Modelagem de Escoamentos Turbulentos. Lista de Exercícios No. 1

Cristian Herledy López Lara

Maio 2025

Questão 1

Desenvolvimento

A lei de potência é uma expressão usada para representar o perfil de velocidade através de um canal.

$$\frac{\bar{u}}{U} = (1 - \frac{r}{R})^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

A figura a seguir mostra a curva de velocidade para n = 7 (o valor mais comumente usado para escoamento turbulento) e também outros valores, como 2 e 10, que representam os perfis para escoamento laminar e turbulento, respectivamente. Devido à difusividade da turbulência, a velocidade próxima às paredes cai mais rapidamente. Portanto, o perfil é mais plano à medida que $r \to 0$.

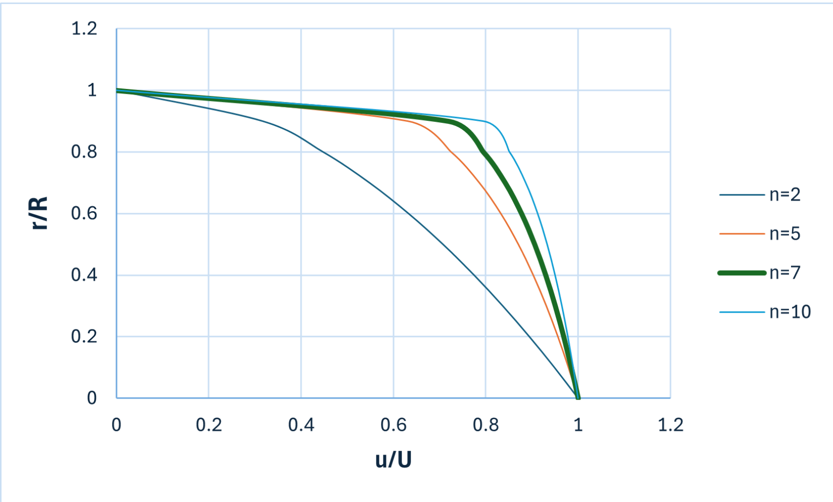

Figura 1: Perfil de velocidade para escoamentos 0laminar y turbulento a traves da Lei de potencia

A expressão da lei de potência tem as seguintes inconsistências.

Inconsistência 1

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{U}{7(1-\frac{r}{R})^{\frac{1}{7}}} \tag{2}$$

Quando $r = 0$, no eixo central de simetría da tubulação

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{U}{7^{\frac{1}{7}}} \tag{3}$$

A pendiente da curva é diferente de zero, Portanto, é inconsistente, visto que a velocidade no centro é máxima e sua derivada em relação a r deveria ser zero. Isso também sugere que a tensão de cisalhamento $\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial r}$ neste ponto é negativa, que na realidade também deveria ser zero.

Inconsistência 2

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{U}{7(1-\frac{r}{R})^{\frac{1}{7}}} \tag{4}$$

Quando $r = R$, na parede da tubulação

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{U}{0^{\frac{1}{7}}} \sim -\infty \tag{5}$$

Este valor na parede também é inconsistente, uma vez que o valor da tensão de cisalhamento $\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow -\infty$, o que não é fisicamente possível, pois o escoamento seria completamente restrito.

Questão 2

Desenvolvimento

Executando operações algébricas para as expressões, obtemos

Laminar:

$$Nu_x = Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \tag{6}$$

$$Nu_x = \left(\frac{\rho U x}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu C p}{k}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\rho^{\frac{1}{2}} U^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} C p^{\frac{1}{3}}}{\mu^{\frac{1}{6}} k^{\frac{1}{3}}} \tag{7}$$

Turbulento:

$$Nu_x = Re_x^{\frac{4}{5}} Pr^{\frac{1}{3}} \tag{8}$$

$$Nu_x = \left(\frac{\rho U x}{\mu}\right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{\mu C p}{k}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\rho^{\frac{4}{5}} U^{\frac{4}{5}} x^{\frac{4}{5}} C p^{\frac{1}{3}}}{\mu^{\frac{7}{15}} k^{\frac{1}{3}}} \tag{9}$$

É notável que as diferenças estejam nos parâmetros de densidade e viscosidade.

