

# **FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS**

Alvaro T. Prata

(01/09/2023)

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
1.1	Hipótese do Contínuo . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Fundamentos Matemáticos</b>	<b>15</b>
2.1	Escalares e Vetores . . . . .	15
2.2	Operações com Vetores . . . . .	17
2.2.1	Adição de dois vetores . . . . .	19
2.2.2	Multiplicação de um vetor por um escalar	20
2.2.3	Representação de um vetor por suas com- ponentes . . . . .	20
2.2.4	Produto escalar de vetores . . . . .	24
2.2.5	Produto cruzado de vetores (produto ve- torial) . . . . .	24
2.2.6	Produto escalar triplo entre vetores . . .	25
2.3	Notação Indicial . . . . .	26
2.4	Delta de Kronecker . . . . .	29
2.5	Símbolo de Permutação . . . . .	30
2.6	Grandezas Simétricas e Anti-Simétricas . . . .	31
2.7	Operações com Vetores em Notação Indicial . .	33

2.7.1	Representação indicial de vetores em termos de suas componentes . . . . .	33
2.7.2	Produto escalar em notação indicial . . .	33
2.7.3	Produto cruzado em notação indicial . . .	34
2.7.4	Produto escalar triplo em notação indicial	35
2.7.5	Identidade $\epsilon - \delta$ . . . . .	36
2.8	Cálculo Vetorial . . . . .	37
2.8.1	Gradiente de um campo escalar . . . . .	40
2.8.2	Propriedades do gradiente . . . . .	42
2.8.3	Divergente de um campo vetorial . . . . .	44
2.8.4	Circulação . . . . .	45
2.8.5	Rotacional de um campo vetorial . . . . .	48
2.9	Teoremas Integrais . . . . .	51
2.9.1	Teorema de Gauss . . . . .	52
2.9.2	Teorema de Stokes . . . . .	54
2.10	Definição Matemática de Vetor . . . . .	60
2.11	Definição Matemática de Tensor . . . . .	65
2.11.1	Operações com tensores . . . . .	69
2.11.2	Tensor simétrico e anti-simétrico . . . . .	69
2.11.3	Tensor identidade e tensor esférico . . . . .	70
2.11.4	Tensor isotrópico . . . . .	71
2.11.5	Tensor transposto e traço do tensor . . . . .	73
2.11.6	Eixos principais de um tensor simétrico de segunda ordem . . . . .	73
2.12	Sistema de Coordenadas Curvilíneo Ortogonal . . . . .	80
2.12.1	Determinação de $\vec{\nabla}$ em sistemas curvilíneos	81
2.12.2	Dependência dos vetores de base com a posição . . . . .	86
2.12.3	Expressões para os operadores em coordenadas curvilíneas ortogonais . . . . .	89

<b>3</b>	<b>Cinemática dos Fluidos</b>	<b>91</b>
3.1	Coordenadas Espaciais e Coordenadas Materiais	92
3.2	Derivada Espacial e Derivada Material . . . . .	94
3.3	Trajetória de uma Partícula de Fluido . . . . .	97
3.4	Linha de Corrente . . . . .	99
3.5	Linha de Emissão . . . . .	101
3.6	Volume Material de Fluido e Dilatação . . . . .	103
3.7	Derivada Material da Dilatação . . . . .	106
3.8	Teorema de Transporte de Reynolds . . . . .	109
3.9	Conservação da Massa utilizando o Teorema de Transporte de Reynolds . . . . .	111
3.10	Tensor Gradiente de Velocidade . . . . .	114
3.11	Tensor Taxa de Deformação . . . . .	115
3.12	Tensor Vorticidade . . . . .	123
3.13	Movimento Geral de um Elemento de Fluido .	126
<b>4</b>	<b>Dinâmica dos Fluidos</b>	<b>129</b>
4.1	Conservação da Quantidade de Movimento Linear	131
4.2	Tensor Tensão de Cauchy . . . . .	134
4.2.1	Equilíbrio local das tensões . . . . .	134
4.2.2	Existência do Tensor Tensão . . . . .	136
4.3	Conservação da Quantidade de Movimento An- gular . . . . .	138
4.3.1	Simetria do Tensor Tensão . . . . .	139
4.4	Fluidos em Repouso . . . . .	141
4.5	Forças sobre Corpos em Escoamentos Perma- nentes . . . . .	144
4.6	Principais Resultados . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Conservação da Energia</b>	<b>152</b>
5.1	Primeira Lei da Termodinâmica . . . . .	152

---

5.1.1	Energia térmica . . . . .	155
5.1.2	Potência mecânica devido às forças de superfície . . . . .	159
5.2	Segunda Lei da Termodinâmica . . . . .	161
5.2.1	Irreversibilidades . . . . .	163
<b>6</b>	<b>Equações Constitutivas</b>	<b>167</b>
6.1	Fluidos Newtonianos . . . . .	168
6.2	Lei de Fourier . . . . .	171
6.3	Considerações sobre $\lambda$ , $\mu$ e $k$ . . . . .	172
6.4	Viscosidade Expansional . . . . .	174
6.5	Tensor Tensão Viscoso . . . . .	177
<b>7</b>	<b>Escoamento de Fluidos Newtonianos</b>	<b>179</b>
7.1	Equação de Navier-Stokes . . . . .	179
7.2	Considerações Termodinâmicas . . . . .	187
7.2.1	Calores específicos . . . . .	189
7.2.2	Relações de Maxwell . . . . .	190
7.2.3	Equação da temperatura para fluidos new- tonianos . . . . .	192
7.2.4	$c_p$ versus $c_v$ na equação da energia térmica	198
7.3	Equações da Continuidade, Movimento e Energia	201
7.3.1	Equação da continuidade . . . . .	201
7.3.2	Equação do movimento para $\rho$ e $\mu$ cons- tantes . . . . .	201
7.3.3	Equação da energia para $k$ constante . .	203
<b>8</b>	<b>Modelos para Escoamentos de Fluidos</b>	<b>205</b>
8.1	Simplificações quanto ao Escoamento . . . . .	206
8.2	Simplificações quanto ao Fluido . . . . .	207
8.3	Equação de Bernoulli . . . . .	208

---

8.3.1	Equação de Bernoulli generalizada . . .	214
8.3.2	Teorema de Kelvin . . . . .	214
8.4	Escoamento Potencial . . . . .	216
8.4.1	Potencial Complexo e Velocidade Com- plexa . . . . .	217

# Lista de Figuras

2.1	Representação geométrica da componente de $\vec{A}$ na orientação $\hat{s}$ . . . . .	18
2.2	Representação geométrica de vetores: a) livres, b) deslizantes e c) fixo. . . . .	18
2.3	Regra do paralelogramo para adição de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ . . . . .	19
2.4	Sistema de coordenadas cartesiano ortogonal . . . . .	21
2.5	Sistema de coordenadas polares. . . . .	22
2.6	Representação das componentes de $\vec{A}$ nas orientações das coordenadas $x, y, z$ . . . . .	23
2.7	Nomenclatura alternativa para o sistema de coordenadas cartesiano ortogonal. . . . .	23
2.8	Paralelepípedo formado pelo produto escalar triplo entre $\vec{A}$ , $\vec{B}$ e $\vec{C}$ . . . . .	25
2.9	Permutação cíclica (ou par). . . . .	30
2.10	Permutação anticíclica (ou ímpar). . . . .	31
2.11	Elemento de volume $\Delta v$ com área superficial $S$ em torno do ponto $P$ . . . . .	39
2.12	Valor da função escalar $\varphi$ nas posições $\vec{r}$ e $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ . . . . .	41

2.13	Orientação de $\vec{\nabla}\varphi$ em uma superfície de $\varphi$ constante. . . . .	43
2.14	Região plana limitada pela curva fechada $C$ cuja normal é $\hat{n}$ . . . . .	46
2.15	Escoamento unidimensional dado por $\vec{V} = V\hat{i}$ . . . . .	47
2.16	Disco em rotação com velocidade angular $\Omega$ . . . . .	48
2.17	Cilindro reto de altura $h$ e base $\Delta s$ . . . . .	50
2.18	Superfície fechada formada por casca hemisférica de raio 1, e tampa circular no plano $x, y$ . . . . .	53
2.19	Exemplo de superfície não orientável: a) banda de Möbius; e superfície que não possui interior ou exterior: b) garrafa de Klein. . . . .	55
2.20	Superfície aberta, orientável e seccionalmente suave. . . . .	56
2.21	Curvas $C_1$ e $C_2$ que unem os pontos $\vec{r}_o$ e $\vec{r}_1$ . . . . .	56
2.22	Componentes do vetor $\vec{A}$ nos sistemas de coordenadas $x_i$ e $x'_j$ . . . . .	62
2.23	Vetor $\vec{F}$ associado à orientação $\hat{n}$ no elemento de área $d\sigma$ . . . . .	65
2.24	Vetor $\vec{T}_y$ associado à orientação da coordenada $y$ no plano $x$ - $z$ . . . . .	66
2.25	Representação dos vetores de base em um sistema de coordenadas cilíndrico plano . . . . .	87
3.1	Linha de corrente no instante de tempo $t$ . . . . .	99
3.2	Volume material em escoamento no instante de tempo $t$ . . . . .	103
3.3	Escoamento de $\delta V$ de sua posição inicial em $t = 0$ até o instante $t$ . . . . .	104
3.4	Expansão do volume material $v(t)$ pelo movimento de sua superfície material $S(t)$ . . . . .	106



3.5	Esvaziamento de um reservatório cilíndrico . .	112
3.6	Filamentos materiais $d\vec{r}_1$ e $d\vec{r}_2$ formando entre si um ângulo $\theta$ . . . . .	118
3.7	Filamentos materiais alinhados com $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ e tendo seu ângulo $\theta$ , originalmente de $90^\circ$ , reduzido com o escoamento. . . . .	120
3.8	Exemplos de escoamentos simples: a) movimento puramente extensional; b) movimento cisalhante plano. . . . .	120
3.9	Movimento cisalhante plano representado no sistema $(x, y)$ e no sistema $(x', y')$ . . . . .	122
3.10	Movimento angular de um filamento material $d\vec{r}$ com velocidade angular $\Omega$ . . . . .	124
3.11	Tipos de movimento a que um volume material está submetido em um escoamento. . . . .	127
4.1	Força de superfície atuando em um volume material $v(t)$ em escoamento. . . . .	130
4.2	Tensões normais e cisalhantes nas superfícies de volume elementar quadrado. . . . .	134
4.3	Tensões atuando nos dois lados de um disco material de espessura infinitesimal. . . . .	135
4.4	Tetraedro para aplicação do equilíbrio local de tensões de maneira a provar a existência do tensor tensão. . . . .	137
4.5	Reservatório aberto contendo água. . . . .	143
4.6	Corpo imerso em um escoamento e circundado pelo volume material $v(t)$ . . . . .	145
4.7	Escoamento sobre uma placa plana horizontal. . . . .	147

---

4.8	Volume material para o cálculo da força de arraste de um fluido escoando sobre uma placa plana horizontal. . . . .	148
7.1	Cilindro metálico em queda livre no interior de uma tubulação. . . . .	184
7.2	Detalhes do cilindro em queda livre: a) volume material na parte inferior do cilindro, b) perfil de velocidade na folga radial e c) forças que atuam no cilindro. . . . .	184

# Lista de Tabelas

4.1	Grandezas associadas às quatro faces do tetra- edo da Fig.4.4. . . . .	138
7.1	Valores de $c_p$ e $c_v$ para alguns líquidos. . . . .	200

# Capítulo 1

## Introdução

De certa forma podemos dizer que na natureza tudo escoam. A taxa de escoamento pode mudar dependendo do material em consideração ou ainda da solicitação que aplicamos no material. Classificaremos como sólidos os materiais que escoam bem pouco quando submetidos a forças não equilibradas e param de escoar tendendo a voltar a sua configuração original quando as forças são removidas. Os fluidos escoam continuamente na presença de forças não equilibradas, por menor que sejam estas forças, e param de escoar quando as forças cessam. Devido à facilidade de escoar dos fluidos, eles não tem uma forma definida. Tal característica em geral é utilizada para distinguir os sólidos dos fluidos. Ao contrário dos fluidos os sólidos tem forma definida.

A mecânica dos sólidos lida com situações onde o escoamento dos materiais é insignificante. Na mecânica dos sólidos o im-

portante é a deformação. Em situações onde o escoamento é importante, a ferramenta utilizada é a mecânica dos fluidos. A mecânica dos fluidos é a área da física que trata do escoamento e dos mecanismos de transporte associados ao escoamento. Introduziremos os fundamentos da mecânica dos fluidos através de uma terminologia matemática apropriada e das leis fundamentais que descrevem e regem o movimento e a taxa de deformação dos fluidos. Utilizaremos a matemática como linguagem para explorar o escoamento dos fluidos. Em virtude do enfoque fenomenológico que será adotado, tentaremos extrair de cada frase matemática seu significado físico. Trataremos a matemática como uma linguagem que nos possibilitará explorar e entender o escoamento dos fluidos. A física e a engenharia serão a razão de ser do nosso estudo.

## 1.1 Hipótese do Contínuo

Toda a matéria é composta de átomos e moléculas em constante movimento que é função da temperatura. Uma teoria da mecânica dos fluidos completa e rigorosa deveria considerar esta estrutura da matéria para obter as equações que governam o escoamento. Devido ao grande número de moléculas em consideração tal enfoque é impraticável, exceto em casos especiais de gases monoatômicos onde podemos aplicar a teoria cinética dos gases. Como exemplo note que nas condições ambiente de temperatura e pressão iguais a 25 °C e 1 bar, respectivamente, um pequeno cubo de 1 mm de lado contém aproximadamente  $3 \times 10^{16}$  moléculas de ar. Considere agora o número de moléculas envolvido em um escoamento de ar sobre um automóvel. É enorme!

Para fluidos não muito longe das condições ambiente de temperatura e pressão existe uma abordagem alternativa que tem provado ser muito útil: o modelo do contínuo.

De uma maneira geral o modelo do contínuo só não deve ser utilizado em condições extremas como aquelas associadas a ondas de choque, ou envolvendo gases a baixas densidades escoando em passagens muito estreitas. No modelo do contínuo assume-se que a matéria encontra-se continuamente distribuída no espaço.

Tendo adotado a hipótese do contínuo, qualquer propriedade local do fluido permanece inalterada para diferentes tamanhos da amostra do fluido que se escolha para análise. Deve-se observar no entanto que o tamanho da amostra deve ser suficientemente pequeno, quando comparado com a menor dimensão característica no escoamento, e suficientemente grande de forma a conter um elevado número de moléculas. Como exemplo vamos tomar a densidade de um gás,  $\rho$ , definida como

$$\rho = \rho(\vec{r}, t) = \Delta m / \Delta V \quad (1.1)$$

onde  $\vec{r}$  é uma posição no espaço e  $t$  é o tempo; adicionalmente,  $\Delta m$  é a massa do gás contida no elemento de volume  $\Delta V$ . Desde que  $\Delta V$  não seja muito pequeno (de forma que as flutuações moleculares interfiram no número de moléculas presentes na amostra) e também não seja muito grande (a ponto que variações espaciais alterem o valor da densidade) a densidade  $\rho$  é a mesma para diferentes valores de  $\Delta V$  em torno de  $\vec{r}$ . Ao longo da faixa de  $\Delta V$  para a qual  $\rho$  não é afetada pelo

tamanho da amostra podemos dizer que o gás se comporta como um meio contínuo.

A variação da densidade do gás com o volume para valores destes muito pequenos, deve-se às flutuações moleculares que ocorrem em virtude do pequeno número de moléculas contidas na amostra. As flutuações moleculares associadas tanto ao número como ao tipo de molécula afetam a densidade para pequenos tamanhos de amostras do gás.

Para volumes de amostra grandes, a densidade do gás passa a ser influenciada por variações espaciais na massa do gás nas vizinhanças de  $\vec{r}$ . O fluido poderá ser assumido como um meio contínuo se suas propriedades forem constantes para volumes pequenos em uma escala macroscópica, e grandes em uma escala microscópica.

A hipótese do contínuo implica que podemos associar a cada posição no espaço  $\vec{r}$  valores correspondentes às diferentes propriedades do escoamento tais como densidade, velocidade, e pressão. Tais propriedades podem ou não ser função do tempo. Desta maneira poderemos estabelecer equações independentes do formato das partículas do fluido e que, quando resolvidas, fornecem localmente (a cada “ponto”) os valores das propriedades do escoamento.

Embora existam amplas evidências de que os gases e os líquidos escoam de uma forma contínua, a base matemática para a teoria do contínuo ainda permanece incompleta e desta maneira esta abordagem deve ser considerada como uma primeira simplificação que fazemos para o nosso estudo da mecânica dos fluidos.

## Capítulo 2

# Fundamentos Matemáticos

Para introduzirmos os fundamentos da mecânica dos fluidos precisamos de uma terminologia matemática apropriada. Neste capítulo apresentaremos as convenções e a terminologia que usaremos ao longo dos demais capítulos. Adicionalmente, revisaremos alguns conceitos e definições matemáticas que servirão de base para deduzirmos as equações que governam a cinemática e a dinâmica dos fluidos.

### 2.1 Escalares e Vetores

Muitas grandezas associadas ao escoamento tais como densidade, temperatura e pressão são completamente caracterizadas pela sua magnitude; tais grandezas são denominadas de esca-

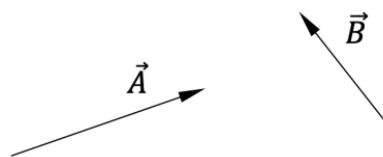


lares. Associada à magnitude do escalar está a escolha de um sistema de unidades. Note porém que a magnitude do escalar independe das unidades escolhidas para representá-la. Por exemplo, a temperatura de um gás em uma sala pode ser expressa em  $22\text{ }^{\circ}\text{C}$  ou em  $295,15\text{ K}$ ; embora estes números sejam distintos a magnitude da temperatura do gás é a mesma.

Grandezas como velocidade, força e aceleração precisam de duas propriedades para ser caracterizada: a magnitude e a orientação; tais grandezas são denominadas de vetores. Associado ao vetor está um sistema de referência e as propriedades do vetor independem do sistema de referência escolhido para representá-lo. Este é o princípio da invariância, e é o que garante que se um conjunto de equações vetoriais é válido em um determinado sistema de referência, ele é válido em qualquer outro sistema de referência. Cada sistema de referência é caracterizado pelas suas coordenadas, escalares cuja magnitude é expressa em um dado sistema de unidades. Doravante os termos sistema de referência e sistema de coordenadas serão utilizados indistintamente.

Possíveis formas de representar um vetor são:

- Geométrica



- Simbólica:

$$\vec{A} \text{ ou } \vec{B}$$

- Matemática:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \text{ ou } \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

## 2.2 Operações com Vetores

Inicialmente vamos definir o vetor unitário  $\hat{a}$  na orientação de  $\vec{A}$  como

$$\hat{a} = \vec{A}/|\vec{A}| \quad (2.1)$$

onde  $|\vec{A}|$  é a magnitude de  $\vec{A}$ . Por simplicidade faremos  $|\vec{A}| = A$ .

O vetor unitário  $\hat{a}$  por ter sua magnitude estabelecida como unitária, possui apenas a orientação no espaço como sua propriedade diferenciada. Assim, vetores unitários definem orientações e toda vez que quisermos caracterizar uma orientação faremos isto através de um vetor unitário.

A componente de um vetor  $\vec{A}$  em uma dada orientação  $\hat{s}$  é definida como

$$A_s = |\vec{A}| \cos(\vec{A}, \hat{s}) = A \cos(\vec{A}, \hat{s}) \quad (2.2)$$

onde  $\cos(\vec{A}, \hat{s})$  é o cosseno do ângulo formado entre os vetores  $\vec{A}$  e  $\hat{s}$ .

Geometricamente podemos representar a equação (2.2) conforme indicado na Fig. 2.1.

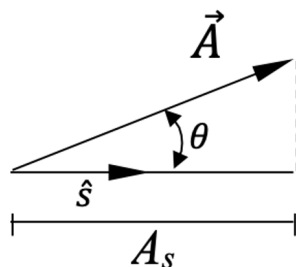


Figura 2.1: Representação geométrica da componente de  $\vec{A}$  na orientação  $\hat{s}$ .

Consideraremos aqui os vetores ditos "livres", que representam as grandezas mais gerais caracterizadas pelas magnitude e direção. Casos particulares de vetores são os vetores "deslizantes" e os vetores "fixos".

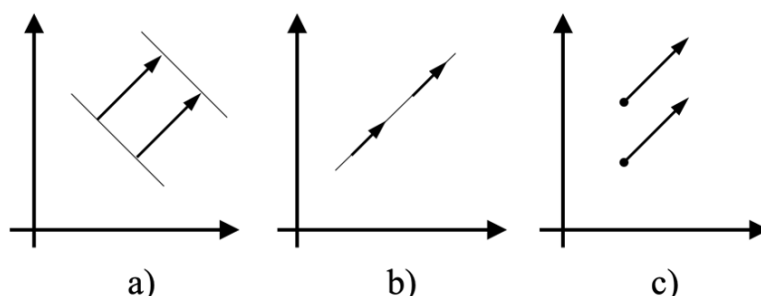


Figura 2.2: Representação geométrica de vetores: a) livres, b) deslizantes e c) fixo.

A Fig. 2.2 apresenta exemplos de vetores livres, deslizantes e fixo. Note que o vetor livre pode ser deslocado paralelamente a si próprio sem que sua magnitude e orientação se alterem; para tais vetores a localização de sua origem é irrelevante. Em problemas de mecânica muitas vezes é conveniente que se especifique além da magnitude e orientação, a linha de ação

do vetor. Este é o caso, por exemplo, do cálculo de forças em problemas de estática; nestas situações tais vetores são ditos deslizantes. Há ainda situações como as que aparecem no cálculo das trajetórias de corpos em movimentos não retilíneos onde é necessário que se especifique o ponto de aplicação do vetor que neste caso são denominados de fixos. Uma vez que o estudo dos vetores deslizantes e fixos pode ser feito a partir dos vetores livres, trataremos todos os vetores aqui como sendo vetores livres.

### 2.2.1 Adição de dois vetores

A adição de dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  obedece a regra do paralelograma e está representada na Fig. 2.3.

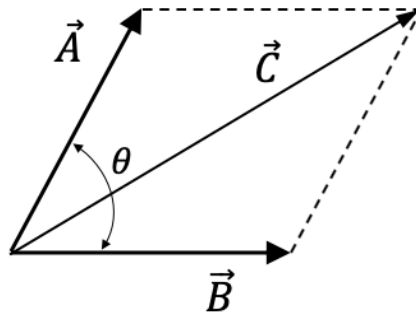


Figura 2.3: Regra do paralelograma para adição de  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

Como consequência da regra do paralelograma, resulta que

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta \quad (2.3)$$

A adição de dois vetores obedece as propriedades comutativa,

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (2.4)$$

e associativa,

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Multiplicação de um vetor por um escalar

Para multiplicar um vetor por um escalar, multiplica-se a magnitude do vetor pelo escalar mantendo-se a orientação do vetor,

$$m\vec{A} = mA\hat{a} = \vec{A} + \vec{A} + \vec{A} + \cdots + \vec{A}, \text{ } m \text{ vezes} \quad (2.6)$$

A multiplicação de um vetor por um escalar obedece as seguintes propriedades,

$$a) \quad m\vec{A} = \vec{A}m, \text{ comutativa} \quad (2.7)$$

$$b) \quad (\alpha + \beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A}, \text{ distributiva} \quad (2.8)$$

$$c) \quad \alpha(\vec{A} + \vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}, \text{ distributiva} \quad (2.9)$$

### 2.2.3 Representação de um vetor por suas componentes

Conforme discutido anteriormente, associado a um vetor está um sistema de referência para que a magnitude e a orientação

do vetor possam ser devidamente caracterizadas. Cada coordenada deste sistema de referência está vinculada a uma orientação no espaço. Todo vetor pode ser representado por suas componentes nas orientações das coordenadas.

