Convecção

Lista de exercicios 3

Cristian Herledy Lopez Lara

Exercício 3,19 livro texto

(a) Mostre que, no diagrama da Figura 1, a vazão de ar através da abertura e a transferência de calor por convecção são dadas pelas expressões

$$\dot{m} = (\rho_q - \rho_f)\frac{gD^3HW}{24\nu L} \tag{1}$$

$$q = \dot{m}C_p(T_q - T_f) \tag{2}$$

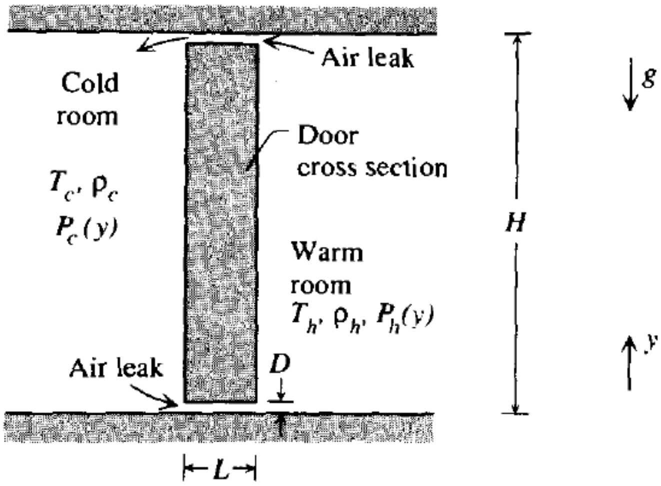

Figura 1: Diagrama de fluxo de ar entre volume quente e frio

Desenvolvimento

A pressão em cada volume depende da altura (y). Para cada volume é

$$P_q(y) = P_q(0) - \rho_q g y \tag{3}$$

$$P_f(y) = P_f(0) - \rho_f g y \tag{4}$$

$$\Delta P(y) = (\rho_q - \rho_f)g\frac{H}{2} \tag{5}$$

Assumindo o fluxo através das aberturas como placas planas, completamente desenvolvidas, a velocidade horizontal é calculada usando a equação de Hagen-Poiseuille. A distribuição de pressão é substituída pela equação ()3) y $dx = L$

$$U = \frac{D^2}{12\mu}\left(\frac{-dP}{dx}\right) \tag{6}$$

$$U = \frac{D^2}{12\mu}\left(\frac{(\rho_q - \rho_f)g\frac{H}{2}}{L}\right) \tag{7}$$

Considerando o fluxo de massa atuando na área $A = WD$ como

$$\dot{m} = \rho U W D \tag{8}$$

Substituindo U

$$\dot{m} = \rho\frac{D^2}{12\mu}\left(\frac{(\rho_q - \rho_f)g\frac{H}{2}}{L}\right)WD \tag{9}$$

$$\dot{m} = \frac{D^3}{24\nu}\frac{(\rho_q - \rho_f)gHW}{L} \tag{10}$$

Esta expressão é equivalente à da equação (1)
(a) Calcular $\dot{m}$ e q

Substituindo os valores numéricos em (2) e (10)

$$\dot{m} = \frac{(0,5x10^{-3}m^3)^3 * 0,082\frac{Kg}{m^3} * 9,81\frac{m}{s^2} * 2,2m * 1,5m}{24\nu * 1.52x10^{-5}\frac{m^2}{s} * 0,05m} = 1,823x10^{-5}\frac{Kg}{s} \tag{11}$$

$$q = 1,823x10^{-5}\frac{Kg}{s} * 1006\frac{J}{Kg * K} * 20K = 0,36W \tag{12}$$

A vazão mássica é proporcional à altura da abertura na proporção de $q \sim D^3$. Portanto, um aumento em D incrementa proporcionalmente a taxa de transferência de calor.

Exercício 3,27 livro texto

Relatar analiticamente as expressões

$$\Delta\widetilde{T}_{min} = \frac{(T_{peak} - T_0)}{\frac{q'''A}{k_0}} \tag{13}$$

$$\left(\frac{H}{L}\right)_{opt} \tag{14}$$

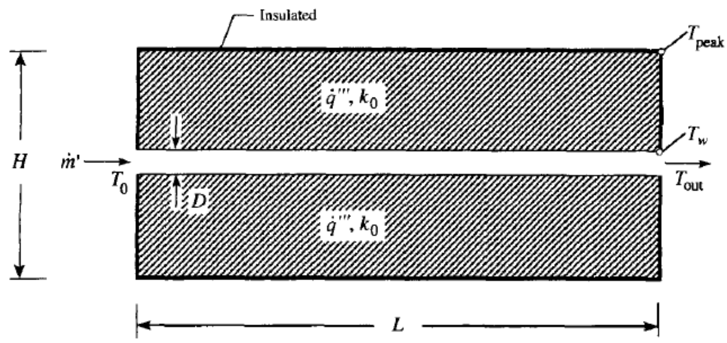

Figura 2: Volume sólido 2D com condutividade térmica k_0

Desnvolvimento

A área de transferência de calor e, portanto, a área a ser otimizada será dada por $A = HL$. O calor extraído obedece à equação

$$Q = q'''HL \tag{15}$$

O problema é analisado calculando a queda de temperatura do ponto mais quente até o ponto mais baixo T_0. Na relação H/L, o fluxo de calor será perpendicular a U quando $\frac{H}{L} < 1$, y quando k_0 tem valores baixos.
Assim, a queda de temperatura entre o ponto mais quente T_{peak} e a saída do duto com o ar aquecido T_0 será dada pela equação de condução deduzida por [2, eq. 4.1]

$$\frac{\Delta T k}{q'''A} = \frac{1}{8} \times \frac{H}{L} \tag{16}$$

$$(T_{peak} - T_w) = \frac{q'''HA}{8k} \tag{17}$$

E o aumento da temperatura por convecção ao longo da direção do fluxo será dado por

$$(T_{out} - T_0) = \frac{q'''HL}{\dot{m}C_p} \tag{18}$$

O excesso de temperatura é então a soma de ambas as expressões

$$\Delta\widetilde{T} = (T_{peak} - T_w) + (T_{out} - T_0) = \frac{q'''HA}{8k} + \frac{q'''HL}{\dot{m}C_p} \tag{19}$$

