à fricção na parede.

Camada Limite Turbulenta

- Tensão de cisalhamento em uma camada limite sobre placa plana.



Camada Limite Turbulenta

- Na região viscosa, a viscosidade ν e a velocidade de fricção u_* descrevem completamente o comportamento do escoamento, significando que a escala de comprimento ν/u_* pode ser empregada para caracterizar essa região.

- Uma distância adimensional à superfície pode ser definida usando esta escala:

$$y_+ = \frac{u_* y}{\nu} \qquad (3.197)$$

- Deste modo, qualquer propriedade adimensionalizada por u_* e ν deveria ser uma função universal de y_+. Por exemplo,

$$\frac{\overline{U}_x}{u_*} = f(y_+) \qquad (3.198)$$

descreve o escoamento na região viscosa, onde f é uma função universal.

Camada Limite Turbulenta

- Uma vez que a condição de não escorregamento se aplica na parede, vem que.

$$f(0) = 0 \qquad (3.199)$$

enquanto que as equações (3.131), (3.132), (3.197) e (3.198) implicam

$$\left.\frac{df}{dy_+}\right|_{y_+=0} = 1 \qquad (3.200)$$

tal que

$$f(y_+) \sim y_+ \qquad (3.201)$$

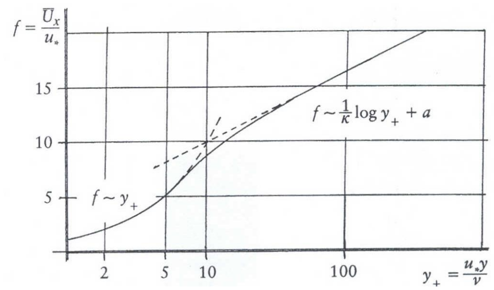
quando $y_+ \to 0$.

Camada Limite Turbulenta

- Como será visto, para valores elevados de y_+

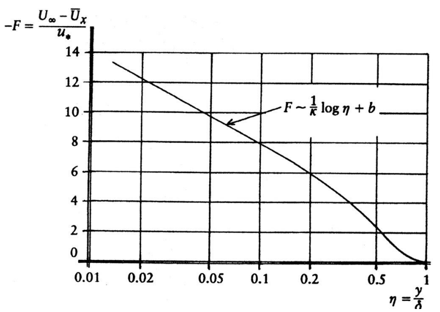
$$f(y_+) \sim \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + a \qquad (3.202)$$

que é a conhecida Lei Logarítmica, fornecendo o perfil de velocidade via (3.198).



Camada Limite Turbulenta

- A região externa da camada limite turbulenta é descrita pela variável adimensional $\eta = y/\delta$, com δ sendo a espessura da camada limite.
  - Dados experimentais mostram que o déficit de velocidade, V_x/u_*, é próximo a zero a partir de uma certa distância da parede.
  - Para uma definição precisa, embora arbitrária, da espessura da camada limite δ, pode-se adotar $|V_x| = 0{,}1\, u_*$.



Camada Limite Turbulenta

- Considerando o escoamento sobre uma placa plana com gradiente de pressão nulo, $U_x^{(inv)} = U_\infty$.
- Para número de Reynolds da camada limite suficientemente elevado, verifica-se que o déficit de velocidade, $-V_x$, depende somente de u_* e δ na região externa.
- Assim, através de uma análise dimensional:

$$\frac{V_x}{u_*} = F(\eta) \qquad (3.203)$$

onde $\eta = y/\delta$ e F é uma função universal, representada na figura da página anterior.

  - A equação (3.203) para o déficit de velocidade da região externa é satisfatória quando o número de Reynolds, $Re_* = u_*\delta/\nu$, é maior do que 2.000.
  - Por sua vez, a espessura da região viscosa é muito pequena, $O(Re_*^{-1})$.

