# 5 Modelos de Transporte para as Tensões de Reynolds

Cesar J. Deschamps
2025

# Aspectos Físicos das Equações de Transporte das Tensões de Reynolds

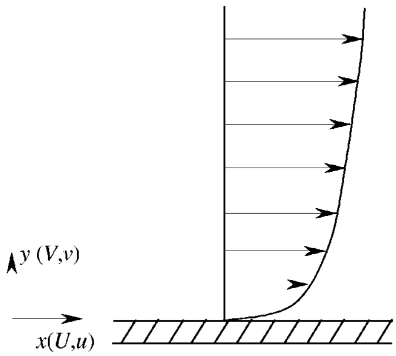
- Os modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta fornecem resultados satisfatórios para diversos escoamentos turbulentos, mas possuem algumas deficiências:
  - São incapazes de prever corretamente os efeitos de curvatura de linhas de corrente sobre o escoamento;
  - A definição de $\overline{u_i u_j}$ usada nesses modelos é inadequada para o cálculo de tensões normais ($\overline{uu}$, $\overline{vv}$ e $\overline{ww}$);
- Uma alternativa para a solução dos problemas acima consiste no cálculo das tensões de Reynolds $\overline{u_i u_j}$, diretamente de suas equações de transporte.

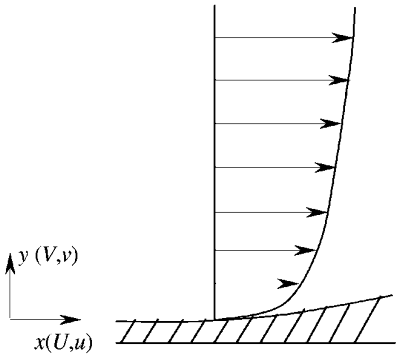
# O Termo de Produção $P_{ij}$

- Vamos analisar o termo de geração de $\overline{u_i u_j}$ devido à ação da deformação do escoamento médio:

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

para escoamentos sobre superfícies plana e curva



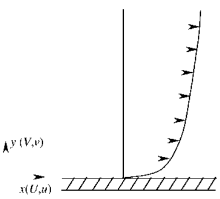






# O Termo de Produção $P_{ij}$

- Para uma camada limite sobre uma placa plana a única tensão importante é $\overline{uv}$.
  - Neste caso a geração de $\overline{uv}$ é dada por

$$P_{12} = -\overline{v^2}\frac{\partial U}{\partial y}$$

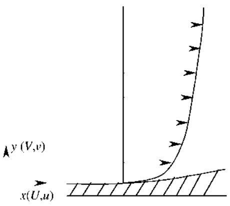


- Por outro lado, para uma camada limite sobre uma superfície levemente curva com

