Lista de Exercícios Nº 2

Exercício Nº 1

Verifique que

a) $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$

b) $\partial_i x_i = 3$

c) $\partial_i x_j = \delta_{ij}$

d) $\epsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$

e) $\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = 0$

f) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$

g) $\epsilon_{iks}\epsilon_{mks} = 2\delta_{im}$

h) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kij} = 6$

i) $\epsilon_{rst} + \epsilon_{tsr} = 0$

Exercício Nº 2

Simplifique quando for possivel, senão indique quando estiver na forma mais simplificada:

a) $\delta_{ik}\delta_{kj}$

b) $\delta_{ik}a_{jk}$

c) $\delta_{ij}a_{km}$

d) $\epsilon_{ijk}a_i b_j$

e) $\epsilon_{ijk}a_j a_k$

f) $\epsilon_{ijk}a_{ij}$

g) $\epsilon_{ijk}\partial_i v_j$

h) $\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\varphi$

Exercício Nº 3

Utilizando notação inicial mostre que:

a) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

b) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

c) $\vec{\nabla}(F + G) = \vec{\nabla}F + \vec{\nabla}G$

d) $\vec{\nabla}(FG) = F\vec{\nabla}G + G\vec{\nabla}F$

e) $\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

f) $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\varphi) \times \vec{A} + \varphi(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

g) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = 0$

h) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

i) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

j) $\vec{\nabla}\times(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$

k) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\times\vec{B}$

l) $\vec{V} \times (\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \vec{\nabla}(V^2/2) - \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\vec{V} \quad , \quad V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$

m) $\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\varphi) = \varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi$

Exercício Nº 4

Utilizando notação indicial, mostre que:

a) $\vec{A} \cdot \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}^T \cdot \vec{A}$

b) $\vec{\nabla}\cdot(\phi\overline{\overline{T}}) = \phi\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{T}} + \overline{\overline{T}}^T \cdot \vec{\nabla}\phi$

c) $\vec{\nabla}(\phi\vec{u}) = \phi\vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\phi)\vec{u}$

d) $tr\overline{\overline{A}}^T = tr\overline{\overline{A}}$

e) $\vec{\nabla}\cdot(\overline{\overline{T}} \cdot \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{T}}) + \mathrm{tr}\ (\overline{\overline{T}}^T \cdot \vec{\nabla}\vec{u})$

f) $\det\overline{\overline{A}} = \det\overline{\overline{A}}^T$