

4 Modelos de Viscosidade Turbulenta

Cesar J. Deschamps
2025

Considerações Iniciais

- Embora informações sobre o caráter transiente da turbulência sejam importantes, em muitas situações é suficiente uma descrição estatística do escoamento médio.
 - Através da proposta de Reynolds (1895), a velocidade instantânea é expressa como a soma de uma velocidade média e uma flutuação de velocidade em torno da média.
 - A introdução dessa decomposição para as variáveis instantâneas, e a subsequente médias das equações de Navier-Stokes, resulta nas equações de Reynolds;
 - Esta abordagem é denominada Simulação via Média de Reynolds (RANS - *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*).
- Seja qual for o modelo de turbulência a ser adotado, algumas características são desejáveis:
 - Simplicidade matemática;
 - Capacidade de prever uma grande variedade de escoamentos;
 - Numericamente estável;
 - Baseado em um pequeno número de conceitos físicos.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

2

Hipótese de Boussinesq

- Os modelos a serem considerados são do tipo "single-point closures", implicando que todas as correlações são avaliadas em uma mesma posição espacial.
 - Dentro dessa classe de modelos existe uma grande variação quanto à metodologia utilizada para a descrição da turbulência;
 - A maioria assume que os fluxos de quantidade de movimento, $\overline{u_i u_j}$, e de escalares, $\overline{u_i \theta}$, podem ser representados por um coeficiente de difusão turbulenta.
 - Boussinesq (1877) sugeriu que para um escoamento simples, onde somente $\partial \overline{U} / \partial y$ fosse importante, o fluxo de quantidade de movimento \overline{uv} poderia ser avaliado através da relação

$$\overline{uv} = -\nu_t \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}$$

onde ν_t é a viscosidade turbulenta.

- Modelos seguindo essa hipótese podem expressar ν_t através de:
 - Relações algébricas envolvendo grandezas do campo de velocidade média ou
 - Equações diferenciais para o cálculo das quantidades da turbulência envolvidas na definição de ν_t .

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

3

Conceito de Viscosidade Turbulenta

- Kolmogorov apresentou uma generalização da hipótese da viscosidade turbulenta, originalmente proposta por Boussinesq, definida como:

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e k é a energia cinética das estruturas turbulentas.

- Introduzindo a relação acima na equação de Reynolds resulta:

$$\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \nu_t \right) \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{F_i}{\rho}$$

2025

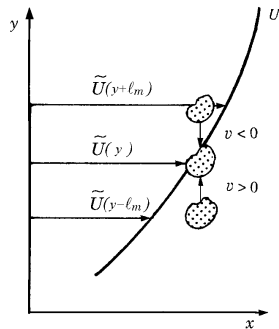
Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

4

Modelo do Comprimento de Mistura

- Considerando um escoamento turbulento onde somente $\partial U / \partial y$ era importante, Prandtl (1925) propôs um modelo algébrico de turbulência através de sua “Hipótese do comprimento de Mistura” (MLH);

- Prandtl imaginou que para o escoamento ao longo de uma parede, porções de fluido se juntam e movimentam-se através de um determinado comprimento ℓ_m sem alterar sua quantidade de movimento na direção x.



2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

5

Modelo do Comprimento de Mistura

- Assumindo que uma porção de fluido inicialmente em $(y - \ell_m)$ se desloque com $v > 0$ para a posição y, a diferença entre as velocidades na nova posição será:

$$\Delta U_1 = U(y) - U(y - \ell_m)$$

- A expressão acima pode ser escrita através de uma série de Taylor, desprezando os termos de ordem superior

$$\Delta U_1 = \ell_m \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

- Considerando agora uma porção de fluido vinda de $(y + \ell_m)$ com $v < 0$ para a posição y, a diferença de velocidades será

$$\Delta U_2 = U(y + \ell_m) - U(y) = \ell_m \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

- As diferenças no valor da velocidade originada pelo movimento transversal podem ser interpretadas como flutuações de velocidade na direção x.
- Logo, o valor médio do módulo dessas flutuações em x pode ser avaliado por

$$\overline{|u|} = \frac{1}{2} (\|\Delta U_1\| + \|\Delta U_2\|) = \ell_m \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\|$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

6

Modelo do Comprimento de Mistura

- É natural se esperar que a componente da flutuação de velocidade v possua a mesma ordem de magnitude:

$$\overline{|v|} = c \overline{|u|} = c \ell_m \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\|$$

- Tendo em mente que movimentos com $v > 0$ tendem a gerar uma condição de $u < 0$, escreve-se

$$\overline{uv} = -c \overline{|u|} \cdot \overline{|v|}$$

ou

$$\overline{uv} = -\ell_m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$$

- A constante c pode ser absorvida na expressão para ℓ_m que deve ainda ser proposta.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

7

Modelo do Comprimento de Mistura

- Finalmente, considerando o sinal que \overline{uv} deve apresentar em diferentes situações de perfis de velocidade temos:

$$\overline{-uv} = \ell_m^2 \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

- A expressão acima é o principal resultado da “Hipótese do Comprimento de Mistura”;

- Portanto, em linha com a hipótese de Boussinesq, uma estimativa para a viscosidade turbulenta é

$$\nu_t = \ell_m^2 \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\|$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

8

Valores para Comprimento de Mistura e Escala de Comprimento

- Escoamentos livres:

$$\ell_m = c_k \delta$$

onde δ pode ser a espessura da camada limite de mistura, de esteiras ou de jatos.

- O valor de c_k varia bastante de acordo com o escoamento livre em questão.

Constantes c_k do comprimento de mistura para escoamentos livres (Wilcox, 1993)

Esteira	Jato Plano	Jato Radial	Camada de Mistura Plana
0,180	0,098	0,080	0,071

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

9

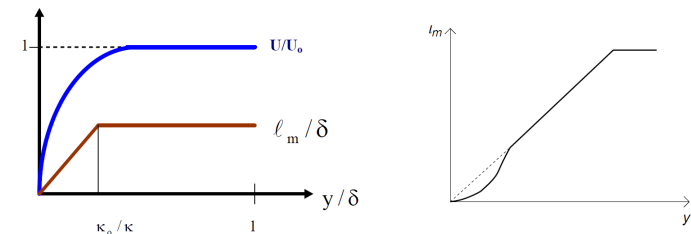
Valores para Comprimento de Mistura e Escala de Comprimento

- Camada limite sobre superfícies sólidas:

$$\ell_m = \min [\kappa y (1 - e^{-y^+/A^+}), C_1 \delta]$$

onde $\kappa = 0,41$ (constante de von Karman); $A^+ = 26$; $C_1 = 0,089$;

$y^+ = u_* y / \nu$; δ - espessura da camada limite.



2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

10

Aplicação dos Modelos Algébricos

- Atualmente, os modelos algébricos têm aplicação quase que restrita à aerodinâmica.

- No entanto, esses modelos podem ser adotados em conjunto com modelos mais complexos, a fim de resolver a região viscosa de escoamentos parietais.
- Além disso, algumas ideias dos modelos algébricos, tal como a hipótese do comprimento de mistura, são empregadas na modelação das tensões sub-malha na Simulação de Grandes Escalas (LES).

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

11

Modelos a uma Equação

- Nos modelos a uma equação, a viscosidade turbulenta é caracterizada pela velocidade característica $k^{1/2}$ e por uma escala de comprimento L . Assim,

$$\nu_t = C_\mu k^{1/2} L$$

- Os valores de L precisam ser prescritos de forma semelhante ao realizado no modelo de comprimento de mistura;
- Por outro lado, a energia cinética da turbulência é obtida de sua equação de transporte, derivada a partir da equação de Navier-Stokes.
- A equação para a energia cinética k já foi introduzida anteriormente e tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \overline{p u_j} - \frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} \right]$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

12

Modelos a uma Equação

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{v \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\overline{p u_j}}{\rho} - \frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} \right]$$

- O primeiro termo no lado direito da equação corresponde à produção da energia cinética e é calculado com o auxílio da relação de Kolmogorov.

