

Convecção
Lista de exercícios 2
Cristian Herledy Lopez Lara

Exercício 2,19 livro texto

Considerando a análise de transferência de calor do problema 2.18 e levando em conta que L é longo o suficiente para que o fluxo de calor q_b não dependa de L , Determinar: A) Se b aumenta a uma taxa de duas vezes, por qual fator q_b aumentará? B) Calcule a razão $q_{B,w}/q_{B,a}$

Informações de entrada

Do problema 2,18:

$$q_B = (T_B - T_\infty)(hpkA)^{\frac{1}{2}} \tanh \left[L \left(\frac{hp}{kA} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1)$$

$$\frac{hb}{k_f} = 0,664 Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{U_\infty b}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

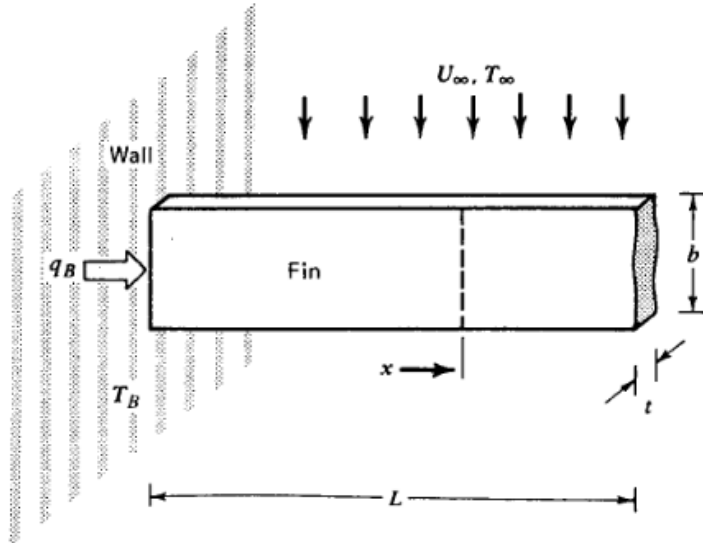


Figure 1: Transferência de calor em aleta com fluxo laminar paralelo a b .

Como $x \approx L$, supõe-se que seja longo o suficiente para não influenciar o comportamento de q_B , então $\tanh L \rightarrow 1$ na equação (1)

$$q_B = (T_B - T_\infty)(hpkA)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Considerando que $p = 2b$, $A = bt$ e calculando h de (2):

$$q_B = (T_B - T_\infty) \left(\frac{0,664 Pr^{\frac{1}{3}} k_f k b t 2b}{b} \left(\frac{U_\infty b}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Item A

A partir da equação (4), a relação entre q_b e b é encontrada

$$q_B = (T_B - T_\infty) \left(1,328 Pr^{\frac{1}{3}} k_f k t \left(\frac{U_\infty}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}} \quad (5)$$

Por tanto, q_B é proporcional a b na forma

$$q_B \sim b^{\frac{3}{4}} \quad (6)$$

$$q_B \sim 2^{\frac{3}{4}} = 1,68 \quad (7)$$

Quando a altura da aleta é **dobrada**, a taxa de transferência de calor **aumenta em 68%**

Item B

Os radios podem ser calculados substituindo as propriedades de cada fluido na equação (5)

$$\frac{q_{B,w}}{q_{B,a}} = \frac{(T_B - T_\infty) \left(1,328 Pr_w^{\frac{1}{3}} k_w k t \left(\frac{U_\infty}{\nu_w} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}}{(T_B - T_\infty) \left(1,328 Pr_a^{\frac{1}{3}} k_a k t \left(\frac{U_\infty}{\nu_a} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}} \quad (8)$$

Propriedades do escoamento como a velocidade, temperatura e volume, são constantes para cada caso. A razões totales podem ser calculadas a partir das razões das propriedades do fluido .

$$\frac{q_{B,w}}{q_{B,a}} = \frac{\left(Pr_w^{\frac{1}{3}} k_w \nu_w^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(Pr_a^{\frac{1}{3}} k_a \nu_a^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{Pr_w}{Pr_a} \right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\nu_a}{\nu_w} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{k_a}{k_w} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{7}{0,72} \right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{0,07} \right)^{\frac{1}{4}} (23)^{\frac{1}{2}} = 13,5 \quad (10)$$

Concluindo, a taxa de transferência de calor na água é aproximadamente **13 vezes maior** que no ar.