$$\frac{\partial V}{\partial x} \sim 10^{-2}\frac{\partial U}{\partial y}$$

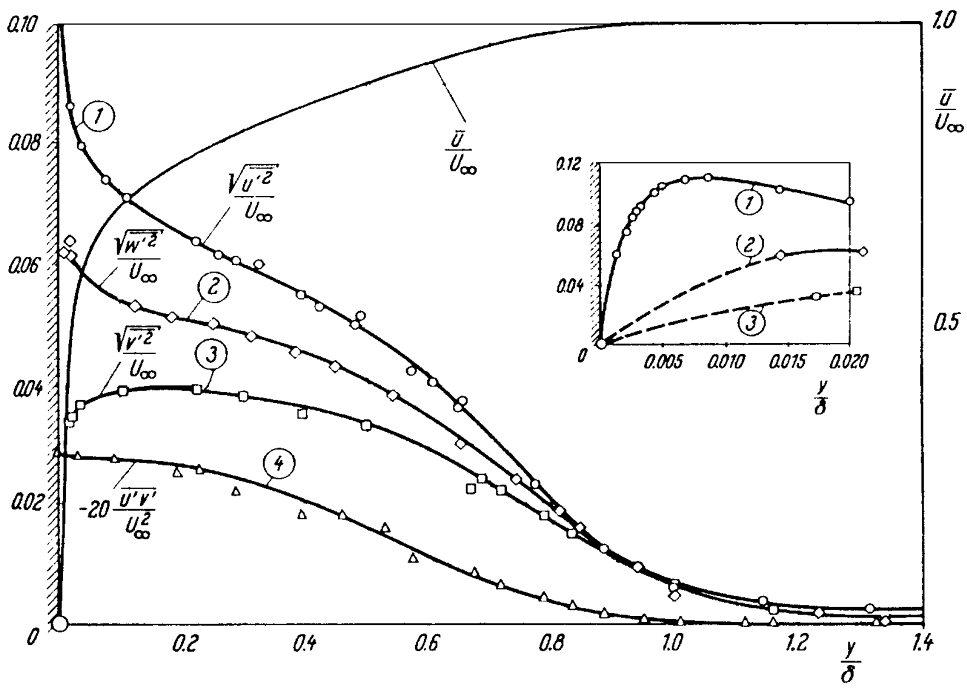
resulta

$$P_{12} = -\left[\overline{v^2}\frac{\partial U}{\partial y} + \overline{u^2}\frac{\partial V}{\partial x}\right]$$



$$P_{22} = -2\overline{uv}\frac{\partial V}{\partial x}$$

# O Termo de Produção $P_{ij}$






# O Termo de Produção $P_{ij}$

- Próximo à superfície $\overline{u^2}$ é muito maior do que $\overline{v^2}$ e, desta forma, aumenta a influência de $\partial V/\partial x$ em $P_{12}$;
  - Além disto, $P_{22}$ se origina puramente de $\partial V/\partial x$ e, como para uma superfície côncava este gradiente é positivo, $\overline{v^2}$ é aumentada;
  - Como resultado, verifica-se que em semelhantes situações $\overline{uv}$ é entre 10 a 15 vezes mais sensível a $\partial V/\partial x$ do que $\partial U/\partial y$;
  - Obviamente, os modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta são incapazes de prever semelhante influência de $\partial V/\partial x$ sobre $\overline{uv}$.
- De acordo com a hipótese de Boussinesq, temos que para um escoamento ao longo de uma superfície curva:

$$-\overline{uv} = \nu_t \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right]$$

  - Ou seja, se a deformação $\partial V/\partial x$ for 1% de $\partial U/\partial y$ teremos somente uma alteração de 1% em $\overline{uv}$.

# O Termo Fonte $F_{ij}$

- A aplicação de uma força de corpo pode alterar as características do escoamento médio e da turbulência;
- Uma flutuação de força de corpo, $f_i$ , origina termos do tipo:

$$F_{ij} = \left(\overline{f_i u_j} + \overline{f_j u_i}\right) \qquad \text{na equação de } \overline{u_i u_j}$$

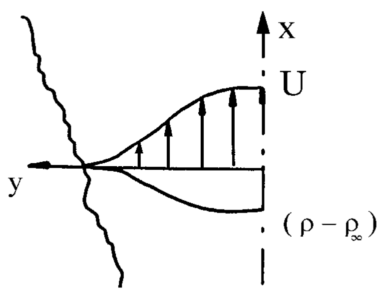
$$F_{i\theta} = \overline{f_i \theta_i} \qquad \text{na equação de } \overline{u_i \theta}$$

- Geralmente os efeitos sobre o escoamento médio podem ser modelados usando o conceito de viscosidade turbulenta;
- No entanto, os efeitos sobre $\overline{u_i u_j}$ e $\overline{u_i \theta}$ só podem ser descritos por modelos baseados nas suas respectivas equações de transporte.



# O Termo Fonte $F_{ij}$: Forças de Empuxo

- Vamos considerar o caso de uma pluma térmica




- As flutuações de força originadas pelo campo gravitacional são:

$$f_i = \rho' g_i$$

# O Termo Fonte $F_{ij}$: Forças de Empuxo

- No presente caso temos

$$g_i = (-g, 0, 0)$$

- Logo a geração de $\overline{u_i u_j}$ ($P_{ij}$ e $F_{ij}$) é dada por

$$\overline{u^2}\ :\ \ -\overline{uv}\frac{\partial U}{\partial y}\ -2\,\overline{u\rho'}\frac{g}{\rho}$$