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

- O segundo termo representa a dissipação viscosa da energia cinética:

$$\overline{v \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = \varepsilon$$

- O primeiro termo dentro dos colchetes refere-se ao transporte difusivo molecular de k;
- Os outros dois termos são associados ao transporte difusivo turbulento e, portanto, são aproximados por

$$\left(\frac{\overline{u_i u_i u_j}}{2} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \right) \cong \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

onde o número de Prandtl turbulento σ_k é comumente assumido ser igual a 1.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

13

Modelos a uma Equação

- Como já discutido, uma estimativa da dissipação é

$$\varepsilon \sim u^3 / L$$

- Adotando a velocidade característica como $k^{1/2}$, podemos reescrever a equação acima como

$$\varepsilon = c_D \frac{k^{3/2}}{L}$$

- Utilizando $L_D = L / c_D$, pode-se escrever

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{L_D}$$

- Desta forma, usando as aproximações apresentada anteriormente, o modelo a uma equação pode ser expresso como:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] \frac{k^{3/2}}{L_D} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

e

$$\nu_t = C_\mu k^{1/2} L$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

14

Valores para Comprimento de Mistura e Escala de Comprimento

- O modelo a uma equação também necessita de uma expressão para o cálculo das variações de L_D :

- Por exemplo:

- Regiões próximas a paredes sólidas $L_D = c_1 y$; $c_1 = 2,44$
- Escoamentos livres $L_D = c \delta$; $0,4 < c < 1$

- Apesar das vantagens no cálculo de μ_t , a necessidade de correlações para L_D torna difícil a aplicação do modelo a uma equação na simulação de escoamentos complexos.

- Esse tipo de modelo é empregado em aplicações de aerodinâmica e também em conjunto com modelos mais complexos para a solução de escoamentos junto a paredes.

2025

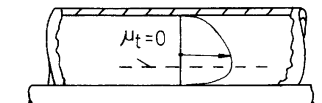
Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

15

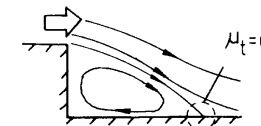
Comparação entre Modelos Algébricos e Modelos a Uma Equação

- O modelo algébrico necessita somente de valores do campo do escoamento médio e, desta forma, demanda recursos computacionais menores;

- Sob condição de equilíbrio local os dois modelos são equivalentes;
- Para escoamentos em dutos, o modelo a uma equação permite o cálculo de regiões plenamente desenvolvidas, ou em desenvolvimento, com a simples prescrição de L_D .
- No caso da MLH, deve-se introduzir ajustes para evitar que $\nu_t = 0$ quando $\partial U / \partial y = 0$.



- Em regiões de separação os gradientes de velocidade média são pequenos mas os coeficientes do transporte turbulento são significativos. A MLH é totalmente inadequada nestes casos.



2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

16

Modelos a Duas Equações

- A equação para o transporte da energia cinética k utilizada no modelo a uma equação pode ser escrita como:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] \frac{k^{3/2}}{L_D} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

com

$$\nu_t = C_\mu k^{1/2} L_D$$

- Na elaboração de um modelo a duas equações, faz sentido continuar usando a equação para a energia cinética k , devido ao pouco empirismo usado na sua obtenção.
- Qualquer combinação do tipo $k^a L^b$ pode ser usada para a segunda variável:
 - **L - escala de comprimento**
(Rotta, 1968; Rodi e Spalding, 1970; Ng e Spalding, 1972)
 - **f ($=k^{1/2}/L$) - frequência da turbulência**
(Kolmogorov, 1942)
 - **w ($=k/L^2$) - vorticidade da turbulência**
(Spalding, 1969; Saffman e Wicox, 1976; Wilcox e Rubesin, 1980)
 - **ε ($=k^{3/2}/L$) - dissipação da energia cinética k**
(Davidov, 1961; Harlow e Nakayama, 1968; Jones e Launder, 1972).

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

17

Equação de Transporte para ε

- O modelo k - ε é sem dúvida o modelo que tem recebido maior atenção;

- Uma equação exata para o transporte de ε pode ser obtida pela manipulação das equações de Navier-Stokes;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] + \overline{v u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \\ & -2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - 2 \left[\overline{v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v u_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

- Porém, vários termos desconhecidos aparecem na equação e precisam ser aproximados.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

18

Interpretação dos termos da Equação de Transporte para ε

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_I = & \underbrace{-2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right]}_{II} \underbrace{-2\nu u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}}_{III} \\ & \underbrace{-2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{IV} \underbrace{-2 \left[\overline{v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}} \right]}_V \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v u_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]}_{VI} \end{aligned}$$

- O termo I corresponde à taxa da variação local e à taxa do transporte de ε por advecção;
- Os termos II e III representam a geração de ε devido a mecanismos associados a vorticidade e ao escoamento médio. De acordo com Tennekes e Lumley (1987), ambos podem ser desprezados em situações de números de Reynolds elevados;
- Os termos IV e V são, respectivamente, a geração devido ao alongamento dos vórtices e a destruição de ε decorrente da ação viscosa;
- Finalmente, o termo VI representa a difusão de ε .

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

19

Modelação da Equação de ε

- Os termos podem ser agrupados de tal forma a representarem mecanismos físicos distintos:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \text{difusão} + \text{produção} - \text{destruição}$$

- As principais técnicas para a modelação dos termos na equação de ε são a análise dimensional e a intuição física;
- A difusão é aproximada usando o gradiente de ε :

$$\text{Difusão} \equiv d_\varepsilon \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]$$

- A produção de k deve ser balanceada pela produção de ε para evitar um aumento ilimitado de k . Assim,

$$\text{Produção} \equiv P_\varepsilon \sim \frac{\varepsilon}{k} P_k$$

onde (ε/k) é o inverso da escala de tempo.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

20

Modelação da Equação de ε

- O termo de destruição na equação de ε deve tender a infinito quando $k \rightarrow 0$, caso contrário o valor de k pode resultar negativo. Desta forma:

$$\text{Destruição} \equiv \mathfrak{D}_\varepsilon \sim \frac{\varepsilon}{k}$$

- Usando as aproximações introduzidas, a equação da dissipação ε assume a seguinte forma modelada:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

- Os valores de $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$ e σ_ε são obtidos com o auxílio de resultados experimentais.

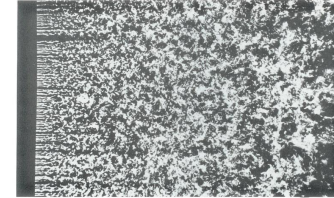
2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

21

Constantes no Modelo k- ε : Determinação de $c_{\varepsilon 2}$

- O valor de $c_{\varepsilon 2}$ é determinado pela observação do decaimento da turbulência gerada por uma tela em um túnel de vento:



- Para uma posição suficientemente afastada da tela, obtém-se a condição de isotropia para a turbulência e, portanto, $k = 3/2 \bar{u}^2$;
- Considerando que o escoamento seja uniforme e a turbulência homogênea na direção transversal, as equações de k e ε assumem as seguintes formas:

$$U \frac{dk}{dx} = -\varepsilon \quad U \frac{d\varepsilon}{dx} = -c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

22

Constantes no Modelo k- ε : Determinação de $c_{\varepsilon 2}$

- Assumindo uma variação para a energia cinética de acordo a $k = cx^n$ nas equações acima temos

$$Ucnx^{n-1} = -\varepsilon \quad -U^2cn(n-1)x^{n-2} = -c_{\varepsilon 2} \frac{(Ucnx^{n-1})^2}{cx^n}$$

- Portanto

$$c_{\varepsilon 2} = \frac{n-1}{n}$$

- De medições experimentais do decaimento de k , $n \cong -1,08$ e desta forma

$$c_{\varepsilon 2} = 1,92$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

23

Constantes no Modelo k- ε : Determinação de c_μ

- A constante c_μ é determinada da região logarítmica do perfil de velocidade junto a uma superfície sólida, onde a produção da energia cinética é igual a sua dissipação e $\bar{u}\bar{v} \cong \tau_w/\rho$. Do perfil de velocidade

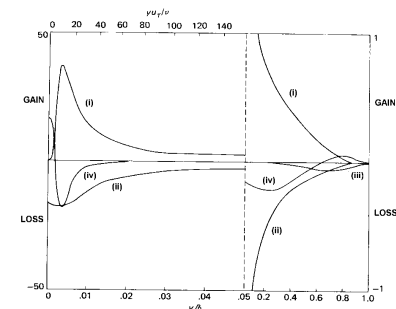
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u^*}{\kappa y}$$

- Substituindo a relação na equação da energia cinética para a condição de equilíbrio local

$$P = \varepsilon = \frac{\tau_w}{\rho} \left[\frac{(\tau_w/\rho)}{\kappa y} \right]^{1/2}$$

- Portanto

$$\varepsilon = \frac{(u^*)^3}{\kappa y}$$



2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

24

Constantes no Modelo k-ε: Determinação de c_μ

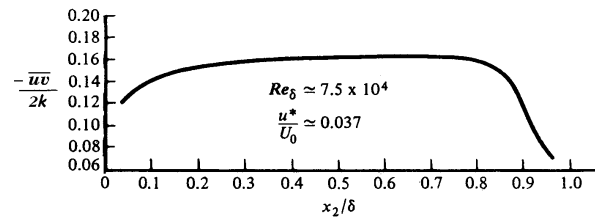
- Expressando a tensão turbulenta através do conceito de viscosidade turbulenta adotada no modelo k-ε

$$-\overline{uv} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y}$$

- Substituindo as estimativas para ε e $\partial U / \partial y \Rightarrow -\overline{uv} / k = c_\mu^{1/2}$

■ Ao longo da maior parte da camada limite, $-\overline{uv} / k \approx 0,3$.