Exercício 2,23 livro texto

Com base na velocidade U e grossura do jet D do problema 2.22, calcule a ordem de magnitude de Dt e T para fluidos com $Pr \gg 1$ e $Pr \ll 1$.

Informações de entrada

$$\frac{D_T(x)}{D(x)} \sim Pr^{-1/2} \quad (11)$$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \sim \left(\frac{U_0 D_0 / \nu}{x / D_0} \right)^{1/3} Pr^{1/2} \quad (Pr \gg 1) \quad (12)$$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \sim \left(\frac{U_0 D_0 / \nu}{x / D_0} \right)^{1/3} \quad (Pr \ll 1) \quad (13)$$

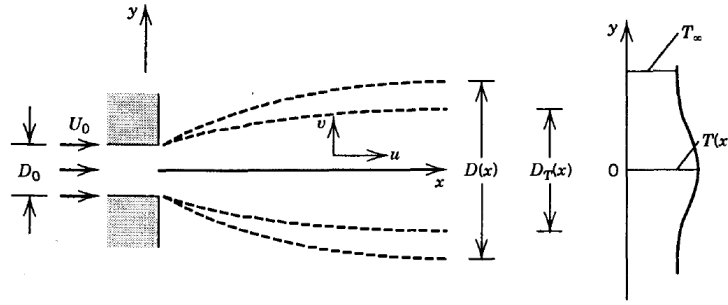


Figure 2: Esquema de camada limite hidrodinâmica e térmica em fluxo de jato

Do problema 2,22:

$$\frac{D(x)}{D_0} \sim \left(\frac{x / D_0}{U_0 D_0 / \nu} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (14)$$

$$\frac{U(x)}{U_0} \sim \left(\frac{x / D_0}{U_0 D_0 / \nu} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (15)$$

Desenvolvimento

Primeiro, a equação de energia para a camada limite é estabelecida. Nesta equação, o termo associado aos efeitos da difusividade em x é negligenciado [1, eq. (2.27)].

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

Fazendo a análise de escala obtém-se

$$u \frac{\Delta T}{x} + v \frac{\Delta T}{D_T} \sim \alpha \left(\frac{\Delta T}{D_T^2} \right) \quad (17)$$

Da equação de conservação de massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{U}{x} \sim \frac{v}{D_T} \quad (18)$$

A equação (11) é reduzida a

$$U \frac{\Delta T}{x} \sim \alpha \left(\frac{\Delta T}{D_T^2} \right) \quad (19)$$

Com esta relação, pode-se calcular a razão entre as camadas limites hidrodinâmica e térmica

$$\frac{D_T(x)}{D(x)} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{6}} / U_0^{\frac{2}{3}} D_0^{\frac{1}{3}}}{U_0^{\frac{2}{3}} D_0^{\frac{1}{3}} / \nu^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}}} = Pr^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

A equação (11) é satisfeita. Esta expressão mostra como o número de Prandtl é proporcional às dimensões das camadas limites. Agora, avaliamos como a temperatura muda ao longo do desenvolvimento da camada limite térmica. Invocando a integração da equação de energia

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (21)$$

Aplicando a fórmula integral de Leibniz [1, eq 2.50']

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} uT \, dy + T_{\infty} v_{\infty} - T_0 v_0 \right] = \alpha \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=\infty} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=-\infty} \right) \quad (22)$$

Como a temperatura fora da camada limite é a temperatura do reservatório, a variação de temperatura ao longo e dentro dessa zona é zero.