Como exemplo vamos considerar o sistema de coordenadas formado por três vetores unitários e mutuamente perpendiculares, conforme apresentado na Fig. 2.4.

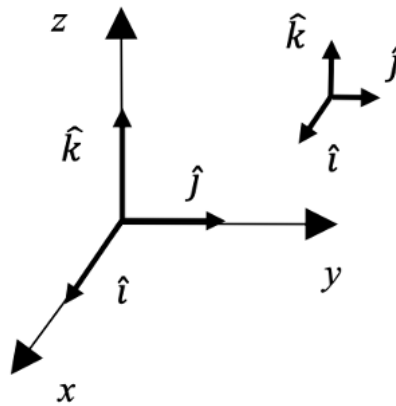


Figura 2.4: Sistema de coordenadas cartesiano ortogonal

O sistema de coordenadas  $x, y, z$  indicado é dito cartesiano pois os vetores de base  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  têm a mesma orientação em qualquer ponto no espaço.

Tomemos agora o sistema de coordenadas polares mostrado na Fig. 2.5 onde as coordenadas  $r, \theta$  estão associadas aos vetores de base  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ . Observe que a orientação dos vetores de base varia ao longo do espaço conforme ilustrado nos pontos  $P_1(r_1, \theta_1)$  e  $P_2(r_2, \theta_2)$ . Como os vetores de base variam com a posição, este sistema não é cartesiano.

Para o sistema de coordenadas cartesianas da Fig. 2.4, po-

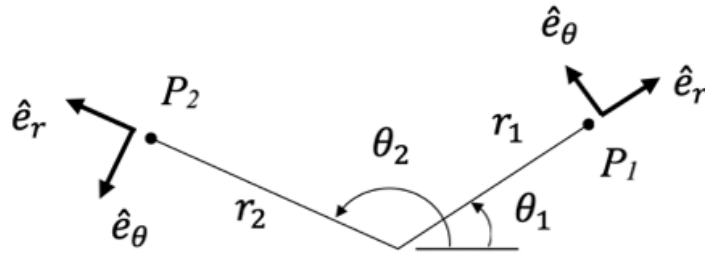


Figura 2.5: Sistema de coordenadas polares.

demos representar o vetor  $\vec{A}$  por suas componentes nas orientações das coordenadas  $x, y, z$  fazendo uso da seguinte representação,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (2.10)$$

onde,

$$\begin{aligned} A_x &= A \cos(\vec{A}, \hat{i}) \\ A_y &= A \cos(\vec{A}, \hat{j}) \\ A_z &= A \cos(\vec{A}, \hat{k}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

O vetor  $\vec{A}$  e suas componentes estão indicados na Fig. 2.6.

Convém observar que na representação do sistema de coordenadas cartesianas os eixos foram escolhidos a fim de satisfazer a regra da mão direita: um parafuso rodando no sentido de  $\hat{i}$  para  $\hat{j}$  avança no sentido de  $\hat{k}$ . Posteriormente ficará evidente que tal escolha é conveniente na representação e operação com vetores.

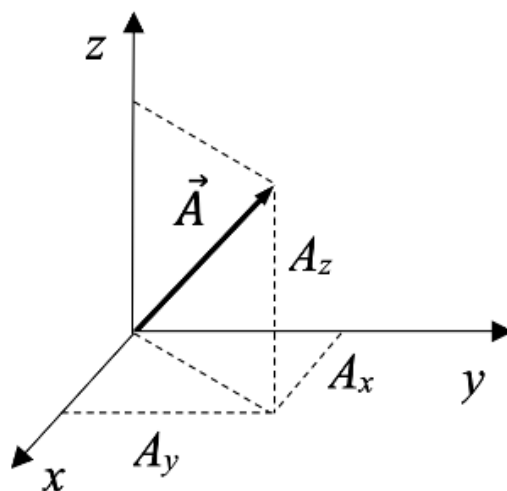


Figura 2.6: Representação das componentes de  $\vec{A}$  nas orientações das coordenadas  $x, y, z$ .

Por simplicidade, vamos adotar a nomenclatura indicada na Fig. 2.7 e escrever,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 \quad (2.12)$$

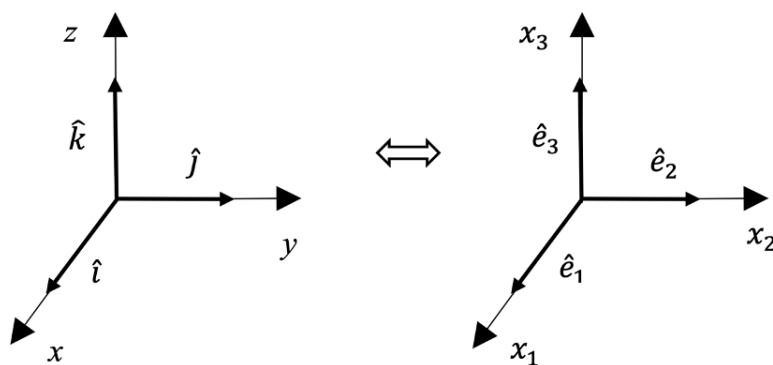


Figura 2.7: Nomenclatura alternativa para o sistema de coordenadas cartesiano ortogonal.



### 2.2.4 Produto escalar de vetores

O produto escalar entre os vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  é o escalar dado por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\vec{A}, \vec{B}) = AB \cos \theta \quad (2.13)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

Se  $\vec{A}$  é perpendicular a  $\vec{B}$  então  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ . Adicionalmente, o produto escalar entre dois vetores obedece as seguintes propriedades,

$$a) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}, \text{ comutativa} \quad (2.14)$$

$$b) \quad (\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}, \text{ distributiva} \quad (2.15)$$

### 2.2.5 Produto cruzado de vetores (produto vetorial)

O produto cruzado entre os vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  é o vetor dado por

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin(\vec{A}, \vec{B}) \hat{n} = (AB \sin \theta) \hat{n} \quad (2.16)$$

onde  $\hat{n}$  é perpendicular ao plano formado por  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  e obedece a regra da mão direita, ou seja, um parafuso rodando no sentido de  $\vec{A}$  para  $\vec{B}$  avança na direção de  $\hat{n}$ ;  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . Adicionalmente, observe que a magnitude de  $\vec{A} \times \vec{B}$  é igual à área do paralelograma formado pelos vetores  $\vec{A}$  para  $\vec{B}$ , ou seja  $AB \sin \theta$ .

### 2.2.6 Produto escalar triplo entre vetores

O produto escalar triplo entre os vetores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$  é o escalar dado por

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{A} \cdot BC \sin(\vec{B}, \vec{C}) \hat{n} \\ &= ABC \sin(\vec{B}, \vec{C}) \cos(\vec{A}, \hat{n})\end{aligned}\quad (2.17)$$

onde  $\hat{n}$  é perpendicular ao plano formado por  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$ .

Observe que o produto escalar triplo fornece o volume do paralelepípedo formado pelos vetores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$ , conforme ilustrado na Fig. 2.8.

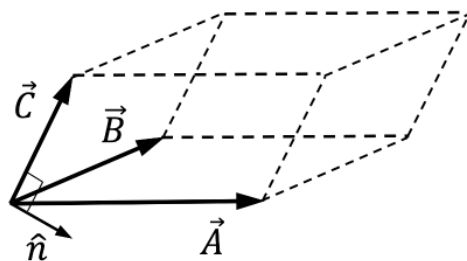


Figura 2.8: Paralelepípedo formado pelo produto escalar triplo entre  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$ .

Pode-se mostrar que,

$$\begin{aligned}
a) \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = \\
&= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \\
&= (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= -(\vec{A} \times \vec{C}) \cdot \vec{B} = -(\vec{C} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = \\
&= -(\vec{B} \times \vec{A}) \cdot \vec{C} = -\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = \\
&= -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) \tag{2.19}
\end{aligned}$$

## 2.3 Notação Indicial

As operações com vetores discutidas anteriormente podem ser representadas de uma maneira concisa e conveniente se utilizarmos a notação indicial. A fim de introduzir a notação indicial considere o vetor  $\vec{A}$  expresso em função de suas componentes em um sistema cartesiano ortogonal,

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \tag{2.20}$$

Por simplicidade o símbolo de somatório na Eq.(2.20) será omitido e será adotada a convenção de que índices repetidos em qualquer termo de uma representação implica em soma para os valores do índice iguais a 1, 2 e 3. Desta forma, podemos escrever,

$$\vec{A} = A_i \hat{e}_i = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 \tag{2.21}$$

Observe que a partir da notação indicial as três parcelas do lado direito da equação anterior foram condensadas em apenas um termo. Em operações vetoriais mais complexas esta economia de termos torna-se ainda mais atraente como será visto posteriormente. Para utilizarmos a notação indicial de uma forma consistente as seguintes regras devem ser obedecidas,

i) Índices repetidos implicam soma e podem ser trocados por qualquer outro índice repetido não presente na representação,

$$\begin{aligned} a_i b_i &= a_j b_j = a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_i b_i x_j &= a_k b_k x_j = a_p b_p x_j \end{aligned}$$

ii) Índices repetidos são chamados de índices "mudos" enquanto que índices não repetidos são chamados de índices "livres" e podem assumir os valores 1, 2 ou 3, ou seja, o termo  $x_i$  isoladamente pode representar  $x_1$ ,  $x_2$  ou  $x_3$ .

iii) Não é permitido mais de dois índices mudos em uma representação. Note que  $a_i b_i x_i$  tanto pode representar  $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) x_i$  como  $a_i (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)$ . Desta forma se houver mais de dois índices repetidos pode haver ambiguidades. As duas interpretações dadas anteriormente para  $a_i b_i x_i$ , embora distintas, poderiam ser válidas caso fosse possível a existência de três índices mudos.

iv) O número de grandezas associadas a uma determinada representação indicial é dado por  $3^n$  onde  $n$  é o número de índices livres,

$$\begin{aligned} A_i &\rightarrow 3 \text{ grandezas} \\ A_{ij} &\rightarrow 9 \text{ grandezas} \\ A_{ijk} &\rightarrow 27 \text{ grandezas} \end{aligned}$$

v) Para que uma expressão faça sentido cada termo deve possuir os mesmos índices livres.

$$\begin{aligned} a_{ij}b_jc_k + \varphi_{ik} &\rightarrow \text{expressão faz sentido} \\ A_{ij}B_p + C_{ip} = D_{ip} &\rightarrow \text{expressão não faz sentido} \end{aligned}$$

vi) A ordem de uma grandeza é dada pelo número de índices livres presentes na grandeza,

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \text{ordem zero} \\ \varphi_i &\rightarrow \text{ordem um} \\ \varphi_{ij} &\rightarrow \text{ordem dois} \end{aligned}$$

Como exemplo adicional da conveniência da notação indicial considere a representação  $a_{ijk}b_{ijm}x_r x_s$ . A esta representação estão associadas qualquer uma das  $3^4 = 81$  expressões, cada qual com nove parcelas.

Comumente uma grandeza de ordem um como  $A_i$  é representada de forma matricial por uma matriz  $3 \times 1$ ,

$$A_i \rightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Ao escrever  $A_i$  na forma anterior está-se introduzindo uma quarta maneira para representar um vetor, ou seja, a representação matricial, que se soma às representações geométrica, simbólica e matemática já introduzidas previamente. De forma semelhante, uma grandeza de ordem dois como  $B_{ij}$  pode ser representada por uma matriz  $3 \times 3$ ,

$$B_{ij} \rightarrow \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Uma recomendação adicional no uso da notação indicial refere-se ao cuidado em não transformar índices mudos em índices livres através de operações matemáticas. Por exemplo,  $a_i a_i \neq a_i^2$ , pois enquanto  $a_i a_i = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3$  é uma operação que envolve índices mudos,  $a_i^2$  representa  $a_1^2$ ,  $a_2^2$  ou  $a_3^2$  pois é uma operação que envolve um índice livre.

## 2.4 Delta de Kronecker

O delta de Kronecker é definido como,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.24)$$

Pode-se mostrar que

$$a) \quad \delta_{ii} = 3 \quad (2.25)$$

$$b) \quad \delta_{ij} a_j = a_i \quad (2.26)$$

$$c) \quad \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.27)$$

## 2.5 Símbolo de Permutação

O símbolo de permutação  $\epsilon_{ijk}$  é definido por,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se dois índices forem iguais} \\ +1 & \text{se a permutação for cíclica} \\ -1 & \text{se a permutação for anticíclica} \end{cases} \quad (2.28)$$

A permutação cíclica (ou par) é aquela em que os índices obedecem a ordem horária, conforme mostrado na Fig. 2.9.

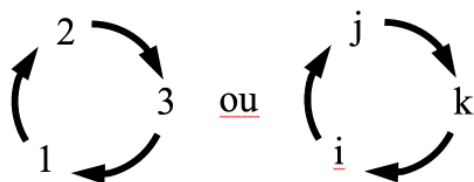


Figura 2.9: Permutação cíclica (ou par).

Na permutação anticíclica os índices obedecem a ordem anti-horária, conforme mostrado na Fig. 2.10.

A partir da definição de  $\epsilon_{ijk}$  verifica-se que dos  $3^3 = 27$  termos possíveis, apenas seis são diferentes de zero,

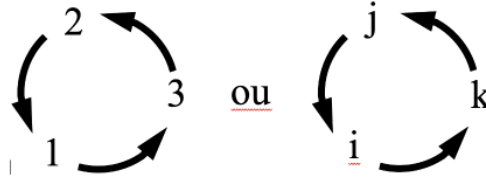


Figura 2.10: Permutação anticíclica (ou ímpar).

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \quad (2.29)$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1 \quad (2.30)$$

A combinação da notação indicial com os símbolos  $\delta_{ij}$  e  $\epsilon_{ijk}$  é muito conveniente para expressar operações entre vetores. Por exemplo,

$$a) \quad \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (2.31)$$

$$b) \quad (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k = \epsilon_{ijk} \quad (2.32)$$

## 2.6 Grandezas Simétricas e Anti-Simétricas

Grandezas simétricas no contexto da notação indicial são aquelas em que o intercâmbio de dois índices deixa a grandeza inalterada, ou seja,  $S_{ij}$  é simétrico se

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (2.33)$$

Grandezas anti-simétricas são aquelas em que o intercâmbio dos índices altera o sinal da grandeza, ou seja,  $A_{ij}$  é anti-simétrico se



$$A_{ij} = -A_{ji} \quad (2.34)$$

Se para uma grandeza  $B_{ij}$  as igualdades (2.33) e (2.34) não se aplicam, esta grandeza não é simétrica nem anti-simétrica. Adicionalmente, uma grandeza pode ser simétrica em relação a dois índices e anti-simétrica em relação a outros dois, por exemplo,

$$C_{ijk} = C_{jik} = -C_{ikj} \quad (2.35)$$

onde  $C_{ijk}$  é simétrico em relação a  $i, j$  e anti-simétrico em relação a  $i, k$ .

Note que  $\delta_{ij}$  é simétrico e  $\epsilon_{ijk}$  é anti-simétrico. Uma propriedade importante a ser destacada é que o produto de uma grandeza simétrica por uma grandeza anti-simétrica é sempre zero. Para provarmos tal fato, considere o produto de  $S_{ij}$  (simétrico) por  $A_{ij}$  (anti-simétrico),

$$\begin{aligned} S_{ij}A_{ij} &= S_{ji}(-A_{ji}) = -S_{ji}A_{ji} = -S_{rs}A_{rs} \\ &= -S_{ij}A_{ij} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Como a grandeza  $S_{ij}A_{ij}$  é igual ao seu negativo, necessariamente tem que ser igual a zero.

## 2.7 Operações com Vetores em Notação Indicial

O objetivo agora é explorar as representações simbólicas e indiciais das expressões vetoriais e intercambiar de uma representação para a outra. À medida em que se explora a notação indicial verifica-se que tal notação é uma ferramenta muito conveniente na manipulação de vetores e de outras grandezas de ordem superior que serão analisadas.

### 2.7.1 Representação indicial de vetores em termos de suas componentes

Conforme explorado na Eq.(2.21) o vetor  $\vec{A}$  pode ser escrito em termos das suas componentes de acordo com,

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3, \text{ notação simbólica} \quad (2.37)$$

$$= A_i\hat{e}_i, \text{ notação indicial} \quad (2.38)$$

### 2.7.2 Produto escalar em notação indicial

Para realizarmos o produto escalar dos vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  em notação indicial basta escrever os vetores em notação indicial e realizar as operações conforme já explorado,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_i\hat{e}_i \cdot B_j\hat{e}_j = A_iB_j(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = A_iB_j\delta_{ij} = A_iB_i \\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \end{aligned} \quad (2.39)$$

No desenvolvimento anterior uso foi feito das Eqs.(2.27) e (2.26).

As componentes  $A_j$  do vetor  $\vec{A}$  são obtidas pelo produto escalar entre  $\hat{e}_j$  e  $\vec{A}$ ,

$$\hat{e}_j \cdot \vec{A} = \hat{e}_j \cdot (A_i \hat{e}_i) = A_i (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i) = A_i \delta_{ji} = A_j \quad (2.40)$$

### 2.7.3 Produto cruzado em notação indicial

Escrevendo  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  em notação indicial verifica-se que

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= A_i \hat{e}_i \times B_j \hat{e}_j = A_i B_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \\ &= A_i B_j (\epsilon_{ijk} \hat{e}_k) = \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde uso foi feito da Eq. (2.31).

A equação anterior também pode ser escrita em termos do determinante da matriz formada pelos vetores  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  e as componentes dos vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  conforme indicado a seguir,

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{i} + \\ &+ (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{k} \end{aligned} \quad (2.42)$$

A componente  $A_p$  do vetor  $(\vec{A} \times \vec{B})$  é dada por

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B})_p &= \hat{e}_p \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \hat{e}_p \cdot (\epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k) \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j (\hat{e}_p \cdot \hat{e}_k) = \epsilon_{ijp} A_i B_j
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Para  $p = 1$ ,

$$(\vec{A} \times \vec{B})_1 = \epsilon_{ij1} A_i B_j = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \tag{2.44}$$

### 2.7.4 Produto escalar triplo em notação indicial

O produto escalar triplo entre os vetores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$  será,

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_i \hat{e}_i \cdot (B_j \hat{e}_j \times C_k \hat{e}_k) = A_i B_j C_k [\hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)] \\
&= A_i B_j C_k [\hat{e}_i \cdot (\epsilon_{jkr} \hat{e}_r)] = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k
\end{aligned} \tag{2.45}$$

A expressão anterior também pode ser escrita em termos do determinante da matriz formada pelas componentes  $A_i$ ,  $B_j$  e  $C_k$ ,

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{2.46}$$

A partir da expansão do determinante a igualdade anterior pode ser facilmente verificada.

De uma maneira geral, o determinante da matriz  $A_{ij}$  pode ser escrito como

$$\det A_{ij} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \quad (2.47)$$

Expressão equivalente para  $\det A_{ij}$  é

$$\det A_{ij} = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \quad (2.48)$$

### 2.7.5 Identidade $\epsilon - \delta$

Uma identidade entre o símbolo de permutação  $\epsilon_{ijk}$  e o delta de Kronecker  $\delta_{ij}$  pode ser obtida a partir do determinante de uma matriz  $A_{ij}$ . Lembrando que um intercâmbio de linhas ou de colunas causa uma mudança de sinal do determinante, é possível escrever a partir da igualdade (2.47),

$$-\det A_{ij} = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{11} & A_{13} \\ A_{22} & A_{21} & A_{23} \\ A_{32} & A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Para um número arbitrário de intercâmbios de linhas tem-se,

$$\epsilon_{ijk} \det A_{ij} = \begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix} \quad (2.49)$$

Da mesma forma, para intercâmbios de colunas tem-se,

$$\epsilon_{prs} \det A_{ij} = \begin{vmatrix} A_{1p} & A_{1r} & A_{1s} \\ A_{2p} & A_{2r} & A_{2s} \\ A_{3p} & A_{3r} & A_{3s} \end{vmatrix} \quad (2.50)$$

Combinando-se as Eqs. (2.49) e (2.50) resulta em,

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{prs} \det A_{ij} = \begin{vmatrix} A_{ip} & A_{ir} & A_{is} \\ A_{jp} & A_{jr} & A_{js} \\ A_{kp} & A_{kr} & A_{ks} \end{vmatrix} \quad (2.51)$$

Como  $A_{ij}$  é uma matriz arbitrária, podemos fazer  $A_{ij} = \delta_{ij}$  o que resulta em  $\det \delta_{ij} = 1$  e

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{prs} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{jp} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \end{vmatrix} \quad (2.52)$$

A identidade anterior relaciona o delta de Kronecker ao símbolo de permutação. A partir de (2.52) pode-se mostrar que,

$$a) \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr} \quad (2.53)$$

$$b) \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijs} = 2\delta_{ks} \quad (2.54)$$

$$c) \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6 \quad (2.55)$$

## 2.8 Cálculo Vetorial

Vamos agora explorar algumas operações envolvendo o cálculo diferencial e integral de vetores. Inicialmente faremos uma

abordagem estritamente matemática e na sequência analisaremos o significado físico das operações introduzidas.

Considere as funções escalares e vetoriais definidas por

$$\varphi(\vec{r}) \quad \text{e} \quad \vec{A}(\vec{r})$$

Tais funções associam a cada posição  $\vec{r}$  no espaço um escalar ou um vetor, respectivamente. A posição  $\vec{r}$  é definida em função das suas coordenadas em um dado sistema de referência,

$$\vec{r} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3 \quad (2.56)$$

Exemplos de  $\varphi(\vec{r})$  incluem densidade,  $\rho(x, y, z)$  e pressão,  $p(x, y, z)$ . Exemplos de  $\vec{A}(\vec{r})$  incluem velocidade,  $\vec{v}(x, y, z)$  e aceleração,  $\vec{a}(x, y, z)$ . Comumente  $\varphi(\vec{r})$  é denominado de campo escalar e  $\vec{A}(x, y, z)$  de campo vetorial.

Fazendo menção à Fig. 2.11,  $\vec{r}$  indica a posição do ponto  $P$  que é circundado por um elemento de volume  $\Delta v$  cuja área superficial é  $S$ ,  $d\sigma$  é um elemento infinitesimal de área em  $S$  e  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal a  $d\sigma$  apontando para fora de  $\Delta v$ .

