

# Convecção

## Lista de exercicios 3

### Cristian Herledy Lopez Lara

#### Exercício 3,19 livro texto

(a) Mostre que, no diagrama da Figura 1, a vazão de ar através da abertura e a transferência de calor por convecção são dadas pelas expressões

$$\dot{m} = (\rho_q - \rho_f) \frac{g D^3 H W}{24 \nu L} \quad (1)$$

$$q = \dot{m} C_p (T_q - T_f) \quad (2)$$

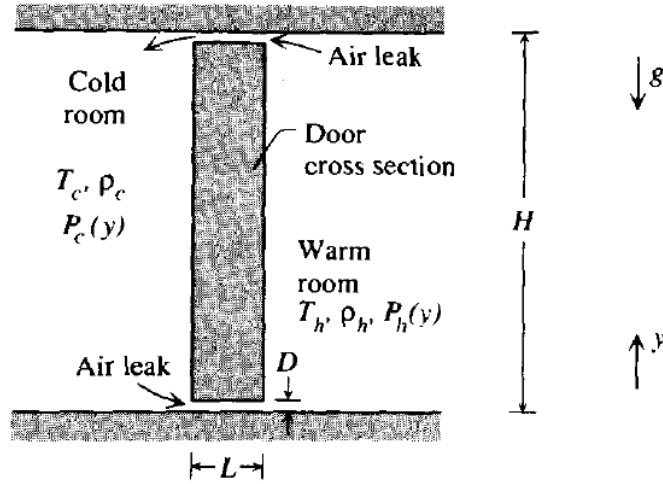


Figure 1: Diagrama de fluxo de ar entre volume quente e frio

#### Desenvolvimento

A pressão em cada volume depende da altura ( $y$ ). Para cada volume é

$$P_q(y) = P_q(0) - \rho_q g y \quad (3)$$

$$P_f(y) = P_f(0) - \rho_f g y \quad (4)$$

$$\Delta P(y) = (\rho_q - \rho_f) g \frac{H}{2} \quad (5)$$

Assumindo o fluxo através das aberturas como placas planas, completamente desenvolvidas, a velocidade horizontal é calculada usando a equação de Hagen-Poiseuille [1, eq 3.19]. A distribuição de pressão é substituída pela equação (3) y  $dx = L$

$$U = \frac{D^2}{12\mu} \left( \frac{-dP}{dx} \right) \quad (6)$$

$$U = \frac{D^2}{12\mu} \left( \frac{(\rho_q - \rho_f)g\frac{H}{2}}{L} \right) \quad (7)$$

Considerando o fluxo de massa atuando na área  $A = WD$  como

$$\dot{m} = \rho U W D \quad (8)$$

Substituindo U

$$\dot{m} = \rho \frac{D^2}{12\mu} \left( \frac{(\rho_q - \rho_f)g\frac{H}{2}}{L} \right) W D \quad (9)$$

$$\dot{m} = \frac{D^3}{24\nu} \frac{(\rho_q - \rho_f)gHW}{L} \quad (10)$$

Esta expressão é equivalente à da equação (1)

**(a) Calcular  $\dot{m}$  e  $q$**

Substituindo os valores numéricos em (2) e (10)

$$\dot{m} = \frac{(0,5 \times 10^{-3} m^3)^3 * 0,082 \frac{Kg}{m^3} * 9,81 \frac{m}{s^2} * 2,2m * 1,5m}{24\nu * 1,52 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s} * 0,05m} = 1,823 \times 10^{-5} \frac{Kg}{s} \quad (11)$$

$$q = 1,823 \times 10^{-5} \frac{Kg}{s} * 1006 \frac{J}{Kg * K} * 20K = 0,36W \quad (12)$$

A vazão mássica é proporcional à altura da abertura na proporção de  $q \sim D^3$ . Portanto, um aumento em  $D$  incrementa diretamente a taxa de transferência de calor.

