Lista de exercicios 1
Convecçao
Cristian Herledy Lopez Lara

Exercício 1

1.1

Derivar, a partir de um volume infinitesimal, as equações da conservação da massa, momento e energia na forma diferencial.

Conservação da massa:
Considerando um volume de controle fixo dentro do campo de fluxo (com $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$), infinitesimalmente pequeno, a abordagem para conservação de massa será:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \dot{m}_{entra} - \dot{m}_{sai} \tag{1}$$

OBSERVAÇÃO: Para facilidade, os diagramas de equilíbrio são desenhados em duas dimensões.
Sua forma diferencial seria dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = \rho u \Delta y \Delta z + \rho v \Delta x \Delta z + \rho w \Delta y \Delta z - [\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\Delta x]\Delta y \Delta z - \\ [\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\Delta y]\Delta x \Delta z - [\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\Delta z]\Delta x \Delta y \end{aligned} \tag{2}$$

E dividindo pelo volume constante $\Delta x \Delta y \Delta z$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho z) = 0 \tag{3}$$

Usando a definição de derivada material e o operador divergencia

$$\frac{D}{Dt}\rho + \bigtriangledown(\rho V) = 0 \tag{4}$$

Conservação do momento:
Derivando a análise da segunda lei de Newton e tomando a velocidade como uma propriedade de transporte, o abordagem para conservação do momento dentro do volume de controle (vc) será

$$\frac{\Delta}{\Delta t}(mV)_{vc} = \sum F + \dot{m}V_{entra} - \dot{m}V_{sai} \tag{5}$$

O equilíbrio de forças devido ao fluxo de momento e à tensão normal e tangencial na direção x será

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}(\rho u \Delta x \Delta y \Delta z) + \rho u u \Delta y \Delta z - [\rho u u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u)\Delta x]\Delta y \Delta z - \\ \rho u v \Delta x \Delta z - [\rho u v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v)\Delta y]\Delta x \Delta z - \rho u w \Delta x \Delta y - [\rho u w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w)\Delta z]\Delta x \Delta y \\ +\sigma_x \Delta x \Delta y - (\sigma_x + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_x \Delta x)\Delta y \Delta z - \tau_{xy}\Delta x \Delta y - (\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}\Delta y)\Delta x \Delta z + gx \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \tag{6}$$

Sendo gx o termo fonte. Dividindo pelo volume de controle quando $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$

$$\rho \frac{Du}{Dt} + u[\frac{D}{Dt}\rho + \rho(\frac{\partial}{\partial x}u\frac{\partial}{\partial y}v)] = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + gx \tag{7}$$

Lembrando que o segundo termo é igual a zero segundo a conservação da massa

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + gx \tag{8}$$

Com a definição do tensor de tensão dada por

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda\nabla\cdot\mathbf{V} \tag{9}$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{10}$$

Que combinado com a equação 8 dá origem à equação de Navier-Stokes em x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho wu) = \\ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) + g_x \end{aligned} \tag{11}$$

E para y e z

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho wv) = \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) + g_y \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uw) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vw) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho ww) = \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V}\right) + g_z \end{aligned} \tag{13}$$

Conservação da energia:

Da mesma forma, o diagrama a seguir mostra a análise da primeira lei da termodinâmica para volume infinitesimal

$$\rho\frac{De}{Dt} + e(\frac{D}{Dt}\rho + \bigtriangledown(\rho V)) = -\bigtriangledown q'' + q''' - P\bigtriangledown V \tag{14}$$

$$X = cb^{\frac{3}{4}}tanh(cb^{\frac{3}{4}}) \tag{15}$$