Podemos definir as seguintes grandezas,

i) Gradiente de um campo escalar  $\varphi(\vec{r})$ ,

$$\text{grad}\varphi = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S \hat{n} \varphi \, d\sigma \quad (2.57)$$

ii) Divergente de um campo vetorial  $\vec{A}(\vec{r})$ ,

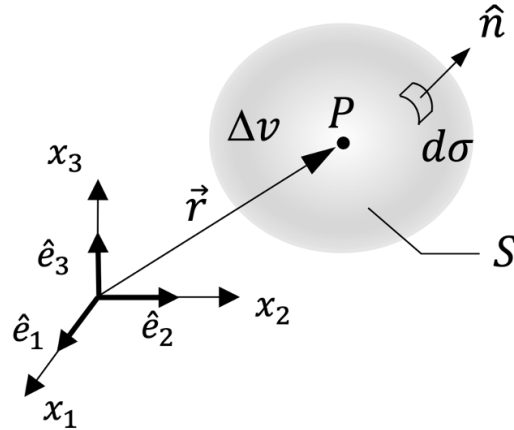


Figura 2.11: Elemento de volume  $\Delta v$  com área superficial  $S$  em torno do ponto  $P$ .

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S \hat{n} \cdot \vec{A} d\sigma \quad (2.58)$$

iii) Rotacional de um campo vetorial  $\vec{A}(\vec{r})$ ,

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S \hat{n} \times \vec{A} d\sigma \quad (2.59)$$

Como as definições anteriores fornecem os valores das respectivas funções em um determinado ponto  $P$ , deve-se fazer o limite de  $\Delta v$  tender a zero no ponto  $P$ .

Definindo o operador nabla como,



$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\ast) &= \frac{\partial(\ast)}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial(\ast)}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial(\ast)}{\partial x_3} \hat{e}_3 \\
&= \hat{e}_i \frac{\partial(\ast)}{\partial x_i} = \hat{e}_i \partial_i(\ast)
\end{aligned} \tag{2.60}$$

pode-se mostrar que,

$$\text{grad} \varphi = \vec{\nabla} \varphi \tag{2.61}$$

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \tag{2.62}$$

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2.63}$$

A seguir as grandezas (ou operadores) definidos anteriormente serão exploradas em detalhes e algumas propriedades a elas associadas serão introduzidas.

### 2.8.1 Gradiente de um campo escalar

Uma forma alternativa de definir o gradiente de um campo escalar  $\varphi(\vec{r})$  de maneira a enfatizar seu significado físico é,

*”O gradiente de  $\varphi$  é um vetor cuja componente em uma dada orientação fornece a variação de  $\varphi$  naquela orientação”*

Para explorar a definição anterior, considere o campo escalar  $\varphi(\vec{r})$ . Na posição  $\vec{r}$  tem-se  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  e na posição  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$  tem-se  $\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ , conforme ilustrado na Fig. 2.12.

Para  $\Delta\vec{r}$  tendendo a zero, podemos escrever,

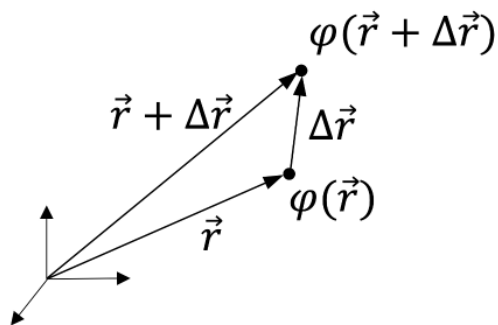


Figura 2.12: Valor da função escalar  $\varphi$  nas posições  $\vec{r}$  e  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ .

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \\ &= \varphi(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Expandindo  $\varphi(\vec{r} + d\vec{r})$  em série de Taylor e desprezando os termos de maior ordem, teremos,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) &= \varphi(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \\ &+ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3 \\
&= \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\hat{e}_3 \right) \cdot (dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2 + dx_3\hat{e}_3) \\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\hat{e}_i \cdot dx_j\hat{e}_j = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\varphi \tag{2.64}
\end{aligned}$$

Se  $\vec{r}$  representa a posição de todos os pontos em uma linha no espaço, podemos escrever esta linha de forma paramétrica como  $\vec{r}(s)$ , ou seja, as coordenadas  $x_i$  de  $\vec{r}$  podem ser escritas em termos de  $x_i(s)$ . Um elemento  $d\vec{r}$  pode então ser expresso em função de seu módulo e sua orientação como  $d\vec{r} = |d\vec{r}|\hat{s} = (ds)\hat{s}$  e a Eq.(2.64) torna-se

$$\frac{d\varphi}{ds} = \hat{s} \cdot \vec{\nabla}\varphi = (\vec{\nabla}\varphi)_s \tag{2.65}$$

onde  $d\varphi/ds$  é a derivada direcional de  $\varphi(\vec{r})$  na orientação  $\hat{s}$ . Observe que como a orientação  $\hat{s}$  é arbitrária, o vetor  $\vec{\nabla}\varphi$  permite que se obtenha a variação do campo escalar  $\varphi(\vec{r})$  em uma dada posição ao longo de qualquer orientação no espaço, conforme afirmado anteriormente.

### 2.8.2 Propriedades do gradiente

O vetor gradiente de um campo escalar satisfaz as seguintes propriedades,

- i)  $\vec{\nabla}\varphi$  é normal às superfícies de  $\varphi(\vec{r})$  constante (isosuperfícies ou superfícies de nível).

Esta propriedade pode ser verificada escolhendo  $d\vec{r}$  tangente a uma superfície de  $\varphi$  constante, conforme mostrado na Fig. 2.13.

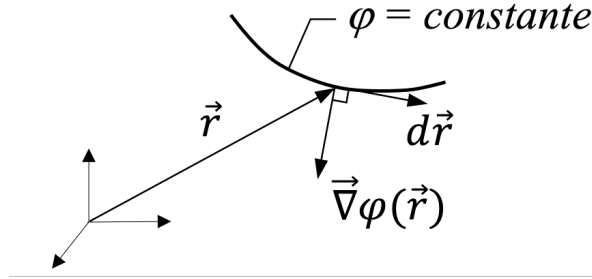


Figura 2.13: Orientação de  $\vec{\nabla}\varphi$  em uma superfície de  $\varphi$  constante.

Aplicando a Eq.(2.64) na superfície de  $\varphi$  constante,

$$d\varphi = 0 = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} \implies \vec{\nabla}\varphi \perp d\vec{r} \quad (2.66)$$

ii) A máxima variação do campo escalar  $\varphi(\vec{r})$  é igual à magnitude de  $\vec{\nabla}\varphi$  e ocorre na orientação de  $\vec{\nabla}\varphi$ .

Esta propriedade resultada da aplicação direta da Eq.(2.65),

$$\frac{d\varphi}{ds} = \hat{s} \cdot \vec{\nabla}\varphi = |\vec{\nabla}\varphi| \cos \theta \quad (2.67)$$

de onde verifica-se que  $(d\varphi/ds)_{max} = |\vec{\nabla}\varphi|$  e ocorre para  $\theta = 0$ , ou seja, para  $\hat{s}$  na mesma orientação de  $\vec{\nabla}\varphi$ .

### 2.8.3 Divergente de um campo vetorial

A fim de explorar o conceito de divergente de um campo vetorial, é necessário introduzir algumas grandezas.

i) A quantidade de  $\vec{A}$  na orientação de  $\hat{n}$  é dada por,

$$A_n = \hat{n} \cdot \vec{A} \quad (2.68)$$

ii) O escoamento (vazão) de  $\vec{A}$  através de um elemento de área  $d\sigma$  é,

$$(\hat{n} \cdot \vec{A})d\sigma \quad (2.69)$$

onde  $\hat{n}$  é normal a  $d\sigma$ .

iii) O escoamento líquido de  $\vec{A}$  através de uma superfície fechada de área  $S$  é,

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{A} d\sigma \quad (2.70)$$

Podemos agora escrever,

*"O divergente do vetor  $\vec{A}$  em um ponto  $P$  é o escoamento líquido de  $\vec{A}$  por unidade de volume em  $P$ "*

Matematicamente a definição anterior se traduz na expressão introduzida pela Eq.(2.58).

O divergente de um campo vetorial pode também ser calculado fazendo uso da Eq.(2.62), juntamente com a definição do operador nabla da Eq.(2.60),

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \hat{e}_i \partial_i \cdot (A_j \hat{e}_j) = \hat{e}_i \cdot \partial_i (A_j \hat{e}_j) \\
&= \hat{e}_i \cdot A_j \partial_i (\hat{e}_j) + \hat{e}_i \cdot \partial_i (A_j) \hat{e}_j
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Para o sistema de coordenadas cartesiano,  $\partial_i \hat{e}_j = 0$ , o que resulta em

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \partial_i (A_j) \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \partial_i (A_j) \delta_{ij} = \partial_i A_i \\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Pode-se mostrar que a expressão obtida anteriormente na Eq.(2.72) é equivalente à definição dada na Eq.(2.58).

O divergente do gradiente de um campo escalar aparece com frequência em diversas situações em engenharia e recebe o nome de Laplaciano. O operador Laplaciano em coordenadas cartesianas é dado por

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \hat{e}_i \partial_i \cdot \hat{e}_j \partial_j \varphi \\
&= \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \partial_i \partial_j \varphi = \delta_{ij} \partial_i \partial_j \varphi = \partial_i \partial_i \varphi \\
&= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}
\end{aligned} \tag{2.73}$$

#### 2.8.4 Circulação

Considere a curva fechada  $C$  que limita uma região plana conforme mostrado na Fig.2.14.

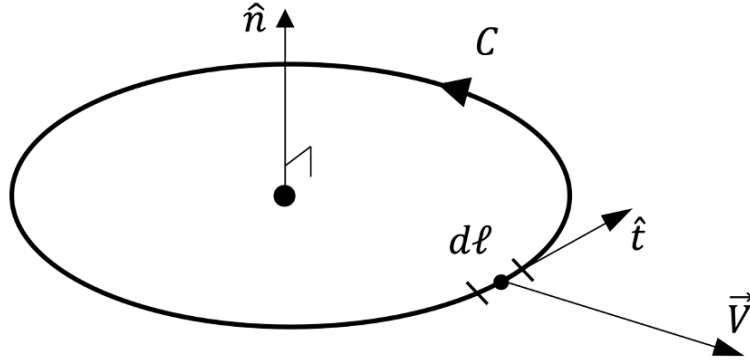


Figura 2.14: Região plana limitada pela curva fechada  $C$  cuja normal é  $\hat{n}$ .

De acordo com a Fig.2.14,  $d\ell$  é um elemento infinitesimal de comprimento de arco em  $C$ ,  $\hat{t}$  é o vetor tangente unitário a  $C$  em  $d\ell$ ,  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal à região plana limitada por  $C$  (apontando no sentido positivo segundo a regra da mão direita), e  $\vec{V}$  é um campo vetorial cujo valor em  $d\ell$  é o indicado na figura.

A circulação  $\Gamma$  de  $\vec{V}$  ao longo de  $C$  é definida como,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} d\ell \quad (2.74)$$

O valor tangencial médio de  $|\vec{V}|$  em torno de  $C$  é dado por,

$$\overline{V_t} = \frac{1}{L} \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} d\ell = \frac{\Gamma}{L} \quad (2.75)$$

onde  $L$  é o comprimento de  $C$ .

Para explorar a idéia de circulação, tome, por exemplo, o escoamento plano dado por  $\vec{V} = V\hat{i}$  conforme indicado na Fig.2.15.

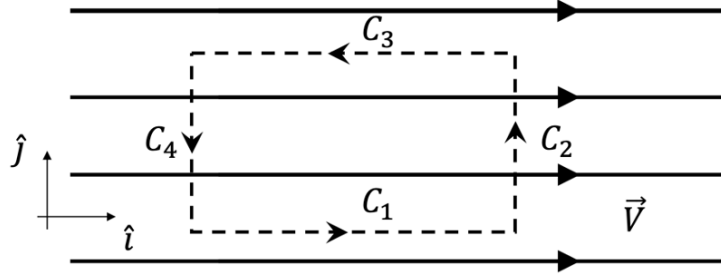


Figura 2.15: Escoamento unidimensional dado por  $\vec{V} = V\hat{i}$ .

Calculando a circulação de  $\vec{V}$  ao longo da curva tracejada indicada na Fig.2.15, resulta em,

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} d\ell = \int_{C_1} \vec{V} \cdot \hat{i} dx + \int_{C_2} \vec{V} \cdot \hat{j} dy + \\ &+ \int_{C_3} \vec{V} \cdot (-\hat{i}) dx + \int_{C_4} \vec{V} \cdot (-\hat{j}) dy \\ &= VL_1 + 0 - VL_3 + 0 = 0\end{aligned}$$

onde  $L_1$  e  $L_3$  são os comprimentos de  $C_1$  e  $C_3$ , respectivamente.

Como um segundo exemplo, considere agora o disco que gira com velocidade angular  $\Omega$ , conforme mostra a Fig.2.16.

A circulação de  $\vec{V}$  ao longo do caminho tracejado indicado na Fig.2.16 será,



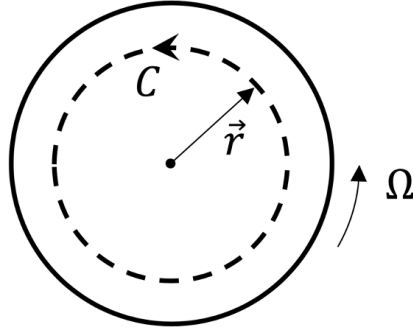


Figura 2.16: Disco em rotação com velocidade angular  $\Omega$ .

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell = \int_0^{2\pi} \underbrace{\Omega r \hat{e}_\theta}_{\vec{V}} \cdot \hat{e}_\theta \underbrace{r \, d\theta}_{d\ell} \\ &= 2\pi r^2 \Omega\end{aligned}$$

Observe que,

$$\overline{V_t} = \frac{\Gamma}{L} = \frac{2\pi r^2 \Omega}{2\pi r} = \Omega r = V_\theta$$

### 2.8.5 Rotacional de um campo vetorial

O rotacional de um campo vetorial  $\vec{A}$  pode ser definido em termos da circulação conforme o seguinte enunciado,

*”O rotacional de  $\vec{A}$  é um vetor cuja componente normal a uma região plana limitada por uma curva fechada  $C$ , em um dado ponto  $P$ , é a circulação de  $\vec{A}$  por unidade de área em  $P$ ”*

Da definição anterior vê-se que o rotacional de  $\vec{A}$  no ponto  $P$  se relaciona com a componente tangencial média de  $\vec{A}$  em torno de uma curva fechada que circunda  $P$ .

Em termos matemáticos a definição dada se traduz em,

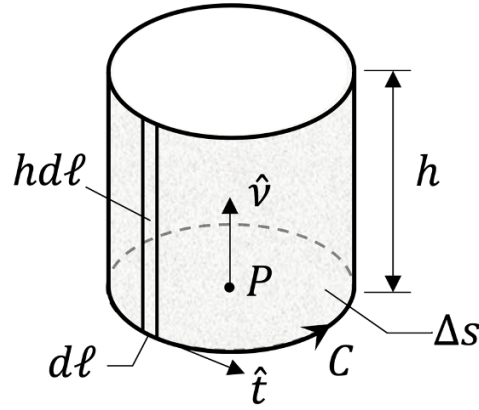
$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= (rot \vec{A})_n = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_C \vec{A} \cdot \hat{t} d\ell \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\Delta s}\end{aligned}\quad (2.76)$$

Retornando ao exemplo da Fig.2.16 e considerando que o disco está no plano  $x, y$ , tem-se,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V})_z = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r^2 \Omega}{\pi r^2} = 2\Omega$$

e vemos que para um campo de velocidade a componente do rotacional perpendicular a um dado plano é igual a duas vezes a velocidade angular do fluido no plano.

A Eq.(2.76) resulta da definição introduzida anteriormente pela Eq.(2.59). Para chegar na Eq.(2.76) a partir da Eq.(2.59) considere o cilindro reto de altura  $h$  e base  $\Delta s$  conforme ilustrado na Fig.2.17. A base  $\Delta s$  na Fig.2.17 é limitada pela curva  $C$ , e para um dado ponto  $P$  em  $\Delta s$ ,  $\hat{\nu}$  é um vetor unitário perpendicular a  $\Delta s$ . Como  $\hat{\nu}$  é constante, podemos escrever, fazendo uso da Eq.(2.59)

Figura 2.17: Cilindro reto de altura  $h$  e base  $\Delta s$ .

$$\begin{aligned}
 \hat{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \hat{v} \cdot \left( \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S \hat{n} \times \vec{A} d\sigma \right) \\
 &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S \hat{v} \cdot (\hat{n} \times \vec{A}) d\sigma \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

Mas, ao longo das tampas do cilindro,  $\hat{v}$  e  $\hat{n}$  são paralelos de forma que  $\hat{v} \cdot (\hat{n} \times \vec{A})$  se anula. Assim, a integral só precisa ser calculada na superfície lateral do cilindro onde  $d\sigma = h d\ell$ . Lembrando ainda que  $\hat{v} \cdot (\hat{n} \times \vec{A}) = (\hat{v} \times \hat{n}) \cdot \vec{A}$  e que  $\hat{v} \times \hat{n} = \hat{t}$ , onde  $\hat{t}$  é o vetor tangente à curva  $C$ , a Eq.(2.77) torna-se,

$$\hat{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_C \vec{A} \cdot \hat{t} \underbrace{h d\ell}_{d\sigma} \quad (2.78)$$

como  $\Delta v = h\Delta s$ ,

$$\hat{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_C \vec{A} \cdot \hat{t} d\ell = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\Delta s} \quad (2.79)$$

que é a própria Eq.(2.76).

Em termos do operador  $\vec{\nabla}$ , podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 \text{rot}\vec{A} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
 &= \hat{e}_i \partial_i \times A_j \hat{e}_j = \hat{e}_i \times \partial_i (A_j \hat{e}_j) \\
 &= \hat{e}_i \times [A_j \partial_i \hat{e}_j + (\partial_i A_j) \hat{e}_j] \\
 &= (\partial_i A_j) \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j \hat{e}_k
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

A componente de  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  na orientação  $\hat{e}_k$ , será

$$(\text{rot}\vec{A})_k = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{e}_k = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j \tag{2.81}$$

Para  $k = 3$ , por exemplo, tem-se,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{e}_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \tag{2.82}$$

Quando  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ , dizemos que  $\vec{A}$  é um campo vetorial irrotacional.

## 2.9 Teoremas Integrais

Nesta secção dois teoremas integrais serão revisados. As demonstrações destes teoremas encontram-se em livros de cálculo vetorial e não serão exploradas aqui.

### 2.9.1 Teorema de Gauss

Considere um volume  $\Delta v$  de tamanho arbitrário, e  $S$  a superfície externa que limita este volume. Para um campo  $F$  qualquer (escalar, vetor, ou, mais genericamente, um campo tensorial conforme será introduzido posteriormente) o teorema de Gauss estabelece que,

$$\int_{\Delta v} \vec{\nabla} * F \, d\tau = \int_S \hat{n} * F \, d\sigma \quad (2.83)$$

onde  $d\tau$  é um elemento infinitesimal de volume em  $\Delta v$ ,  $d\sigma$  é um elemento infinitesimal de área em  $S$ ,  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal a  $d\sigma$  apontando para fora de  $\Delta v$ , e  $*$  uma operação qualquer (por exemplo, produto escalar ou produto vetorial).

Casos particulares do teorema de Gauss são apresentados a seguir.

$$(i) \quad \int_{\Delta v} \vec{\nabla} \varphi \, d\tau = \int_S \hat{n} \varphi \, d\sigma \quad (2.84)$$

$$(ii) \quad \int_{\Delta v} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \, d\tau = \int_S \hat{n} \cdot \vec{V} \, d\sigma \quad (2.85)$$

$$(iii) \quad \int_{\Delta v} \vec{\nabla} \times \vec{V} \, d\tau = \int_S \hat{n} \times \vec{V} \, d\sigma \quad (2.86)$$

A forma do teorema de Gauss apresentada na Eq.(2.85) é conhecida como teorema da divergência. Em palavras o teorema da divergência é enunciado como,

*”O escoamento líquido de um campo vetorial através de uma superfície fechada é igual à integral do divergente deste campo ao longo do volume limitado pela superfície”*

Como exemplo de aplicação do teorema de Gauss considere o escoamento líquido do campo vetorial  $\vec{V}$  através da superfície fechada  $S$  indicada na Fig.2.18. Conforme mostrado,  $S$  é a casca hemisférica de raio 1 fechada na base pela tampa circular no plano  $x, y$ .

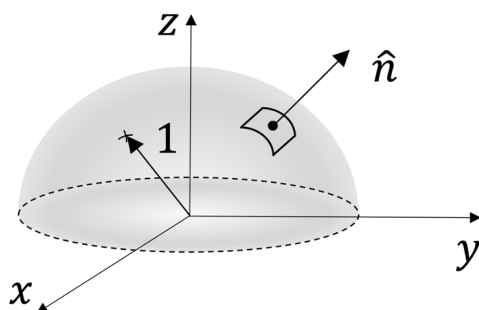


Figura 2.18: Superfície fechada formada por casca hemisférica de raio 1, e tampa circular no plano  $x, y$ .

O escoamento líquido de  $\vec{V}$  através de  $S$  será,

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{V} d\sigma = \int_{hemisférico} + \int_{tampa}$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{n}_{hemisférico} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \hat{n}_{tampa} &= -\hat{k} \end{aligned}$$

Tomando, por exemplo,  $\vec{V} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , temos

$$\begin{aligned}\int_S \hat{n} \cdot \vec{V} \, d\sigma &= \int_{\text{hemisfério}} (x^2 + y^2 + z^2) \, d\sigma + \int_{\text{tampa}} (-z) \, d\sigma \\ &= \int_{\text{hemisfério}} d\sigma + 0 = 2\pi\end{aligned}$$

Alternativamente, usando o teorema da divergência,

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{V} \, d\sigma = \int_{\Delta v} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \, d\tau = \int_{\Delta v} 3 \, d\tau = 2\pi$$

### 2.9.2 Teorema de Stokes

A fim de introduzir o teorema de Stokes, rever as definições de alguns tipos de superfícies se faz necessário.

- Superfície Suave - aquela em que a normal à superfície é uma função contínua da posição ao longo de toda a superfície, incluindo o contorno. Uma calota esférica, por exemplo, é uma superfície suave; um cubo é uma superfície seccionalmente suave, e um cone não é nem suave nem seccionalmente suave.
- Superfície Orientável - aquela que possui dois lados que podem ser diferenciados (pintando um de cada cor, por exemplo). Matematicamente isto simplifica em dizer que podemos definir um campo contínuo de normais  $\hat{n}$  ao longo de toda a superfície. A banda de Möbius, ilustrada na Fig.2.19, não é uma superfície orientável.

- Superfície Fechada - aquela que possui uma parte interna e uma parte externa. Em uma superfície fechada é possível passar de um ponto externo a outro ponto externo através de uma linha que não cruza (atravessa) a superfície, e, similarmente, de um ponto interno a outro ponto interno. Entretanto para passar de um ponto interno a um ponto externo o caminho deve necessariamente romper a superfície. Há superfícies que não possuem interior e exterior como a garrafa de Klein conforme mostra a Fig.2.19. Neste caso não faz sentido classificar a superfície como fechada ou aberta.