$$\overline{v^2}\ \ \mathrm{e}\ \ \overline{w^2}\!:\ \ 0$$

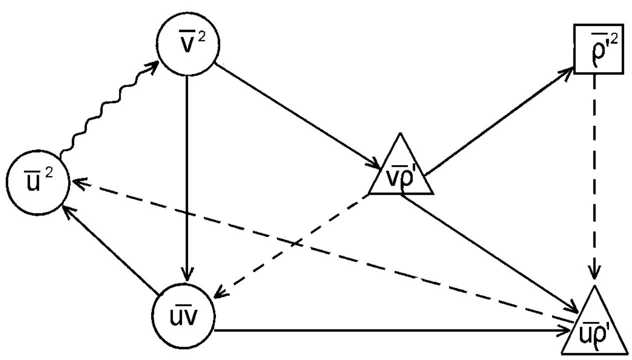
$$\overline{uv}\ :\ \ -\overline{v^2}\frac{\partial U}{\partial y} - \overline{v\rho'}\frac{g}{\rho}$$

  - $\partial U/\partial y$ é negativo, logo $\overline{uv}$ é positivo;
  - Da mesma forma, como $\partial\rho/\partial y$ é positivo, $\overline{v\rho'}$ é negativo;
  - Assim, a força de empuxo aumenta a magnitude de $\overline{uv}$.



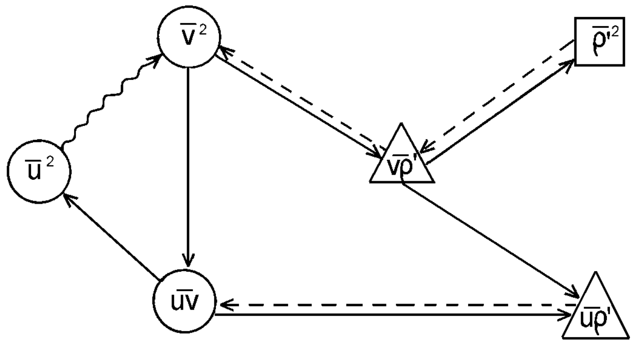
# O Termo Fonte $F_{ij}$: Forças de Empuxo

- Vamos considerar as relações entre correlações de segunda ordem nas equações de transporte para um escoamento bidimensional;
  - Neste caso: $g_i$ = (- g, 0, 0)



# O Termo Fonte $F_{ij}$: Forças de Empuxo

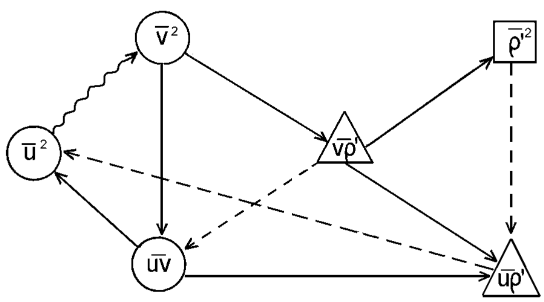
- Para um escoamento horizontal teríamos: $g_i = (0, -g, 0)$.

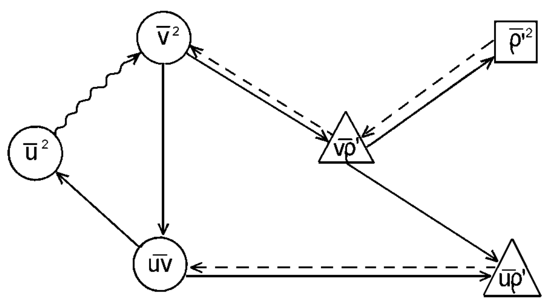





# O Termo Fonte $F_{ij}$: Forças de Empuxo

- As relações entre as tensões e os fluxos de escalares associados a gradientes de velocidade e de escalares médios são as mesmas para as duas situações de escoamento;
  - Porém, as relações decorrentes do campo gravitacional são bem distintas nos dois casos;
- A complexidade das relações entre tensões e fluxos turbulentos sugere que os modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta terão, na melhor das hipóteses, pouca generalidade;
  - Assim, somente através do emprego de equações de transporte para $\overline{u_i u_j}$ e $\overline{u_i \theta}$ é que realmente podemos alcançar uma descrição adequada do fenômeno.



