Lista de Exercícios Nº 3

Exercício Nº 1

A força $\vec{F} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ atua no ponto (1,5,2). Determine o torque ($\vec{t} = \vec{r} \times \vec{F}$) devido à $\vec{F}$ em relação:

a) à origem

b) ao eixo dos y

c) à linha $x/2 = y/1 = -z/2$

Exercício Nº 2

Dado o campo vetorial $\vec{F} = 4xz\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath} + yz\hat{k}$, avalie

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{F} dA$$

onde S é a superfície do prisma limitado pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$. Utilize o teorema da divergência para confirmar sua resposta.

Exercício Nº 3

Considere um dado escoamento onde o campo de pressão é dado por $p(\vec{r}, t) = x^2 + yz$.

- Obtenha a variação da pressão ao longo da orientação tangente à linha $x + 1 = 5 - z = y + 3$, no ponto (3,4,1).
- Avalie a circulação de $\vec{\nabla}p$ ao longo da curva que conecta (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0) e comente o resultado.

Exercício Nº 4

Dado $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\hat{\imath} - 2xy\hat{\jmath}$, calcule o trabalho realizado por esse campo de força,

$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{t} ds = \int_C \left[(x^2 - y^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y\right],$$

ao longo dos seguintes caminhos C, que ligam o ponto $(0, 0)$ ao ponto $(1, 2)$:

a) $y = 2x^2$

b) $x = t^2, y = 2t$

c) $y = 0$ de $x = 0$ a $x = 1$, e daí ao longo da linha vertical que liga $(1, 0)$ a $(1, 2)$

Calcule, $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ e comente o resultado.

Exercício Nº 5

Considere o campo vetorial $\mathbf{V} = 2yx^2\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - (8xyz + 2z)\hat{k}$.

a) Calcule $\oint \mathbf{V} \cdot \hat{n}\, dA$ em uma superfície fechada formada por um cubo de lado "Δ", expressando seu resultado em função de Δ (**não utilize o teorema da divergência neste passo**).

b) Divida o resultado do item "a"pelo volume do cubo (Δ^3) e avalie o limite para $\Delta \to 0$.

c) Calcule agora o fluxo liquido através do teorema da divergência. O que representa o resultado obtido?

Exercício Nº 6

a) Aplique o teorema da divergência na seguinte função

$$\mathbf{G}(x, y) = G_x(x, y)\hat{\imath} + G_y(x, y)\hat{\jmath}$$

para um volume ΔV e superfície S de forma cilíndrica representada por uma curva plana fechada no plano xy de área A com seu topo na mesma forma e paralelo à base, e lateral paralela ao eixo z, conforme ilustrado na figura 1. A seguir obtenha a seguinte relação

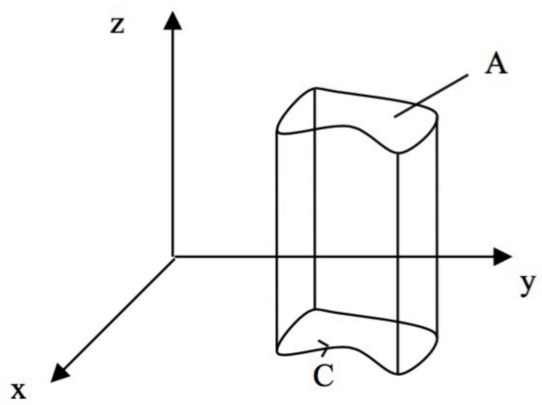

Figura 1: Volume proposto

$$\oint_C (G_x \mathrm{d}y - G_y \mathrm{d}x) = \int_A \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

que é o teorema da divergência em duas dimensões.

b) Aplique o teorema de Stokes para a seguinte função

$$\vec{F}(x, y) = F_x(x, y)\hat{\imath} + F_y(x, y)\hat{\jmath}$$

na mesma figura indicada e mostre que

$$\oint_C (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int_A \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

que é o teorema de Stokes em duas dimensões.

c) Mostre que em duas dimensões os teoremas da divergência e de Stokes são idênticos.

Exercício Nº 7

Considere o tensor cujas componentes no sistema de coordenadas cartesiano ortogonal são dadas por,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Calcule o vetor associado a este tensor na orientação $(0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$;

b) Calcule as componentes de $\mathbf{T}$ no sistema $\hat{e}_1 = \hat{k}$, $\hat{e}_2 = \frac{\hat{\imath}+\hat{\jmath}}{\sqrt{2}}$ e $\hat{e}_3 = \frac{\hat{\imath}-\hat{\jmath}}{\sqrt{2}}$;

c) Calcule os eixos principais de $\mathbf{T}$;

d) Expresse as componentes de $\mathbf{T}$ em relação aos eixos principais;

e) Calcule os invariantes de $\mathbf{T}$ e verifique que de fato I_1, I_2 e I_3 independem do sistema de coordenadas usado para expressar as componentes de $\mathbf{T}$.

Exercício Nº 8

Avalie a força resultante (nas suas componentes x e y) sobre a superfície definida pelo plano $2x+y = 10$ que se encontra no primeiro quadrante, considerando um estado de tensões dado pelo o tensor cartesiano,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5y & 2x & 0 \\ 2x & 5y & 0 \\ 0 & 0 & 5y \end{pmatrix}$$

Avalie a componente dessa força, na direção **normal a superfície**.