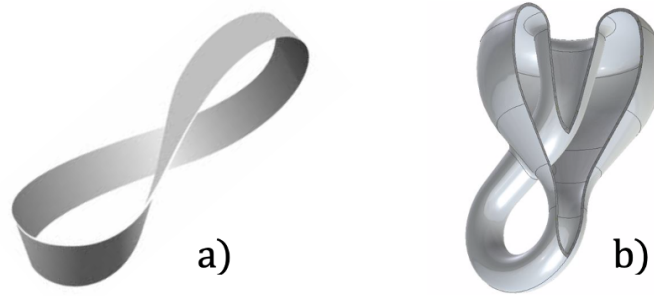


Figura 2.19: Exemplo de superfície não orientável: a) banda de Möbius; e superfície que não possui interior ou exterior: b) garrafa de Klein.

Considere agora uma superfície aberta, orientável e seccionalmente suave cuja extremidade (abertura) é a curva  $C$  conforme indicado na Fig.2.20. O teorema de Stokes estabelece que,

$$\int_S \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) d\sigma = \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} d\ell = \Gamma \quad (2.87)$$



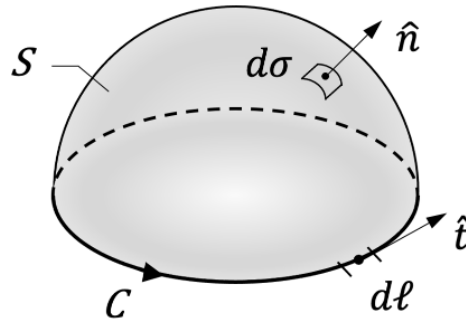


Figura 2.20: Superfície aberta, orientável e seccionalmente suave.

Para explorar o teorema de Stokes e obter algumas relações que nos serão úteis posteriormente, vamos considerar as curvas  $C_1$  e  $C_2$  que unem os pontos  $\vec{r}_o$  e  $\vec{r}_1$  mostrados na Fig.2.21.

Vamos agora calcular a circulação do campo vetorial  $\vec{V}$  ao longo da curva fechada  $C = C_1 + (-C_2)$ ,

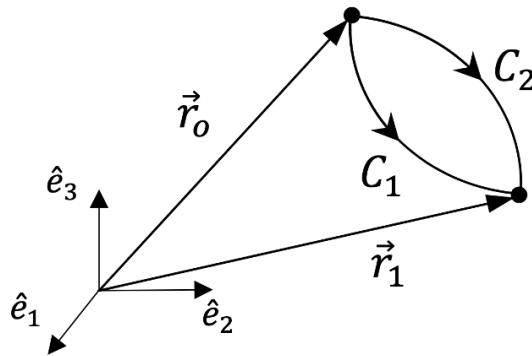


Figura 2.21: Curvas  $C_1$  e  $C_2$  que unem os pontos  $\vec{r}_o$  e  $\vec{r}_1$ .

$$\oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} d\ell = \int_{C_1} \vec{V} \cdot \hat{t} d\ell + \int_{-C_2} \vec{V} \cdot \hat{t} d\ell \quad (2.88)$$

Utilizando o teorema de Stokes podemos escrever,

$$\oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell = \int_S \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \, d\sigma = \int_{C_1} \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell - \int_{C_2} \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell \quad (2.89)$$

onde  $S$  é uma superfície aberta, orientável e seccionalmente suave qualquer cuja extremidade é  $C = C_1 + (-C_2) = C_1 - C_2$ .

Se  $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ , ou seja, se  $\vec{V}$  for um campo irrotacional, da Eq.(2.89) resulta,

$$\int_{C_1} \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell = \int_{C_2} \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell \quad (2.90)$$

o que implica em dizer que a integral de linha que une os dois pontos  $\vec{r}_0$  e  $\vec{r}_1$  independe do caminho de integração e depende apenas dos pontos unidos por  $C_n$ , onde  $C_n$  é um caminho qualquer. Assim,

$$\int_{C_1} \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell = \int_{C_2} \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell = \int_{C_n} \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_0) \quad (2.91)$$

Ainda, da equação anterior, se  $C$  é uma curva fechada, tem-se,

$$\oint_{C_1} \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell = 0 \quad (2.92)$$

Retornando agora à Eq.(2.91) e assumindo que  $\vec{r}$  e  $\vec{r} + d\vec{r}$  são dois pontos muito próximos entre si, podemos escrever,

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \\ &= \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell = \vec{V} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Fazendo uso da Eq.(2.64), resulta,

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = \vec{V} \cdot d\vec{r} \implies (\vec{\nabla}\varphi - \vec{V}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.94)$$

Como  $d\vec{r}$  é arbitrário, a Eq.(2.94) fornece,

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi \quad (2.95)$$

Chegamos no resultado anterior assumindo que  $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ . Por outro lado, se  $\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi$ ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \hat{e}_i \partial_i \times \hat{e}_j \partial_j \varphi = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j \varphi \hat{e}_k = 0 \quad (2.96)$$

já que  $\epsilon_{ijk}$  é antisimétrico e  $\partial_i \partial_j$  é simétrico.

Desta forma, podemos afirmar que,

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \iff \vec{V} = \vec{\nabla}\varphi \quad (2.97)$$

Convém observar que o resultado expresso na Eq.(2.97) só se aplica em regiões simplesmente conexas, ou seja, regiões onde qualquer curva fechada pode ser contraída até um ponto sem interceptar as fronteiras da região.

Resumindo, os resultados explorados anteriormente associados ao teorema de Stokes são,

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \vec{\nabla} \varphi \\
 b) \quad & \vec{V} = \vec{\nabla} \varphi \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \\
 c) \quad & \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \int_C \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell, \text{ independe de } C \\
 d) \quad & \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{V} \cdot \hat{t} \, d\ell = 0
 \end{aligned}$$

Como exemplo da aplicação do teorema de Stokes, considere o campo gravitacional  $\vec{F} = -mg\hat{k}$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot \hat{t} \, d\ell &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad , \quad d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot \hat{i} \, dx + \int_{y_1}^{y_2} \vec{F} \cdot \hat{j} \, dy + \int_{z_1}^{z_2} \vec{F} \cdot \hat{k} \, dz \\
 &= -mg(z_2 - z_1) = -mgh
 \end{aligned}$$

Alternativamente, como  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  podemos escrever  $\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi$ , onde  $\varphi = -mgz$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \hat{t} \, d\ell &= \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \\
&= -mgz_2 + mgz_1 = -mg(z_2 - z_1) \\
&= -mgh
\end{aligned}$$

Verifica-se assim que o trabalho para deslocar um corpo de massa  $m$  de uma posição  $\vec{r}_1$  para uma posição  $\vec{r}_2$  é igual à variação da energia potencial gravitacional do corpo.

## 2.10 Definição Matemática de Vetor

A idéia básica associada a um vetor é de uma grandeza caracterizada por uma magnitude e uma orientação que podem ser especificadas através de um sistema de coordenadas. Assim, o vetor é uma grandeza que pode ser representado por três componentes escalares. No entanto, nem todo conjunto de três escalares representa um vetor, o que indica que algo mais precisa ser imposto. O que falta é estabelecer que o vetor independe do sistema de coordenadas escolhido para representá-lo. Esta idéia de invariância, já introduzida na secção 2.1, indica que a magnitude e a orientação do vetor não são afetadas pelo sistema de coordenadas escolhido e mesmo que este sistema seja alterado a magnitude e a orientação permanecem as mesmas. Quando formulada matematicamente a invariância leva a uma definição fundamental de vetor.

Para explorar a idéia de invariância, considere que o vetor  $\vec{A}$  é representado tanto pelo sistema  $\hat{e}_i$  como pelo sistema  $\hat{e}'_i$ ,

$$\vec{A} = A_i \hat{e}_i = A'_i \hat{e}'_i \quad (2.98)$$

Conhecidas as componentes  $A_i$ , podemos obter  $A'_j$  a partir de

$$\begin{aligned} A'_j &= \hat{e}'_j \cdot \vec{A} = \hat{e}'_j \cdot A_i \hat{e}_i \\ &= (\hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i) A_i \\ &= c_{ij} A_i \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde,

$$c_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j = \cos(\hat{e}_i, \hat{e}'_j) \quad (2.100)$$

Como convenção adotaremos que o segundo índice de  $c_{ij}$  está relacionado ao sistema primo. Já que a escolha do sistema primo é arbitrária, ao invés da Eq.(2.99) podemos escrever,

$$A_j = c_{ji} A'_i \quad (2.101)$$

onde,

$$c_{ji} = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_i = \cos(\hat{e}_j, \hat{e}'_i) \quad (2.102)$$

É importante notar que  $c_{ij} \neq c_{ji}$ , ou seja, não necessariamente  $c_{ij}$  é simétrico.

Como exemplo de transformação de um sistema de referência para outro, vamos considerar a situação bidimensional ilustrada na Fig.2.22, onde o sistema primo é construído por uma rotação de  $\theta$  no sistema original.

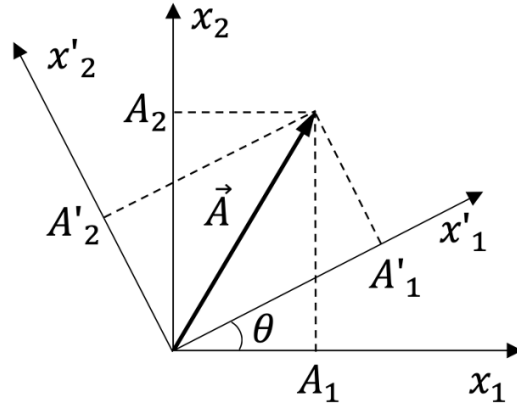


Figura 2.22: Componentes do vetor  $\vec{A}$  nos sistemas de coordenadas  $x_i$  e  $x'_j$ .

Da Eq.(2.99) podemos escrever,

$$\begin{aligned} A'_j &= c_{1j}A_1 + c_{2j}A_2 \\ &= \cos(\hat{e}_1, \hat{e}'_j)A_1 + \cos(\hat{e}_2, \hat{e}'_j)A_2 \end{aligned}$$

Para  $j = 1$ , por exemplo,

$$\begin{aligned} A'_1 &= \cos(\hat{e}_1, \hat{e}'_1)A_1 + \cos(\hat{e}_2, \hat{e}'_1)A_2 \\ &= A_1 \cos \theta + A_2 \cos(90 - \theta) \\ &= A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta \end{aligned}$$

Note que a expressão anterior de  $A'_1$  poderia ter sido diretamente obtida da Fig.2.22

Vamos agora aplicar a transformação de coordenadas para o vetor posição  $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ ,

$$\begin{aligned} x'_j &= \hat{e}'_j \cdot \vec{r} = \hat{e}'_j \cdot x_i \hat{e}_i = c_{ij} x_i \\ &= c_{ij} c_{ik} x'_k \end{aligned} \quad (2.103)$$

Como as coordenadas  $x'_j$  são linearmente independentes, ou seja, uma coordenada não pode ser expressa em função das outras, da Eq.(2.103) resulta que,

$$c_{ji} c_{ik} = \delta_{jk} \quad \text{ou} \quad c_{ik} c_{jk} = \delta_{ij} \quad (2.104)$$

Para a transformação de coordenadas indicada na Fig.2.22, a aplicação da Eq.(2.104) para  $i = j = 1$  resulta em

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (2.105)$$

que é uma importante relação trigonométrica.

A transformação  $x'_j = c_{ij} x_i$  representa uma rotação própria dos eixos de coordenadas (rotação que preserva a regra da mão direita). Esta rotação é caracterizada pelas nove componentes de  $c_{ij}$ .

Podemos agora apresentar uma definição rigorosa de vetor:



*”Em um sistema de referência cartesiano ortogonal um vetor  $\vec{A}$  é uma grandeza com três componentes (escalares) que se transformam de acordo com a regra*

$$A'_j = c_{ij}A_i \quad (2.106)$$

*quando o sistema de referência se transforma de acordo com*

$$x'_j = c_{ij}x_i \quad ” \quad (2.107)$$

Esta definição impõe o princípio da invariância para a representação do vetor pelas suas componentes escalares.

Uma definição de vetor equivalente à anterior mas que carrega em si um maior significado físico estabelece que,

*”Um vetor  $\vec{A}$  é uma grandeza matemática que associa a cada orientação  $\hat{s}$  no espaço um escalar dado por*

$$A_s = \hat{s} \cdot \vec{A} \quad ” \quad (2.108)$$

Observe que fazendo  $\hat{s} = \hat{e}'_j$  e  $A_s = A'_j$  na Eq.(2.108) resulta,

$$A'_j = \hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i A_i = c_{ij}A_i \quad (2.109)$$

que é a própria Eq.(2.106).

## 2.11 Definição Matemática de Tensor

Vetor é uma grandeza que associa um escalar a uma dada orientação no espaço. Devido à necessidade de se associar também um vetor a uma dada orientação no espaço, surge o conceito de tensor. Por exemplo, em dinâmica dos fluidos é muito importante conhecer a força que atua em um dado elemento de área em um corpo imerso em um escoamento.

Por analogia com a definição de vetor podemos pensar em uma grandeza  $\overline{\overline{T}}$  que associa a cada orientação  $\hat{n}$  um vetor  $\vec{F}$  através da relação

$$\vec{F} = \vec{T}_n = \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (2.110)$$

Associado à Eq.(2.110) existem duas orientações a serem caracterizadas, a orientação da normal ao elemento de área, e a orientação do vetor que atua neste elemento de área, conforme indicado na Fig.2.23.

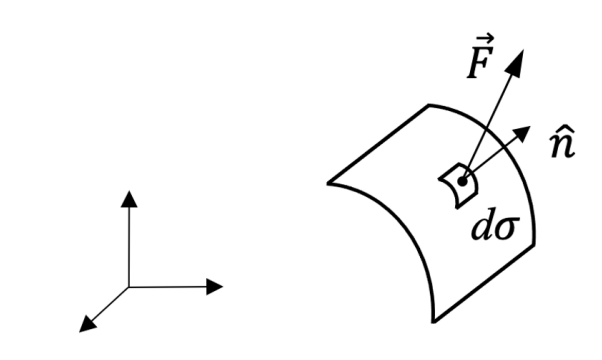


Figura 2.23: Vetor  $\vec{F}$  associado à orientação  $\hat{n}$  no elemento de área  $d\sigma$ .

Para a orientação  $\hat{e}_i$ , a Eq.(2.110) torna-se,

$$\vec{T}_i = \hat{e}_i \cdot \overline{\overline{T}} \quad (2.111)$$

As componentes de  $\vec{T}_i$  ao longo das orientações  $\hat{e}_j$  são,

$$\vec{T}_i \cdot \hat{e}_j = \hat{e}_i \cdot \overline{\overline{T}} \cdot \hat{e}_j = T_{ij} \quad (2.112)$$

Assim, uma representação adequada para  $\overline{\overline{T}}$  é,

$$\overline{\overline{T}} = T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (2.113)$$

A Eq.(2.113) representa um tensor de 2<sup>a</sup> ordem cujas nove componentes são  $T_{ij}$ , quando  $\overline{\overline{T}}$  é representado por suas componentes na base  $\hat{e}_i \hat{e}_j$ . O primeiro índice de  $T_{ij}$  indica a orientação no espaço e o segundo índice indica a componente do vetor associado à orientação especificada, conforme indicado na Fig.2.24.

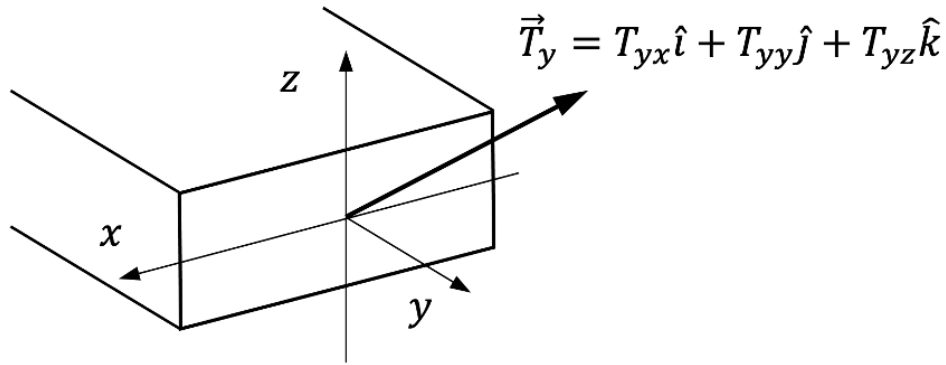


Figura 2.24: Vetor  $\vec{T}_y$  associado à orientação da coordenada  $y$  no plano  $x$ - $z$ .

O produto de dois vetores  $\hat{e}_i$  e  $\hat{e}_j$  na forma  $\hat{e}_i\hat{e}_j$  é denominado díade. A soma de díades é denominada diádico. Assim, para uma situação bidimensional,

$$\begin{aligned}\vec{A}\vec{B} &= (A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2)(B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2) \\ &= A_1B_1\hat{e}_1\hat{e}_1 + A_1B_2\hat{e}_1\hat{e}_2 + A_2B_1\hat{e}_2\hat{e}_1 + A_2B_2\hat{e}_2\hat{e}_2\end{aligned}$$

onde o lado esquerdo da equação anterior representa a díade  $\vec{A}\vec{B}$  e o lado direito o diádico constituído pela soma das díades  $\hat{e}_i\hat{e}_j$ .

A definição matemática de tensor de 2<sup>a</sup> ordem pode agora ser apresentada como,

*”Em um sistema de referência cartesiano ortogonal um tensor de 2<sup>a</sup> ordem é uma grandeza com nove componentes (escalares) que se transformam de acordo com a regra*

$$T'_{ij} = c_{mi}c_{nj}T_{mn} \quad (2.114)$$

*quando o sistema de referência se transforma de acordo com*

$$x'_j = c_{ij}x_i \quad (2.115)$$

*onde  $c_{ij}$  é dado pela Eq.(2.100) ”*

Alternativamente, do mesmo modo que fizemos anteriormente com a definição matemática de um vetor, podemos introduzir a seguinte definição de tensor de 2<sup>a</sup> ordem,

*”Um tensor  $\overline{\overline{T}}$  é uma grandeza matemática que associa a cada orientação  $\hat{s}$  no espaço um vetor dado por*

$$\vec{T}_s = \hat{s} \cdot \overline{\overline{T}} \quad ” \quad (2.116)$$

Tendo introduzido a representação de um tensor de segunda ordem através da Eq.(2.113) podemos agora generalizar a representação para um tensor de ordem qualquer. Como a ordem de uma grandeza indicial está associada ao número de índices livres presentes na grandeza, considerando as componentes de escalares, vetores e tensores de segunda ordem, podemos escrever,

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \text{tensor de ordem zero (escalar)} \\ \vec{A} = A_i \hat{e}_i &\rightarrow \text{tensor de ordem um (vector)} \\ \overline{\overline{A}} = A_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j &\rightarrow \text{tensor de ordem dois} \\ \overline{\overline{\overline{A}}} = A_{ijk} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k &\rightarrow \text{tensor de ordem três} \end{aligned}$$

e assim sucessivamente para um tensor de qualquer ordem.

Da mesma forma que um tensor de ordem dois associa um vetor a cada orientação  $\hat{n}$ , um tensor de ordem três associa um tensor de ordem dois a cada orientação  $\hat{n}$ ,

$$\overline{\overline{\overline{T}}}_n = \hat{n} \cdot \overline{\overline{\overline{T}}}$$

e de forma análoga para tensores de ordem superior.

### 2.11.1 Operações com tensores

As operações anteriormente definidas para vetores podem agora ser estendidas para tensores.

#### (i) Produto escalar

$$\vec{a} \cdot \overline{\overline{T}} = a_i \hat{e}_i \cdot T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k = a_i T_{jk} \delta_{ij} \hat{e}_k = a_i T_{ik} \hat{e}_k \quad (2.117)$$

$$\overline{\overline{T}} \cdot \vec{a} = T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k \cdot a_i \hat{e}_i = a_i T_{jk} \hat{e}_j \delta_{ki} = a_i T_{ji} \hat{e}_j \quad (2.118)$$

Note que  $\vec{a} \cdot \overline{\overline{T}} \neq \overline{\overline{T}} \cdot \vec{a}$ .

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = A_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot B_{rs} \hat{e}_r \hat{e}_s = A_{ij} B_{js} \hat{e}_i \hat{e}_s \quad (2.119)$$

$$\overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A}} = A_{js} B_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_s \neq \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} \quad (2.120)$$

#### (ii) Produto Vetorial

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \overline{\overline{A}} &= a_i \hat{e}_i \times A_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k = a_i A_{jk} (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \hat{e}_k \\ &= \epsilon_{ijp} a_i A_{jk} \hat{e}_p \hat{e}_k \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{B}} &= A_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \times B_{rs} \hat{e}_r \hat{e}_s = A_{ij} \hat{e}_i (\hat{e}_j \times \hat{e}_r) B_{rs} \hat{e}_s \\ &= \epsilon_{jrp} A_{ij} B_{rs} \hat{e}_i \hat{e}_p \hat{e}_s \end{aligned} \quad (2.122)$$

### 2.11.2 Tensor simétrico e anti-simétrico

Anteriormente exploramos as definições de grandezas simétricas e anti-simétricas. Analogamente,  $T_{ij}$  é um tensor simétrico se

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (2.123)$$

e  $T_{ji}$  é um tensor anti-simétrico se

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (2.124)$$

Todo tensor de segunda ordem pode ser decomposto em uma soma de um tensor simétrico e um tensor anti-simétrico. Isto porque sempre é possível escrever,

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \\ &= S_{ij} + A_{ij} \end{aligned} \quad (2.125)$$

onde  $S_{ij}$  é simétrico e  $A_{ij}$  é anti-simétrico.

### 2.11.3 Tensor identidade e tensor esférico

O tensor identidade é definido como

$$\bar{\bar{I}} = \delta_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = \hat{e}_1 \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \hat{e}_3 \quad (2.126)$$

Em termos matriciais as componentes do tensor identidade são expressas pelas componentes do delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

Note que,

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{I}} = \overline{\overline{I}} \cdot \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}} \quad (2.128)$$

Tensor esférico é aquele que pode ser representado por um escalar que multiplica o tensor identidade. Assim,  $T_{ij}$  é esférico se,

$$T_{ij} = \alpha I_{ij} \quad (2.129)$$

onde  $\alpha$  é escalar.

#### 2.11.4 Tensor isotrópico

Um tensor é dito isotrópico se suas componentes não se alteram com uma rotação do sistema de coordenadas. Pode-se mostrar que todo tensor isotrópico de segunda ordem é múltiplo do tensor identidade, e que todo tensor isotrópico de terceira ordem é múltiplo de tensor permutação.

A idéia de isotropia está associada à independência em relação a uma orientação espacial. Um material é dito isotrópico em relação a uma dada propriedade se esta propriedade é a mesma em todas as direções em um ponto. Vê-se assim que todos os tensores de ordem zero (escalares) são isotrópicos e que não existe tensor de primeira ordem (vetor) isotrópico. Exceção faz-se ao vetor cujas componentes são todas zero. Aliás, os tensores de qualquer ordem cujas componentes são zero, são isotrópicos.



Pode-se mostrar que todo tensor isotrópico de ordem dois é múltiplo de  $\delta_{ij}$ , ou seja, todo tensor esférico é isotrópico. Adicionalmente, todo tensor isotrópico de ordem três é múltiplo de  $\epsilon_{ijk}$ .