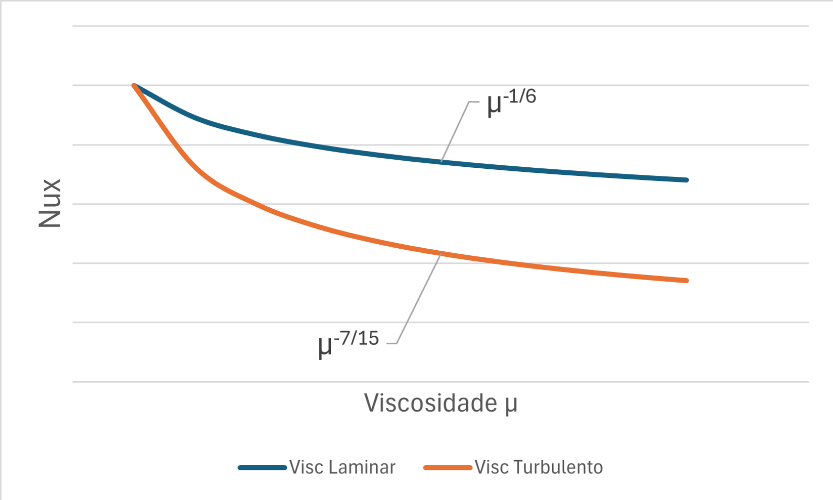

Figura 2: Efeito da viscosidade em escoamentos laminar e turbulento

A viscosidade tem um efeito mais significativo no escoamento laminar. Isso ocorre porque, em problemas com números de Reynolds baixos, a troca de energia na forma de calor está associada ao fenômeno de difusão (o termo viscoso da equação de energia).

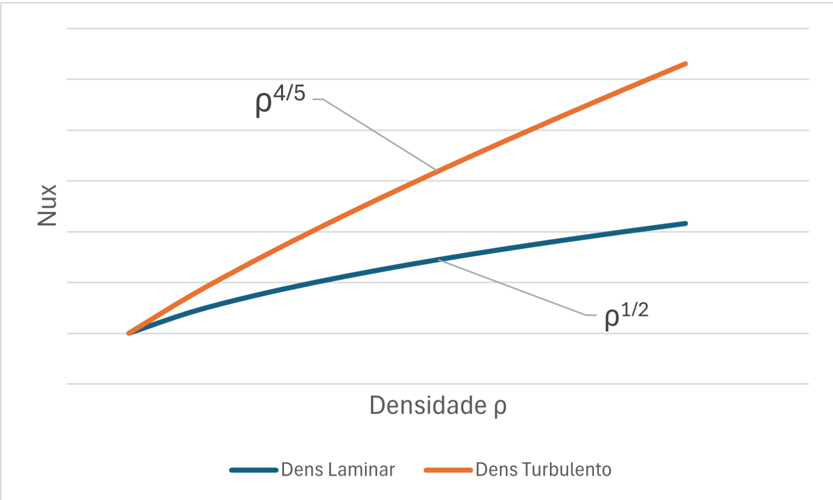

Figura 3: Efeito da densidade em escoamentos laminar e turbulento

Por outro lado, a densidade é diretamente proporcional ao número de Nusselt (e ao coeficiente de transferência de calor). Isso se justifica considerando a física do fenômeno, visto que em escoamentos de alta velocidade a transferência de calor é realizada por advecção, o que tem um efeito direto na interação na escala das grandes estruturas do fluido.

Questão 3

Desenvolvimento

Partindo da expressão da equação de movimento na forma vetorial

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \bigtriangledown p + \vec{f} + \nu \bigtriangledown^2 \vec{u} \tag{10}$$

Desprezando as forças de campo e abrindo a derivada material

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \bigtriangledown \vec{u} = \frac{1}{\rho} \bigtriangledown p + \nu \bigtriangledown^2 \vec{u} \tag{11}$$

Da definicão de vorticidade que é dada pela expressão $\vec{\omega} = \bigtriangledown \otimes \vec{u}$, o rotacional é aplicado a equação de movimento

$$\bigtriangledown \otimes \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \bigtriangledown \vec{u} = \frac{1}{\rho} \bigtriangledown p + \nu \bigtriangledown^2 \vec{u} \right) \tag{12}$$

$$\bigtriangledown \otimes \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \bigtriangledown \otimes \vec{u} \cdot \bigtriangledown \vec{u} = \bigtriangledown \otimes \frac{1}{\rho} \bigtriangledown p + \bigtriangledown \otimes \nu \bigtriangledown^2 \vec{u} \tag{13}$$