# O Termo Fonte $F_{ij}$: Força de Coriolis

- Uma outra situação onde a equação de transporte de $\overline{u_i u_j}$ mostra-se superior a hipótese de Boussinesq ocorre quando forças de Coriolis estão presentes;
- Quando um sistema de coordenadas é sujeito a uma velocidade angular $\omega$, aparecem acelerações associadas ao uso do sistema de coordenadas não-inercial. Matematicamente, isto pode ser expresso como

$$\left(\frac{D\vec{V}}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D\vec{V}}{Dt}\right)_R + \vec{\omega}\otimes\left(\vec{\omega}\otimes\vec{r}\right) + 2\vec{\omega}\otimes\vec{V}_R$$

  - Os subíndices "I" e "R" referem-se aos sistemas de coordenadas inercial e em rotação, respectivamente.
  - $(DV/Dt)_I$ é a aceleração total a que o fluido estará sujeito e é a quantidade a ser igualada ao somatório das forças agindo sobre o escoamento;
- Usando a expressão para $(DV/Dt)_I$ podemos escrever a equação da conservação da quantidade de movimento com base em velocidades relativas ao sistema de coordenadas em rotação;

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\bullet\nabla\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \vec{\omega}\otimes\left(\vec{\omega}\otimes\vec{r}\right) - 2\vec{\omega}\otimes\vec{V} + \nu\nabla^2\vec{V}$$



# O Termo Fonte $F_{ij}$: Força de Coriolis

- A força de Coriolis no escoamento turbulento origina uma força de flutuação

$$f_i = -2\omega_k \in_{ikm} u_m$$

  - O símbolo de permutação $\in_{ikm}$ é definido como

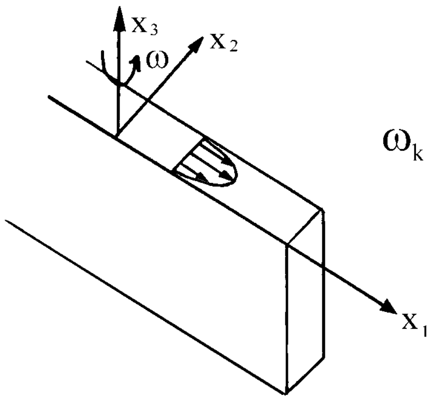
$$\in_{ikm} = \begin{cases} 0 & \text{se dois ou mais índices se repetem} \\ 1 & \text{se a permutação é seqüencial} \\ -1 & \text{se a permutação é alternada} \end{cases}$$

  - Assim, na equação de transporte de $\overline{u_i u_j}$ temos o seguinte termo fonte

$$F_{ij} = -2\omega_k\left(\in_{ikm}\overline{u_m u_j} + \in_{jkm}\overline{u_m u_i}\right)$$

# O Termo Fonte $F_{ij}$: Força de Coriolis

- Para um duto com rotação do tipo, tem-se $F_{12} = -2\,\omega\,(\overline{u^2} - \overline{v^2})$




  - Neste caso $P_{12}$ é negativa próximo à superfície de pressão e positiva junto à superfície de sucção;
  - Portanto, $\overline{uv}$ é aumentada junto à superfície de pressão e amortecida próximas à superfície de sucção.



# O Termo de Redistribuição $\varphi_{ij}$

- Vamos considerar as equações de $\overline{u_i u_j}$ para o caso de um escoamento sobre uma placa plana:

$$\frac{D\overline{uv}}{Dt} = -\overline{v^2}\frac{\partial U}{\partial y} + \overline{\frac{p}{\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{uv^2} + \frac{\overline{pu}}{\rho}\right] - 2\nu\overline{\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}}$$

$$\frac{D\overline{u^2}}{Dt} = -2\overline{uv}\frac{\partial U}{\partial y} + 2\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{u^2 v}\right] - 2\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2}$$

$$\frac{D\overline{v^2}}{Dt} = 0 + 2\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial v}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{v^3} + 2\frac{\overline{pv}}{\rho}\right] - 2\nu\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2}$$

$$\frac{D\overline{w^2}}{Dt} = 0 + 2\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial w}{\partial z}} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{w^2 v}\right] - 2\nu\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2}$$

  - As flutuações de pressão transferem energia da direção principal do escoamento para as outras direções. Este mecanismo é essencial para a manutenção da turbulência.
  - Através da distribuição de energia, as flutuações de pressão atuam no sentido contrário da anisotropia da turbulência.