Também é possível mostrar que a expressão mais geral para um tensor isotrópico de quarta ordem é,

$$T_{ijkl} = \alpha_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + \alpha_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (2.130)$$

onde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são escalares.

Similarmente, a expressão mais geral para um tensor isotrópico de quinta ordem é,

$$\begin{aligned} T_{ijklm} = & \alpha_1 \delta_{ij} \epsilon_{klm} + \alpha_2 \delta_{ik} \epsilon_{jlm} + \alpha_3 \delta_{il} \epsilon_{jkm} + \\ & + \alpha_4 \delta_{im} \epsilon_{jkl} + \alpha_5 \delta_{jk} \epsilon_{ilm} + \alpha_6 \delta_{il} \epsilon_{ikm} + \\ & + \alpha_7 \delta_{jm} \epsilon_{ikl} + \alpha_8 \delta_{kl} \epsilon_{ijm} + \alpha_9 \delta_{km} \epsilon_{ijl} + \\ & + \alpha_{10} \delta_{lm} \epsilon_{ijk} \end{aligned} \quad (2.131)$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$  são escalares. E para um tensor isotrópico de sexta ordem a expressão mais geral é,

$$\begin{aligned} T_{ijklmn} = & \alpha_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \alpha_2 \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \alpha_3 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} + \\ & + \alpha_4 \delta_{im} \delta_{kl} \delta_{jn} + \alpha_5 \delta_{kl} \delta_{jm} \delta_{jn} + \alpha_6 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \\ & + \alpha_7 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ln} + \alpha_8 \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \alpha_9 \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + \\ & + \alpha_{10} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \alpha_{11} \delta_{ikl} \delta_{jn} \delta_{km} + \\ & + \alpha_{12} \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{ln} \end{aligned} \quad (2.132)$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$  são escalares.

### 2.11.5 Tensor transposto e traço do tensor

O tensor transposto de um tensor  $\overline{\overline{T}}$  é definido como o tensor  $\overline{\overline{T}}^T$  obtido por,

$$\overline{\overline{T}}^T = T_{ji} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (2.133)$$

Comparando a Eq.(2.113) com a Eq.(2.133) vê-se que na construção do transposto de  $\overline{\overline{T}}$  os índices foram trocados de ordem. Como consequência, o tensor simétrico é aquele em que  $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}^T$ .

O traço de um tensor é o escalar dado pela soma dos elementos da diagonal principal, da matriz que representa as componentes do tensor,

$$tr \overline{\overline{T}} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = tr \overline{\overline{T}}^T \quad (2.134)$$

O traço do produto escalar entre dois tensores  $\overline{\overline{A}}$  e  $\overline{\overline{B}}$  é comumente escrito como,

$$tr(\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}) = \overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} = A_{ij} B_{ji} \quad (2.135)$$

### 2.11.6 Eixos principais de um tensor simétrico de segunda ordem

Para todo tensor simétrico de segunda ordem é sempre possível achar pelo menos um sistema de coordenadas ortogonal no qual

os vetores associados pelo tensor às orientações dadas pelos eixos de coordenadas são paralelos a estes eixos. Este sistema de coordenadas é denominado de eixos principais do tensor e neste sistema a representação matricial do tensor possui somente componentes na diagonal; as demais componentes são nulas.

A fim de obter este sistema de coordenadas bem como as componentes do tensor neste novo sistema, vamos considerar o tensor de segunda ordem simétrico  $\overline{\overline{T}}$ . Considere que  $\hat{\nu}$  é um vetor unitário alinhado com um dos eixos principais do tensor  $\overline{\overline{T}}$ . Se impusermos que o vetor associado por  $\overline{\overline{T}}$  à orientação  $\hat{\nu}$  seja paralelo a  $\hat{\nu}$ , teremos,

$$\vec{T}_{\nu} = \hat{\nu} \cdot \overline{\overline{T}} = \lambda \hat{\nu} \quad (2.136)$$

onde  $\lambda$  é um escalar. Em notação indicial a equação anterior torna-se,

$$\nu_i T_{ij} = \lambda \delta_{ij} \nu_i \quad (2.137)$$

ou

$$\nu_i (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0 \quad (2.138)$$

A Eq.(2.138) representa um sistema homogêneo de três equações e quatro incógnitas:  $\lambda$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  e  $\nu_3$ . Em termos matriciais este sistema homogêneo pode ser escrito como,

$$\begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.139)$$

Para que tenhamos uma quarta equação que possibilitará a determinação das quatro incógnitas, impomos que

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \quad (2.140)$$

Como o sistema dado pela Eq.(2.138) é homogêneo, para uma solução não trivial (diferente de  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ ) devemos forçar que o determinante da matriz dos coeficientes seja zero,

$$\det(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0 \quad (2.141)$$

Desenvolvendo a equação anterior resulta em,

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (2.142)$$

onde

$$I_1 = \text{tr}\overline{\overline{T}} = T_{ii} \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}[(\text{tr}\overline{\overline{T}})(\text{tr}\overline{\overline{T}}) - \text{tr}(\overline{\overline{T}} \cdot \overline{\overline{T}})] = \frac{1}{2}(\text{tr}^2\overline{\overline{T}} - \text{tr}\overline{\overline{T}}^2) \\ &= \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \end{aligned} \quad (2.144)$$

$$I_3 = \det\overline{\overline{T}} = \epsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k} \quad (2.145)$$

A Eq.(2.142) é conhecida como equação característica do tensor  $\overline{\overline{T}}$  e os escalares  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os três invariantes de  $\overline{\overline{T}}$ . Pode-se mostrar que  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  independem do sistema de coordenadas escolhido para representar  $\overline{\overline{T}}$ . Estes três invariantes estão para o tensor  $\overline{\overline{T}}$  assim como a magnitude e a orientação estão para um dado vetor  $\vec{V}$ .

Para um tensor simétrico com componentes reais, as raízes da Eq.(2.142) são reais. A cada orientação  $\hat{v}$  esta associada uma das raízes  $\lambda$ . As raízes  $\lambda$  são comumente denominadas de valores principais ou autovalores de  $\overline{\overline{T}}$  e a orientação correspondente é comumente denominada de um dos eixos principais ou autovetores de  $\overline{\overline{T}}$ . Se  $\lambda_1 = \lambda_2$ , a forma diagonal de  $\overline{\overline{T}}$  independe da escolha dos eixos  $\hat{v}_1$  e  $\hat{v}_2$ , uma vez que  $\hat{v}_3$  tenha sido escolhido, ou seja, todos os pares ortogonais em um plano perpendicular a  $\hat{v}_3$  são possíveis eixos principais de  $\overline{\overline{T}}$ . Finalmente, se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , qualquer combinação linear de três vetores unitários são uma possível alternativa para os eixos principais de  $\overline{\overline{T}}$ . As componentes  $T_{ij}$  do tensor  $\overline{\overline{T}}$  mudam dependendo do sistema de coordenadas, mas estas componentes não podem ser maior do que o maior dos  $\lambda_i$  nem menor do que o menor dos  $\lambda_i$ , ou seja, os autovalores de  $\overline{\overline{T}}$  representam os extremos valores de  $T_{ij}$ .

Tendo obtido  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , através da Eq.(2.142), o tensor  $\overline{\overline{T}}$  pode ser escrito em forma matricial por,

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

onde a primeira matriz indica as componentes originais de  $\overline{\overline{T}}$  e a segunda matriz indica as componentes de  $\overline{\overline{T}}$  no sistema de referência dado pelos seus autovetores.

A obtenção dos autovetores  $\hat{\nu}_i$  que constituem o sistema de referência no qual as componentes de  $\overline{\overline{T}}$  são dadas pela Eq.(2.146) é feita através da Eq.(2.139). Para cada valor de  $\lambda_i$  a Eq.(2.139) representa um sistema de três equações e três incógnitas. Como este sistema não é linearmente independente, uma vez que impusemos que o determinante fosse zero, usamos duas das três equações juntamente com o fato de que  $\hat{\nu}_i$  é unitário, conforme imposto pela Eq.(2.140).

Como exemplo da obtenção dos autovalores e autovetores de um tensor simétrico, considere o tensor cujas componentes no sistema  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  são,

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

Para obter os autovalores, uso é feito da Eq.(2.141). Em notação matricial tem-se,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 - 4(1 - \lambda) = 0 \quad (2.148)$$

cuja solução é  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 3$ . Para obter  $\hat{\nu}_1$  substituímos  $\lambda_1$  na Eq.(2.138) de onde resulta,

$$\begin{cases} (1-1)\nu_1 + 0\nu_2 + 0\nu_3 = 0 \\ 0\nu_1 + (1-1)\nu_2 + 2\nu_3 = 0 \\ 0\nu_1 + 2\nu_2 + (1-1)\nu_3 = 0 \end{cases} \quad (2.149)$$

O sistema anterior, juntamente com a Eq.(2.140), fornece

$$\hat{\nu}_1 = (1, 0, 0) = \hat{i} \quad (2.150)$$

De forma análoga obtemos,

$$\hat{\nu}_2 = (1/\sqrt{2})\hat{j} - (1/\sqrt{2})\hat{k} \quad (2.151)$$

$$\hat{\nu}_3 = (1/\sqrt{2})\hat{j} + (1/\sqrt{2})\hat{k} \quad (2.152)$$

A componente de  $\overline{\overline{T}}$  no sistema de referência formado pelos vetores  $\hat{\nu}_1$ ,  $\hat{\nu}_2$  e  $\hat{\nu}_3$  será,

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

Para comprovar os desenvolvimentos anteriores, vamos obter as componentes de  $\overline{\overline{T}}$  expressas pela Eq.(2.153), utilizando agora a Eq.(2.114). Inicialmente precisamos determinar  $c_{ij}$  e para isto fazemos uso da Eq.(2.100) onde o sistema primo é dado pelos vetores  $\hat{\nu}_i$ . Assim,

$$c_{ij} = \cos(\hat{e}_i, \hat{\nu}_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

Agora, podemos escrever a Eq.(2.114) na forma matricial como  $\overline{\overline{T}}' = \overline{\overline{C}}^T \cdot \overline{\overline{T}} \cdot \overline{\overline{C}}$ , de onde tem-se,

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.155)$$

que é o mesmo resultado indicado na Eq.(2.153).

Independente de utilizarmos as componentes de  $\overline{\overline{T}}$  obtidas pela Eq.(2.147) ou pela Eq.(2.153), convém notar que os seus invariantes conforme calculados pelas Eqs.(2.143), (2.144) e (2.145) são dados por,

$$I_1 = 3 \quad , \quad I_2 = -1 \quad , \quad I_3 = -3 \quad (2.156)$$

Como um último comentário deve-se observar que caso  $\overline{\overline{T}}$  não seja simétrico, não há garantia que possa ser diagonalizado. Mas isto não quer dizer que não possa! Como exemplo, tome o tensor a seguir,



$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

cujos invariantes são

$$I_1 = 1 \quad , \quad I_2 = -6 \quad , \quad I_3 = -6 \quad (2.158)$$

## 2.12 Sistema de Coordenadas Curvilíneo Ortogonal

Até agora restringimos nossa análise de vetores e tensores a sistemas de referência cartesianos. Precisamos estender nossas definições para outros sistemas tais como cilíndricos, esféricos, etc. Embora possamos generalizar nossa análise para sistemas não ortogonais, é suficiente que tratemos aqui de sistemas curvilíneos ortogonais.

A principal diferença entre sistemas cartesianos e outros sistemas é que somente no cartesiano os vetores de base independem da posição. Por exemplo, no sistema polar explorado na Fig. 2.5 os vetores de base dependem da coordenada  $\theta$ .

Para expressar equações vetoriais em termos de um sistema curvilíneo ortogonal qualquer, é necessário que se desenvolva uma expressão para o operador  $\vec{\nabla}$  no sistema curvilíneo, e que se obtenha a dependência dos vetores de base com a posição nas coordenadas curvilíneas.

### 2.12.1 Determinação de $\vec{\nabla}$ em sistemas curvilíneos

Para determinar  $\vec{\nabla}$  em um sistema ortogonal qualquer é necessário escrever  $d\vec{r}$  no novo sistema de coordenadas. As coordenadas do novo sistema  $(u_1, u_2, u_3)$  podem ser utilizadas para expressar o vetor  $d\vec{r}$  através de,

$$d\vec{r} = h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2 + h_3 du_3 \hat{e}_3 \quad (2.159)$$

onde  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  são fatores de escala uma vez que  $du_1$ ,  $du_2$  e  $du_3$  podem não representar uma dimensão longitudinal. Por exemplo, no sistema cilíndrico plano (sistema polar) uma dimensão longitudinal infinitesimal ao longo da coordenada  $\theta$  é  $r d\theta$ , onde  $r$  é o fator de escala.

A partir da Eq.(2.159) a magnitude de  $d\vec{r}$  ao quadrado pode ser escrita como,

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 \quad (2.160)$$

ou, expressando  $d\vec{r}$  no sistema cartesiano tem-se,

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (2.161)$$

Conhecido o novo sistema curvilíneo, uma variação nas coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  pode ser escrita em termos das coordenadas  $(u_1, u_2, u_3)$ . Por exemplo, para  $dx_1$  tem-se,

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x_1}{\partial u_3} du_3 \quad (2.162)$$

e o mesmo para  $dx_2$  e  $dx_3$ . Em notação indicial podemos escrever,

$$dx_\ell = \frac{\partial x_\ell}{\partial u_j} du_j \quad (2.163)$$

Substituindo na Eq.(2.161) os valores de  $dx_1$ ,  $dx_2$  e  $dx_3$  obtidos da Eq.(2.163) e fazendo uso da igualdade entre as Eqs.(2.160) e (2.161) resulta em,

$$\left( \frac{\partial x_\ell}{\partial u_j} du_j \right) \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial u_k} du_k \right) = h_I^2 du_i du_i \quad (2.164)$$

onde o índice maiúsculo  $I$  não representa soma e sim o valor do correspondente índice minúsculo.

O termo do lado esquerdo da Eq.(2.164) pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial u_j} du_j \right) \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial u_k} du_k \right) &= \left( \frac{\partial x_\ell}{\partial u_j} \hat{e}_\ell \cdot \frac{\partial x_p}{\partial u_k} \hat{e}_p \right) du_j du_k \\ &= \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \right) du_j du_k \quad (2.165) \end{aligned}$$

Como o sistema  $(u_1, u_2, u_3)$  é ortogonal, para  $j \neq k$  tem-se que  $\partial \vec{r} / \partial u_j$  e  $\partial \vec{r} / \partial u_k$  são ortogonais e, portanto  $\partial \vec{r} / \partial u_j \cdot \partial \vec{r} / \partial u_k = 0$ . Desta forma só sobrarão os termos onde  $j = k$  na Eq.(2.164) que pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \right)^2 \right] du_1^2 + \\
& + \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \right)^2 \right] du_2^2 + \\
& + \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \right)^2 \right] du_3^2 = \\
& = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \quad (2.166)
\end{aligned}$$

Como  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  são coordenadas independentes, conclui-se da equação anterior que,

$$h_i^2 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_i} \right)^2 \quad (2.167)$$

A Eq.(2.167) nos permite determinar os fatores de escala  $h_i$  e desta forma é possível expressar  $d\vec{r}$  no sistema  $(u_1, u_2, u_3)$  através da Eq.(2.159). Como exemplo vamos considerar o sistema cilíndrico plano  $(r, \theta)$  onde

$$x = x_1 = r \cos\theta = u_1 \cos u_2 \quad (2.168)$$

e

$$y = x_2 = r \sin\theta = u_1 \sin u_2 \quad (2.169)$$

Fazendo uso da Eq.(2.167) tem-se

$$\begin{aligned}
h_1^2 &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \right)^2 \\
&= \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 = 1
\end{aligned} \tag{2.170}$$

e

$$\begin{aligned}
h_2^2 &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \right)^2 \\
&= u_1^2 \sin^2 u_2 + u_1^2 \cos^2 u_2 = u_1^2 = r^2
\end{aligned} \tag{2.171}$$

Assim,  $h_1 = 1$  e  $h_2 = r$  o que fornece para o sistema cilíndrico plano,

$$d\vec{r} = dr\hat{e}_r + r d\theta\hat{e}_\theta \tag{2.172}$$

Em cálculo tensorial é comum escrever a Eq.(2.160) como,

$$(ds)^2 = g_{ij} du_i du_j \tag{2.173}$$

onde  $g_{ij}$  é conhecido como as componentes do tensor métrico ou simplesmente coeficientes métricos. No caso de sistemas de coordenadas ortogonais,  $g_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . Em termos da nomenclatura que estamos adotando tem-se,

$$g_{11} = h_1^2 \quad , \quad g_{22} = h_2^2 \quad \text{e} \quad g_{33} = h_3^2 \tag{2.174}$$

A determinação dos fatores de escala para um sistema curvilíneo ortogonal qualquer possibilita que a Eq.(2.64), reproduzida a seguir, possa ser utilizada para definir  $\vec{\nabla}$ ,

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\varphi$$

Para tal vamos considerar que  $\varphi$  é função das coordenadas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  do novo sistema,  $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ , de onde resulta,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} du_3$$

Desta forma,

$$d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} du_3$$

Substituindo na equação anterior a expressão de  $d\vec{r}$  da Eq.(2.159) resulta em,

$$\begin{aligned} (h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2 + h_3 du_3 \hat{e}_3) \cdot \vec{\nabla}\varphi &= \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} du_3 \end{aligned}$$

Rearranjando os termos tem-se,

$$\begin{aligned} (\hat{e}_1 \cdot \vec{\nabla}\varphi) h_1 du_1 + (\hat{e}_2 \cdot \vec{\nabla}\varphi) h_2 du_2 + (\hat{e}_3 \cdot \vec{\nabla}\varphi) h_3 du_3 &= \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} du_3 \end{aligned}$$

de onde resulta,

$$(\hat{e}_1 \cdot \vec{\nabla} \varphi) = (\vec{\nabla} \varphi)_1 = (1/h_1) \partial \varphi / \partial u_1$$

$$(\hat{e}_2 \cdot \vec{\nabla} \varphi) = (\vec{\nabla} \varphi)_2 = (1/h_2) \partial \varphi / \partial u_2$$

$$(\hat{e}_3 \cdot \vec{\nabla} \varphi) = (\vec{\nabla} \varphi)_3 = (1/h_3) \partial \varphi / \partial u_3$$

Conclui-se então que a expressão geral para o operador  $\vec{\nabla}$  em coordenadas curvilíneas ortogonais é dada por,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\ ) &= \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial(\ )}{\partial u_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial(\ )}{\partial u_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial(\ )}{\partial u_3} \\ &= \frac{\hat{e}_i}{h_I} \frac{\partial(\ )}{\partial u_i} \end{aligned} \quad (2.175)$$

onde o índice maiúsculo  $I$  não representa soma e sim o valor do correspondente índice minúsculo.

Tendo obtido uma expressão geral para  $\vec{\nabla}$ , o próximo passo para que equações vetoriais possam ser escritas em sistemas curvilíneos ortogonais é a determinação da dependência com a posição dos vetores de base no sistema curvilíneo, conforme explorado na próxima seção.

### 2.12.2 Dependência dos vetores de base com a posição

A maneira como os vetores de base variam com a posição pode ser obtida geometricamente. Por exemplo, vamos considerar o sistema cilíndrico plano indicado na Fig.2.25.

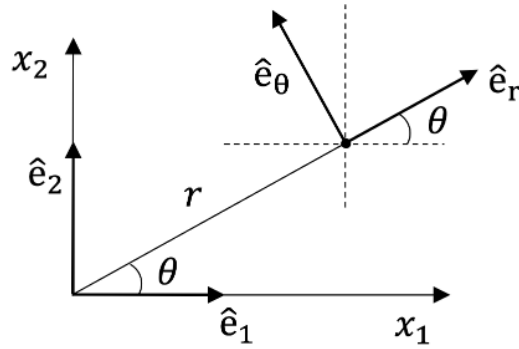


Figura 2.25: Representação dos vetores de base em um sistema de coordenadas cilíndrico plano

Na figura está indicado o sistema cartesiano, dado pelos vetores de base  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ , bem como o sistema polar, expresso por  $\hat{e}_r$  e  $\hat{e}_\theta$ . Também mostrado na figura estão as coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  do sistema cartesiano, e as coordenadas  $r$  e  $\theta$  do sistema polar. A partir da figura é possível escrever,

$$\hat{e}_r = \hat{e}_1 \cos \theta + \hat{e}_2 \sin \theta \quad \text{e} \quad \hat{e}_\theta = -\hat{e}_1 \sin \theta + \hat{e}_2 \cos \theta \quad (2.176)$$

Das expressões anteriores, tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} &= -\hat{e}_1 \sin \theta + \hat{e}_2 \cos \theta = \hat{e}_\theta \\ \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\hat{e}_1 \cos \theta - \hat{e}_2 \sin \theta = -\hat{e}_r \\ \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} &= \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (2.177)$$



Por conveniência é adequado obter uma expressão geral para a variação dos vetores de base com as coordenadas do sistema de referência dispensando considerações geométricas que podem se tornar dificultosas, especialmente quando se trata de situações tri-dimensionais. Pode-se mostrar que a dependência dos vetores de base com a posição para sistemas curvilíneos ortogonais é dada por,

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial u_j} = \frac{\hat{e}_j}{h_I} \frac{\partial h_J}{\partial u_i} - \delta_{ij} \vec{\nabla} h_J \quad (2.178)$$

onde os índices maiúsculos não representam soma e sim o valor correspondente do índice minúsculo. Os vetores de base do lado direito da Eq.(2.178) são aqueles correspondentes às coordenadas  $(u_1, u_2, u_3)$ , do mesmo modo que  $\vec{\nabla}$  é calculado no sistema curvilíneo conforme Eq.(2.175).

Para o sistema polar da Fig.2.25 vimos anteriormente, a partir das Eqs.(2.170) e (??), que  $h_1 = 1$  e  $h_2 = r$ . Desta forma, para  $i = 2$  e  $j = 2$ , por exemplo, tem-se, da Eq.(2.178),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial u_2} = \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} &= \frac{\hat{e}_\theta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \theta} - \left( \hat{e}_r \frac{\partial h_2}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \right) \\ &= -\hat{e}_r \end{aligned} \quad (2.179)$$

que é o mesmo resultado obtido geometricamente na Eq.(2.177).

As expressões dadas nas Eqs.(2.175) e (2.178) permitem que representações vetoriais e tensoriais possam ser escritas em qualquer sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal.

### 2.12.3 Expressões para os operadores em coordenadas curvilíneas ortogonais

Expressões gerais para algumas grandezas que comumente aparecem em equações vetoriais são apresentadas a seguir.