Camada Limite Turbulenta

- Entre a região viscosa e a região externa, $\nu/u_* \ll y \ll \delta$, situa-se uma região inercial, na qual tanto (3.198) quanto (3.203) são válidas.
- Assim, na região inercial, os valores de $\bar{U}_x/u_*$ fornecidos por (3.198) e (3.203) devem coincidir, tal que

$$\hat{f}(Re_*\,\eta) = \frac{U_\infty}{u_*} + \hat{F}(\eta) \qquad (3.204)$$

onde $\hat{f}$ denota a forma de f com um argumento elevado e $\hat{F}$ é a forma de F com um argumento pequeno.

- Diferenciando (3.204) em relação a η e multiplicando o resultado por η.

$$Re_*\,\eta \hat{f}'(Re_*\,\eta) = \eta \hat{F}'(\eta) \qquad (3.205)$$

onde o símbolo ‘ é usado para indicar as derivadas.

Camada Limite Turbulenta

- Pode-se variar $Re_*\,\eta$, mantendo η, considerando posições longitudinais distintas da camada limite.
- É evidente que ambos os lados de (3.205) devem ser constantes e, assim,

$$y_+ \hat{f}'(y_+) = \frac{1}{\kappa} \qquad (3.206)$$

onde κ é uma constante.

- A integral da equação acima fornece a lei logarítmica

$$\hat{f}(y_+) = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + a \qquad (3.207)$$

apresentada anteriormente em (3.202) e que é necessária para fazer coincidir as expressões (3.198) e (3.203) na região inercial.

Camada Limite Turbulenta

- Uma consequência adicional de (3.204) é que

$$\hat{F}(\eta) = \frac{1}{\kappa}\ln\eta + b \qquad (3.208)$$

- Da equação (3.204), obtém-se

$$\frac{U_\infty}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln Re_* + a - b \qquad (3.209)$$

  que completa a concordância das duas expressões.

- A equação (3.208) fornece o déficit de velocidade do escoamento na região externa quando $\eta \to 0$.

Camada Limite Turbulenta

- Por conveniência, a condição de concordância, (3.209), pode ser também escrita na seguinte forma

$$\frac{U_\infty}{u_*} + \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{U_\infty}{u_*}\right) = \frac{1}{\kappa}\ln Re_\delta + a - b \qquad (3.210)$$

  onde **$Re_\delta = U_\infty\delta/\nu = (U_\infty/u_*)Re_*$** é outro número de Reynolds da camada limite, maior do que Re_*.

  - A quantidade κ é a constante de Von Karman e é aproximadamente igual a 0,39.
  - Experimentos indicam uma faixa dispersa de valores para a constante "a", sendo que a = 4 fornece resultados razoáveis.
  - A camada limite sobre placa plana fornece $a - b \cong 6$, tal que $b \cong -2$.
  - Outras referências fornecem $\kappa \cong 0{,}41$; a = 5,2; b = – 2,5.

Camada Limite Turbulenta

- A forma universal do perfil de velocidade $F(\eta)$ requer números de Reynolds que são somente alcançados em posições mais afastadas da região de transição.

- Os números de Reynolds Re_* e Re_δ são elevados e crescem ao longo da camada limite, devido ao aumento da espessura da camada limite.

- Assim, U_∞/u_* também é elevado e cresce com a posição x, de acordo com (3.209) e (3.210).

$$\frac{U_\infty}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln Re_* + a - b \qquad (3.209)$$

$$\frac{U_\infty}{u_*} + \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{U_\infty}{u_*}\right) = \frac{1}{\kappa}\ln Re_\delta + a - b \qquad (3.210)$$

Camada Limite Turbulenta

- A condição de número de Reynolds elevado é a base da teoria da camada limite desenvolvida aqui, representada por valores pequenos de u_*/U_∞.

- A dependência logarítmica do valor de U_∞/u_* em Re_*, evidenciada em (3.209),

$$\frac{U_\infty}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln Re_* + a - b \qquad (3.209)$$

  implica que o mesmo possui ordem de magnitude menor do que Re_* à medida que $Re_* \to \infty$ e, portanto, $U_\infty/u_* \ll Re_* \ll Re_\delta$.