Esta equação pode ser adimensional através das seguintes relações

$$H_{adim} = \frac{H}{\sqrt{A}}\ ,\ L_{adim} = \frac{L}{\sqrt{A}}\ ,\ M = \frac{\dot{m}C_p\sqrt{A}}{k} \tag{20}$$

$$\Delta\widetilde{T} = \frac{H_{adim}}{8L_{adim}} + \frac{1}{MH_{adim}} \tag{21}$$

O valor ótimo desta expressão é calculado com a derivada igual a zero, considerando $H \sim \frac{1}{L}$.

$$\Delta\widetilde{T} = \frac{H_{adim}^2}{8} + \frac{1}{MH_{adim}} \tag{22}$$

$$\frac{d}{dH_{adim}}\Delta\widetilde{T} = \frac{2H_{adim}}{8} - \frac{1}{MH_{adim}^2} \tag{23}$$

$$\sim \frac{H_{adim}^3}{4} - \frac{1}{M} \sim H_{opt} = \left(\frac{M}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{24}$$

Como $H \sim \frac{1}{L}$.

$$L_{opt} = \left(\frac{4}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{25}$$

Quais são as expressões equivalentes a (14). É importante concluir que estas relaçãoes de aspecto global H_{opt} e L_{opt} sao independentes de D. Agora, sustituindo em (21)

$$\Delta\widetilde{T}_{min} = \frac{\left(\frac{M}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{8\left(\frac{4}{M}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{M\left(\frac{M}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} \sim 0,94M^{\frac{1}{3}} \tag{26}$$

Quando a vazão mássica $\dot{m}$ e a área A são grandes, M aumenta. Com esta suposição, os cálculos serão válidos quando $M > 4$

$$M = \frac{\dot{m}C_p\sqrt{A}}{k} > 4 \tag{27}$$

Portanto, o fluxo de massa $\dot{m}_{min}$ para garantir $\Delta\widetilde{T}_{min}$ e manter a relação de aspecto ideal $\left(\frac{H}{L}\right)_{opt}$ será

$$M > \frac{4k}{C_p\sqrt{A}} \tag{28}$$

Exercício demonstração

Determinar o número de Nusselt para um escoamento interno, laminar, plenamente desenvolvido, com propriedades constantes, seção transversal circular e sujeito a um fluxo de calor uniforme na superfície.

Realizando um balanço de energia sem fluxo de calor por conducção como na Figura 3, a equação de energia para o volume diferencial é descrita por

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{29}$$

Reemplazando o gradiente axial da temperatura em termos da temperatura media e superficial, fica

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{(T_s - T)}{(T_s - T_m)} \frac{dT_m}{dx} \tag{30}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right] \tag{31}$$

Integrando duas vezes para obter o perfil T, obtemos

$$T(r,x) = \frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16r_o^2}\right] + C_1 \ln r + C_2 \tag{32}$$

$$CC1 = T = T_{(x,r)}@r = 0 \quad CC2 = T_{rmax} = T_s(x)@r = r_0 \tag{33}$$

Aplicando as condições de contorno, $C_1 = 0$ e C_2:

$$C_2 = T_s(x) - \frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left(\frac{3r_o^2}{16}\right) \tag{34}$$

Sustituindo na eq. (32)

$$T(r,x) = T_s(x) - \frac{2u_m r_o^2}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[\frac{3}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{r}{r_o}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right] \tag{35}$$

Reemplazando as expressões para temperatura media y perfil de velocidade axial

$$T_m = \frac{2}{u_m r_o^2}\int_0^{r_o} uTr\,dr \ , \ \frac{u(r)}{u_m} = 2\left[1 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right] \tag{36}$$

$$T_m(x) = T_s(x) - \frac{11}{48}\left(\frac{u_m r_o^2}{\alpha}\right)\left(\frac{dT_m}{dx}\right) \tag{37}$$

Usando a equacao do fluxo masico, obtem-se

$$\dot{m} = \rho u_m \left(\pi \frac{D^2}{4}\right) \tag{38}$$

$$T_m(x) - T_s(x) = -\frac{11}{48}\frac{q_s'' D}{k} \tag{39}$$

E com $q_s'' = h(T_s - T_m)$

$$h = \frac{48}{11}\left(\frac{k}{D}\right) \tag{40}$$

$$Nu_D \sim \frac{hD}{k} = 4.36 \tag{41}$$

A uma taxa de transferência de calor constante

Referências

[1] Adrian Bejan, Convection Heat Transfer. Durham, North Carolina, 3rd Edition, 2004.

[2] Mohammad H. N. Naraghi, Solution of similarity transform equations for Boundary layers. Manhattan College,USA, ASME Exposition, 2004.