## Exercício 3,27 livro texto

**Encontrar analiticamente as expressões**

$$\Delta \tilde{T}_{min} = \frac{(T_{peak} - T_0)}{\frac{q''' A}{k_0}} \quad (13)$$

$$\left( \frac{H}{L} \right)_{opt} \quad (14)$$

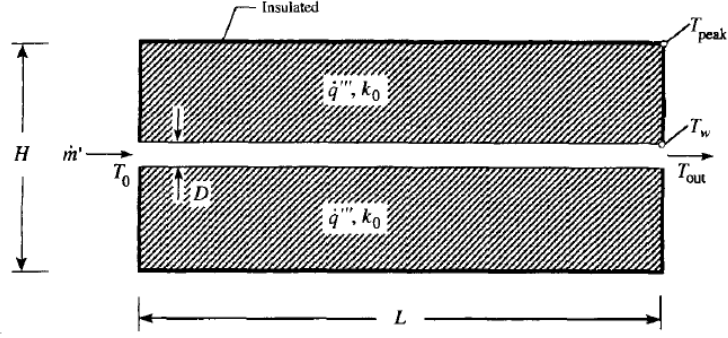


Figure 2: Volume sólido 2D com condutividade térmica  $k_0$

### Desenvolvimento

A área de transferência de calor e, portanto, a área a ser otimizada será dada por  $A = HL = cte$ . O calor extraído obedece à equação

$$Q = q'''HL \quad (15)$$

O problema é analisado calculando a queda de temperatura do ponto mais quente  $T_{peak}$  até o ponto mais frio  $T_0$ . Na relação  $H/L$ , o fluxo de calor será perpendicular a U quando  $\frac{H}{L} < 1$ , y quando  $k_0$  tem valores baixos.

Assim, a queda de temperatura entre o ponto mais quente  $T_{peak}$  e a saída do duto com o ar aquecido  $T_0$  será dada pela equação de condução deduzida por [2, eq. 4.1]

$$\frac{\Delta Tk}{q'''A} = \frac{1}{8} \times \frac{H}{L} \quad (16)$$

$$(T_{peak} - T_w) = \frac{q'''HA}{8k} \quad (17)$$

E o aumento da temperatura por convecção ao longo da direção do fluxo será dado por

$$(T_{out} - T_0) = \frac{q'''HL}{\dot{m}C_p} \quad (18)$$

O excesso de temperatura é então a soma de ambas as expressões

$$\Delta\tilde{T} = (T_{peak} - T_w) + (T_{out} - T_0) = \frac{q'''HA}{8k} + \frac{q'''HL}{\dot{m}C_p} \quad (19)$$

Esta equação pode ser adimensional através das seguintes relações

$$H_{adim} = \frac{H}{\sqrt{A}}, \quad L_{adim} = \frac{L}{\sqrt{A}}, \quad M = \frac{\dot{m}C_p\sqrt{A}}{k} \quad (20)$$

$$\Delta\tilde{T} = \frac{H_{adim}}{8L_{adim}} + \frac{1}{MH_{adim}} \quad (21)$$

O valor ótimo desta expressão é calculado com a derivada igual a zero, considerando  $H \sim \frac{1}{L}$ .

$$\Delta\tilde{T} = \frac{H_{adim}^2}{8} + \frac{1}{MH_{adim}} \quad (22)$$

$$\frac{d}{dH_{adim}}\Delta\tilde{T} = \frac{2H_{adim}}{8} - \frac{1}{MH_{adim}^2} = 0 \quad (23)$$

$$\sim \frac{H_{adim}^3}{4} - \frac{1}{M} \sim H_{opt} = \left(\frac{M}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

Como  $H \sim \frac{1}{L}$ .

$$L_{opt} = \left(\frac{4}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (25)$$

Quais são as expressões equivalentes a (14). É importante concluir que estas relações de aspecto global  $H_{opt}$  e  $L_{opt}$  são independentes de D. Agora, substituindo em (21)

$$\Delta\tilde{T}_{min} = \frac{\left(\frac{M}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{8\left(\frac{4}{M}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{M\left(\frac{M}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} \sim 0,94M^{\frac{1}{3}} \quad (26)$$

Quando a vazão mássica  $\dot{m}$  e a área  $A$  são grandes,  $M$  aumenta. Com esta suposição, os cálculos serão válidos quando  $M > 4$

$$M = \frac{\dot{m}C_p\sqrt{A}}{k} > 4 \quad (27)$$

Portanto, o fluxo de massa  $\dot{m}_{min}$  para garantir  $\Delta\tilde{T}_{min}$  e manter a relação de aspecto ideal  $\left(\frac{H}{L}\right)_{opt}$  será

$$M > \frac{4k}{C_p\sqrt{A}} \quad (28)$$

## Exercício demonstração

**Determinar o número de Nusselt para um escoamento interno, laminar, plenamente desenvolvido, com propriedades constantes, seção transversal circular e sujeito a um fluxo de calor uniforme na superfície.**