■ Logo, $c_\mu = 0,09$.



2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

25

Constantes no Modelo k-ε: Determinação de $c_{\varepsilon 1}$

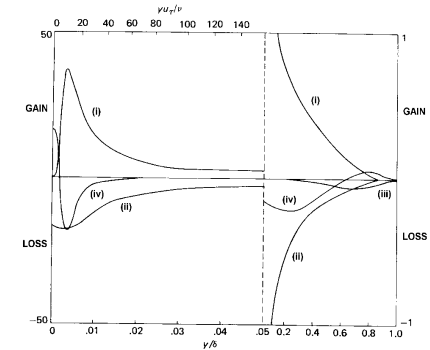
- A determinação de $c_{\varepsilon 1}$ é realizada resolvendo a equação da dissipação na região do perfil de velocidade logarítmico. Desprezando o transporte por convecção

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^*{}^4}{\sigma_\varepsilon} y^{-1} \right) + \frac{(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1}) c_\mu^{1/2} u^*{}^4}{k^2 y^2}$$

- Resolvendo a equação acima

$$c_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 2} - \frac{k^2}{\sigma_\varepsilon c_\mu^{1/2}}$$

- O valor de $c_{\varepsilon 1}$ é determinado com base em escoamentos livres, sendo geralmente assumido como igual a 1,44.



2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

26

Formulação do Modelo k-ε para Números de Reynolds Elevados

- O modelo k-ε para números de Reynolds elevados é apresentado abaixo.

$$v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

onde

$$P_k = v_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]$$

$$c_\mu = 0,09 ; \quad c_{\varepsilon 1} = 1,44 ; \quad c_{\varepsilon 2} = 1,92 ; \quad \sigma_k = 1,0 ; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

27

Subcamada Limite Viscosa

- Junto a superfícies sólidas o transporte difusivo molecular não pode ser desprezado e, portanto, deve ser incluído em todas as equações de transporte;

- De fato, mesmo nos modelos algébricos, o cálculo de v_t deve prever o amortecimento da turbulência causado pelas superfícies;
- No caso dos modelos a duas equações, praticamente todos utilizam alguma correção de v_t em função de um número de Reynolds da turbulência, a fim de prever corretamente o escoamento.

- Considera-se que os efeitos viscosos começam a afetar os movimentos de grande escala quando:

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} < 100$$

- Em regiões próximas a paredes sólidas, a condição de não-deslizamento implica que

$$k \rightarrow 0, \quad \varepsilon \neq 0 \quad \text{quando} \quad y \rightarrow 0$$

onde y é a distância à parede. Então $R_t \rightarrow 0$.

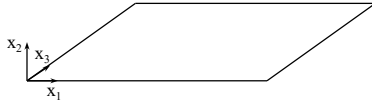
2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

28

Limite de $\overline{u_i u_j}$ junto a Paredes Sólidas

- Considere o escoamento sobre uma placa plana, conforme abaixo:



- A condição de não-deslizamento implica que

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em} \quad x_2 = 0$$

- Assim, pela continuidade,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{em} \quad x_2 = 0$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

29

Limite de $\overline{u_i u_j}$ junto a Paredes Sólidas

- Portanto, representando a variação de u_1 , u_2 e u_3 através de polinômios

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots \\ u_2 &= \dots + b_2 x_2^2 + \dots \quad (\partial u_2 / \partial x_2 = 0 \text{ em } x_2 = 0) \\ u_3 &= c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \dots \end{aligned}$$

- Desta forma,

$$\begin{aligned} \overline{u_1 u_2} &= a_1 b_2 x_2^3 + \dots \\ k &= \frac{1}{2} (a_1^2 + c_1^2) x_2^2 + \dots \end{aligned}$$

- Podemos mostrar também que

$$v_t \sim x_2^3$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

30

Limite de $\overline{u_i u_j}$ junto a Paredes Sólidas

- Uma vez que

$$\varepsilon = v \left[\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \right]$$

então

$$\varepsilon_w = v \left[\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2} \right] = 2v \left[\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_2} \right]^2$$

- Na parede $\varepsilon \neq 0$, mas pode-se definir

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2v \left[\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_2} \right]^2$$

- Logo

$$\tilde{\varepsilon}_w = 0$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

31

Modelo k-ε para Números de Reynolds Baixos

- O primeiro modelo k-ε para números de Reynolds baixos foi proposto por Jones e Launder (1972);

- Basicamente, esse modelo adota $\tilde{\varepsilon}$ ao invés de ε com o objetivo de simplificar a prescrição da condição de contorno na parede;
- Além disto, os autores adicionam na equação da dissipação um termo fonte proporcional a

$$vv_t \left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_m} \right]^2$$

com o objetivo de melhorar a previsão do perfil da energia cinética k junto à parede.

- Por outro lado, a viscosidade turbulenta é calculada através de

$$v_t = f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}}$$

onde f_μ é uma função de $\tilde{R}_t = k^2 / v \tilde{\varepsilon}$.

- O modelo de Jones e Launder (1972) foi otimizado mais tarde por Launder e Sharma (1974), a fim de tornar as constantes do modelo compatíveis com as usadas em escoamentos livres.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

32

Modelo k-ε para Números de Reynolds Baixos

- Modelo de Launder e Sharma

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \tilde{\varepsilon} - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j} \right)^2$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + 2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_m} \right)^2$$

$$\text{onde } P_k = \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]$$

$$f_\mu = \exp \left[\frac{-3,4}{(1 + \tilde{R}_t / 50)^2} \right] ; \quad f_\varepsilon = 1,0 - 0,3 \exp(-\tilde{R}_t^2)$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

33

Condições de Contorno

- Para a solução numérica do problema deve-se prescrever as condições de contorno, que geralmente são de quatro tipos:

- entrada;
- eixo ou plano de simetria;
- saída;
- paredes sólidas.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

34

Fronteira de Entrada

- Componente de velocidade U

- Interpolada de dados experimentais ou calculada de hipóteses para o perfil de velocidade (por exemplo, escoamento plenamente desenvolvido)

- Componente de velocidade V

- Usualmente tomada como zero ou interpolada de resultados experimentais

- Energia cinética da turbulência k

- Obtida de resultados experimentais ou avaliada através de relações, tais como:

$$k = \frac{\ell_m^2}{c_\mu^{1/2}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 ; \quad \text{onde } \ell_m = \min(\kappa y, c\delta)$$

$$\lambda = 0,09 \quad \text{para escoamentos em canais}$$

$$= 0,13 \quad \text{para escoamentos em tubulações circulares}$$

- Outras expressões para L_m existem para diferentes tipos de escoamentos.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

35

Fronteira de Entrada

- Dissipação da energia cinética ε

- A relação anterior para a energia cinética tem sua origem na condição de equilíbrio local ($\dot{P}_k = \varepsilon$), onde

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{L_D}$$

- A escala de comprimento L_D pode ser relacionada com L_m através de

$$L_D = c_\mu^{-3/4} \ell_m$$

- Assim, a condição de contorno para ε pode ser calculada como

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{c_\mu^{-3/4} \ell_m}$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

36

Simetria e Fronteira de Saída

□ Plano ou eixo de simetria

- A componente de velocidade normal à fronteira é zero;
- Também são iguais a zero os gradientes na direção normal à fronteira de todas as outras propriedades;
- Assim, nenhum fluxo (advecção ou difusão) ocorre na direção normal à fronteira.