- Gradiente de um campo escalar  $\varphi(u_1, u_2, u_3)$  em coordenadas curvilíneas ortogonais,

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} \quad (2.180)$$

- Divergente de um campo vetorial  $\vec{V}(u_1, u_2, u_3)$  em coordenadas curvilíneas ortogonais,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 V_1) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 V_3) \right] \quad (2.181) \end{aligned}$$

- Rotacional de um campo vetorial  $\vec{V}(u_1, u_2, u_3)$  em coordenadas curvilíneas ortogonais,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{V} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 h_1 & \hat{e}_2 h_2 & \hat{e}_3 h_3 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\hat{e}_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 V_2) \right] + \\
&+ \frac{\hat{e}_2}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 V_3) \right] + \\
&+ \frac{\hat{e}_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 V_1) \right] \quad (2.182)
\end{aligned}$$

- Laplaceano de um campo escalar  $\varphi(u_1, u_2, u_3)$  em coordenadas curvilíneas ortogonais,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \varphi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (2.183)
\end{aligned}$$

## Capítulo 3

# Cinemática dos Fluidos

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos que nos permitirão obter as leis físicas e as equações matemáticas que possibilitam a descrição e análise do movimento dos fluidos. Trataremos da cinemática que é a descrição do movimento per si, sem se preocupar com as causas que governam o movimento. Iniciaremos por descrever o movimento individual de partículas de fluido e na sequência abordaremos o movimento de volumes de partículas que representam porções de fluido em escoamento.

### 3.1 Coordenadas Espaciais e Coordenadas Materiais

Assumimos anteriormente que a matéria é contínua e com isto podemos associar partículas de fluido a pontos matematicamente identificáveis. Somente uma partícula de fluido ocupa uma dada posição em um dado instante de tempo. Da mesma maneira, a cada posição em um dado tempo está associada apenas uma partícula de fluido.

A noção de movimento de uma partícula de fluido pode ser expressa pela seguinte expressão,

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_o, t) \quad (3.1)$$

onde  $\vec{r}_o$  é a posição que uma dada partícula ocupa em  $t = 0$ , e  $\vec{r}$  é a posição que a partícula  $\vec{r}_o$  ocupa no instante  $t$ . A relação funcional expressa pela Eq.(3.1) indica que em um dado tempo  $t$  a posição  $\vec{r}$  é ocupada por uma partícula de fluido que no tempo  $t = 0$  ocupava a posição  $\vec{r}_o$ . Desta forma  $\vec{r}$  é função de  $\vec{r}_o$  e  $t$ .

Alternativamente a equação anterior pode ser escrita como,

$$\vec{r}_o = \vec{r}_o(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

A Eq.(3.2) deve ser lida da seguinte forma:  $\vec{r}_o$  é a partícula que no instante  $t$  ocupa a posição  $\vec{r}$ . Note que a Eq.(3.2) indica a partícula  $\vec{r}_o$  que no instante  $t$  ocupa a posição  $\vec{r}$ . Conforme expresso na Eq.(3.2),  $\vec{r}_o$  é função de  $\vec{r}$  e  $t$ .

Somente uma partícula de fluido ocupa uma dada posição em um dado tempo. Da mesma forma, uma dada posição em um dado tempo só pode ser ocupada por uma dada partícula de fluido. Portanto, para cada instante  $t$  há uma relação biunívoca entre  $\vec{r}$  e  $\vec{r}_o$ .

Em consequência, partículas de fluido serão indicadas por  $\vec{r}_o$ , ou seja, é como se em  $t = 0$  rotulássemos todas as partículas do fluido pela sua posição inicial e à medida em que o tempo passa acompanhássemos as partículas e verificássemos a posição  $\vec{r}$  que cada partícula iria ocupando ao longo do escoamento.

Tendo caracterizado cada posição no espaço e cada partícula de fluido, podemos expressar qualquer grandeza associado ao escoamento (densidade, pressão, temperatura, etc.) como,

$$\varphi(\vec{r}, t) \quad \text{ou} \quad \varphi(\vec{r}_o, t)$$

onde  $\varphi$  pode ser um escalar, um vetor ou, genericamente, um tensor de qualquer ordem. Para  $\varphi = \vec{u}$ ,

$\vec{u}(\vec{r}, t) \rightarrow$  velocidade da partícula que em  $t$  ocupa a posição  $\vec{r}$   
 $\vec{u}(\vec{r}_o, t) \rightarrow$  velocidade da partícula  $\vec{r}_o$  no tempo  $t$

A descrição do escoamento pode ser feita utilizando-se as coordenadas  $(\vec{r}, t)$  ou  $(\vec{r}_o, t)$ . As coordenadas  $(\vec{r}, t)$  são denominadas coordenadas espaciais, de campo ou eulerianas; através destas coordenadas analisa-se as diferentes posições  $\vec{r}$  para um

dado tempo  $t$ . As coordenadas  $(\vec{r}_o, t)$  são denominadas coordenadas materiais, convectivas ou lagrangeanas; tais coordenadas permitem que o escoamento seja analisado acompanhando cada partícula  $\vec{r}_o$  à medida em que ela escoar.

Como exemplo, considere o campo de velocidade expresso em coordenadas espaciais por

$$\vec{u}(x, t) = \frac{2xt}{1+t^2} \hat{e}_1 \quad \text{onde} \quad x = x_o(1+t^2)$$

Alternativamente, este mesmo campo de velocidade pode ser escrito em coordenadas materiais e para isto basta substituir em  $\vec{u}(x, t)$  a expressão de  $x = x(x_o, t)$  de onde resulta

$$\vec{u}(x_o, t) = 2x_o t \hat{e}_1$$

Embora a expressão matemática para  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  seja diferente daquela para  $\vec{u}(\vec{r}_o, t)$ , trata-se do mesmo campo de velocidade, escrito em diferentes coordenadas.

## 3.2 Derivada Espacial e Derivada Material

Para qualquer grandeza  $F$  é possível definir as seguintes derivadas,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\vec{r}} = \frac{\partial F}{\partial t} \rightarrow \text{derivada espacial} \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\vec{r}_o} = \frac{dF}{dt} \rightarrow \text{derivada material} \quad (3.4)$$

Nas equações anteriores a grandeza  $F$  pode estar expressa tanto em coordenadas espaciais como em coordenadas materiais, ou seja, tanto como  $F(\vec{r}, t)$  ou  $F(\vec{r}_o, t)$ . A derivada espacial indica a variação com o tempo da grandeza  $F$  em uma dada posição, enquanto que a derivada material indica a variação com o tempo da grandeza  $F$  para uma determinada partícula.

A derivada material de  $F$  quando  $F$  está expressa em coordenadas espaciais é dada por,

$$\begin{aligned} \frac{dF(\vec{r}, t)}{dt} &= \left. \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_o} = \left. \frac{\partial F[\vec{r}(\vec{r}_o, t), t]}{\partial t} \right|_{\vec{r}_o} \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_t \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\vec{r}_o} + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\vec{r}} \\ &= (\partial_i F)|_t u_i + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\vec{r}} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} F + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\vec{r}} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} F \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observe que na dedução anterior fizemos uso da definição de velocidade de uma partícula de fluido que é a derivada em



relação ao tempo da posição que a partícula ocupa ao longo do escoamento, ou seja,

$$\vec{u} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}_o} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\vec{r}_o} \hat{e}_i = u_i \hat{e}_i \quad (3.6)$$

Vemos assim que a velocidade de uma partícula de fluido é a derivada material do vetor posição. Para comprovar tal resultado, basta fazer  $F = \vec{r}$  na Eq.(3.5),

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}_o} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{r} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{r} \quad (3.7)$$

Como,

$$\vec{\nabla} \vec{r} = \hat{e}_i \partial_i (x_j \hat{e}_j) = (\partial_i x_j) \hat{e}_i \hat{e}_j = \delta_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = \vec{\bar{I}} \quad (3.8)$$

Resulta que,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}_o} = \vec{u} \cdot \vec{\bar{I}} = \vec{u} \quad (3.9)$$

Escoamentos onde  $\partial F / \partial t = 0$  para toda e qualquer grandeza  $F$ , é dito "escoamento em regime permanente".

A aceleração de uma partícula de fluido é a derivada em relação ao tempo da velocidade da partícula, ou seja, é a derivada material da velocidade,

$$\vec{a} = \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|_{\vec{r}_o} = \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{\vec{r}_o} \hat{e}_i = a_i \hat{e}_i \quad (3.10)$$

Quando a velocidade da partícula é expressa em coordenadas espaciais, a aceleração pode ser obtida a partir da Eq.(3.5),

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{u}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \quad (3.11)$$

Tomemos agora  $F = T(\vec{r}, t)$  na Eq.(3.5), onde  $T$  é o campo de temperatura no fluido. A variação da temperatura com o tempo experimentada por uma partícula de fluido (derivada material da temperatura) é dada por,

$$\frac{dT(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \quad (3.12)$$

Observe que a primeira parcela do termo do lado direito da equação anterior envolve a variação da temperatura com o tempo em uma dada posição. A segunda parcela trata da variação de temperatura experimentada pela partícula de fluido pelo fato da partícula, com velocidade  $\vec{u}$ , mover-se em um campo com temperatura variável. Assim, mesmo se o regime for permanente e  $\partial T / \partial t = 0$ , a partícula em movimento poderá experimentar uma variação de temperatura com o tempo.

### 3.3 Trajetória de uma Partícula de Fluido

A posição de uma partícula de fluido ao longo do tempo é denominada de trajetória da partícula no escoamento e pode

ser obtida através do campo de velocidade,

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow \begin{cases} u_1 &= dx_1/dt \\ u_2 &= dx_2/dt \\ u_3 &= dx_3/dt \end{cases} \quad (3.13)$$

Como exemplo considere o escoamento dado por.

$$\vec{u} = \frac{x}{1+t} \hat{i} + \hat{j}$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{1+t} \implies \int_{x_o}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t \frac{dt}{1+t} \\ \frac{dy}{dt} &= 1 \implies \int_{y_o}^y dy = \int_0^t dt \end{aligned}$$

de onde resulta,

$$x = x_o(1+t) \quad \text{e} \quad y = y_o + t$$

As duas expressões anteriores definem, parametricamente, a família de linhas que representam as trajetórias das partículas de fluido. Para cada partícula  $(x_o, y_o)$  tem-se uma linha no escoamento. O parâmetro da linha é o tempo  $t$ , já que a trajetória é construída a partir das diferentes posições que a partícula vai ocupando ao longo do tempo.

### 3.4 Linha de Corrente

A linha de corrente é uma linha no espaço em um determinado tempo, que é tangente ao vetor velocidade em cada ponto. Matematicamente esta linha se expressa por,

$$\vec{r} = \vec{r}(s, t) \quad , \quad \text{onde } s \text{ é o parâmetro da linha} \quad (3.14)$$

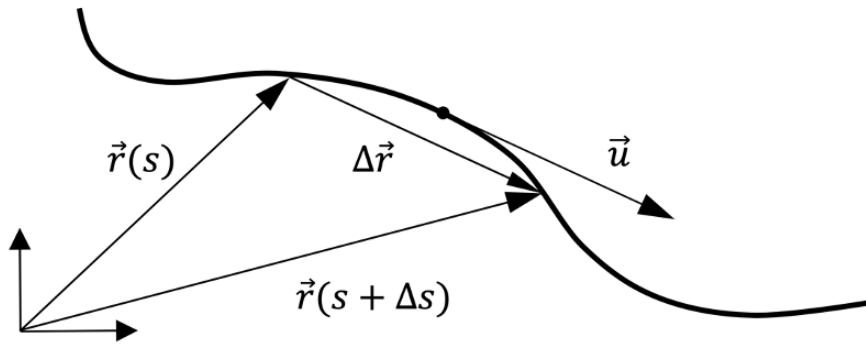


Figura 3.1: Linha de corrente no instante de tempo  $t$ .

Fazendo referência à Fig.3.1, e como  $\vec{u}$  é paralelo a  $\Delta \vec{r}$ , podemos escrever,

$$\vec{u} = \alpha \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \alpha \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (3.15)$$

O escalar  $\alpha$  pode ser absorvido no parâmetro  $s$  resultando,

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds} \longrightarrow \begin{cases} u_1 &= dx_1/ds \\ u_2 &= dx_2/ds \\ u_3 &= dx_3/ds \end{cases} \quad (3.16)$$

Em duas dimensões,

$$\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} \quad \text{e} \quad d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} \quad (3.17)$$

De onde se conclui que,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (3.18)$$

Considere, novamente, o escoamento exemplificado na determinação da trajetória de uma partícula de fluido dado por,

$$\vec{u} = \frac{x}{1+t}\hat{i} + \hat{j}$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{x}{1+t} \implies \int \frac{dx}{x} = \int \frac{ds}{1+t} \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \implies \int dy = \int ds \end{aligned}$$

Após a integração resulta,

$$\ln x = \frac{s}{1+t} + C_1 \quad \text{e} \quad y = s + C_2$$

Para achar uma linha de corrente que passa por uma dada posição  $(x, y)$  em um dado tempo  $t$ , basta atribuir um valor para  $s$  neste ponto (por exemplo,  $s = 0$ ) e resolver as equações para  $C_1$  e  $C_2$ .

Alternativamente, fazendo uso da Eq.(3.18), podemos escrever,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+t}{x} \implies \int dy = \int \frac{(1+t)}{x} dx$$

de onde resulta,  $y = (1+t) \ln x + C$ , que é uma família de linhas para cada instante  $t$ . A determinação de uma linha específica que passa pela posição  $(x, y)$  no tempo  $t$ , é feita pela determinação da constante  $C$ .

### 3.5 Linha de Emissão

A linha de emissão (ou linha de tinta) é formada por todas as partículas que passaram por uma dada posição  $\vec{r}_1$  ao longo do tempo. A partícula  $\vec{r}_o = \vec{r}_o(\vec{r}, t)$  está sob a linha de emissão  $\vec{r}_1$  se em qualquer tempo  $\tau$ , onde  $0 \leq \tau \leq t$ , esta partícula passou por  $\vec{r}_1$ .

A linha de emissão pode ser calculada a partir de,

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_o, t) = \vec{r}[\vec{r}_o(\vec{r}_1, \tau), t] \quad (3.19)$$

Observe na Eq.(3.19) que a linha de emissão descreve a posição, em um instante  $t$ , de todas as partículas que passaram por  $\vec{r}_1$  ao longo do tempo  $\tau$ .

Vamos novamente utilizar o escoamento exemplificado anteriormente tanto na determinação da trajetória de uma partícula como na determinação da linha de corrente, para calcular a linha de emissão,

$$\vec{u} = \frac{x}{1+t} \hat{i} + \hat{j}$$

Conforme explorado, as trajetórias das partículas associadas ao escoamento anterior são dadas por,

$$x = x_o(1+t) \quad \text{e} \quad y = y_o + t$$

As partículas que passaram pela posição  $\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j}$  em qualquer tempo  $\tau \leq t$  são,

$$x_o = \frac{x_1}{1+\tau} \quad \text{e} \quad y_o = y_1 - \tau$$

A linha de emissão procurada fornece a posição no tempo  $t$  de todas estas partículas que passaram por  $\vec{r}_1$ , ou seja,

$$x = \frac{x_1}{1+\tau}(1+t) \quad \text{e} \quad y = y_1 - \tau + t$$

Note que na linha de emissão o parâmetro da linha é  $\tau$ .

Enquanto que as trajetórias das partículas do fluido são obtidas a partir da evolução do tempo, nas linhas de corrente e linhas de emissão o tempo é fixo, e para diferentes tempos obtém-se diferentes linhas. Para o escoamento em regime permanente as trajetórias, linhas de corrente, e linhas de tinta são coincidentes.

### 3.6 Volume Material de Fluido e Dilatação

Até então consideramos o escoamento de partículas individuais. Agora vamos considerar uma porção definida de fluido constituída por um conjunto de partículas que se mantém fixo ao longo do escoamento. A este conjunto de partículas denominamos de volume material. Como a porção de matéria no volume material é definida e se mantém fixa, a massa do volume material permanece constante à medida em que este escoar.

Considere o volume material  $v(t)$  em um dado instante  $t$  conforme indicado na Fig.3.2.

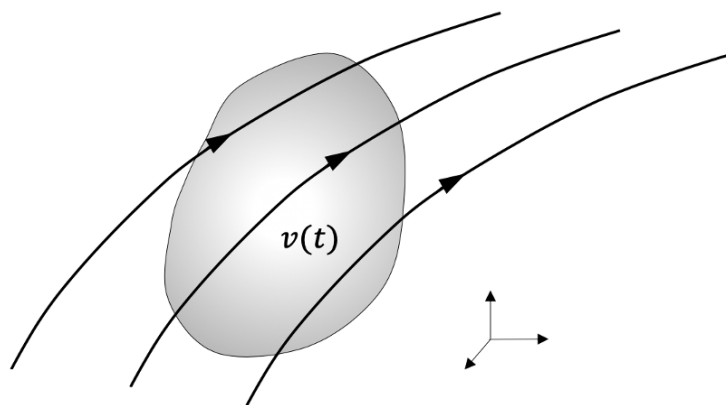


Figura 3.2: Volume material em escoamento no instante de tempo  $t$ .

Ainda que a massa do volume material  $v(t)$  permanece constante ao longo do escoamento, o tamanho e a forma de  $v(t)$  em geral muda. A variação de tamanho do volume material ao longo do escoamento pode ser quantificada através da dilatação  $J$ , definida como,



$$J(\vec{r}, t) = \frac{\delta V}{\delta V_o} \quad (3.20)$$

onde  $\delta V$  é o tamanho do volume material infinitesimal na posição  $\vec{r}$  em  $t$ , e  $\delta V_o$  é o tamanho que o volume material possuía em  $t = 0$ . Observe que tomamos um volume material infinitesimal pois queremos calcular a dilatação em uma posição  $\vec{r}$ ; portanto,  $\delta V$  é um volume infinitesimal em torno do ponto  $\vec{r}$ .

Em  $t = 0$  podemos escrever,

$$\delta V_o = dx_{o_1} dx_{o_2} dx_{o_3} \quad (3.21)$$

Fazendo agora referência à Fig.3.3 e percebendo que ao longo do escoamento  $\delta V$  deforma-se e muda de tamanho, tem-se,

$$\delta V = d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 \times d\vec{x}_3 \quad (3.22)$$

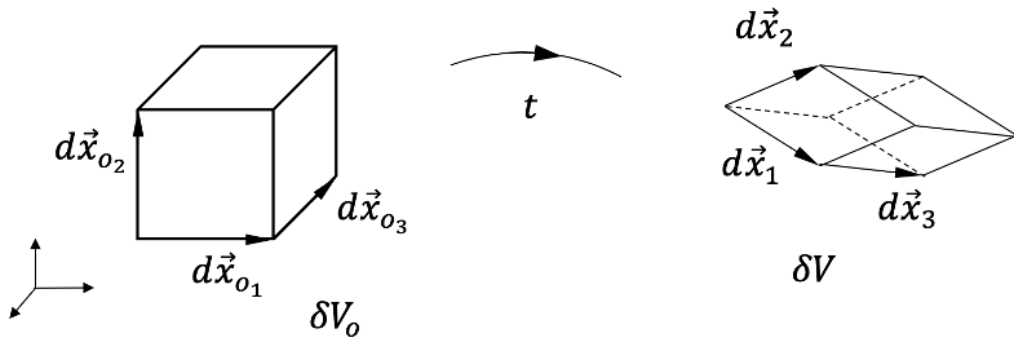


Figura 3.3: Escoamento de  $\delta V$  de sua posição inicial em  $t = 0$  até o instante  $t$ .

Como,

$$d\vec{x}_1 = \frac{\partial x_i}{\partial x_{o1}} dx_{o1} \hat{e}_i, \quad d\vec{x}_2 = \frac{\partial x_j}{\partial x_{o2}} dx_{o2} \hat{e}_j \quad \text{e} \quad d\vec{x}_3 = \frac{\partial x_k}{\partial x_{o3}} dx_{o3} \hat{e}_k$$

resulta que,

$$\begin{aligned} \delta V &= \underbrace{\epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_{o1}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{o2}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{o3}}}_{\text{Jacobiano}} \underbrace{dx_{o1} dx_{o2} dx_{o3}}_{\delta V_o} \\ &= J(\vec{r}, t) \delta V_o \end{aligned} \quad (3.23)$$

Observe que conhecida a trajetória da partícula  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_o, t)$ , a dilatação  $J$  é determinada por,

$$J(\vec{r}, t) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_{o1}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{o2}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{o3}} \quad (3.24)$$

A expressão anterior representa o determinante da transformação de  $\vec{r}_o$  para  $\vec{r}$  ao longo do escoamento, e, alternativamente, pode ser escrita como,

$$J(\vec{r}, t) = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial x_{o1} & \partial x_2 / \partial x_{o1} & \partial x_3 / \partial x_{o1} \\ \partial x_1 / \partial x_{o2} & \partial x_2 / \partial x_{o2} & \partial x_3 / \partial x_{o2} \\ \partial x_1 / \partial x_{o3} & \partial x_2 / \partial x_{o3} & \partial x_3 / \partial x_{o3} \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

Vê-se que a dilatação  $J(\vec{r}, t)$  é o Jacobiano da transformação das coordenadas  $(x_{o1}, x_{o2}, x_{o3})$  para as coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Para situações onde a magnitude de  $\delta V$  é sempre igual à magnitude de  $\delta V_o$  (independente da forma de  $\delta V$  e  $\delta V_o$ ),  $J = 1$ . Nestas situações dizemos que o escoamento é isocórico.

Fluidos incompressíveis ( $\rho$  constante) sempre escoam isocoricamente. Fluidos compressíveis podem ou não escoar isocoricamente.

### 3.7 Derivada Material da Dilatação

A variação com o tempo do volume material pode ser expressa por,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \int_{S(t)} \vec{u} \cdot \hat{n} d\sigma \quad (3.26)$$

onde  $S(t)$  é a superfície material que delimita  $v(t)$ , conforme ilustrado na Fig.3.4. Observe que a expansão ou contração do volume material  $v(t)$  ocorre pelo movimento de sua superfície como explorado no lado direito da Eq.(3.26).

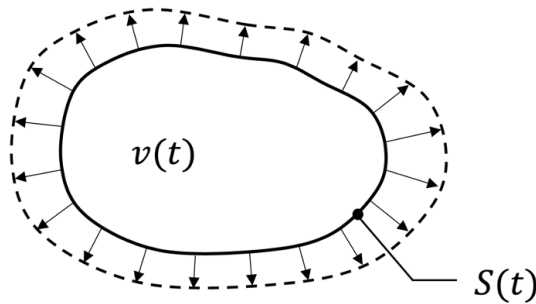


Figura 3.4: Expansão do volume material  $v(t)$  pelo movimento de sua superfície material  $S(t)$ .

Fazendo uso do teorema da divergência na Eq.(3.26) resulta,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \int_{v(t)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) d\tau \quad (3.27)$$

No limite, com  $v(t) \rightarrow 0$ , tem-se,

$$\frac{d(\delta V)}{dt} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \delta V \quad (3.28)$$

ou,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta V}{\delta V_o} \right) = \left( \frac{\delta V}{\delta V_o} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \implies \frac{dJ}{dt} = J \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (3.29)$$

Para um escoamento isocórico,  $J = 1$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ .

Adicionalmente, da Eq.(3.28)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\delta V} \frac{d(\delta V)}{dt} \quad (3.30)$$

Vemos assim que o divergente de  $\vec{u}$  é a taxa de variação de  $\delta V$  por unidade de volume. Se o volume material se expande o divergente de  $\vec{u}$  é positivo, se o volume material se contrai, o divergente de  $\vec{u}$  é negativo. Ao compararmos esta definição com aquela associada à Eq.(2.70) vemos que ambas são equivalentes pois o escoamento líquido de  $\vec{u}$  através da superfície que limita um determinado volume é exatamente igual à variação com o tempo do conteúdo deste volume.

