Convecção

Lista de exercicios 2

Cristian Herledy Lopez Lara

Exercício 2,19 livro texto

Considerando a análise de transferência de calor do problema 2.18 e levando em conta que L é longo o suficiente para que o fluxo de calor q_b não dependa de L, Determinar: A) Se b aumenta a uma taxa de duas vezes, por qual fator q_b aumentará? B) Calcule a razão $q_{B,w}/q_{B,a}$

Informações de entrada

Do problema 2,18:

$$q_B = (T_B - T_\infty)(hpkA)^{\frac{1}{2}}\ tanh\left[L(\frac{hp}{kA})^{\frac{1}{2}}\right] \tag{1}$$

$$\frac{hb}{k_f} = 0,664 Pr^{\frac{1}{3}}\left(\frac{U_\infty b}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

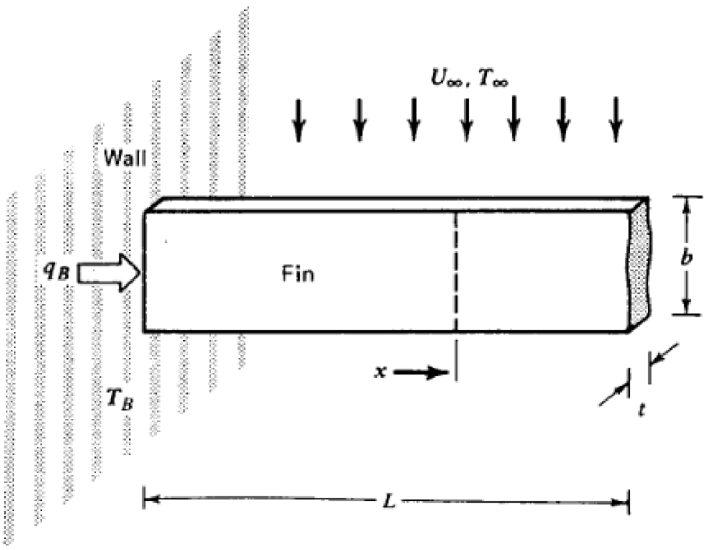

Figura 1: Transferência de calor em aleta com fluxo laminar paralelo a b.

Como $x \approx L$, supõe-se que seja longo o suficiente para não influenciar o comportamento de q_B, então $tanhL \to 1$ na equaçao (1)

$$q_B = (T_B - T_\infty)(hpkA)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Considerando que $p = 2b$, $A = bt$ e calculando h de (2):

$$q_B = (T_B - T_\infty)\left(\frac{0,664Pr^{\frac{1}{3}}k_f kbt2b}{b}\left(\frac{U_\infty b}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Item A

A partir da equaçao (4), a relação entre q_b e b é encontrada

$$q_B = (T_B - T_\infty)\left(1,328Pr^{\frac{1}{3}}k_f kt\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}} \tag{5}$$

Por tanto, q_B é proporcional a b na forma

$$q_B \sim b^{\frac{3}{4}} \tag{6}$$

$$q_B \sim 2^{\frac{3}{4}} = 1,68 \tag{7}$$

Quando a altura da aleta é **dobrada**, a taxa de transferência de calor **aumenta em 68%**

Item B

Os radios podem ser calculados substituindo as propriedades de cada fluido na equação (5)

$$\frac{q_{B,w}}{q_{B,a}} = \frac{(T_B - T_\infty)\left(1,328Pr_w^{\frac{1}{3}}k_w kt\left(\frac{U_\infty}{\nu_w}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}}{(T_B - T_\infty)\left(1,328Pr_a^{\frac{1}{3}}k_a kt\left(\frac{U_\infty}{\nu_a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}} \tag{8}$$

Propriedades do escoamento como a velocidade, temperatura e volume, são constantes para cada caso. A razões totales podem ser calculadas a partir das razões das propriedades do fluido .

$$\frac{q_{B,w}}{q_{B,a}} = \frac{\left(Pr_w^{\frac{1}{3}}k_w \nu_w^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(Pr_a^{\frac{1}{3}}k_a \nu_a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{Pr_w}{Pr_a}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\nu_a}{\nu_w}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{k_a}{k_w}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

$$\left(\frac{7}{0,72}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{0,07}\right)^{\frac{1}{4}}(23)^{\frac{1}{2}} = 13,5 \tag{10}$$

Concluindo, a taxa de transferência de calor na água é aproximadamente **13 vezes maior** que no ar.