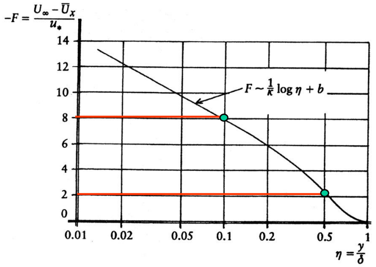
  - Por exemplo, para Re_* = 2.000 obtém-se U_∞/u_* = 25 de (3.209) e $Re_\delta = (U_\infty/u_*)\,Re_* = 5 \times 10^4$.

- Devido à variação logarítmica de U_∞/u_* em relação a Re_*, o seu valor pode ser considerado praticamente constante entre posições distantes mesmo por um fator de dois a partir da borda da placa.

  - No presente caso, U_∞ é constante e, assim pode-se assumir que a velocidade de fricção, u_*, é praticamente constante em longos trechos da camada limite.

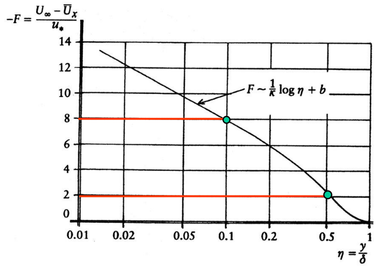
Camada Limite Turbulenta

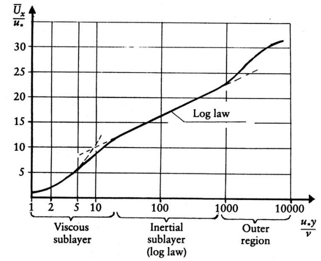
- À medida que se avança da borda da camada limite em direção à placa, $\overline{U}_x$ decresce vagarosamente; U_∞ até U_∞- $2u_*$, em $y = \delta/2$, e para U_∞- $8u_*$, em $y = \delta/10$.
- Considerando $U_\infty/u_* = 25$, em $y = \delta/10$, $\overline{U}_x$ é ainda aproximadamente 70% de U_∞, indicando que grande parte de sua variação acontece muito próximo da parede.
- A região viscosa se estende até um valor máximo $y_+ = 50$, correspondendo a uma posição de apenas 2,5% de δ, para $Re_* = 2000$. Nesta posição, $\overline{U}_x \cong 15\ u_*$, ou seja 60% de U_∞, se $U_\infty/u_* = 25$.



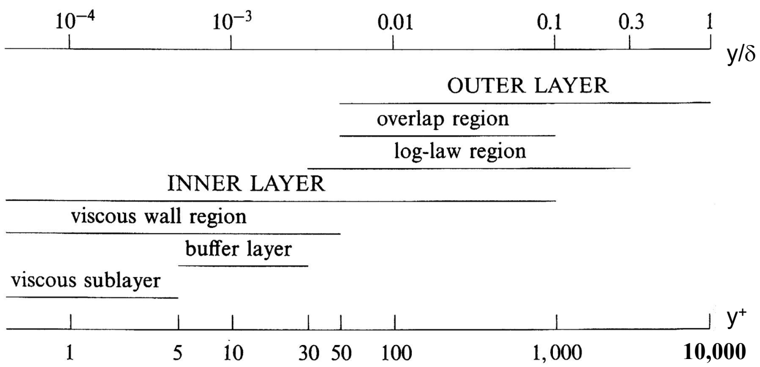
Camada Limite Turbulenta

- Para $y_+ < 5$, a tensão viscosa torna-se a principal parcela da tensão local.
  - Uma vez que em $y_+ = 5$ tem-se $y = 0{,}0025\ \delta$ e $\overline{U}_x = 0{,}2\ U_\infty$, a variação de $\overline{U}_x$ até a parede é ainda bem significativa.
- O perfil logarítmico de velocidade se estende de aproximadamente $y_+ = 30$ até $y = 0{,}2\delta$, uma faixa que aumenta com o aumento do número de Reynolds ao longo da posição x.