□ Fronteira de saída

- Geralmente, a fronteira do escoamento é posicionada de tal forma que o escoamento possa ser considerado localmente parabólico;
- Assumindo que não há variação da área de passagem, assume-se que não ocorre variação de nenhuma propriedade na direção normal à fronteira, ou seja:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad ; \quad (\Phi = U, V, k, \varepsilon)$$

- Esta condição pode ser aplicada com bastante segurança em muitas situações.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

37

Paredes Sólidas

□ Os modelos de turbulência para números de Reynolds elevados são inadequados na subcamada limite viscosa;

□ Uma alternativa é a utilização de modelos para números de Reynolds baixos.

- Neste caso, podemos prescrever a condição de não escorregamento para a componente de velocidade U;
- Além disto, assumindo que a parede seja impermeável, a componente de velocidade V normal à parede também é zero;
- Não há flutuações de velocidade na parede e, assim, $k = 0$;
- Em relação à dissipação, para o modelo de Launder e Sharma adota-se uma substituição de variável tal que

$$\tilde{\varepsilon}_w = \varepsilon_w - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \Rightarrow \tilde{\varepsilon}_w = 0$$

- Outras condições de contorno devem ser consideradas de acordo com o modelo de turbulência adotado.

2025

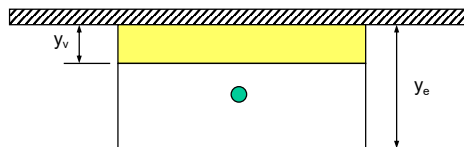
Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

38

Paredes Sólidas

□ Os modelos para números de Reynolds baixos requerem uma malha computacional extremamente refinada junto à parede;

- Em algumas situações é necessário, por economia, utilizar o modelo de turbulência para números de Reynolds elevados combinado com funções-parede;
- Este tipo de tratamento é baseado no perfil logarítmico de velocidade, válido para uma região próxima à parede e situada aproximadamente entre $30 < y^+ < 400$.



- A região $0 < y < y_e$ é composta de duas camadas com interface em $y = y_v$;
- A região $0 < y < y_v$ é a subcamada limite viscosa, onde os efeitos viscosos são dominantes e a tensão $\overline{u_i u_j} = 0$;
- A outra camada $y_v < y < y_e$ é totalmente turbulenta e a tensão cisalhante $\overline{u_i u_j}$ é praticamente constante e igual a tensão na parede τ_w .

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

39

Paredes Sólidas

□ A espessura da subcamada limite viscosa é determinada pelo número de Reynolds

$$Re = \frac{k^{1/2} y}{\nu}$$

tal que $Re_v = (k_v^{1/2} y_v) / \nu = 20$, correspondendo a $y^+ = 11,2$.

- O efeito da condição de não-deslizamento sobre a velocidade U_p é transmitida ao ponto P através da tensão cisalhante τ_w ;
- Para $y > y_v$, a velocidade paralela à parede varia de acordo com o Perfil Logarítmico de Velocidade

$$\frac{U_p}{(\tau_w/\rho)^{1/2}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{E y_p (\tau_w/\rho)^{1/2}}{\nu} \right]$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

40

Paredes Sólidas

- Uma vez que para uma grande parte da camada limite

$$-\frac{\overline{uv}}{k} = \frac{(\tau_w/\rho)}{k} = c_\mu^{1/2}$$

o perfil de velocidade logarítmico pode ser reescrito como

$$\frac{U_p}{\tau_w/\rho} c_\mu^{1/4} k_p^{1/2} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{E y_p c_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{v} \right]$$

- Assim, caso tenhamos o valor de k_p podemos determinar o valor de τ_w ;
- As constantes E e κ são normalmente tomadas como 9,7 e 0,41, respectivamente.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

41

Paredes Sólidas

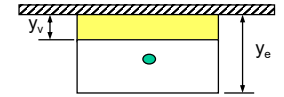
- Com a tensão cisalhante τ_w conhecida, a condição de não-deslizamento passa a ser uma condição de fluxo prescrito;

- O fluxo na face norte do volume de controle pode ser expresso como:

$$F_n = (\rho V)_n A_n U_n - \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_n A_n$$

- Como $V_n = 0$

$$F_n = -\mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_n A_n = \tau_w A_n$$



- Substituindo a relação obtida para τ_w na equação anterior temos:

$$F_n = \left[\frac{\rho c_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \kappa}{\ln(E y_p c_\mu^{1/4} k_p^{1/2} / v)} U_p \right] A_n$$

- A condição anterior é implementada pelo desacoplamento entre U_p e U_n (fazendo o coeficiente $A_n = 0$) e então adicionando-se o fluxo F_n como um termo fonte na equação discretizada.
- Para a componente de velocidade normal à parede tem-se que $V_n = 0$ e $(\partial V / \partial y)_n = 0$.

2025

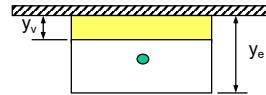
Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

42

Paredes Sólidas

- Os gradientes elevados de k e ε junto a paredes tornam necessárias algumas correções nas suas estimativas;

- A energia cinética k_p no volume é obtida através da solução de sua equação de transporte com as seguintes modificações:



- A difusão na parede é zero: $(\partial k / \partial y)_n = 0$. Além disto, $V_n = 0$.
- Por hipótese, considera-se também que a tensão cisalhante na região $y_v < y < y_e$ é constante e igual a τ_w . Assim, a integral de volume do termo de produção P_k é aproximado por:

$$\iiint P_k dV \cong \iiint -\rho \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} dV \cong \left\{ \frac{1}{y_e} \int_{y_v}^{y_e} \tau_w \frac{\partial U}{\partial y} dy \right\} V \cong \frac{\tau_w}{y_e} (U_e - U_v) V$$

- A velocidade U_e é obtida por interpolação das velocidades U_p no ponto P e U_s no centro do volume de controle abaixo daquele mostrado na figura;
- O valor de U_v pode ser obtido do perfil logarítmico de velocidade.

$$\frac{U_v}{(\tau_w/\rho)^{1/2}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{E y_v c_\mu^{1/4} k_v^{1/2}}{v} \right] \quad \text{onde} \quad y_v^+ = \frac{y_v c_\mu^{1/4} k_v^{1/2}}{v} \cong c_\mu^{1/4} Re_v$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

43

Paredes Sólidas

- É necessário também calcular a integral de ε , aparecendo como um sumidouro na equação de k . Neste caso,

$$\iiint \varepsilon dV \cong \left\{ \frac{1}{y_e} \int_0^{y_e} \varepsilon dy \right\} V \cong \frac{1}{y_e} \left\{ \int_0^{y_v} \varepsilon dy + \int_{y_v}^{y_e} \varepsilon dy \right\} V$$

- A distribuição de ε na subcamada limite viscosa é assumida ser constante e igual

$$\varepsilon = 2\nu k_v / y_v^2$$

- Na camada turbulenta a escala de comprimento $L_D (=k^{3/2}/\varepsilon)$ varia linearmente. Assim

$$\varepsilon = c_\mu^{3/4} k^{3/2} / \kappa y$$

- Integrando de 0 a y_e para ε

$$\bar{\varepsilon} = \frac{k_p^{3/2}}{y_e} \left[\frac{2}{Re_v} + \frac{c_\mu^{3/4}}{\kappa} \ln \left(\frac{y_e}{y_v} \right) \right] \quad \text{onde} \quad \frac{y_e}{y_v} = \frac{y_e^+}{y_v^+} \quad \text{e} \quad y_e^+ = \frac{y_e (\tau_w/\rho)^{1/2}}{v}$$

- A dissipação ε_p no ponto P é prescrita, ao invés de ser calculada de sua equação de transporte, usando a seguinte relação da condição de equilíbrio local:

$$\varepsilon = c_\mu^{3/4} k_p^{3/2} / \kappa y_p$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

44

Deficiências de Modelos de Viscosidade Turbulenta

Os modelos de viscosidade turbulenta apresentam deficiências em algumas situações comuns de escoamento, tais como:

- Escoamentos com efeitos de memória
- Escoamentos na presença de curvatura de linhas de corrente
- Escoamentos com gradientes adversos de pressão
- Escoamentos com separação
- Escoamentos com pontos de estagnação
- Jatos
- Escoamentos sob ação de campos de força

Essas deficiências podem ser causadas por diferentes tipos de limitações:

- Relação entre as tensões de Reynolds e taxas de deformação do escoamento médio;
- Conceito de viscosidade turbulenta;
- Modelo de turbulência adotado (modelo a uma equação, modelo k-ε, etc).