Usando a identidade $\vec{u} \cdot \bigtriangledown \vec{u} = (\bigtriangledown \otimes \vec{u}) \otimes \vec{u} + \frac{1}{2} \bigtriangledown (\vec{u} \cdot \vec{u})$

$$\bigtriangledown \otimes \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \bigtriangledown \otimes \left(\vec{\omega} \otimes \vec{u} + \frac{1}{2} \bigtriangledown (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right) = \bigtriangledown \otimes \left(\frac{1}{\rho} \bigtriangledown p \right) + \bigtriangledown \otimes \left(\nu \bigtriangledown^2 \vec{u} \right) \tag{14}$$

Como $\bigtriangledown \otimes \bigtriangledown f = 0$

$$\bigtriangledown \otimes \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \bigtriangledown \otimes (\vec{\omega} \otimes \vec{u}) = \bigtriangledown \otimes \left(\nu \bigtriangledown^2 \vec{u} \right) \tag{15}$$

Com a identidade $\bigtriangledown \otimes \bigtriangledown^2 \vec{f} = \bigtriangledown^2 (\bigtriangledown \otimes \vec{f})$

$$\bigtriangledown \otimes \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \bigtriangledown \otimes (\vec{\omega} \otimes \vec{u}) = \nu \bigtriangledown^2 (\bigtriangledown \otimes \vec{u}) \tag{16}$$

Usando a identidade $\bigtriangledown \otimes (\vec{\omega} \otimes \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \bigtriangledown) \cdot \vec{\omega} - (\bigtriangledown \cdot \vec{\omega})\vec{u} - (\vec{\omega} \cdot \bigtriangledown)\vec{u} + \vec{\omega}(\bigtriangledown \cdot \vec{u})$

$$\bigtriangledown \otimes \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + ((\vec{u} \cdot \bigtriangledown) \cdot \vec{\omega} - (\bigtriangledown \cdot \vec{\omega})\vec{u} - (\vec{\omega} \cdot \bigtriangledown)\vec{u} + \vec{\omega}(\bigtriangledown \cdot \vec{u})) = \nu \bigtriangledown^2 (\bigtriangledown \otimes \vec{u}) \tag{17}$$

Considerando que $\bigtriangledown \cdot \vec{f} = 0$

$$\bigtriangledown \otimes \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + ((\vec{u} \cdot \bigtriangledown) \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \bigtriangledown)\vec{u}) = \nu \bigtriangledown^2 (\bigtriangledown \otimes \vec{u}) \tag{18}$$

$$\frac{\partial (\bigtriangledown \otimes \vec{u})}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \bigtriangledown) \cdot \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \bigtriangledown)\vec{u} + \nu \bigtriangledown^2 (\bigtriangledown \otimes \vec{u}) \tag{19}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \bigtriangledown) \cdot \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \bigtriangledown)\vec{u} + \nu \bigtriangledown^2 \vec{\omega} \tag{20}$$

Que na forma de notação indicial fica

$$\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial x_j} = \vec{\omega}_i \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \vec{\omega}_i}{\partial x_j \partial x_i} \tag{21}$$

Do termo da geraçao de vorticidade $\vec{\omega}_i \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial x_j}$

$$\vec{\omega} = \bigtriangledown \otimes \vec{u} \;\; = \;\; \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \hat{e_1} - \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \hat{e_2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \hat{e_3} \tag{22}$$

Como em um escoamento 2D só temos as componentes x_1 e x_2

$$\vec{\omega} = \bigtriangledown \otimes \vec{u} \ = \ 0\hat{e_1} - 0\hat{e_2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\hat{e_3} \tag{23}$$

A componente $\hat{e_3}$ é nula para o escoamento bidimensional.