Para situações onde o tamanho de qualquer volume material não varia ao longo do escoamento,  $d(\delta V)/dt = 0$ , e pela Eq.(3.30) resulta que,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{escoamento isocórico} \quad (3.31)$$

Da definição de dilatação dada pela Eq.(3.20) podemos escrever,

$$\frac{\delta m}{\rho} = \delta V = J \delta V_o = J \frac{\delta m_o}{\rho_o} \quad (3.32)$$

mas, como  $\delta m = \delta m_o$ , pois a massa do volume material é inalterada, resulta que  $\rho_o = J\rho$ . Então, já que  $d\rho_o/dt = 0$ , podemos escrever que,

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = \rho \frac{dJ}{dt} + J \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (3.33)$$

Substituindo a expressão de  $dJ/dt$  da Eq.(3.29) na equação anterior, resulta,

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = \rho J \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + J \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (3.34)$$

De onde se conclui que,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.35)$$

A equação anterior é uma das equações fundamentais da mecânica dos fluidos e impõe, para qualquer escoamento, uma relação entre  $\rho(\vec{r}, t)$  e  $\vec{u}(\vec{r}, t)$ . Como a única restrição assumida na dedução da Eq.(3.35) foi a hipótese do contínuo, esta equação é denominada de equação da continuidade. Para que a matéria escoe continuamente a Eq.(3.35) deve ser satisfeita para qualquer posição no escoamento. Este resultado é lógico e intuitivo pois o que a Eq.(3.35) estabelece é que se a densidade de um volume material diminui necessariamente as fronteiras deste volume devem se expandir na mesma proporção já que a massa permanece constante.

### 3.8 Teorema de Transporte de Reynolds

Seja  $F$  uma propriedade qualquer por unidade de volume. A variação com o tempo da grandeza associada a  $F$  em um dado volume material ao longo do escoamento será,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{v(t)} F \, d\tau &= \frac{d}{dt} \int_{v_o} F J \, d\tau_o = \int_{v_o} \frac{d(FJ)}{dt} \, d\tau_o \\
 &= \int_{v_o} \left( F \frac{dJ}{dt} + \frac{dF}{dt} J \right) d\tau_o \\
 &= \int_{v_o} \left( F J \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{dF}{dt} J \right) d\tau_o \\
 &= \int_{v_o} \left( F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{dF}{dt} \right) J \, d\tau_o \\
 &= \int_{v(t)} \left( F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{dF}{dt} \right) d\tau \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter feito,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} F \, d\tau &= \int_{v(t)} \frac{d}{dt} (F \, d\tau) = \int_{v(t)} \left[ F \frac{d(d\tau)}{dt} + d\tau \frac{dF}{dt} \right] \\ &= \int_{v(t)} \left( F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{dF}{dt} \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde fez-se uso da expressão,

$$\begin{aligned} \frac{d(d\tau)}{dt} &= \frac{d}{dt} (J d\tau_o) = \frac{dJ}{dt} d\tau_o \\ &= (J \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) d\tau_o = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) d\tau \end{aligned} \quad (3.38)$$

A expressão dada pela Eq.(3.37) é conhecida como "Teorema de Transporte de Reynolds", TTR. Este resultado é de grande utilidade e pode ser escrito em diferentes formas,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} F \, d\tau = \int_{v(t)} \left( \frac{dF}{dt} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) d\tau \quad (3.39)$$

$$= \int_{v(t)} \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (F \vec{u}) \right] d\tau \quad (3.40)$$

$$= \int_{v(t)} \frac{\partial F}{\partial t} d\tau + \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (F \vec{u}) \, d\sigma \quad (3.41)$$

Se  $F = \rho G$ , onde  $G$  é uma propriedade qualquer do fluido por unidade de massa, podemos fazer uso da Eq.(3.39) e escrever,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho G \, d\tau &= \int_{v(t)} \left[ \frac{d}{dt}(\rho G) + (\rho G) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] d\tau \\
&= \int_{v(t)} \left( \rho \frac{dG}{dt} + G \frac{d\rho}{dt} + \rho G \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) d\tau \\
&= \int_{v(t)} \left[ \rho \frac{dG}{dt} + G \underbrace{\left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)}_{=0} \right] d\tau \\
&= \int_{v(t)} \rho \frac{dG}{dt} \, d\tau
\end{aligned} \tag{3.42}$$

### 3.9 Conservação da Massa utilizando o Teorema de Transporte de Reynolds

Como a massa em um volume material  $v(t)$  mantém-se constante ao longo do escoamento, para  $F = \rho$  podemos escrever,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} F \, d\tau = \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho(\vec{r}, t) \, d\tau = 0 \tag{3.43}$$

ou, fazendo uso do TTR,

$$\int_{v(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right] d\tau = 0 \tag{3.44}$$

Como  $v(t)$  é um volume arbitrário qualquer, a equação anterior impõe que



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.45)$$

que é a própria equação da continuidade escrita de forma alternativa à Eq.(3.35).

Como exemplo de aplicação da equação da conservação da massa, vamos considerar o esvaziamento de água de um reservatório cilíndrico de diâmetro  $D$ , através do orifício de diâmetro  $D_o$  colocado na sua parte inferior conforme ilustrado na Fig.3.5.

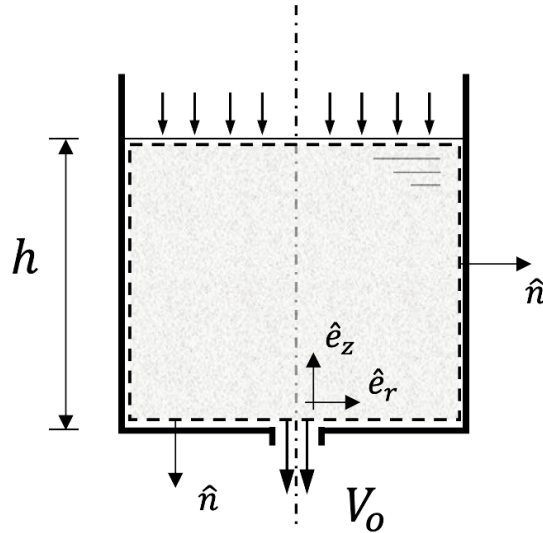


Figura 3.5: Esvaziamento de um reservatório cilíndrico

A aplicação do TTR conforme a Eq.(3.41) para o volume de água no reservatório com  $F = \rho$  resulta em,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho d\tau = \int_{v(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u}) d\sigma = 0$$

Como  $\partial\rho/\partial t = 0$ , já que a densidade não varia com o tempo, obtém-se, da equação anterior,

$$\int_{S_t} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u}) d\sigma + \int_{S_o} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u}) d\sigma = 0 \quad (3.46)$$

onde  $S_t$  e  $S_o$  são as superfícies no topo e no orifício do reservatório, respectivamente. Nas demais superfícies  $\hat{n} \perp \vec{u}$  e as integrais são nulas. No topo do reservatório a velocidade da água é  $\vec{u} = (dh/dt)\hat{e}_z$  e no orifício de saída a velocidade é  $V_o = C_D\sqrt{2gh}$ , onde  $C_D$  é o coeficiente de descarga do orifício ( $C_D < 1$ ) e  $g$  é a aceleração da gravidade.

Retornando-se à Eq.(3.43) podemos escrever,

$$\frac{dh}{dt} A_t + C_D \sqrt{2gh} A_o = 0$$

onde  $A_t$  e  $A_o$  são as respectivas áreas do topo do reservatório e do orifício de saída da água. Rearranjando os termos da equação anterior e integrando, resulta em,

$$\int_h^0 \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = - \int_0^t C_D \frac{A_o}{A_t} dt \implies t = \frac{1}{C_D} \left( \frac{D}{D_o} \right)^2 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Observe que o tempo requerido para esvaziar o reservatório independe da densidade do líquido no interior do reservatório. Há no entanto uma dependência do líquido que escoar pelo orifício e esta encontra-se embutida no coeficiente de descarga.

### 3.10 Tensor Gradiente de Velocidade

Em um escoamento a diferença de velocidade entre partículas adjacentes pode nos dar informações sobre a rotação do fluido e também sobre sua taxa de deformação. Para explorar tal aspecto vamos considerar as partículas de fluido localizadas na posição  $\vec{r}$  e  $\vec{r} + d\vec{r}$ .

Como as partículas estão próximas, podemos escrever,

$$\vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} dx_i$$

de onde resulta,

$$d\vec{u} = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}) = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \quad (3.47)$$

Toda informação relativa ao movimento e deformação do fluido pode ser extraída do tensor gradiente de velocidade,  $\vec{\nabla} \vec{u}$ .

Como todo tensor de segunda ordem pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico e um tensor antisimétrico, tem-se,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{u} &= [\tfrac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \tfrac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)] \hat{e}_i \hat{e}_j \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}(\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T)}_{\underline{\underline{D}}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\vec{\nabla} \vec{u} - \vec{\nabla} \vec{u}^T)}_{\underline{\underline{\Omega}}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde,

$$\overline{\overline{D}} \rightarrow \text{tensor taxa de deformação} \quad (3.49)$$

$$\overline{\overline{\Omega}} \rightarrow \text{tensor vorticidade} \quad (3.50)$$

A seguir vamos explorar o significado físico tanto do tensor taxa de deformação como do tensor vorticidade.

### 3.11 Tensor Taxa de Deformação

Inicialmente vamos considerar a diferença de velocidade  $d\vec{u}$  de duas partículas de fluido muito próximas entre si. Podemos escrever,

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}) = \frac{d}{dt}[(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{r}] \\ &= \frac{d(d\vec{r})}{dt} \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde  $d\vec{r}$  é um filamento material de fluido, ou seja, um filamento formado pelas mesmas partículas em escoamento. Combinando agora as Eqs.(3.47) e (3.51) resulta em,

$$\frac{d(d\vec{r})}{dt} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \quad (3.52)$$

Escrevendo  $d\vec{r} = (ds)\hat{s}$ , tem-se,

$$\begin{aligned}
\frac{d(ds^2)}{dt} &= 2ds \frac{d(ds)}{dt} = \frac{d}{dt}(d\vec{r} \cdot d\vec{r}) \\
&= \frac{d(d\vec{r})}{dt} \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \frac{d(d\vec{r})}{dt} \\
&= (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \\
&= 2d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot d\vec{r}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Dividindo-se o segundo e o último termos da expressão anterior por  $ds^2$ , resulta em,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ds} \frac{d(ds)}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \\
&= \frac{dx_i}{ds} (D_{ij} + \Omega_{ij}) \frac{dx_j}{ds} \\
&= \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} D_{ij} + \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} \Omega_{ij}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Como a última parcela da equação anterior é zero (produto de uma grandeza simétrica por uma grandeza antisimétrica), a Eq.(3.53) pode ser escrita como,

$$\frac{1}{ds} \frac{d(ds)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{s} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \hat{s} \tag{3.55}$$

Escolhendo  $\hat{s} = \hat{e}_1$ ,

$$\frac{1}{ds} \frac{d(ds)}{dt} = \hat{e}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \hat{e}_1 = D_{11} \tag{3.56}$$

Vemos então que  $D_{11}$  é a taxa de deformação longitudinal por unidade de comprimento de um filamento material na orientação de  $\hat{e}_1$ . Similar interpretação aplica-se para  $D_{22}$  e  $D_{33}$ . Note ainda que se  $D_{11} > 0$  em uma dada posição em um dado tempo, o filamento está sendo esticado e se  $D_{11} < 0$  o filamento está se contraindo.

Observe ainda que,

$$D_{ii} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 \implies \text{tr} \overline{\overline{D}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (3.57)$$

Vamos agora considerar um elemento de volume material infinitesimal,  $d\tau$ . Para este volume infinitesimal podemos escrever  $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$ . Então,

$$\frac{d(d\tau)}{dt} = \frac{d(dx_1)}{dt} dx_2 dx_3 + dx_1 \frac{d(dx_2)}{dt} dx_3 + dx_1 dx_2 \frac{d(dx_3)}{dt}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{d(dx_1)}{dt} &= \frac{d}{dt}[(x_1 + dx_1) - x_1] = u_1(x_1 + dx_1) - u_1(x_1) \\ &= [u_1(x_1) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1] - u_1(x_1) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\frac{d(d\tau)}{dt} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) d\tau
\end{aligned}$$

De onde resulta

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{d\tau} \frac{d(d\tau)}{dt} \quad (3.58)$$

Observe que a equação anterior reproduz a Eq.(3.30).

Tendo explorado o significado físico de  $D_{ij}$  para  $i = j$ , vamos agora explorar o significado de  $D_{ij}$  para  $i \neq j$ . Para tal tomemos dois filamentos materiais conforme mostrado na Fig.3.6.

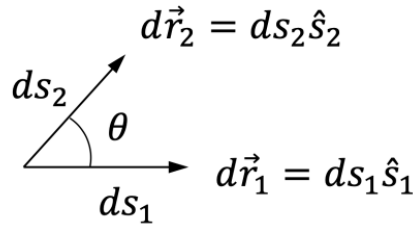


Figura 3.6: Filamentos materiais  $d\vec{r}_1$  e  $d\vec{r}_2$  formando entre si um ângulo  $\theta$ .

Considere inicialmente a derivada material do produto escalar entre os filamentos  $d\vec{r}_1$  e  $d\vec{r}_2$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) &= \frac{d(d\vec{r}_1)}{dt} \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1 \cdot \frac{d(d\vec{r}_2)}{dt} \\
&= (d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \cdot d\vec{r}_2 + d\vec{r}_1 \cdot (d\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \\
&= d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{u}^T \\
&= d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}) + d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot (\overline{\overline{D}}^T + \overline{\overline{\Omega}}^T) \\
&= 2d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot \overline{\overline{D}}
\end{aligned}$$

pois  $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{D}}^T$  e  $\overline{\overline{\Omega}} = -\overline{\overline{\Omega}}^T$ . Adicionalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) &= \frac{d}{dt}(ds_1 \hat{s}_1 \cdot ds_2 \hat{s}_2) = \frac{d}{dt}(ds_1 ds_2 \cos \theta) \\
&= \frac{d(ds_1)}{dt}(ds_2 \cos \theta) + ds_1 \frac{d(ds_2)}{dt} \cos \theta - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} ds_1 ds_2
\end{aligned}$$

Para  $d\vec{r}_1 \perp d\vec{r}_2$ , das equações anteriores resulta,

$$2d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 \cdot \overline{\overline{D}} = -\frac{d\theta}{dt} ds_1 ds_2$$

ou

$$\frac{d\vec{r}_1}{ds_1} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{ds_2} = \hat{s}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \hat{s}_2 = -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt}$$

Escolhendo  $\hat{s}_1 = \hat{e}_1$  e  $\hat{s}_2 = \hat{e}_2$ ,

$$\hat{e}_1 \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \hat{e}_2 = D_{12} = -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.59)$$



De onde conclui-se que  $D_{12} = D_{21}$  é a metade da taxa de decréscimo do ângulo formado por dois filamentos materiais inicialmente alinhados com  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ , conforme ilustrado na Fig.3.7. Similar interpretação aplica-se a  $D_{13} = D_{31}$  e  $D_{23} = D_{32}$ .

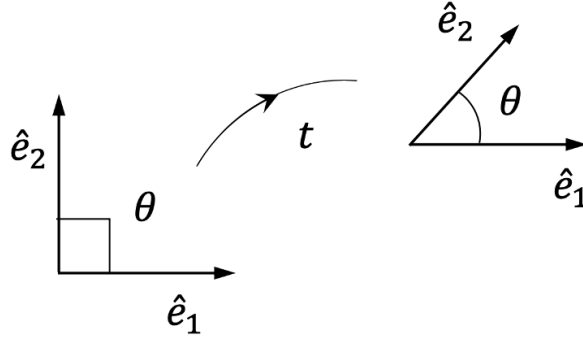


Figura 3.7: Filamentos materiais alinhados com  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$  e tendo seu ângulo  $\theta$ , originalmente de  $90^\circ$ , reduzido com o escoamento.

Vamos agora considerar alguns escoamentos simples, para explorar o conceito de taxa de deformação de fluidos em movimento. Considere o movimento puramente extensional mostrado na Fig.3.8.

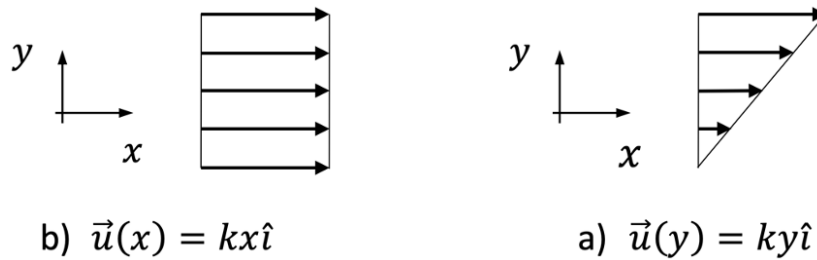


Figura 3.8: Exemplos de escoamentos simples: a) movimento puramente extensional; b) movimento cisalhante plano.

Para o movimento puramente extensional indicado,  $\vec{u} = kx\hat{i}$ , de onde resulta,

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Observe que neste movimento puramente extensional a única componente não nula de  $\overline{\overline{D}}$  é  $D_{11}$ . Desta forma, apenas na direção de  $\hat{i}$  ocorrerá a deformação de um filamento material ao longo do escoamento; para  $k$  positivo o escoamento se expande, e para  $k$  negativo o filamento se contrai. Adicionalmente, para este escoamento,  $tr\overline{\overline{D}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = k$ , indicando que se  $k > 0$  a densidade do fluido diminui ao longo do escoamento enquanto que se  $k < 0$  a densidade do fluido aumenta ao longo do escoamento.

Tomemos agora o escoamento cisalhante plano da Fig.3.8, onde  $\vec{u} = ky\hat{i}$ . Para este escoamento,

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Observe que neste escoamento cisalhante, filamentos materiais alinhados com  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , e, portanto, formando um ângulo de  $90^\circ$  entre si, tendem a se aproximar ao longo do escoamento. Ainda, para este escoamento,  $tr\overline{\overline{D}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ , indicando que o escoamento é isocórico, ou seja, a densidade do fluido permanece constante ao longo do escoamento.

Como  $\overline{\overline{D}}$  é simétrico, podemos encontrar um outro sistema de referência onde as componentes de  $\overline{\overline{D}}$  para o escoamento cisalhante plano são diagonalizadas. Este outro sistema  $(x', y')$  está indicado na Fig.3.9 e é construído a partir de uma rotação de  $45^\circ$  do sistema  $(x, y)$  no sentido anti-horário.

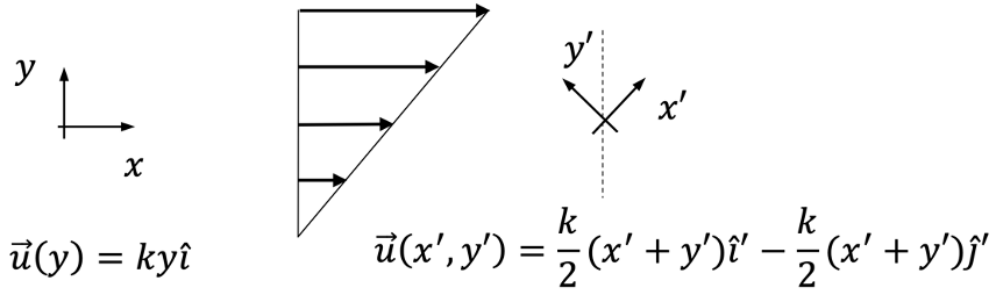


Figura 3.9: Movimento cisalhante plano representado no sistema  $(x, y)$  e no sistema  $(x', y')$ .

Observe que as componentes de  $\overline{\overline{D}}$  no sistema  $(x', y')$  são,

$$D'_{ij} = \begin{bmatrix} k/2 & 0 & 0 \\ 0 & -k/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Note que tanto para as componentes  $D_{ij}$  da Eq.(3.60), como para as componentes de  $D'_{ij}$  da Eq.(3.62), os invariantes são  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = -k^2/4$  e  $I_3 = 0$ , indicando que trata-se do mesmo tensor  $\overline{\overline{D}}$ .

A partir das discussões anteriores, podemos fazer as seguintes observações:

1. Se  $\overline{\overline{D}} = 0$  o movimento é localmente rígido, isto é, não

existe deformação.

2. Como  $\overline{\overline{D}}$  sempre pode ser diagonalizado (pois é simétrico), toda deformação pode ser sempre reduzida a um movimento puramente extensional.

### 3.12 Tensor Vorticidade

Vimos anteriormente que  $\vec{\nabla} \vec{u} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}$ , onde,

$$\overline{\overline{\Omega}} = \Omega_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i) \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (3.63)$$

é o tensor vorticidade ou tensor rotação.

A partir das componentes de  $\overline{\overline{\Omega}}$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_i u_j - \partial_j u_i) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{u})_k + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{u})_k \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{u})_k = \omega_k \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde  $\omega_k$  é a componente  $k$  do vetor vorticidade, ou simplesmente vorticidade. A vorticidade é uma grandeza importante em mecânica dos fluidos e é obtida pelo rotacional da velocidade,

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (3.65)$$

Escoamentos onde  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$  são ditos escoamentos irrotacionais.

Da Eq.(3.64) vemos que o tensor vorticidade em um ponto define a vorticidade naquele ponto.

Alternativamente,

$$\begin{aligned}\epsilon_{klm}\omega_k &= \epsilon_{klm}\epsilon_{ijk}\Omega_{ij} = (\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi})\Omega_{ij} \\ &= \Omega_{lm} - \Omega_{ml} = \Omega_{lm} + \Omega_{lm} = 2\Omega_{lm}\end{aligned}\quad (3.66)$$

Assim, as três componentes da vorticidade  $\vec{\omega}$  definem completamente o tensor vorticidade  $\overline{\overline{\Omega}}$ ,

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Para examinar o movimento local descrito por  $\overline{\overline{\Omega}}$  considere a Fig.3.10 onde um filamento material  $d\vec{r}$  rotaciona com velocidade angular  $\Omega$ .

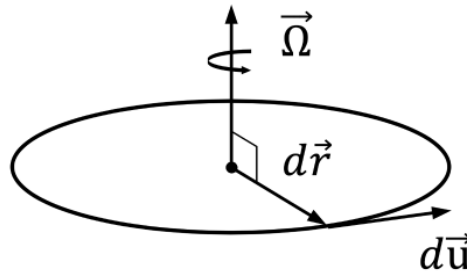


Figura 3.10: Movimento angular de um filamento material  $d\vec{r}$  com velocidade angular  $\Omega$ .