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

45

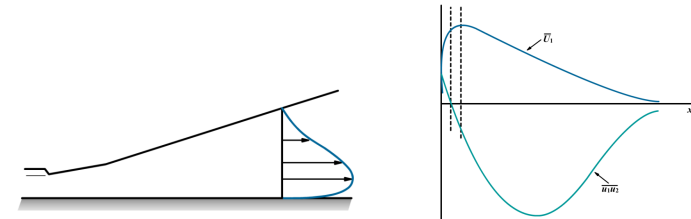
Escoamentos com Efeitos de Memória

Considere o caso de um jato de parede.

- Para a componente não nula

$$-\overline{u_1 u_2} = \nu_t \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} \quad (4.17)$$

- O resultado acima implica que a tensão de cisalhamento deve ser nula onde a variação da velocidade média passa por um ponto de inflexão.
- O resultado experimental para um jato de parede, mostrado na figura abaixo, é uma evidência contrária à validade desta formulação.



2025

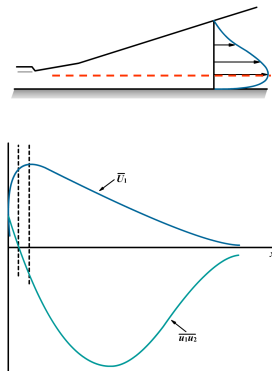
Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

46

Escoamentos com Efeitos de Memória

Os efeitos de memória discutidos no cap. 3 podem ser empregados para explicar a não coincidência dos pontos de máximo de \overline{U}_1 e $\overline{u_1 u_2}$ em um jato de parede.

- Para um volume material carregado pelo escoamento, a deformação média mudará com o tempo.
- A evolução da turbulência desta porção pode ser considerada similar a de um escoamento homogêneo com cisalhamento médio variável.
- A porção encontrará o ponto em que o cisalhamento médio é zero, mas necessitará de um tempo adicional para que, sob a ação de um cisalhamento reverso, alcance um valor nulo para $\overline{u_1 u_2}$.
- Assim, espera-se que a condição $\overline{u_1 u_2} = 0$ aconteça em uma região mais próxima da parede do que o máximo de \overline{U}_1 , como observado na prática.



2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

47

Curvaturas de Linhas de Corrente

Bradshaw (1973) mostrou que taxas de deformação pequenas associadas a curvaturas suaves de linhas de corrente têm um grande efeito sobre as tensões de Reynolds;

- Dados experimentais mostram que para reproduzir estes efeitos através do conceito de viscosidade turbulenta, usado no modelo k-ε, precisamos de uma relação do tipo

$$-\overline{uv} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \alpha \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

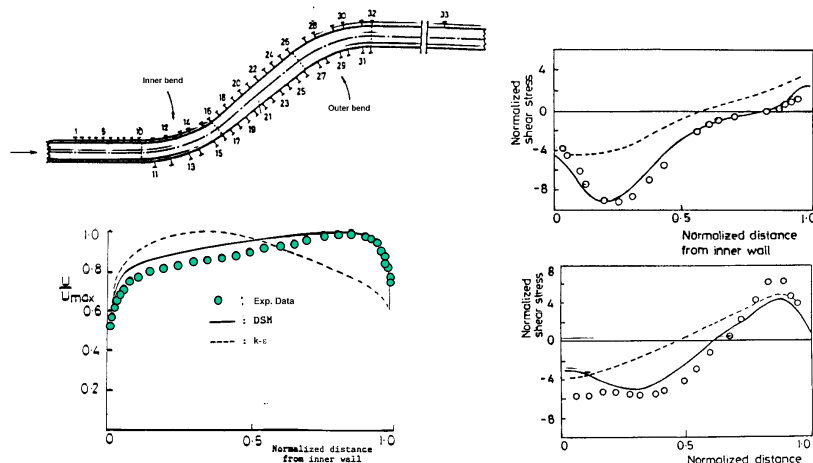
onde $8 < \alpha < 15$.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

48

Curvaturas de Linhas de Corrente



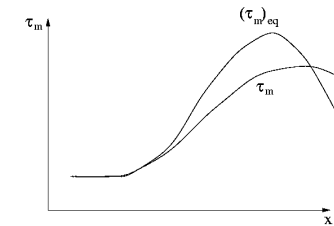
2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

50

Gradientes Adversos de Pressão

- O termo de transporte $\partial(\rho \bar{u} \overline{uv}) / \partial x$ não está presente nos modelos de turbulência k-ε padrões.
- No entanto, na presença de gradientes elevados de pressão, esse termo pode representar 20% do transporte total.



- Para a incorporação do efeito desse termo de transporte, pode-se adotar algumas alternativas:
- Modelo para as tensões de Reynolds;
- Modelo algébrico de taxa de deformação não linear.
- Modificação do modelo de viscosidade turbulenta (modelo de Johnson-King, modelo SST)

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

50

Gradientes Adversos de Pressão

- Sabe-se que o modelo k-ε superestima os valores das escalas de comprimento L_D quando a camada limite progride em direção à separação;
- Consequentemente, os níveis de turbulência tornam-se elevados e o escoamento tende a se manter sem separação, mesmo em situações em que os dados experimentais indicam o contrário;
- O problema é associado à equação de ϵ e é ainda mais crítico quando se utiliza a versão do modelo k-ε para baixos números de Reynolds.
- Para contornar o problema de escalas de comprimento superestimadas, adotam-se diferentes técnicas:
- Modificações no modelo padrão (Hanjalic-Launder, Yap, etc).
- Adoção de uma formulação k- ω junto à superfície.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

51

Gradientes Adversos de Pressão

- Yap (1987) indica uma forma de correção diferente daquela sugerida por Hanjalic e Launder (1979):

$$Y = 0,83 \left(\frac{L_D}{L_e} - 1 \right) \left(\frac{L_D}{L_e} \right) \frac{\epsilon^2}{k}$$

onde

$$L_D = k^{3/2} / \epsilon \quad L_e = 2,44 y$$

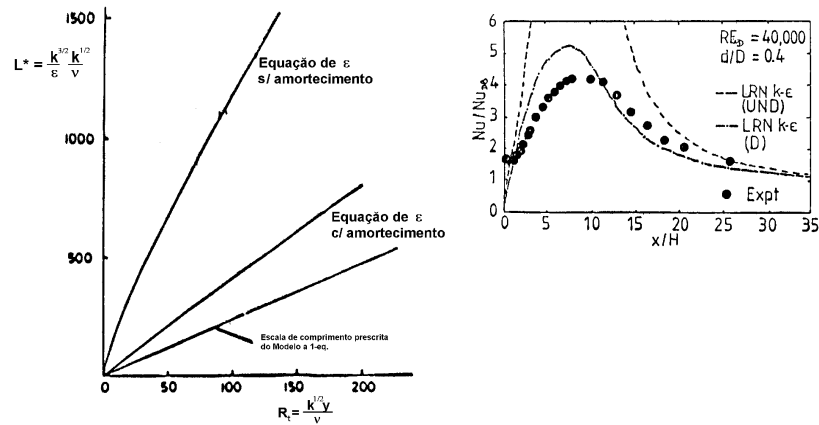
- O termo é introduzido como fonte na equação de ϵ e age no sentido de trazer L_D para valores de equilíbrio local L_e .
- A modificação só deve ser utilizada se $L_D > L_e$;
- A principal deficiência da proposição de Yap é a necessidade de se prescrever uma distância à parede.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

52

Gradientes Adversos de Pressão



2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

53

Regiões de Estagnação

- Termo de produção na forma exata

$$P_{(\tau_{i,j})} = -\overline{\rho u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$P_{(k)} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