# Modelo Básico para a Avaliação das Tensões de Reynolds

- Qualquer modelo que seja proposto para o fechamento das equações de transporte das tensões de Reynolds, deve possuir uma série de propriedades:
  - <u>Formato tensorial correto</u>: mesmas propriedades de simetria e contração que o processo real exibe.
  - <u>Invariância em relação ao sistema de coordenadas</u>: deve ser independente do eixo de referência, incluindo eixos com aceleração.
  - <u>Fisicamente realizável</u>: não deve prever valores fisicamente impossíveis, tais como tensões normais negativas.
  - <u>Reproduzir valores limites junto a superfícies</u>.
  - <u>Independência geométrica</u>: não deve depender de detalhes da geometria sob análise.
- Os modelos a serem descritos a seguir obedecem as primeiras duas condições.



# Modelação da Dissipação $\varepsilon_{ij}$

- Conforme já discutido, o processo de dissipação viscosa acontece no nível das pequenas escalas:

$$\varepsilon_{ij} = -2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$$

- Para número de Reynolds elevado, pode-se supor que a turbulência de pequenas escalas será praticamente isotrópica (isotropia local).
- Assim, para número de Reynolds elevado, assume-se geralmente que a dissipação segue esta condição de isotropia, ou seja,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$$

- Esta condição implica em um efeito igual para as tensões normais e nenhum para tensões cisalhantes;
  - A validade da hipótese de isotropia para $\varepsilon_{ij}$ não é totalmente aceita entre os vários grupos de pesquisa da área;
  - No entanto, devido à dificuldade de se obterem dados confiáveis de $\varepsilon_{ij}$, a maioria dos autores tenta compensar, através do termo de redistribuição $\varphi_{ij}$, qualquer imprecisão desta hipótese.

# Modelação da Difusão $d_{ij}$

- O termo de difusão na equação na tensão de Reynolds possui a seguinte forma:

$$d_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\overline{p u_i}}{\rho}\delta_{jk} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho}\delta_{ik} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}\right]$$

  - Com exceção de regiões próximas a paredes, os termos associados à flutuação de pressão são desprezíveis.
  - Além disto, termos de ordem superior possuem um efeito menor sobre o valor da tensão de Reynolds. Desta forma, pode-se adotar um modelo simplificado para o transporte devido à correlação tripla de velocidade.

- A hipótese generalizada do gradiente de difusão de Daly e Harlow (1970) é a forma mais utilizada para a aproximação do transporte difusivo:

$$\overline{u_k \phi} = -c_\phi \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_m}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_m}$$

  - Assim, se $\phi$ representar a tensão de Reynolds instantânea $\overline{u_i u_j}$, a relação acima fornece

$$\overline{u_k u_i u_j} = -c_s \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_m}\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m}$$

  onde $c_s = 0{,}22$.



# Modelação da Redistribuição $\varphi_{ij}$

- Através da manipulação da equação diferencial de $u_i$, pode-se chegar a uma equação para a flutuação de pressão p:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(u_i u_k - \overline{u_i u_k}\right) - 2\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

  - Chou (1945) mostrou que a solução desta equação substituída no termo de $\varphi_{ij}$ produz um novo termo composto de três parcelas:

$$\varphi_{ij,1} = \frac{1}{4\pi}\int_{vol} \overline{\left[\frac{\partial^2 u_\ell u_m}{\partial x_\ell \partial x_m}\right]'\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]}\frac{d\forall}{\vec{r}}$$

$$\varphi_{ij,2} = \frac{1}{4\pi}\int_{vol} 2\left[\frac{\partial U'_\ell}{\partial x_m}\right]\overline{\frac{\partial u'_m}{\partial x_\ell}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]}\frac{d\forall}{\vec{r}}$$

$$\varphi_{ij,w} = \frac{1}{4\pi}\int_{area} \frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{\vec{r}}\,\overline{p'\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]}dS$$

# Modelação da Redistribuição $\varphi_{ij}$

- De fato, a equação anterior sugere que o termo de redistribuição é afetado por diferentes processos físicos;
  - A primeira parcela, $\varphi_{ij,1}$ , é associada a flutuações de velocidade

$$\varphi_{ij,1} = \frac{1}{4\pi}\int_{vol} \overline{\left[\frac{\partial^2 u_\ell u_m}{\partial x_\ell \partial x_m}\right]' \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]} \frac{d\forall}{\vec{r}}$$