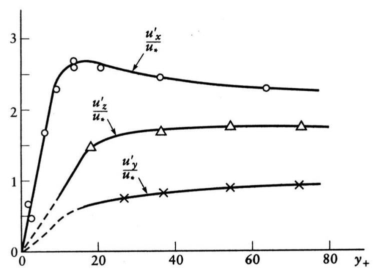
Camada Limite Turbulenta

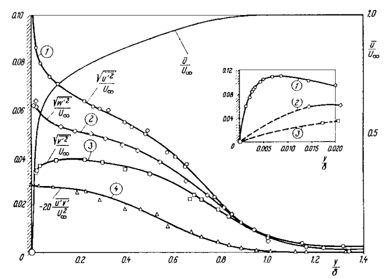


Esboço das várias regiões de uma camada limite para o escoamento em um canal retangular, com Re_* (=$u^*\delta/\nu$) = 10^4.

Camada Limite Turbulenta

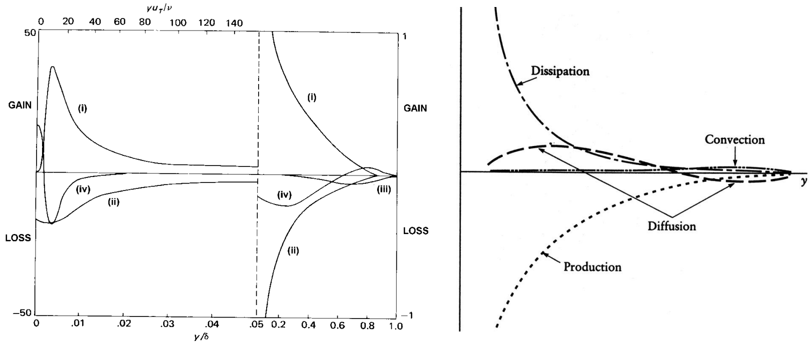
- Níveis de flutuação de velocidade
  - O nível mais elevado de flutuação acontece para a componente longitudinal, u'_x, a qual alcança o valor máximo $u'_x = 3u_*$ em $y_+ = 15$.
  - As três componentes de flutuação possuem um comportamento universal, quando adimensionalizadas por u_* e colocadas em função de y_+, considerando valores de y_+ não muito elevados.
  - O mesmo padrão universal pode ser verificado para a camada externa, quando a coordenada y_+ é substituída por $\eta = y/\delta$.





Camada Limite Turbulenta

- Balanço de energia cinética turbulenta para a camada limite sobre placa plana.
  - Existe uma região próxima à parede, denominada “região de equilíbrio”, onde os termos de produção e de dissipação são dominantes e aproximadamente iguais.
  - Usando (3.192) e a lei logarítmica para U_x pode-se mostrar que a produção de energia cinética turbulenta é $u_*^3/(\kappa y)$



Camada Limite Turbulenta

- Qualitativamente, os efeitos de gradientes de pressão são similares em camadas limite laminar e turbulenta.

- Um gradiente adverso, $d\overline{U}_\infty/dx < 0$, implica que $U_y > 0$ na camada externa, de acordo com (3.193),

$$\overline{U}_y = -y\frac{dU_\infty}{dx} \qquad (3.193)$$

tendendo a afastar o escoamento médio da parede, aumentando a espessura da camada limite.

- Esse efeito é reforçado pela ação turbulenta, a qual tende a aumentar a espessura da camada limite, independente do sinal do gradiente de pressão.