- Termo de produção na forma aproximada (modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta)

$$P_{(k)} = \mu_t \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

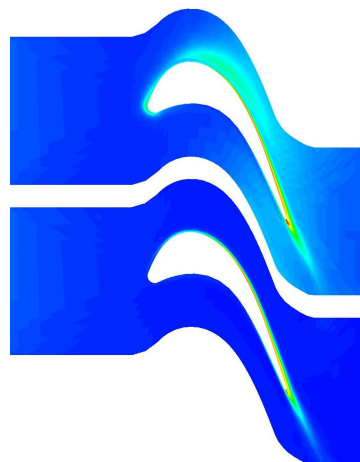
- O termo de produção na forma exata varia linearmente com a taxa de deformação.
- Por outro lado, a forma aproximada é uma função quadrática e, portanto, sempre positiva;
 - Isto resulta em níveis excessivos de turbulência em regiões de taxas de deformação elevadas, distorcendo completamente o escoamento;
 - A espessura de camada-limite torna-se elevada;
 - Atrito viscoso é previsto de forma incorreta.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

54

Regiões de Estagnação



- Modelo k-ε padrão

- Versão de Kato-Launder

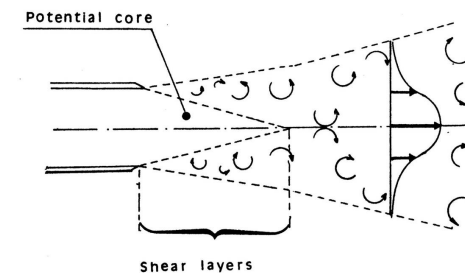
2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

55

Jatos

- Os jatos circulares têm uma taxa de espalhamento em torno de 20 % menor do que os jatos planos;
- Entretanto, previsões do escoamento com o modelo k-ε fornecem um espalhamento maior;
- Várias tentativas foram realizadas para a otimização das constantes no modelo, mas todas sem sucesso;
- O problema novamente é atribuído à equação de ε.



2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

56

Conclusões sobre as Deficiências de Modelos de Viscosidade Turbulenta

- Conforme mostrado, alguns modelos de viscosidade turbulenta apresentam deficiências significativas em situações comuns de escoamento.
 - Parte dessas deficiências se devem à limitação do conceito de viscosidade turbulenta;
 - Erros são também originados pela relação linear comumente adotada entre as tensões de Reynolds e a taxa de deformação do escoamento médio;
 - Finalmente, podem existir também limitações do próprio modelo adotado.
- O modelo k-ε padrão falha na previsão de escoamentos afastados da condição de equilíbrio local e, assim, deve ser utilizado com cautela na simulação de escoamentos complexos;
 - Basicamente, os erros no modelo k-ε se originam de dois aspectos:
 - Uso de uma relação entre tensões turbulentas e taxas de deformação do escoamento médio análogo à usada para o escoamento laminar;
 - Pouca fundamentação física da equação de transporte de ε.
 - As correções propostas para a equação da dissipação ε não apresentam generalidade suficiente.

Outras Alternativas de Modelos Baseados no Conceito de Viscosidade Turbulenta

- Outras versões de modelos de turbulência têm sido propostas para eliminar parte das deficiências discutidas aqui.
 - Alguns desses modelos adotam uma única equação de transporte e são geralmente desenvolvidos para a solução de escoamentos junto a superfícies sólidas.
 - Outra categoria de modelo tenta melhorar a acurácia da previsão de escoamentos turbulentos a partir de modificações nas equações do modelo k-ε, tanto por meio de argumentos físicos como também de forma empírica.
 - Alguns autores abandonam a equação de ε ou até mesmo introduzem equações adicionais a fim de melhorar a previsão das tensões de Reynolds.
 - A combinação de dois ou mais modelos é também uma estratégia comum para o desenvolvimento de modelos híbridos de turbulência, buscando tirar proveito das vantagens de cada um em certas regiões do escoamento.
 - Embora ainda não muito difundidos, modelos de turbulência não-lineares têm sido propostos como uma alternativa para a simulação de escoamentos complexos em que a previsão da anisotropia da turbulência é necessária.

Modelo de Spalart-Allmaras

- No modelo de Spalart-Allmaras (1992), a viscosidade turbulenta é avaliada através da função

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$$

cujas equação de transporte para o termo $\tilde{\nu}$ é expressa por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \tilde{\nu} U_j) = C_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_v$$

- Esse modelo é bastante difundido em aplicações de aerodinâmica de asas de aviões.

Modelo de uma Equação de Wolfshtein (1969)

- No modelo de uma equação de Wolfshtein (1969), a viscosidade turbulenta, ν_t , é calculada por meio das escalas de velocidade, $k^{1/2}$, e de comprimento, l_μ .

$$\nu_t = C_\mu l_\mu k^{1/2} \quad ; \quad l_\mu = y C_l^* (1 - e^{-\text{Re}_y / A_\mu})$$

sendo $C_l^* = \kappa C_\mu^{-3/4}$, $C_\mu = 0,0845$, $A_\mu = 70$ e κ é a constante de Von Kármán.

- O número de Reynolds da turbulência é definido por $\text{Re}_y = (\rho y k^{1/2}) / \mu$
- Além disso, a dissipação ε é avaliada das escalas de velocidade $k^{1/2}$ e de comprimento l_ϵ :

$$\epsilon = k^{3/2} / l_\epsilon$$

com

$$l_\epsilon = y C_l^* (1 - e^{-\text{Re}_y / A_\epsilon}) \quad A_\epsilon = 2 C_l^*$$

- Esse modelo tem sido adotado para a solução do escoamento junto a paredes sólidas em combinação com diferentes modelos para as regiões afastadas.

Modelo de Renormalização k-ε

□ Constantes são obtidas através de desenvolvimento teórico;

■ Viscosidade efetiva

$$\nu_{\text{eff}} = \nu \left[1 + \sqrt{\frac{C_\mu}{\nu}} \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} \right]^2$$

■ Energia cinética da turbulência

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\alpha \nu_t + \nu) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t S^2 - \varepsilon$$

■ Dissipação da energia cinética

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\alpha \nu_t + \nu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t S^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - R$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

61

Modelo de Renormalização k-ε

■ Constantes

$$C_\mu = 0,0845 \quad C_{\varepsilon 1} = 1,42 \quad C_{\varepsilon 2} = 1,68$$

■ Inverso do número de Prandtl para o transporte turbulento

$$\frac{\left| \frac{\alpha - 1,3929}{\alpha_o - 1,3929} \right|^{0,6321}}{\left| \frac{\alpha + 2,3929}{\alpha_o + 2,3929} \right|^{0,3679}} = \frac{\nu}{\nu_{\text{eff}}}$$

■ Termo associado à taxa de deformação do escoamento

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k}$$

$$\alpha_o = 1,0 \quad \eta = S k / \varepsilon \quad \eta_0 \cong 4,38 \quad S^2 = 2 S_{ij} S_{ij}$$

$S_{ij} \rightarrow$ tensor taxa de deformação

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

62

Modelo k-ω

□ O modelo k-ω usa ω ($=\varepsilon/k$) em substituição à dissipação ε . Uma versão, proposta por Wilcox (1993), adota as seguintes equações:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k^*} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho k \omega$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + c_{\omega 1} \frac{\omega}{k} P_k - \rho c_{\omega 2} \omega^2$$

$$\mu_t = \rho c_\mu \frac{k}{\omega} \quad ; c_\mu = 0,09 \quad ; c_{\omega 1} = 0,56 \quad ; c_{\omega 2} = 0,83 \quad ; \sigma_k^* = 2,0 \quad ; \sigma_\omega = 2,0$$

■ A principal vantagem desse modelo é o fato de poder ser empregado junto a paredes sem o emprego de funções-parede ou funções de amortecimento.

■ Além disso, retorna valores menores para as escalas de comprimento junto a paredes sólidas.

■ Versão para números de Reynolds baixos é numericamente estável.

■ No entanto, o modelo é sensível às condições de escoamento livre e não é adequado em regiões de separação.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

63

Modelo SST

□ Menter (1994) propôs uma versão de modelo k-ω para eliminar as suas duas principais deficiências:

- Previsões de valores excessivamente elevados para o coeficiente de atrito em escoamentos sob gradientes adversos de pressão;
- Sensibilidade a condições de escoamento livre.

□ A primeira deficiência foi corrigida pela imposição de um limite para a razão tensão-intensidade

$$-\overline{uv} = \nu_t \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| = a_1 k$$

■ Embora em muitos escoamentos $a_1 \approx 0,3$, valores menores são observados sob gradientes favoráveis de pressão.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

64

Modelo SST

- Uma formulação mais geral pode ser escrita como

$$v_t = \min \left[\frac{c_\mu k}{\omega}, \frac{c_\mu^{1/2} k}{|\Omega F_2|} \right]$$

- O uso do limitador como indicado acima melhora a previsão de escoamentos com gradientes adversos de pressão ou com regiões de separação;
- A função F_2 é introduzida na expressão de tal forma a ser praticamente igual a unidade dentro da camada limite e tender a zero à medida que se alcança a sua borda.