  - A segunda, $\varphi_{ij,2}$ , representa contribuições provenientes de quantidades do escoamento médio e da turbulência

$$\varphi_{ij,2} = \frac{1}{4\pi}\int_{vol} 2\left[\frac{\partial U'_\ell}{\partial x_m}\right] \overline{\frac{\partial u'_m}{\partial x_\ell}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]} \frac{d\forall}{\vec{r}}$$



# Modelação da Redistribuição $\varphi_{ij}$

- Finalmente $\varphi_{ij,w}$ representa a influência de paredes sólidas na redistribuição da turbulência.

$$\varphi_{ij,w} = \frac{1}{4\pi}\int_{area} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{\vec{r}} \overline{p'\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]} dS$$

- Os termos em $\varphi_{ij}$ atuam no sentido de redistribuir energia entre as tensões de Reynolds;
- Assim, tanto $\varphi_{ij,1}$ como $\varphi_{ij,2}$ atuam para levar a turbulência à condição de isotropia (onde tensões normais são iguais e tensões cisalhantes são zero, ou seja, $\overline{u_i u_j} = 2/3\ k\ \delta_{ij}$);

# Modelação da Redistribuição $\varphi_{ij}$

- Seguindo esta ideia, (Rotta, 1951) assumiu para a modelação de $\varphi_{ij,1}$ que em escoamentos onde as taxas de deformação do escoamento são nulas, o retorno à condição de isotropia é proporcional ao nível de anisotropia:

$$\varphi_{ij,1} = -c_1 \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}\right)$$

onde $c_1$ = 1,8

- Empregando o mesmo princípio, Naot et. al. (1970) propuseram que $\varphi_{ij,2}$ teria o papel de redistribuir os termos de produção $P_{ij}$ no sentido da condição de isotropia. Assim,

$$\varphi_{ij,2} = -c_2\left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}\right)$$

onde $c_2$ = 0,6



# Modelação da Redistribuição $\varphi_{ij}$

- Em um escoamento simples com um gradiente de velocidade dU/dy, o modelo descrito até aqui retorna valores idênticos para $\overline{u_2^2}$ e $\overline{u_3^2}$.
- No entanto, isto não é observado experimentalmente, mesmo em escoamentos livres. Em escoamentos junto a superfícies sólidas, anisotropias ainda maiores ocorrem.
- Flutuações de pressão são refletidas por superfícies e isto ocasiona um amortecimento da componente de flutuação normal à superfície.
  - Assim, à medida que se aproxima de uma parede sólida, as flutuações de velocidade normais à parede decaem muito mais rapidamente do que as paralelas.
- Valores típicos de tensões em escoamentos ($\overline{u_i u_j}$/k)

| | $\overline{u_1^2}$ | $\overline{u_2^2}$ | $\overline{u_3^2}$ | $\overline{u_1 u_2}$ |
|---|---|---|---|---|
| Escoamento livre | 0,95 | 0,47 | 0,55 | 0,32 |
| Escoamento junto á parede | 1,20 | 0,25 | 0,55 | 0,25 |

  - Um dos efeitos da superfície é impedir a transferência de energia para a tensão normal à parede. Isto também termina por atuar na redução da tensão de cisalhamento.

# Modelação da Redistribuição $\varphi_{ij}$

- Ao contrário do transporte difusivo devido a mecanismos viscosos, os efeitos das paredes sobre $\varphi_{ij}$ são sentidos mesmo em regiões afastadas no escoamento.
- Uma proposta para a modelação de $\varphi_{ij,w}$ foi apresentada por Gibson e Launder (1978) e é dada por:

$$\varphi_{ij,w} = \varphi'_{ij,1} + \varphi'_{ij,2}$$

onde

$$\varphi'_{ij,1} = c'_1 \frac{\varepsilon}{k}\left[\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2}\overline{u_k u_j} n_k n_i - \frac{3}{2}\overline{u_k u_i} n_k n_j\right] f_w$$

$$\varphi'_{ij,2} = c'_2\left[\varphi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2}\varphi_{ik,2} n_k n_j - \frac{3}{2}\varphi_{jk,2} n_k n_i\right] f_w$$

  - As constantes $c'_1$ e $c'_2$ são iguais a 0,5 e 0,3, respectivamente e $n_i$ são componentes do vetor unitário $\vec{n}$ normal à parede sólida;
  - Em escoamentos incidindo contra uma superfície, o termo $\varphi'_{ij,2}$ produz o efeito contrário ao esperado, ou seja, aumenta a componente normal à parede.