Camada Limite Turbulenta

- O efeito do gradiente de pressão sobre a espessura da camada limite δ pode ser também inspecionado através da equação de Von Karman,

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{1+\kappa U_\infty/u_* + \Pi\left[2+\kappa(3U_\infty/u_* - 2I_2/I_1)\right]}{\kappa I_1 (U_\infty/u_*)^2 - \kappa I_2 U_\infty/u_* + I_2} \qquad (3.232)$$

onde o fator Π representa o gradiente de pressão.

$$\Pi = \frac{\delta_d}{\tau_w}\frac{dP_\infty}{dx} = -\frac{\delta_d U_\infty}{u_*^2}\frac{dU_\infty}{dx} \qquad (3.181)$$

e

$$I_1 = -\int_0^\infty F(\eta)d\eta \qquad (3.214) \qquad\qquad I_2 = \int_0^\infty F^2(\eta)d\eta \qquad (3.215)$$

Camada Limite Turbulenta

  - Os valores das constantes I_1 e I_2 variam de acordo com a condição do gradiente de pressão.
  - Uma vez que assume-se que U_∞/u_* e Π variam de forma muito gradual, o mesmo acontece para $d\delta/dx$.
  - Portanto, a camada limite considerada aqui cresce a uma taxa constante, com um ângulo determinado de (3.232).

- Naturalmente, quando $\Pi = 0$ a equação (3.232) se reduz a

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{\kappa(U_\infty/u_*)+1}{\kappa I_1 (U_\infty/u_*)^2 - \kappa I_2 (U_\infty/u_*) + I_2}$$

Camada Limite Turbulenta

- De (3.181), verifica-se que o fator (δ_d/τ_w) que multiplica o gradiente de pressão é afetado por dois fatores da seguinte forma:
  - Se a camada limite cresce, a espessura de deslocamento δ_d aumenta também;
  - A desaceleração do escoamento devido ao gradiente adverso de pressão resulta na redução da tensão de cisalhamento τ_w.
  - Assim, no caso do crescimento da camada limite, ambos os efeitos aumentam o coeficiente (δ_d/τ_w) em Π, amplificando o efeito do gradiente de pressão .
  - Portanto, um gradiente adverso de pressão acarreta um crescimento rápido da camada limite.

$$\frac{d\delta}{dx}=\frac{1+\kappa U_\infty/u_*+\Pi\left[2+\kappa(3U_\infty/u_*-2I_2/I_1)\right]}{\kappa I_1(U_\infty/u_*)^2-\kappa I_2 U_\infty/u_*+I_2} \qquad (3.232)$$

$$\Pi=\frac{\delta_d}{\tau_w}\frac{dP_\infty}{dx}=-\frac{\delta_d U_\infty}{u_*^2}\frac{dU_\infty}{dx} \qquad (3.181)$$

Camada Limite Turbulenta

- De acordo com (3.232), a espessura da camada limite aumenta ou diminui, dependendo se $\Pi > \Pi_0$ ou $\Pi < \Pi_0$, onde

$$\Pi_0=-\frac{\kappa U_\infty/u_*+1}{\kappa(3U_\infty/u_*-2I_2/I_1)+2} \qquad (3.233)$$

o qual pode-se mostrar que situa-se no intervalo -1 < Π_0 < -1/3, assumindo que δ_m e δ_d são positivos, tal que $I_1 > 0$ e $I_2/I_1 < U_\infty/u_*$, de acordo com (3.212) e (3.213).

$$\frac{\delta_m}{\delta}=I_1\frac{u_*}{U_\infty}-I_2\left[\frac{u_*}{U_\infty}\right]^2 \qquad (3.212) \qquad\qquad \frac{\delta_d}{\delta}=I_1\frac{u_*}{U_\infty} \qquad (3.213)$$

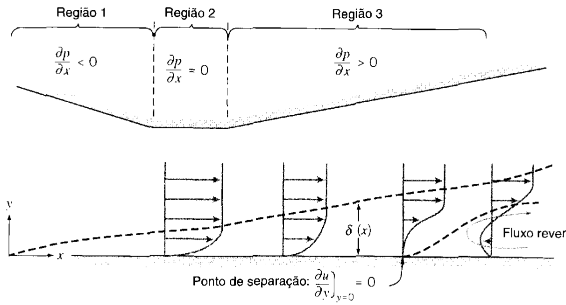
  - Assim, a redução da espessura acontece sempre que $\Pi < -1$ e nunca ocorre se $\Pi > -1/3$.
  - Um gradiente adverso, $\Pi > 0$, leva a um espessamento da camada limite.
  - Um gradiente favorável, $\Pi < 0$, reduz δ se for suficientemente elevado.
  - Para número de Reynolds elevado, $U_\infty/u_* \rightarrow \infty$, a distinção entre aumento ou redução da espessura da camada limite é dada por Π = -1/3; Eq. (3.233).