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2)$$

$$\arg_2 = \max \left[\frac{2\sqrt{k}}{\omega y}, \frac{500c_\mu v}{\omega y^2} \right]$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

65

Modelo SST

- Para contornar o problema de sensibilidade às condições de escoamento livre, Menter (1994) adotou uma combinação do modelo $k-\omega$ e do modelo $k-\varepsilon$.
- A transição entre os dois modelos é realizada de forma suave, através da seguinte função:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4)$$

$$\arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\omega y}, \frac{500c_\mu v}{\omega y^2} \right), \frac{2k\omega}{y^2 \max(|\nabla k \cdot \nabla \omega|, 10^{-20})} \right]$$

- A função acima é apenas um expediente para a interpolação dos dois modelos, fazendo com que F_1 tenda à unidade até a metade da espessura da camada limite e então a zero próximo à borda da camada.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

66

Modelo SST

- Equações do modelo

$$\frac{\partial(\rho k_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_j k)}{\partial x_j} = P_k - \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$\frac{\partial(\rho \omega_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_j \omega)}{\partial x_j} = \tilde{c}_{\varepsilon 1} \frac{\omega}{k} P_k - \tilde{c}_{\varepsilon 2} \rho \omega^2 + (1 - F_1) \frac{2}{\sigma_\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]$$

- Todas as constantes dos modelos ($c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, σ_k e σ_ω) são também interpoladas. Por exemplo,

$$\tilde{c}_{\varepsilon 1} = (c_{\varepsilon 1})_{k-\omega} F_1 + (c_{\varepsilon 1})_{k-\varepsilon} (1 - F_1)$$

	k- ω	k- ε
Subcamada limite	Estável Preciso Simples	Instável Menos preciso Complexo
Camada logarítmica	Preciso	Escala de comprimento superestimadas
Camada externa	Não prevê efeitos de transporte	Não prevê efeitos de transporte
Borda da camada limite	Sensível a condições do escoamento livre	Bem definido

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

67

Modelo k- ε Realizável

- O modelo $k-\varepsilon$ realizável se distingue por uma série de características:
 - O parâmetro C_μ varia de acordo com a condição local do escoamento.
 - Apresenta uma versão melhorada para a equação de ε .
- A equação para a energia cinética turbulenta é igual àquela do modelo $k-\varepsilon$ padrão.
- O modelo apresenta maior acurácia nas seguintes situações:
 - Jatos planos e circulares (prevê corretamente o espalhamento dos jatos).
 - Camadas limites com elevados gradientes adversos de pressão ou com separação.
 - Escoamentos com rotação e recirculação.
 - Escoamentos com linhas de corrente curvas.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

68

Modelo k-ε Realizável

- Da relação para a viscosidade turbulenta

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

- Assim, a componente normal do tensor de Reynolds:

$$\overline{u^2} = \frac{2}{3} k - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial x}$$

- Logo, a tensão normal será negativa na seguinte condição:

$$\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial x} > \frac{1}{3C_\mu} \approx 3.7$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

69

Modelo k-ε Realizável

- Expressão para C_μ

$$C_\mu = \frac{1}{A_o + A_s \frac{U^* k}{\varepsilon}} \quad \mu_t \equiv \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

- Garante valores positivos para as tensões normais:

$$\overline{u_i^2} \geq 0$$

- Garante a desigualdade de Cauchy-Schwarz, apresentada no cap. 3:

$$(\overline{u_i u_j})^2 \leq \overline{u_i^2} \overline{u_j^2}$$

2025

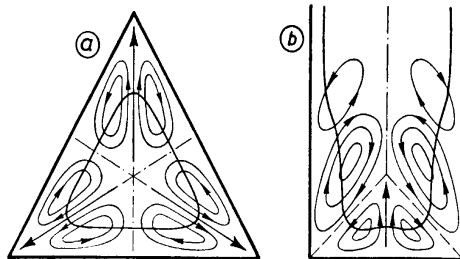
Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

70

Modelos Não-Lineares de Viscosidade Turbulenta

- Como já mencionado, a relação linear usada para $\overline{u_i u_j}$ não é adequada;

- Por exemplo, para um escoamento plenamente desenvolvido em um duto de seção retangular o modelo k-ε prevê a situação de isotropia, contradizendo os resultados experimentais;
- Esse erro ocasiona a supressão do escoamento secundário, verificado experimentalmente, uma vez que para isto precisamos $uu \neq vv$.



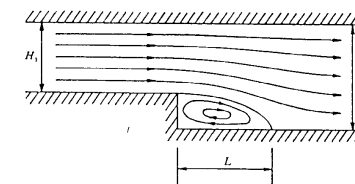
2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

71

Modelos Não-Lineares de Viscosidade Turbulenta

- Outra deficiência é a previsão das tensões normais em regiões de separação do escoamento, onde as mesmas são muito influentes sobre o campo de velocidade.



- À medida que os recursos computacionais permitem a previsão de escoamentos mais complexos, modelos de maior acurácia se tornam necessários.

- Modelos não-lineares têm o potencial de oferecer maior acurácia do que modelos lineares, com um acréscimo moderado no custo computacional.
- A proposta de uma relação não-linear entre as tensões de Reynolds e o tensor deformação foi apresentada há muito tempo atrás por Pope (1975).

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

72

Modelos Não-Lineares de Viscosidade Turbulenta

- Alternativas empregam formulações explícitas não-lineares:

$$-\overline{u_i u_j} = -\nu_\tau \left[S_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] - \nu_\tau \left[a_1 (S_{ik} S_{kj}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_{kl} S_{kl} \right] + \nu_\tau \left[a_2 (\Omega_{ik} S_{kj}) + \Omega_{jk} S_{ki} \right] + \nu_\tau \left[a_1 (\Omega_{ik} \Omega_{kj}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \right] + \dots$$

- Outras tentativas de contornar o problema também consistem na inclusão de termos não-lineares no cálculo de $\overline{u_i u_j}$.

- Rivlin (1957); Lumley (1970); Pope (1978); Speziale (1987).

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

73

Modelos Não-Lineares de Viscosidade Turbulenta

- Modelo de Speziale (1987)

$$\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} \delta_{ij} k + 2c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} s_{ij} + 4c_D c_\mu^2 \frac{k^3}{\epsilon^2} \left(s_{im} s_{mj} - \frac{1}{3} s_{mn} s_{mn} \delta_{ij} \right) + 4c_E c_\mu^2 \frac{k^3}{\epsilon^2} \left(s_{ij}^o - \frac{1}{3} s_{mn}^o \delta_{ij} \right)$$

onde

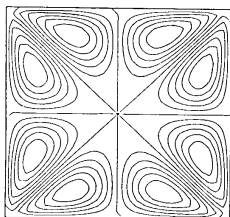
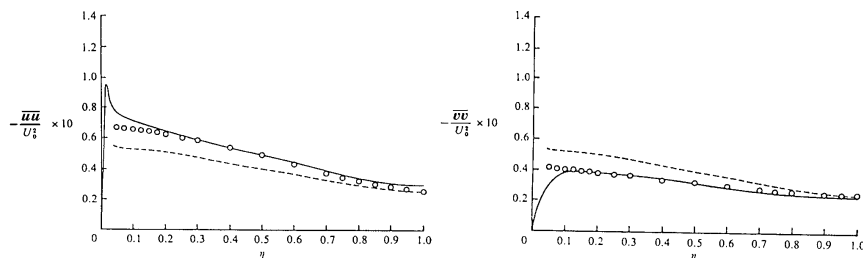
$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \quad s_{ij}^o = \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} + U_j \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_m} S_{mj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_m} S_{mi}$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

74

Modelos Não-Lineares de Viscosidade Turbulenta



- A complexidade de implementação e o tempo de processamento computacional são comparáveis aos do Modelo Diferencial das Tensões de Reynolds (DRSM);
- No entanto, o Modelo das Tensões de Reynolds requer 30% a mais de memória computacional.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

75

Modelo Não-Linear Quadrático

- Outra forma de construir esses modelos é através da inclusão de todas as formas de tensões que satisfazem as propriedades de simetria e contração, ou seja, $u_i u_j = u_j u_i$ e $u_i u_i = 2k$.

