

Modelagem de Escoamentos Turbulentos.

Lista de Exercícios No. 3

Cristian Herledy López Lara

Junho 2025

Questão 1

Obtenha a equação de transporte para o tensor de Reynolds

Desenvolvimento

Partindo da equação de conservação de movimento linear

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \quad (1)$$

Aplicando o conceito da media de Reynolds $A = \bar{A} + a$ para cada termo:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (2)$$

$$U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (5)$$

A equação completa fica então

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (6)$$

Agora tomando só os termos da flutuação turbulenta

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (7)$$

Multiplicando por u_j cada termo da equação

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} \quad (8)$$

$$u_j \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \bar{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - \bar{U}_k u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (9)$$

$$u_j u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \quad (10)$$

$$u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (11)$$

$$u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k \partial x_k} - u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \quad (12)$$

Escrevendo a equação completa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - \bar{U}_k u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \\ \frac{u_j}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k \partial x_k} - u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Da mesma forma, obtemos a equação para a flutuação u_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - \bar{U}_k u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \\ \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k \partial x_k} - u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Somando a equação 14 da equação 13 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i u_j u_k}{\partial x_k} = \\ \frac{1}{\rho} \left(u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \nu \left(u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

E aplicando os termos da media

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} = \\ \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) + \nu \left(\overline{u_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Questão 2

Simplifique a equação da energia cinética turbulenta $k = (u_i u_i)/2$ para o caso de um escoamento médio turbulento plenamente desenvolvido em um duto.

Desenvolvimento

Agora novamente da equação de transporte do tensor de Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} = \\ \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) + \nu \left(\overline{u_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Fazendo $i=j$ e dividindo por 2 obtemos

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} + k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right) + \nu \left(\overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \quad (18)$$

Para escoamento plenamente desenvolvido, a velocidade media na direcao i não muda com relação a j , então $\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} = 0$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right) + \nu \left(\overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \quad (19)$$

Periodo T [s]	U media [m/s]	Desvio padrão [m/s];
0 - 0,005	8,8854	1,0636
0 - 0,05	8,5692	1,1724
0 - 0,5	8,5342	1,2415
0 - 5	8,5417	1,2330

Table 1: Valores de velocidade media e desvio padrão para diferentes intervalos

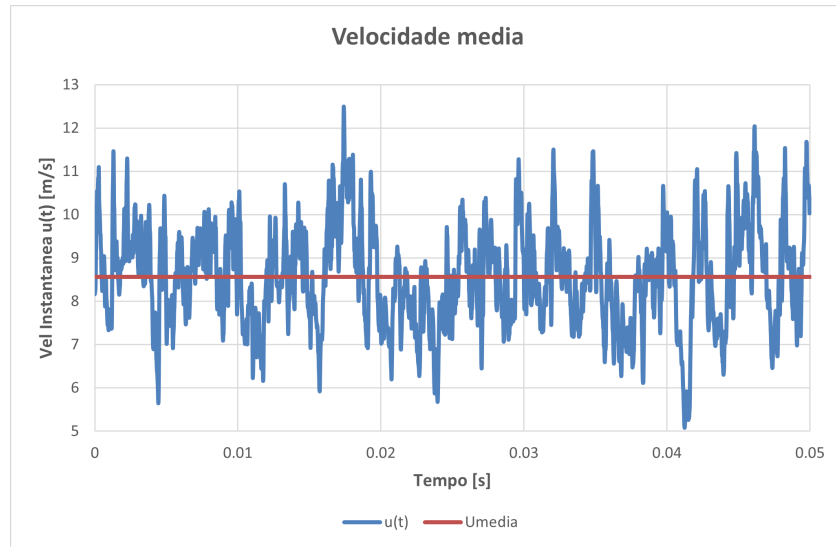


Figure 1: Velocidade instantanea e velocidade media ate $t = 0,05s$

O gráfico a seguir mostra a evolução da velocidade média e do desvio padrão. Ambas as grandezas convergem para um valor à medida que o tempo avança. Isso ocorre porque há mais dados para calcular a média da amostra em $t = 5s$. As grandes e pequenas escalas terão passado pelo dispositivo de medição um número maior de vezes, o que permite estatísticas turbulentas mais homogêneas e, portanto, a medição do escoamento em regime permanente.

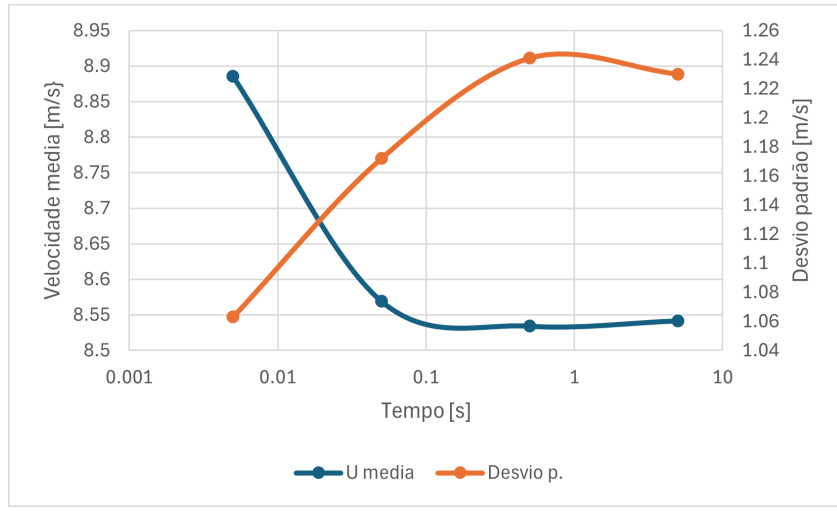


Figure 2: Velocidade media e desvio padrao nos intervalos de tempo analisados

Questão 2

A partir dos dados do arquivo Re125.txt:

- i. **Determine a energia cinética turbulenta, k , assumindo a condição de isotropia;**

A energia cinética turbulenta é calculada com a expressão

$$k = \overline{u_i u_i} / 2 \quad (20)$$

Que para um escoamento isotrópico pode ser escrito como

$$k = \overline{u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3} / 2 = \frac{3}{2} \overline{u_1 u_1} = 2,26 \frac{m^2}{s^2} \quad (21)$$

- ii. **Faça um gráfico para o coeficiente de correlação temporal e avalie a escala de comprimento L das grandes escalas;**

Para o cálculo de correlação temporal, primeiro é necesario encontrar o valor da correlação de velocidade no ponto ($r = 0$) dado pela expressão

$$\mathbf{R}_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \tau) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t')}$$

References

- [1] Cesar Deschamps, Escalas da turbulencia Cap 2. UFSC Florianopolis, SC, Notas de aula, 2025.