Camada Limite Turbulenta

- A situação para um gradiente favorável de pressão é bem diferente.
  - Neste caso, $dU_\infty/dx > 0$ implica que $\overline{U}_y < 0$ na camada externa (eq. 3.193), tendendo a reduzir a espessura da camada limite, um efeito contrário ao da difusão turbulenta.
  - Da equação (3.180), verifica-se agora que os efeitos do gradiente de pressão e da tensão de cisalhamento τ_w possuem sinais contrários, reduzindo desta forma o crescimento da camada.
  - Além de reduzir a espessura da camada limite, o gradiente de pressão também acelera o fluido, aumentando a tensão na parede τ_w.
  - À medida que a camada torna-se mais fina, os efeitos combinados da redução de δ_d e do aumento de τ_w diminuem o coeficiente (δ_d/τ_w) em Π, tal que o efeito do gradiente de pressão tem sua importância reduzida.
  - <u>Portanto, um gradiente favorável de pressão está associado a um efeito de auto-atenuação</u>.

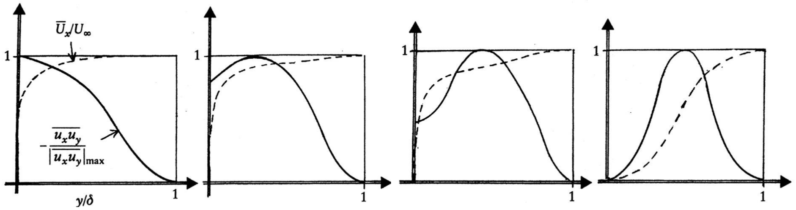
Camada Limite Turbulenta

- Além de causar um aumento da espessura da camada limite, um gradiente adverso de pressão tende a reduzir a velocidade do fluido junto à superfície.
  - Se o gradiente for elevado e mantido por um comprimento suficientemente longo sobre a placa, o fluido junto à superfície pode ser trazido ao repouso, originando a separação do escoamento.
  - O sinal da tensão de cisalhamento, τ_w, é alterado na separação do escoamento, devido ao escoamento reverso, e $\tau_w = 0$ é usado para definir o ponto de separação.



Camada Limite Turbulenta

- A figura abaixo mostra as variações dos perfis de velocidade média e tensões de Reynolds na região externa devido a um gradiente adverso de pressão.
  - À medida que o ponto de separação se aproxima, a tensão na parede diminui e o ponto de tensão turbulenta máxima se afasta da parede.
  - O perfil médio de velocidade se desenvolve para uma forma com inflexão junto à superfície, com o déficit de velocidade aumentado na camada externa.
  - Após a separação, os perfis de tensão e velocidade assumem formas semelhantes a de uma camada cisalhante.



Camada Limite Turbulenta

- Baseado em dados experimentais, Coles (1956) propôs uma expressão para a lei do déficit de velocidade na região externa:

$$F(\eta) = \frac{1}{\kappa}\ln\eta + b[1 - w(\eta)/2] \qquad (3.238)$$

  - A função de esteira, $w(\eta)$, é considerada universal e fornece uma correção da camada externa para a lei logarítmica. Coles encontrou que

$$w(\eta) = 1 - \cos\pi\eta \qquad (3.239)$$

  - O parâmetro b descreve as variações entre as diferentes camadas limite e diferentes posições longitudinais dentro de uma dada camada.
  - Deve ser observado que $w(\eta) \to 0$ quando $\eta \to 0$, tal que (3.238) assume a forma de (3.208) próximo à superfície, a fim de concordar com o perfil de velocidade na região viscosa da parede.