- Os coeficientes de cada termo da nova relação são então ajustados para um conjunto de escoamentos.
- Por exemplo, incluindo todos os termos quadráticos de gradientes de velocidade média que satisfazem os requerimentos supracitados, resulta na seguinte relação:

$$a_{ij} \equiv \overline{u_i u_j} / k - (2/3) \delta_{ij} = -(\nu_t / k) S_{ij} + c_1 \frac{\nu_t}{\epsilon} (S_{ik} S_{jk} - (1/3) S_{mk} S_{mk} \delta_{ij}) + c_2 \frac{\nu_t}{\epsilon} (\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}) + c_3 \frac{\nu_t}{\epsilon} (\Omega_{ik} \Omega_{jk} - (1/3) \Omega_{lk} \Omega_{lk} \delta_{ij})$$

sendo

$$S_{ij} = \partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i \text{ e } \Omega_{ij} = \partial U_i / \partial x_j - \partial U_j / \partial x_i$$

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

76

Modelo Não-Linear Quadrático

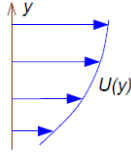
- Em um escoamento cisalhante simples com gradiente de velocidade dU/dy , essa relação quadrática fornece

$$\overline{u^2} = (2/3)k + c_\mu k S^2 [(1/3)c_1 + (1/3)c_3 + 2c_2]$$

$$\overline{v^2} = (2/3)k + c_\mu k S^2 [(1/3)c_1 + (1/3)c_3 - 2c_2]$$

$$\overline{w^2} = (2/3)k + c_\mu k S^2 [-(2/3)c_1 - (2/3)c_3]$$

$$\overline{uv} = -c_\mu k S$$



com $S = (k/\varepsilon) dU/dy$

- A escolha adequada dos coeficientes c_1 , c_2 e c_3 , deve fornecer os níveis esperados de anisotropia ($\overline{uu} > \overline{ww} > \overline{vv}$).
- Pode-se observar que o valor de \overline{uv} não é afetado pelos termos quadráticos.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

77

Modelo Não-Linear Quadrático

- Existem várias propostas de modelos quadráticos na literatura:

Modelo	c_μ	c_1	c_2	c_3	Outros termos
Speziale (1987)	0.09	-0.15	0	0	$-0.3v_t/\varepsilon (\hat{S}_{ij} - \hat{S}_{kk}\delta_{ij}/3)$
Nisizima-Yoshizawa (1987)	0.09	-0.76	0.18	1.04	
Rubinstein-Barton (1990)	0.0845	0.68	0.14	-0.56	
Myong-Kasagi (1990)	0.09	0.28	0.24	0.05	W_{ij}
Shih-Zhu-Lumley (1993)	$\frac{2/3}{1.25+S+0.9\Omega}$	$\frac{0.75/c_\mu}{1000+S^3}$	$\frac{3.8/c_\mu}{1000+S^3}$	$\frac{4.8/c_\mu}{1000+S^3}$	

- A pouca concordância entre os valores dos coeficientes desses modelos indica que provavelmente os mesmos possuem uma faixa de aplicação estreita.
- Mesmo com o uso de termos quadráticos, efeitos de curvatura de linhas de corrente e de remoinho (*swirl*) não podem ser corretamente modelados.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

78

Modelo Não-Linear Cúbico

- Uma alternativa é a inclusão de termos de ordem superior na relação entre as tensões de Reynolds e o tensor deformação.
- Se todas as possíveis relações cúbicas de termos de gradientes de velocidade forem incluídos, chega-se na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & (2/3)k \delta_{ij} - v_t S_{ij} + c_1 v_t \frac{k}{\varepsilon} (S_{ik} S_{jk} - (1/3)S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}) \\ & + c_2 v_t \frac{k}{\varepsilon} (\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}) + c_3 v_t \frac{k}{\varepsilon} (\Omega_{ik} \Omega_{jk} - (1/3)\Omega_{lk} \Omega_{lk} \delta_{ij}) \\ & + c_4 v_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} (S_{ki} \Omega_{lj} + S_{kj} \Omega_{li}) S_{kl} \\ & + c_5 v_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} (\Omega_{il} S_{mj} + S_{il} \Omega_{mj} - (2/3)S_{ln} \Omega_{mn} \delta_{ij}) \Omega_{lm} \\ & + c_6 v_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} S_{ij} S_{kl} S_{kl} + c_7 v_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \end{aligned}$$

- O uso de termos cúbicos permite a previsão de efeitos de curvatura de linhas de corrente e de remoinho (*swirl*).

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

79

Modelo Não-Linear Cúbico

- Suga (1995) desenvolveu um modelo cúbico, otimizando os coeficientes para uma faixa de escoamentos, incluindo cisalhamento simples, *impinging*, curvatura e *swirling*.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
-0.1	0.1	0.26	$-10c_\mu^2$	0	$-5c_\mu^2$	$5c_\mu^2$

com

$$c_\mu = \frac{0.3}{1 + 0.35\eta^{3/2}} \left[1 - \exp\left(\frac{-0.36}{\exp(-0.75\eta)}\right) \right]$$

$$\eta = \max(S, \Omega) \quad S = \frac{k}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \Omega = \frac{k}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

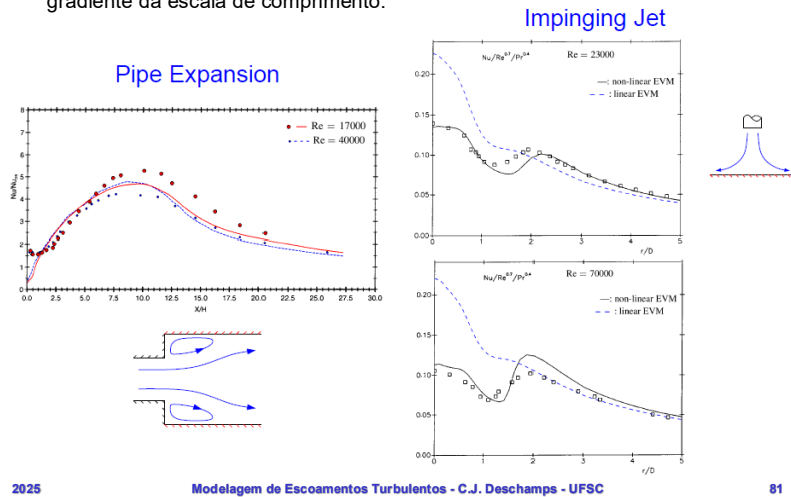
2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

80

Modelo Não-Linear Cúbico

- Craft *et al.* (2000) substituiu a proposta de Yap, Y, por um termo baseado no gradiente da escala de comprimento.



Referências

- Launder, B.E., Reece, G.J., Rodi, W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure, *J. Fluid Mechanics*, 68:537, 1975.
- Launder, B.E., Sharma, B.I. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc, *Lett. in Heat Mass Transfer*, 1:131-138, 1974.
- Menter, F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows, *AIAA 24th Fluid Dynamics Conference*, Orlando, Florida, 1993.
- Pope, S.B. A more general effective-viscosity hypothesis, *J. Fluid Mechanics*, 72:331-340, 1975.
- Reynolds, W.C. Fundamentals of turbulence for turbulence modeling and simulation. *Lecture Notes for Von Karman Institute Agard Report No. 755*, 1987.
- Shih, T.H., Liou, W.W., Shabbir, A. and Zhu, J. A New k-ε Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows - Model Development and Validation. *Computers and Fluids*, 24(3):227-238, 1995.
- Speziale, C.G. On nonlinear k-l and k-e models of turbulence, *J. Fluid Mech.*, 178:459-475, 1987.
- Suga, K. Development and application of a non-linear eddy viscosity model sensitized to stress and strain invariants, *PhD Thesis*, Faculty of Technology, University of Manchester, 1995.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

82

Referências

- Wilcox, D.C. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models, *AIAA J.*, 26:1299-1310, 1988.
- Wilcox, D.C. Progress in hypersonic turbulence modelling, *Proc. AIAA 22nd Fluid Dynamics, Plasmadynamics & Laser Conference*, Honolulu, 1991.
- Wolfshtein, M. The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 12:301-318, 1969.

2025

Modelagem de Escoamentos Turbulentos - C.J. Deschamps - UFSC

83