Exercício 2,23 livro texto

Com base na velocidade U e grossura do jet D do problema 2.22, calcule a ordem de magnitude de Dt e T para fluidos com $Pr >> 1$ **e** $Pr << 1$.

Informações de entrada

$$\frac{D_T(x)}{D(x)} \sim \mathrm{Pr}^{-1/2} \tag{11}$$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \sim \left(\frac{U_0 D_0/\nu}{x/D_0}\right)^{1/3} \mathrm{Pr}^{1/2} \quad (\mathrm{Pr} \gg 1) \tag{12}$$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \sim \left(\frac{U_0 D_0/\nu}{x/D_0}\right)^{1/3} \quad (\mathrm{Pr} \ll 1) \tag{13}$$

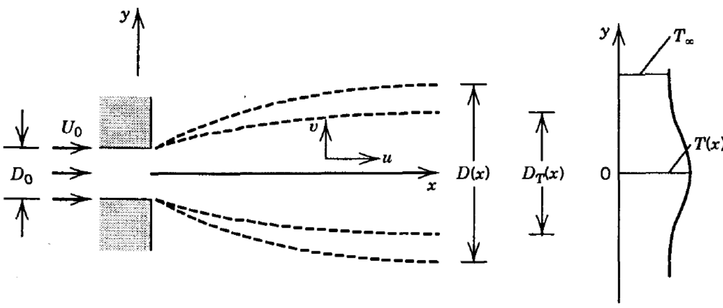

Figura 2: Esquema de camada limite hidrodinâmica e térmica em fluxo de jato

Do problema 2,22:

$$\frac{D(x)}{D_0} \sim \left(\frac{x/D_0}{U_0 D_0/\nu}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{14}$$

$$\frac{U(x)}{U_0} \sim \left(\frac{x/D_0}{U_0 D_0/\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{15}$$

Desenvolvimiento

Primeiro, a equação de energia para a camada limite é estabelecida. Nesta equação, o termo associado aos efeitos da dufusividade em x é negligenciado.

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{16}$$

Fazendo a análise de escala obtem-se

$$u\frac{\Delta T}{x} + v\frac{\Delta T}{D_T} \sim \alpha \left(\frac{\Delta T}{D_T^2}\right) \tag{17}$$

Da equação de conservação de massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \;\rightarrow \frac{U}{x} \sim \frac{v}{D_T} \tag{18}$$

A equação (11) é reduzida a

$$U\frac{\Delta T}{x} \sim \alpha \left(\frac{\Delta T}{D_T^2}\right) \tag{19}$$

Com esta relação, pode-se calcular a razão entre as camadas limites hidrodinâmica e térmica

$$\frac{D_T(x)}{D(x)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{6}}/U_0^{\frac{2}{3}}D_0^{\frac{1}{3}}}{U_0^{\frac{2}{3}}D_0^{\frac{1}{3}}/\nu^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}}} = Pr^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

A equação (11) é satisfeita. Esta expressão mostra como o número de Prandtl é proporcional às dimensões das camadas limites. Agora, avaliamos como a temperatura muda ao longo do desenvolvimento da camada limite térmica. Invocando a integração da equação de energia

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{21}$$

Aplicando a fórmula integral de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{\infty} uT\,dy + T_\infty v_\infty - T_0 v_0\right] = \alpha \left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{y=\infty} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{y=-\infty}\right) \tag{22}$$