# Modelação da Redistribuição $\varphi_{ij}$

- Uma forma alternativa $\varphi'_{ij,2}$ , proposta por Craft e Launder (1992) fornece o comportamento adequado em ambas as situações de escoamento:

$$\begin{aligned}\phi^w_{ij2} &= -0.08\frac{\partial U_l}{\partial x_k}\overline{u_l u_k}(\delta_{ij} n_t n_t - 3 n_i n_j) f_w \\ &\quad - 0.1 k a_{lm}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_m} n_l n_k \delta_{ij} - 3/2\,\frac{\partial U_i}{\partial x_m} n_l n_j - 3/2\,\frac{\partial U_j}{\partial x_m} n_l n_i\right) f_w \\ &\quad + 0.4 k \frac{\partial U_k}{\partial x_l} n_l n_k \left(n_i n_j - 1/3\, n_t n_t \delta_{ij}\right) f_w\end{aligned}$$

- A função de escala de comprimento $f_w$ é introduzida de tal forma a diminuir a atuação de $\varphi'_{ij,1}$ e $\varphi'_{ij,2}$ à medida que se afasta da parede.
- Uma definição comumente utilizada para $f_w$ é

$$f_w = \frac{k^{3/2}/\varepsilon}{c_\ell d_w}$$

onde $c_\ell$ = 2,44 e $d_w$ é uma distância à parede que precisa ser interpretada adequadamente.

# Modelo para as Equações de Transporte de $\overline{u_i u_j}$

- Com as considerações anteriores, a equação modelada para o transporte de $\overline{u_i u_j}$ pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \; \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = -\left[\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right] + \frac{1}{\rho}\left[\overline{f_i u_j} + \overline{f_j u_i}\right]$$

$$-c_1 \frac{\varepsilon}{k}\left[\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}\right] - c_2\left[P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + c_s \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_m}\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m}\right]$$

$$-\frac{2}{3}\varepsilon \delta_{ij}$$



# Equação de Transporte para $\varepsilon$

- Verifica-se que a taxa de dissipação $\varepsilon$ é uma incógnita nas equações das tensões $\overline{u_i u_j}$ e, assim, precisa ser avaliada.
  - Como vimos anteriormente, a equação de $\varepsilon$ é uma das principais fontes de erro nos modelos de turbulência;
  - Esta incerteza sobre a qualidade da equação de $\varepsilon$ tem consequências diretas sobre a modelação das equações de transporte de $\overline{u_i u_j}$;

- Por exemplo, como poderemos saber se eventuais falhas na previsão de $\overline{u_i u_j}$ provém de erros na determinação de $\varepsilon$ ou das formas modeladas introduzidas nas suas equações de transporte (especialmente $\varphi_{ij}$)?

- Embora existam dificuldades para esse diagnóstico, podemos separar as fontes dos problemas comumente encontrados.
  - Por exemplo, erros nos níveis de $\varepsilon$ agem no sentido de produzir níveis de energia excessivamente baixos ou elevados;
  - Por outro lado, deficiências em $\varphi_{ij}$ originam níveis inconsistentes para a energia relativa entre as tensões.

# Equação de Transporte de ε

- A forma mais utilizada da equação modelada de $\varepsilon$ é essencialmente a mesma adotada em modelos de viscosidade turbulenta:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = d_\varepsilon + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

- No entanto, o termo de difusão $d_\varepsilon$ é modelado através da hipótese generalizada do gradiente de difusão de Daly e Harlow (1970):

$$d_\varepsilon = c_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}$$

onde $c_\varepsilon$ = 0,18.

- Além disto,

$$P_k = \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$



# Equação de Transporte para k

- A energia cinética k das flutuações que aparece no termo de redistribuição $\varphi_{ij,1}$ e na equação de $\varepsilon$ pode ser obtida diretamente da soma das tensões normais;
- No entanto, geralmente o uso de uma equação de transporte também para k torna o procedimento iterativo mais estável;
- Neste caso, da mesma forma como realizado para a equação de $\varepsilon$, o termo de difusão $d_k$ na equação de k é aproximado pela hipótese generalizada do gradiente de difusão. Assim,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = c_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon$$

onde $c_k$ = 0,22

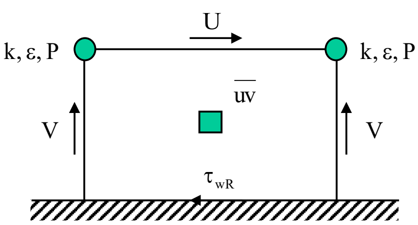
# Condições de Contorno para $\overline{u_i u_j}$.