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} uT \, dy + T_{\infty} v_{\infty} - T_0 v_0 \right] = 0 \quad (23)$$

Para resolver o segundo e terceiro termos da integral, o balanço de massa é usado.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y} \, dy = 0 \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} u \, dy + (v_{\infty} - v_{-\infty}) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} u \, dy = -(v_{\infty} - v_{-\infty}) \quad (27)$$

Substituindo em (23)

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} uT dy - T_{\infty} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} u dy = 0 \quad (28)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} u(T - T_{\infty}) dy = 0 \quad (29)$$

É mostrado que o transporte de T na camada limite não depende de x. Como a expressão dentro da derivada (a integral) é constante

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(T - T_{\infty}) dy = \text{Constante} \sim U_0 D_0 (\Delta T_0) \quad (30)$$

Onde $\Delta T_0 = (T_0 - T_{\infty})$. Agora para a escala da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(T - T_{\infty}) dy \sim U D_{\text{geral}}(\Delta T) \quad (31)$$

Para determinar a escala D_{geral} , fazemos a análise de base com a escala de números de Prandtl indicada nas expressões (12) e (13)

Caso 1: $Pr \gg 1$

$$U \Delta T D \sim U_0 \Delta T_0 D_0 \quad (32)$$

$$\Delta T \sim \frac{U_0 \Delta T_0 D_0}{U D} \quad (33)$$

Das expressões (14) e (15), U e D são substituídos

$$\Delta T \sim \frac{U_0 \Delta T_0 D_0}{\left(\frac{U_0^4 D_0^2}{vx}\right)^{1/3} \left(\frac{vx}{U_0 D_0^{1/2}}\right)^{2/3}} \quad (34)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} \sim \left(\frac{U_0 D_0^2}{vx}\right)^{1/3} \quad (35)$$

Caso 2: $Pr \ll 1$

$$U \Delta T D_T \sim U_0 \Delta T_0 D_0 \quad (36)$$

$$\Delta T \sim \frac{U_0 \Delta T_0 D_0}{U D_T} \quad (37)$$

$$\Delta T \sim \frac{U_0 \Delta T_0 D_0}{U D Pr^{-1/2}} \quad (38)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} \sim \left(\frac{U_0 D_0^2}{vx}\right)^{1/3} Pr^{1/2} \quad (39)$$

Para ambos os casos, a distribuição de temperatura ao longo de x será proporcional à velocidade U_0 e ao diâmetro do jato D_0 . No primeiro caso, quando dentro do fluxo laminar a camada limite térmica é maior que a hidrodinâmica, o efeito na temperatura a jusante do fluxo também será influenciado por Prandtl.

Exercício solução de camada limite de Blasius

Uma técnica comumente usada para resolver o problema do fluxo na camada limite é através do método de **similaridade** de Blasius.

Este método converte o problema de equações diferenciais parciais em um problema **não linear de equações ordinárias** de terceira ordem, usando uma variável de similaridade para os perfis **u e T** . A equação não linear será **resolvida numericamente**.

Matematicamente o perfil de velocidade é definido como

$$\frac{u}{U_\infty} = f(\eta) \quad (40)$$

Onde η é proporcional a y por um fator dependente de x . η será proporcional a

$$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta) \quad (41)$$

$$\eta = \frac{y}{x} \text{Re}_x^{1/2} \quad (42)$$

O problema será regido pelas equações de conservação de massa (24) e momento (43) para a camada limite

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (43)$$

Com o método da similaridade o problema se reduz a

$$2f''' + f f'' = 0 \quad (44)$$

$$f' = f = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0 \quad (45)$$

$$f' \rightarrow 1 \quad \text{as} \quad \eta \rightarrow \infty \quad (46)$$

A solução da equação fornece o perfil de velocidade na camada limite f' e a tensão de cisalhamento.