Como a temperatura fora da camada limite é a temperatura do reservatório, a variação de temperatura ao longo e dentro dessa zona é zero.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{\infty} uT\,dy + T_\infty v_\infty - T_0 v_0\right] = 0 \tag{23}$$

Para resolver o segundo e terceiro termos da integral, o balanço de massa é usado.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = 0 \tag{25}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} u\,dy + (v_\infty - v_{-\infty}) = 0 \tag{26}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} u\,dy = -(v_\infty - v_{-\infty}) \tag{27}$$

Substituindo em (23)

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} uT\,dy - T_\infty \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} u\,dy = 0 \tag{28}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} u(T-T_\infty)\,dy = 0 \tag{29}$$

É mostrado que o transporte de T na camada limite não depende de x. Como a expressão dentro da derivada (a integral) é constante

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(T-T_\infty)\,dy = \text{Constante} \sim U_0 D_0(\Delta T_0) \tag{30}$$

Onde $\Delta T_0 = (T_0 - T_\infty)$. Agora para a escala da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(T-T_\infty)\,dy \sim U D_{geral}(\Delta T) \tag{31}$$

Para determinar a escala D_{geral}, fazemos a análise de base com a escala de números de Prandtl indicada nas expressões (12) e (13)

Caso 1: $Pr >> 1$

$$U\Delta T D \sim U_0 \Delta T_0 D_0 \tag{32}$$

$$\Delta T \sim \frac{U_0 \Delta T_0 D_0}{UD} \tag{33}$$

Das expressões (14) e (15), U e D são substituídos

$$\Delta T \sim \frac{U_0 \Delta T_0 D_0}{\left(\frac{U_0^4 D_0^2}{vx}\right)^{1/3}\left(\frac{vx}{U_0 D_0^{1/2}}\right)^{2/3}} \tag{34}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} \sim \left(\frac{U_0 D_0^2}{vx}\right)^{1/3} \tag{35}$$

Caso 2: $Pr << 1$

$$U\Delta T D_T \sim U_0 \Delta T_0 D_0 \tag{36}$$

$$\Delta T \sim \frac{U_0 \Delta T_0 D_0}{UD_T} \tag{37}$$

$$\Delta T \sim \frac{U_0 \Delta T_0 D_0}{UDPr^{-1/2}} \tag{38}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} \sim \left(\frac{U_0 D_0^2}{vx}\right)^{1/3} Pr^{1/2} \tag{39}$$

Exercício solução de camada limite de Blasius

Uma técnica comumente usada para resolver o problema do fluxo na camada limite é através do método de **similaridade** de Blasius.
Este método converte o problema de equações diferenciais parciais em um problema **não linear de equações ordinárias** de terceira ordem, usando uma variável de similaridade para os perfis **u e T**. A equação não linear será **resolvida numericamente**.

Matematicamente o perfil de velocidade é definido como

$$\frac{u}{U_\infty} = \mathrm{f}(\eta) \tag{40}$$

Onde η é proporcional a y por um fator dependente de x. η será proporcional a

$$\frac{u}{U_\infty} = f\prime(\eta) \tag{41}$$

$$\eta = \frac{y}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2} \tag{42}$$

O problema será regido pelas equações de conservação de massa (24) e momento (43) para a camada limite

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{43}$$

Com o método da similaridade o problema se reduz a

$$2f''' + ff'' = 0 \tag{44}$$

$$f' = f = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0 \tag{45}$$

$$f' \to 1 \quad \text{as} \quad \eta \to \infty \tag{46}$$

A solução da equação fornece o perfil de velocidade na camada limite $f\prime$ e a tensão de cisalhamento.
Neste trabalho será dada uma solução numérica ao problema com o cálculo das derivadas com diferenças finitas da forma

$$f' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta\eta} \tag{47}$$

$$f'' = \frac{f'_{i+1} - f'_i}{\Delta\eta} \tag{48}$$

$$f''' = \frac{f''_{i+1} - f''_i}{\Delta\eta} \tag{49}$$

Os cálculos na etapa de iteração i+1 serão avaliados com base na etapa anterior de acordo com as expressões