Camada Limite Turbulenta

- O parâmetro b pode ser obtido da relação de concordância, (3.209) ou (3.210), e pode variar com a posição longitudinal.

$$\frac{U_\infty}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln Re_* + a - b \qquad (3.209) \qquad\qquad \frac{U_\infty}{u_*} + \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{U_\infty}{u_*}\right) = \frac{1}{\kappa}\ln Re_\delta + a - b \qquad (3.210)$$

  - Empregando (3.238) para avaliar as integrais em (3.214) e (3.215), obtém-se

$$I_1 = 1/\kappa - b/2 \qquad (3.240)$$

e

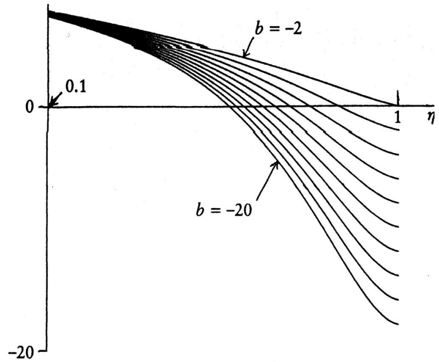
$$I_2 = 2/\kappa^2 + 3b^2/8 - 1{,}59b/\kappa \qquad (3.241)$$

que leva a I_1 = 3,6, I_2 = 25 para gradiente nulo e, assim, b = – 2.

- Para gradientes adversos, b < - 2, enquanto b > - 2 corresponde a gradientes favoráveis.

Camada Limite Turbulenta

- A figura ao lado apresenta a função [b + 2 – F(η)], de acordo com (3.238) e (3.239), para valores b ≤ - 2.
- As curvas mostram o déficit de velocidade da camada externa, - F(η), deslocada verticalmente de (b + 2), tal que suas assintóticas à lei logarítmica coincidem.
- Como indicado anteriormente, a região de aplicabilidade da lei logarítmica decresce com o aumento do gradiente de pressão.



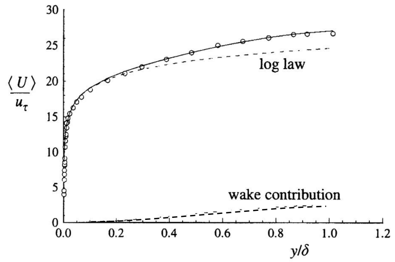
Camada Limite Turbulenta

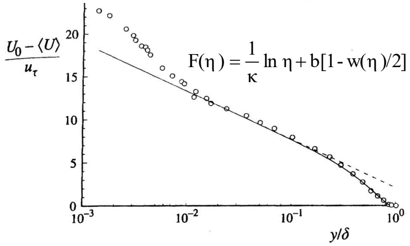
- Combinando a expressão para F(η) de Cole, (3.238), com a expressão da região viscosa da parede, (3.198), obtém-se:

$$\frac{\overline{U}_x}{u_*} = f(y_+) - \frac{1}{2} b w(\eta) \qquad (3.242)$$

- A equação acima recai em (3.198) na região da parede, uma vez que $w(\eta) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$.

- Na camada externa, a expressão F(η) de Cole é obtida, usando (3.202) e a condição de concordância (3.209).





Camada Limite Turbulenta

- O limite $b \rightarrow \infty$ corresponde a um gradiente adverso muito forte e conjetura-se que corresponde à separação.
  - Neste caso, $u_* \rightarrow 0$ e (3.203) com (3.238) indicam que

$$V_x \sim u_* b[1 - w(\eta)/2] \qquad (3.243)$$

- A parte logarítmica não está mais presente, implicando ausência de gradientes elevados de velocidade junto à superfície.

- Com a condição de não escorregamento, $V_x = - U_\infty$ em y = 0, na equação (3.243), obtém-se $b \sim - U_\infty / u_*$ e, assim,

$$\overline{U}_x = U_\infty + V_x = U_\infty w(\eta)/2 \qquad (3.244)$$
$$= U_\infty (1 - \cos \pi \eta)/2$$