Questão 4

Desenvolvimento

Partindo da expressão da equação de movimento de Cauchy na forma vetorial

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{f} \ + \bigtriangledown \cdot \ \bar{\bar{T}} \tag{24}$$

E multiplicando por $\vec{u}$

$$\vec{u}\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{u}\rho\vec{f} \ + \vec{u} \bigtriangledown \cdot \bar{\bar{T}} \tag{25}$$

Lembrando a definição de trabaloh total por unidade de volume

$$\bigtriangledown\vec{u} \cdot \bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}} \bigtriangledown \cdot\vec{u} + \vec{u} \bigtriangledown \cdot\bar{\bar{T}} \tag{26}$$

Onde o primeiro termo do lado dereito é equivalente a deformação por trabalho e o segundo é o incremento da energia cinêtica. Usando a simetria do tensor tensão, em notação indicial temos que ($e_{ij} = \bar{\bar{D}}$)

$$\bar{\bar{T}} \bigtriangledown \cdot\vec{u} = \tau_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \tau_{ij}e_{ij} \tag{27}$$

Agora, com a definição do tensor tensão e sustituindo na eq. (27)

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{2}{3}\mu(\bigtriangledown \cdot \vec{u})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{28}$$

$$\tau_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -p \bigtriangledown \cdot\vec{u} - \frac{2}{3}\mu(\bigtriangledown \cdot \vec{u})^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij} \tag{29}$$

Considerando que $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$ o termo de dissipação viscosa fica

$$2\frac{\mu}{\rho}e_{ij}e_{ij} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right) \tag{30}$$

$$2\frac{\mu}{\rho}e_{ij}e_{ij} = \frac{2}{4}\nu\left(\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right) \tag{31}$$

$$\triangle = \frac{1}{2}\nu\left(\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right) \tag{32}$$

Questão 4

Desenvolvimento

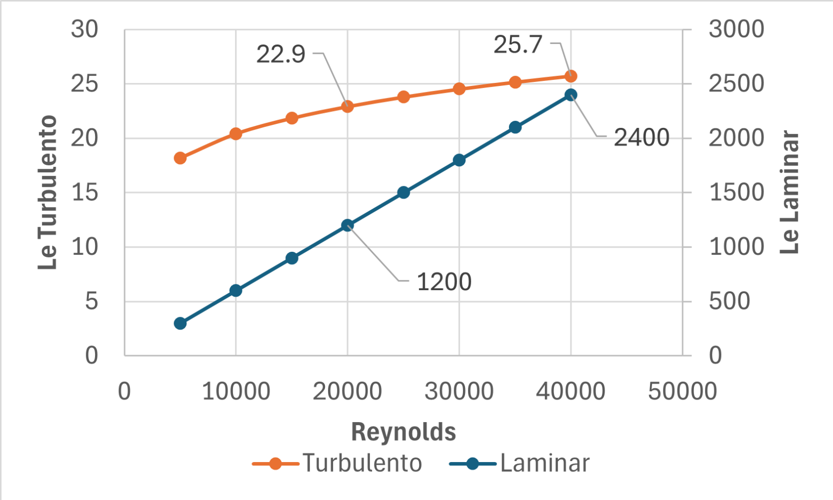

Figura 4: Evolução da Le como função do numero de Reynols em regimes laminar e turbulento

O gráfico acima foi construído com as expressões da Lista, para observar a evolução dos valores do comprimento de entrada L_e em relação ao aumento do número de Reynolds para escoamentos laminares e turbulentos (o diâmetro é o mesmo em ambos os casos).

O comprimento de entrada é significativamente maior no regime laminar do que no regime turbulento, e isso é justificado pela presença de estruturas de pequena e grande escala no escoamento turbulento, o que torna o transporte de momento muito mais eficiente e o escoamento se desenvolve mais rapidamente.

Para um número de Reynolds de 40.000, o comprimento de entrada para escoamento laminar aumenta em 100%, enquanto para escoamento turbulento aumenta em 11%. Conclui-se que, em números de Reynolds altos, o escoamento totalmente desenvolvido é alcançado com comprimentos de entrada muito menores.

Referências

[1] Pijush Kundu, Fluid Mechanics. San Diego, California USA, 2nd Edition, 2004.

[2] Alvaro Prata, Fundamentos da mecanica dos fluidos. Florianopolis UFSC, Brasil, 1ra edição, 2023.