$$f_{i+1} = f_i + (\Delta\eta) f'_i \tag{50}$$

$$f'_{i+1} = f'_i + (\Delta\eta) f''_i \tag{51}$$

$$f''_{i+1} = f''_i + (\Delta\eta) f'''_i \tag{52}$$

E da equação (44)

$$f'''_i = -\frac{f_i f''_i}{2} \tag{53}$$

A solução obtida neste trabalho foi alcançada fazendo espaçamentos de domínio de $\eta = 0,01$. Diferentes valores estimados para $f\prime\prime$ $(0,2 < f\prime\prime < 0.8)$ foram testados.

O cálculo foi feito ate $\eta \sim 6$ para garantir o valor de $U\infty$ de acordo com a condição de contorno (46).

n	f	f´	f´´	f´´´
0.00	0.000	0.000	0.332	0.000
0.50	0.041	0.166	0.331	-0.007
1.00	0.164	0.330	0.323	-0.026
1.50	0.368	0.487	0.303	-0.056
2.00	0.647	0.631	0.267	-0.087
2.50	0.994	0.753	0.218	-0.108
3.00	1.394	0.848	0.162	-0.113
3.50	1.836	0.916	0.108	-0.099
4.00	2.306	0.959	0.064	-0.074
4.50	2.792	0.983	0.034	-0.047
5.00	3.286	0.995	0.016	-0.026
5.50	3.785	1.000	0.006	-0.012
6.00	4.286	1.002	0.002	-0.005

Figura 3: Exemplo de tabela para cálculo numérico do perfil de velocidade

Análise e conclusão

O resultado com convergência mais estável foi o valor de referência de $f\prime\prime = 0,332$. Com este valor, A solução numérica mostrou que $u = 0,99U_\infty$ foi atingido com $\eta = 4,98$.

Na imagem a seguir, pode-se ver graficamente como a razão de velocidade $f\prime$ em relação à variável de similaridade η converge para 1 quando u tende a $U\infty$

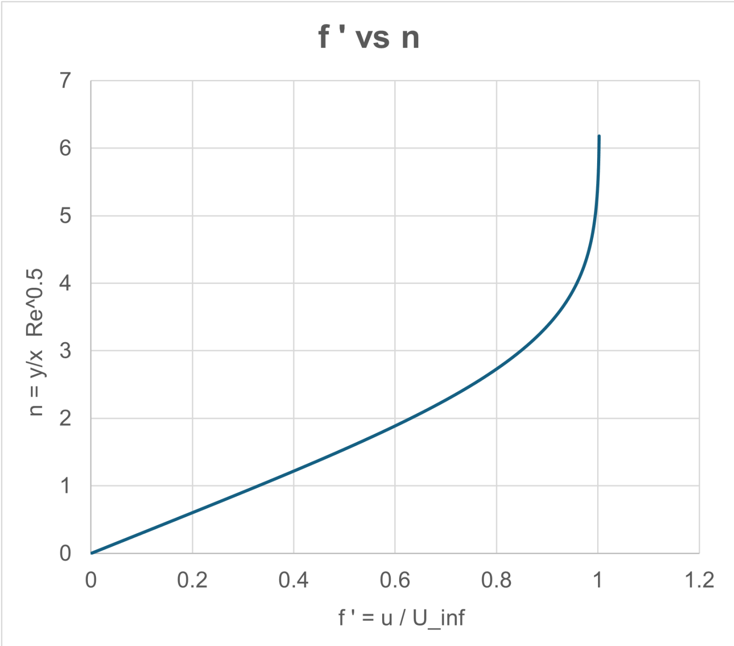

Figura 4: Perfil de velocidade na solução numérica da equação de Blasius

Esta solução mostra um resultado correto em relação ao resultado de referência esperado em relação aos encontrados no problema 2.2 e na figura 2.6 do texto livro.