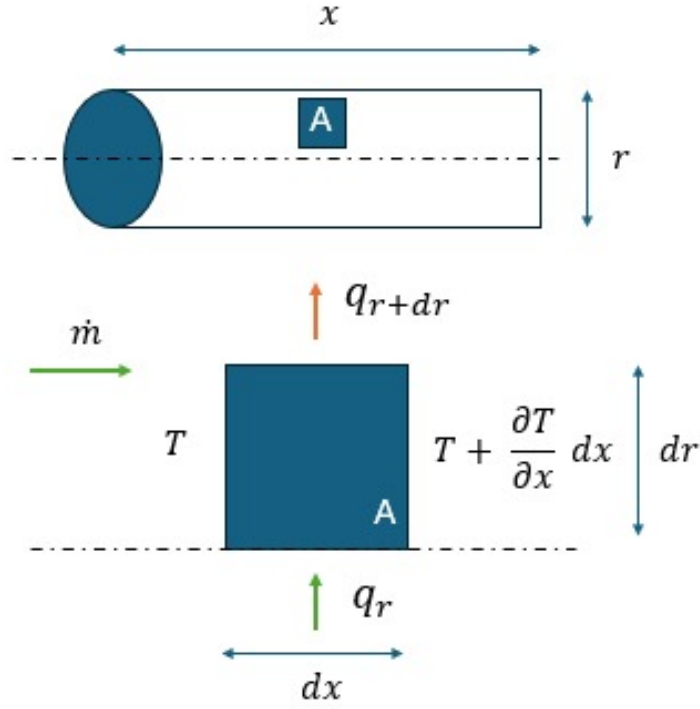


Figure 3: Balanço de energia no volume diferencial dentro de um tubo com fluxo de calor uniforme nas paredes

Realizando um balanço de energia sem fluxo de calor por condução como na Figura 3, a equação de energia para o volume diferencial é descrita por

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (29)$$

Reemplazando o gradiente axial da temperatura em termos da temperatura media e superficial, fica

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{(T_s - T)}{(T_s - T_m)} \frac{dT_m}{dx} \quad (30)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{2u_m}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_o} \right)^2 \right] \quad (31)$$

Integrando duas vezes para obter o perfil T, obtemos

$$T(r, x) = \frac{2u_m}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx} \right) \left[ \frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16r_o^2} \right] + C_1 \ln r + C_2 \quad (32)$$

$$CC1 = T = T_{(x,r)} @ r = 0 \quad CC2 = T_{rmax} = T_s(x) @ r = r_o \quad (33)$$

Aplicando as condições de contorno,  $C_1 = 0$  e  $C_2$ :

$$C_2 = T_s(x) - \frac{2u_m}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx} \right) \left( \frac{3r_o^2}{16} \right) \quad (34)$$

Sustituindo na eq. (32)

$$T(r, x) = T_s(x) - \frac{2u_m r_o^2}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx} \right) \left[ \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \left( \frac{r}{r_o} \right)^4 - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{r_o} \right)^2 \right] \quad (35)$$

Reemplazando as expressões para temperatura media y perfil de velocidade axial

$$T_m = \frac{2}{u_m r_o^2} \int_0^{r_o} u T r dr, \quad \frac{u(r)}{u_m} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_o} \right)^2 \right] \quad (36)$$

$$T_m(x) = T_s(x) - \frac{11}{48} \left( \frac{u_m r_o^2}{\alpha} \right) \left( \frac{dT_m}{dx} \right) \quad (37)$$

Usando a equacao do fluxo masico, obtem-se

$$\dot{m} = \rho u_m \left( \pi \frac{D^2}{4} \right) \quad (38)$$

$$T_m(x) - T_s(x) = -\frac{11}{48} \frac{q_s'' D}{k} \quad (39)$$

E com  $q_s'' = h(T_s - T_m)$

$$h = \frac{48}{11} \left( \frac{k}{D} \right) \quad (40)$$

$$Nu_D \sim \frac{hD}{k} = 4.36 \quad (41)$$

A uma taxa de transferência de calor constante

## References

- [1] Adrian Bejan, Convection Heat Transfer. Durham, North Carolina, 3rd Edition, 2004.
- [2] Adrian Bejan, Shape and structure from engineering to nature. Cambridge University, USA. 2000.