Neste trabalho será dada uma solução numérica ao problema com o cálculo das derivadas com diferenças finitas da forma

$$f' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta \eta} \quad (47)$$

$$f'' = \frac{f'_{i+1} - f'_i}{\Delta \eta} \quad (48)$$

$$f''' = \frac{f''_{i+1} - f''_i}{\Delta\eta} \quad (49)$$

Os cálculos na etapa de iteração $i+1$ serão avaliados com base na etapa anterior de acordo com as expressões

$$f_{i+1} = f_i + (\Delta\eta)f'_i \quad (50)$$

$$f'_{i+1} = f'_i + (\Delta\eta)f''_i \quad (51)$$

$$f''_{i+1} = f''_i + (\Delta\eta)f'''_i \quad (52)$$

E da equação (44)

$$f'''_i = -\frac{f_i f''_i}{2} \quad (53)$$

A solução obtida neste trabalho foi alcançada fazendo espaçamentos de domínio de $\eta = 0,01$. Diferentes valores estimados para f'' ($0,2 < f'' < 0,8$) foram testados.

O cálculo foi feito até $\eta \sim 6$ para garantir o valor de U_∞ de acordo com a condição de contorno (46).

n	f	f'	f''	f'''
0.00	0.000	0.000	0.332	0.000
0.50	0.041	0.166	0.331	-0.007
1.00	0.164	0.330	0.323	-0.026
1.50	0.368	0.487	0.303	-0.056
2.00	0.647	0.631	0.267	-0.087
2.50	0.994	0.753	0.218	-0.108
3.00	1.394	0.848	0.162	-0.113
3.50	1.836	0.916	0.108	-0.099
4.00	2.306	0.959	0.064	-0.074
4.50	2.792	0.983	0.034	-0.047
5.00	3.286	0.995	0.016	-0.026
5.50	3.785	1.000	0.006	-0.012
6.00	4.286	1.002	0.002	-0.005

Figure 3: Exemplo de tabela para cálculo numérico do perfil de velocidade

Análise e conclusão

O resultado com convergência mais estável foi o valor de referência de $f'' = 0,332$. Com este valor, A solução numérica mostrou que $u = 0,99U_\infty$ foi atingido com $\eta = 4,98$.

Na imagem a seguir, pode-se ver graficamente como a razão de velocidade f' em relação à variável de similaridade η converge para 1 quando u tende a U_∞

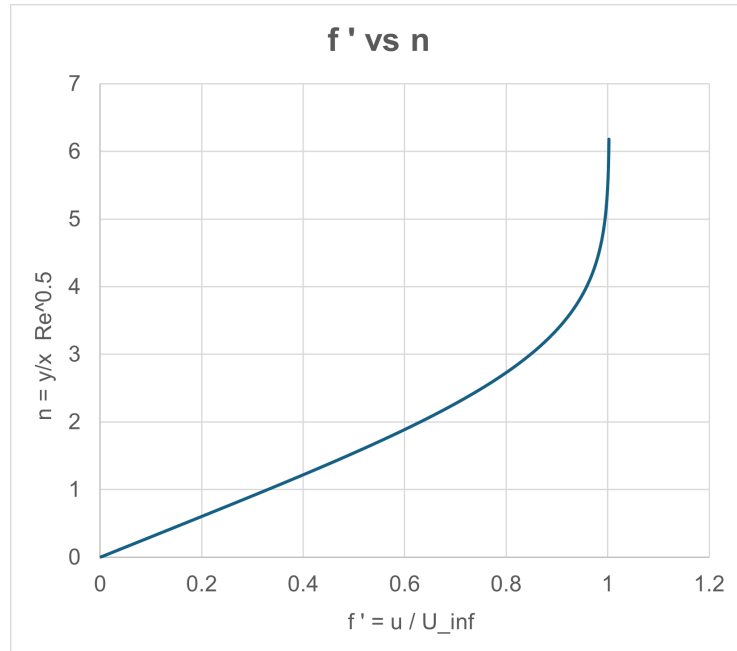


Figure 4: Perfil de velocidade na solução numérica da equação de Blasius

Esta solução mostra um resultado correto em relação ao resultado de referência esperado em relação aos encontrados no problema 2.2 e na figura 2.6 do texto livro [1].

References

- [1] Adrian Bejan, Convection Heat Transfer. Durham, North Carolina, 3rd Edition, 2004.
- [2] Mohammad H. N. Naraghi, Solution of similarity transform equations for Boundary layers. Manhattan College, USA, ASME Exposition, 2004.