- A maioria dos modelos de transporte de $\overline{u_i u_j}$ foram desenvolvidos para regiões de escoamentos completamente turbulento;
- Para a solução de escoamentos limitados por regiões sólidas deve-se adotar um dos seguintes métodos:
  - Uso de funções-parede;
  - Inclusão de modelos baseados em $\mu_t$ na região junto às paredes que possam calcular os efeitos viscosos.



# Condições de Contorno para $\overline{u_i u_j}$.

- O ponto nodal adjacente à parede é localizado na região turbulenta, conforme mostrado abaixo, e então funções-parede são utilizadas para especificar as condições de contorno;




- A tensão cisalhante resultante na parede, $\tau_{wR}$, é relacionada à velocidade $U_P$ e à energia cinética $k_P$ no ponto P pela seguinte relação

$$\frac{U_P}{\tau_{wR}/\rho} c_\mu^{1/4} k_P^{1/2} = \frac{1}{\kappa} \ln\left[\frac{E\, y_P\, c_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\nu}\right]$$

# Condições de Contorno para $\overline{u_i u_j}$.

- Assim, para a tensão cisalhante junto à parede

$$\overline{uv} = -\frac{\tau_{wx}}{\rho} \quad ; \quad \overline{vw} = -\frac{\tau_{wz}}{\rho} \quad ; \quad \overline{uw} \cong 0$$

- As tensões normais são obtidas da solução direta de suas equações de transporte, com as seguintes modificações junto à parede:
  - O transporte na parede por difusão é fixado como zero;



# Condições de Contorno para $\overline{u_i u_j}$.

- A geração e a dissipação nas equações são integradas com um tratamento diferenciado

$$P_{\overline{u^2}} = \iint \int_{y_V}^{y_N} -2\,\rho\,\overline{uv}\,\frac{\partial U}{\partial y}\,dy\,dA \quad ; \quad P_{\overline{v^2}} \cong 0$$

$$P_{\overline{w^2}} = \iint \int_{y_V}^{y_N} -2\,\rho\,\overline{vw}\,\frac{\partial W}{\partial y}\,dy\,dA$$

onde $y_V = \dfrac{k^{1/2} y}{\nu} \cong 20$

- Por outro lado a dissipação é calculada da seguinte forma:

$$\bar{\varepsilon} = \iint \int_0^{y_V} \frac{2\nu k_P}{y}\,dy\,dA + \iint \int_{y_V}^{y_N} \frac{k_P^{3/2}}{\kappa y}\,dy\,dA$$

# Condições de Contorno para $\overline{u_i u_j}$.

- Para resolver o escoamento junto à parede, pode-se utilizar um modelo de viscosidade turbulenta na região viscosa e no restante do domínio o modelo das tensões de Reynolds;
- Quando isto é feito, deve-se fornecer condições de contorno para $\overline{u_i u_j}$, k e $\varepsilon$ na interface entre os dois modelos;
- Se o modelo de $\nu_t$ for o modelo k-$\varepsilon$ os valores para k e $\varepsilon$ são obtidos diretamente;
- Caso o modelo de comprimento de mistura seja utilizado, as seguintes relações para a determinação de k e $\varepsilon$ podem ser usadas:

$$\varepsilon = P_k \qquad ; \qquad k = \left( \frac{\varepsilon\, \nu_t}{c_\mu} \right)^{1/2}$$



# Condições de Contorno para $\overline{u_i u_j}$.

- Os valores de $\overline{u_i u_j}$ são avaliados através da relação de Kolmogorov:

$$\overline{u_i u_j} = -\,\nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3}\, k\, \delta_{ij}$$

- A relação acima não fornece boas estimativas para as tensões normais.
- Assim, geralmente assume-se que a derivada da razão $\overline{u_i u_i}/k$ seja zero na interface entre os dois modelos. Isto é implementado fazendo

$$(\overline{u_i u_i})_{DSM} = k_{DSM}\, (\overline{u_i u_i}/k)_{EVM}$$