Podemos escrever, fazendo uso da Eq.(3.47),

$$\begin{aligned}
d\vec{u} &= d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = d\vec{r} \cdot (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}) \\
&= d\vec{r} \cdot \overline{\overline{D}} + d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Sem perda de generalidade, para um escoamento onde  $\overline{\overline{D}} = 0$  a equação anterior torna-se,

$$\begin{aligned}
d\vec{u} &= d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}} = dx_i \hat{e}_i \cdot \Omega_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k = dx_i \Omega_{ik} \hat{e}_k \\
&= dx_i \left( \frac{1}{2} \epsilon_{pik} \omega_p \right) \hat{e}_k = \frac{1}{2} \epsilon_{pik} \omega_p dx_i \hat{e}_k \\
&= \frac{\vec{\omega}}{2} \times d\vec{r} = \vec{\Omega} \times d\vec{r}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Para o filamento rígido  $d\vec{r}$  rotacionando no plano (x,y), a sua velocidade angular será  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$  apontando na orientação de  $z$ . Assim,

$$d\vec{u} = \vec{\Omega} \times d\vec{r} = \Omega dr \hat{t} = du_t \hat{t} \tag{3.70}$$

onde  $du_t$  é a magnitude da velocidade tangencial da extremidade do filamento  $d\vec{r}$ , e  $\Omega = d\theta/dt$ . Vemos assim que as componentes  $\Omega_{ij}$  do tensor vorticidade representam a velocidade angular com que um filamento material gira no plano definido pelos vetores  $\hat{e}_i$  e  $\hat{e}_j$ . Ainda, esta velocidade angular é a metade da componente da vorticidade na orientação  $\hat{e}_k$ , perpendicular a este plano.

### 3.13 Movimento Geral de um Elemento de Fluido

Conforme explorado anteriormente, a velocidade de uma partícula de fluido localizada na posição  $\vec{r} + d\vec{r}$  no tempo  $t$  pode ser escrita em termos da velocidade de uma partícula de fluido adjacente localizada na posição  $\vec{r}$  no mesmo tempo  $t$ , resultando em,

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) &= \vec{u}(\vec{r}) + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \\ &= \vec{u}(\vec{r}) + d\vec{r} \cdot \overline{\overline{D}} + d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}}\end{aligned}\quad (3.71)$$

onde cada uma das três parcelas do lado direito da equação anterior representa um movimento diferente,

$$\vec{u}(\vec{r}) \rightarrow \text{translação uniforme} \quad (3.72)$$

$$d\vec{r} \cdot \overline{\overline{D}} \rightarrow \text{extensão e cisalhamento} \quad (3.73)$$

$$d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\Omega}} \rightarrow \text{rotação de corpo rígido} \quad (3.74)$$

Separar o movimento de um volume material na forma anterior facilita a interpretação do escoamento. O resultado da Eq.(3.71) é conhecido como o "Teorema da Decomposição de Cauchy-Stokes".

A Fig.3.11 ilustra os diferentes tipos de movimento a que um volume material pode estar submetido em um escoamento.

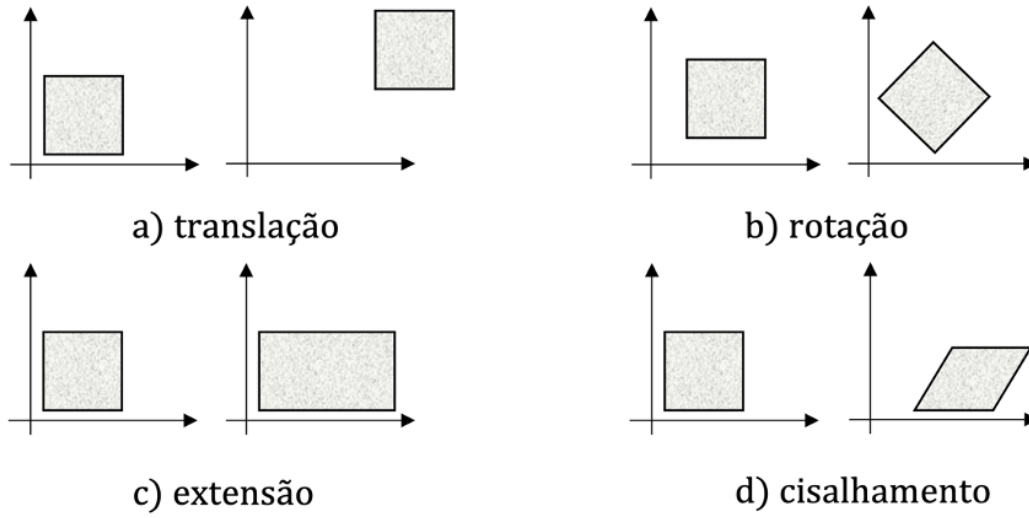


Figura 3.11: Tipos de movimento a que um volume material está submetido em um escoamento.

Para cada um destes movimento tem-se diferentes valores para os tensores taxa de deformação e vorticidade conforme detalhado a seguir,

$$a) \quad \text{translação} \rightarrow \overline{\overline{D}} = \overline{\overline{\Omega}} = 0 \quad (3.75)$$

$$b) \quad \text{rotação} \rightarrow \overline{\overline{D}} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\overline{\Omega}} \neq 0 \quad (3.76)$$

$$c) \quad \text{extensão} \rightarrow \overline{\overline{D}} \neq 0 \quad \text{e} \quad \overline{\overline{\Omega}} = 0 \quad (3.77)$$

$$d) \quad \text{cisalhamento} \rightarrow \overline{\overline{D}} \neq 0 \quad \text{e} \quad \overline{\overline{\Omega}} \neq 0 \quad (3.78)$$

A diferença de velocidade entre duas partículas de fluido, seja em magnitude ou em orientação, está contida no vetor gradiente de velocidade como explicitado na Eq.(3.71). Se  $\vec{\nabla} \vec{u} = 0$  todas as partículas de fluido têm a mesma velocidade e portanto o movimento é de translação pura. Se  $\vec{\nabla} \vec{u} \neq 0$ , há ve-



locidade relativa de uma partícula em relação à outra o que implica em haver deformação ou rotação, ou ambas simultaneamente.

## Capítulo 4

# Dinâmica dos Fluidos

Tendo explorado o movimento dos fluidos, vamos agora abordar as forças que atuam em um fluido em movimento. De uma maneira geral dois tipos de força podem atuar em um volume material  $v(t)$  que se deforma,

- Forças de Campo - aquelas devido à ação de um determinado campo, tal qual o campo gravitacional. No presente texto trataremos apenas de campos gravitacionais e expressaremos a resultante das forças de campo que atuam em um dado volume material  $v(t)$  como,

$$\int_{v(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{f}(\vec{r}, t) d\tau \quad (4.1)$$

onde  $\vec{f}(\vec{r}, t)$  é a força de campo por unidade de massa. Em geral faremos  $\vec{f}(\vec{r}, t) = -g\hat{k}$ , onde  $g$  é a aceleração

da gravidade e  $\hat{k}$  aponta na vertical.

- Forças de Superfície - aquelas devidas à ação do fluido que circunda o volume material  $v(t)$ . Como tais forças atuam através da superfície  $S(t)$  pelo contato do meio envolvente com  $v(t)$ , expressaremos a resultante destas forças por,

$$\int_{S(t)} \vec{t}_n(\vec{r}, t) d\sigma \quad (4.2)$$

onde  $\vec{t}_n(\vec{r}, t)$  é denominado de vetor tensão e representa a força de superfície por unidade de área que atua na área infinitesimal  $d\sigma$ .

A Fig.4.1 ilustra um volume material em escoamento, indicando a atuação de  $\vec{t}_n(\vec{r}, t)$  em uma determinada área  $d\sigma$ .

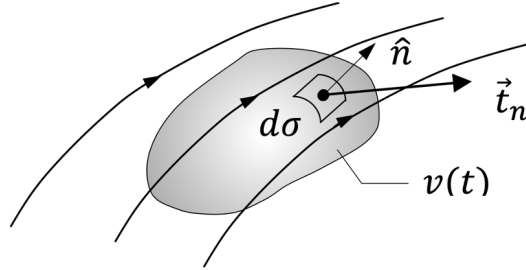


Figura 4.1: Força de superfície atuando em um volume material  $v(t)$  em escoamento.

Escrever as forças de superfície na forma da Eq.(4.2) é um dos fundamentos da dinâmica dos meios deformáveis. Observe que ao fazermos uso desta representação estamos assumindo que para um determinado tempo,  $\vec{t}_n$  só depende da posição  $\vec{r}$  e da

orientação  $\vec{n}$  do elemento de superfície  $d\sigma$ . Este princípio é conhecido como o "Princípio da Tensão de Cauchy" e formalmente é expresso por

*"Em torno de qualquer superfície imaginária no escoamento existe uma distribuição do vetor tensão  $\vec{t}_n(\vec{r}, t)$  cuja resultante e momento são equivalentes àqueles causados pelo material que envolve a superfície"*

Tendo explorado as forças que atuam em um fluido em escoamento, podemos estabelecer a relação entre as forças e o escoamento.

## 4.1 Conservação da Quantidade de Movimento Linear

Este é o princípio fundamental da dinâmica dos fluidos e estabelece que,

*"A taxa de variação da quantidade de movimento linear de um volume material  $v(t)$  é igual à resultante das forças que atuam em  $v(t)$ "*

Embora este princípio seja equivalente à segunda lei de Newton da mecânica dos corpos rígidos, note que o mesmo não pode ser derivado de tal lei. Portanto, é um princípio diferente e recebe o nome de "Primeiro Postulado de Euler".

Em termos matemáticos, o primeiro postulado de Euler se escreve como,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \vec{u} d\tau = \int_{v(t)} \rho \vec{f} d\tau + \int_{S(t)} \vec{t}_n d\sigma \quad (4.3)$$

onde a velocidade  $\vec{u}$  é a quantidade de movimento por unidade de massa e  $\rho \vec{u}$  é a quantidade de movimento por unidade de volume.

Fazendo uso do teorema de transporte de Reynolds, TTR, conforme Eq.(3.42), podemos escrever,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \vec{u} d\tau = \int_{v(t)} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d\tau \quad (4.4)$$

Adicionalmente, fazendo  $\vec{t}_n = \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}}$ , e retornando à Eq.(4.3) com o resultado da Eq.(4.4), resulta,

$$\int_{v(t)} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d\tau = \int_{v(t)} \rho \vec{f} d\tau + \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}} d\sigma \quad (4.5)$$

O tensor  $\overline{\overline{T}}$  é denominado de tensor tensão de Cauchy, por ter sido introduzido por este em 1827.

Podemos agora fazer uso do teorema da divergência na equação anterior e escrever,

$$\int_{v(t)} \left( \rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \rho \vec{f} - \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \right) d\tau = 0 \quad (4.6)$$

Como  $v(t)$  é um volume arbitrário, conclui-se que,

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \rightarrow \text{Equação do Movimento} \quad (4.7)$$

Esta equação traduz com elegância e simplicidade o primeiro postulado de Euler que, como vimos anteriormente, estabelece a conservação da quantidade de movimento linear para um fluido em movimento. Dada a sua importância, a Eq.(4.7) é denominada de "Equação do Movimento", e foi demonstrada pela primeira vez por Cauchy no ano de 1828. Ao escrever o tensor tensão em função do tensor taxa de deformação, como veremos em seção subsequente, a equação do movimento torna-se uma equação para a velocidade.

A nomenclatura adotada permite que a Eq.(4.7) possa se apresentar de maneira muito concisa, ainda que seja uma equação vetorial, com três componentes, e que contenha variações de velocidade com o tempo e com a posição, abrigando as diferentes formas de movimento discutidas na seção (3.13).

Para um sistema cartesiano, a componente  $i$  da equação do movimento é dada por,

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \partial_j u_i \right) = \rho f_i + \partial_j T_{ji} \quad (4.8)$$

Fazendo  $i = 1$ , tem-se,

$$\rho \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \rho f_1 + \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3}$$

Observe que ao escrevermos  $T_{ij}$  o primeiro índice refere-se à orientação da normal ao elemento de área considerado e o segundo índice refere-se à orientação da força aplicada no referido elemento de área. A Fig.4.2 ilustra as tensões normais e cisalhantes na superfície de um volume material elementar quadrado. É comum que as tensões normais sejam representadas por  $\sigma$  e as tensões cisalhantes por  $\tau$  conforme ilustrado na figura.

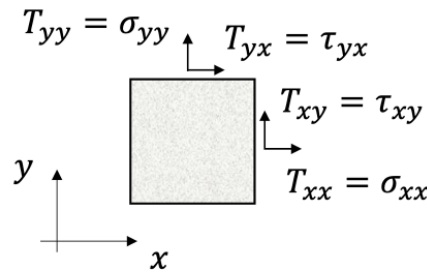


Figura 4.2: Tensões normais e cisalhantes nas superfícies de volume elementar quadrado.

## 4.2 Tensor Tensão de Cauchy

Nesta secção vamos explorar em maior profundidade tanto o vetor tensão  $\vec{t}_n$  como o tensor tensão  $\bar{\bar{T}}$ .

### 4.2.1 Equilíbrio local das tensões

Para explorar o vetor tensão  $\vec{t}_n$  em maiores detalhes, considere um volume material cuja dimensão característica seja  $d$ . Podemos então afirmar que para este volume material,  $v(t)$  é proporcional a  $d^3$  e  $S(t)$  é proporcional a  $d^2$ . Fazendo uso da Eq.(4.5) e dividindo cada parcela por  $d^2$ , podemos escre-

ver,

$$\frac{1}{d^2} \int_{v(t)} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d\tau = \frac{1}{d^2} \int_{v(t)} \rho \vec{f} d\tau + \frac{1}{d^2} \int_{S(t)} \vec{t}_n d\sigma \quad (4.9)$$

Agora, vamos fazer  $d \rightarrow 0$  e com isto as integrais que envolvem  $v(t)$  se anulam restando apenas,

$$\int_{S(t)} \vec{t}_n d\sigma = 0 \quad (4.10)$$

Aplicando a equação anterior para o cilindro de altura infinitesimal ilustrado na Fig.4.3 resulta,

$$\int_{S(t)} \vec{t}_n d\sigma = \int_{S_1} \vec{t}_n d\sigma + \int_{S_2} \vec{t}_n d\sigma = 0$$

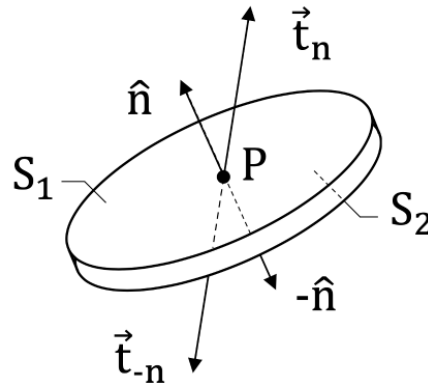


Figura 4.3: Tensões atuando nos dois lados de um disco material de espessura infinitesimal.

Fazendo agora  $S_1$  e  $S_2$  tenderem a zero no ponto  $P$  obtém-se,



$$\vec{t}_n S_1 + \vec{t}_{-n} S_2 = 0 \implies \vec{t}_n = -\vec{t}_{-n} \quad (4.11)$$

O resultado da equação anterior indica que o vetor tensão atuando nos lados opostos de uma superfície, em um dado ponto, é igual em magnitude e oposto em orientação. Tal resultado nos mostra que a força que o fluido de um lado de uma superfície material exerce do outro lado da superfície é igual em magnitude e oposta em orientação à força que o outro lado exerce no lado considerado. Note que este resultado é equivalente à terceira lei de Newton da mecânica dos corpos rígidos (lei da ação e reação). Embora a terceira lei de Newton precisa ser postulada isoladamente, aqui a Eq.(4.11) resulta do primeiro postulado de Euler e não representa um princípio independente. Não obstante, dada a sua importância denominaremos este resultado como "Princípio do Equilíbrio Local das Tensões".

### 4.2.2 Existência do Tensor Tensão

Anteriormente, na seção (4.1), quando exploramos as forças de superfície que atuam em uma superfície material em movimento, simplesmente fizemos  $\vec{t}_n = \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}}$ . Na presente seção o princípio do equilíbrio local de tensões será utilizado para provar a existência do tensor tensão, ou seja, mostraremos que para bem caracterizar  $\vec{t}_n$  precisamos de fato de uma grandeza matemática com nove componentes.

Inicialmente vamos considerar o tetraedro ilustrado na Fig.4.4. Conforme indicado na figura, a face  $abc$  possui normal  $\hat{n}$  e tem área  $dA$  onde atua o vetor tensão  $\vec{t}_{\hat{n}}$ . As demais faces do tetra-

edro são paralelas aos planos de coordenadas e cujas normais, áreas, e vetores tensões estão indicados na Tab.(4.1).

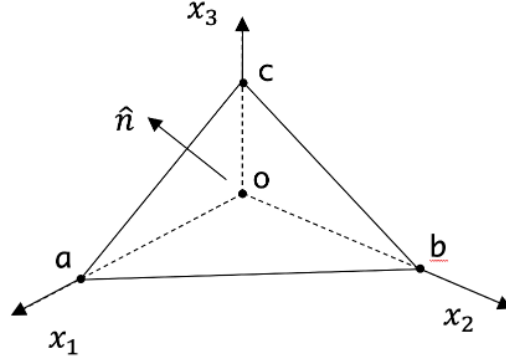


Figura 4.4: Tetraedro para aplicação do equilíbrio local de tensões de maneira a provar a existência do tensor tensão.

Fazendo o tetraedro encolher a um ponto, o princípio do equilíbrio local de tensões requer que,

$$\vec{t}_{\hat{n}} dA + \vec{t}_{-\hat{e}_2} (\hat{n} \cdot \hat{e}_2) dA + \vec{t}_{-\hat{e}_3} (\hat{n} \cdot \hat{e}_3) dA + \vec{t}_{-\hat{e}_1} (\hat{n} \cdot \hat{e}_1) dA = 0$$

Simplificando e rearranjando os termos da equação anterior, tem-se,

$$\begin{aligned} \vec{t}_{\hat{n}} &= \vec{t}_{\hat{e}_1} (\hat{n} \cdot \hat{e}_1) + \vec{t}_{\hat{e}_2} (\hat{n} \cdot \hat{e}_2) + \vec{t}_{\hat{e}_3} (\hat{n} \cdot \hat{e}_3) \\ &= \hat{n} \cdot (\hat{e}_1 \vec{t}_{\hat{e}_1} + \hat{e}_2 \vec{t}_{\hat{e}_2} + \hat{e}_3 \vec{t}_{\hat{e}_3}) \\ &= \hat{n} \cdot \hat{e}_i \vec{t}_{\hat{e}_i} \\ &= \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Demonstra-se assim a necessidade de termos uma grandeza com nove componentes dada por  $\overline{\overline{T}} = \hat{e}_i \vec{t}_{\hat{e}_i}$  para caracterizar o estado de tensão no fluido! Prova-se desta forma a existência do tensor tensão.

Tabela 4.1: Grandezas associadas às quatro faces do tetraedo da Fig.4.4.

Face	Normal	Área	Tensão
$abc$	$\hat{n}$	$dA$	$\vec{t}_{\hat{n}}$
$oac$	$-\hat{e}_2$	$\hat{n} \cdot \hat{e}_2 dA$	$\vec{t}_{-\hat{e}_2}$
$oab$	$-\hat{e}_3$	$\hat{n} \cdot \hat{e}_3 dA$	$\vec{t}_{-\hat{e}_3}$
$obc$	$-\hat{e}_1$	$\hat{n} \cdot \hat{e}_1 dA$	$\vec{t}_{-\hat{e}_1}$

### 4.3 Conservação da Quantidade de Movimento Angular

Podemos enunciar a conservação da quantidade de movimento angular de um volume material como,

*”A taxa de variação da quantidade de movimento angular de um volume material  $v(t)$  é igual à resultante dos torques que atuam em  $v(t)$  ”*

Tal enunciado é denominado de ”Segundo Postulado de Euler” e em termos matemáticos se traduz em,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \vec{u} d\tau = \int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \vec{f} d\tau + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{t}_n d\sigma \quad (4.13)$$

A partir da Eq.(4.13) é mostrado na seção (4.3.1) que, para fluidos não polares como ar e água, o tensor tensão é simétrico, ou seja,

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}^T \quad (4.14)$$

Observe que a conservação da quantidade de movimento angular em fluidos representa um princípio distinto da conservação da quantidade de movimento linear. Este não é o caso na mecânica dos corpos rígidos onde a conservação da quantidade de movimento angular pode ser obtida da segunda lei de Newton e não constitui um princípio independente.

### 4.3.1 Simetria do Tensor Tensão

No que se segue consideraremos que o fluido é não polar, ou seja, os torques presentes no fluido devem-se unicamente às forças aplicadas sobre o fluido. Em fluidos ditos polares existem forças internas associadas à estrutura molecular que podem produzir torques internos; fluidos polares não serão considerados na presente análise.

Do teorema de transporte de Reynolds, TTR, conforme Eq.(3.42), fazendo  $G = \vec{r} \times \vec{u}$  podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \vec{u} \, d\tau &= \int_{v(t)} \rho \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{u}) \, d\tau \\ &= \int_{v(t)} \rho \left( \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{u}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right) d\tau \\ &= \int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \, d\tau \end{aligned}$$

Fazendo uso da equação anterior na conservação da quantidade de movimento angular, Eq.(4.13), resulta em,

$$\int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \frac{d\vec{u}}{dt} d\tau = \int_{v(t)} \rho \vec{r} \times \vec{f} d\tau + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{t}_n d\sigma$$

ou, agrupando as integrais de volume no lado esquerdo do sinal de igualdade, tem-se,

$$\int_{v(t)} \vec{r} \times \left( \underbrace{\rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \rho \vec{f}}_{=\vec{\nabla} \cdot \vec{T}} \right) d\tau = \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{t}_n d\sigma$$

Assim, fazendo uso de  $\vec{t}_n = \hat{n} \cdot \vec{T}$ , a equação anterior torna-se,

$$\begin{aligned} \int_{v(t)} \vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{T} d\tau &= \int_{S(t)} \vec{r} \times (\hat{n} \cdot \vec{T}) d\sigma \\ &= - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) d\sigma \\ &= - \int_{v(t)} \vec{\nabla} \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) d\tau \end{aligned}$$

A componente  $i$  da equação anterior será,

$$\begin{aligned}
\int_{v(t)} \epsilon_{ijk} x_j \partial_m T_{mk} \, d\tau &= - \int_{v(t)} \epsilon_{ikj} \partial_m (T_{mk} x_j) \, d\tau \\
&= \int_{v(t)} \epsilon_{ijk} (x_j \partial_m T_{mk} + T_{mk} \underbrace{\partial_m x_j}_{=\delta_{mj}}) \, d\tau
\end{aligned}$$

de onde se conclui que,

$$\int_{v(t)} \epsilon_{ijk} T_{jk} \, d\tau = 0$$

Como  $v(t)$  é um volume arbitrário, pode-se afirmar que,

$$\epsilon_{ijk} T_{jk} = 0$$

Multiplicando a equação anterior por  $\epsilon_{ilm}$  resulta em,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ilm} \epsilon_{ijk} T_{jk} &= (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) T_{jk} \\
&= T_{lm} - T_{ml} = 0 \quad \implies \quad T_{lm} = T_{ml}
\end{aligned}$$

Provando-se assim que  $\overline{\overline{T}}$  é simétrico.

## 4.4 Fluidos em Repouso

As equações obtidas anteriormente aplicam-se aos fluidos em movimento e a situação em que os fluidos encontram-se em repouso representam casos particulares. É importante destacar

que é próprio dos fluidos não suportar tensões cisalhantes sem escoar. Assim, para fluidos em repouso só existem tensões normais. Em outras palavras, todo fluido em repouso exibe uma distribuição de tensão que é sempre normal a um elemento de área e independe da orientação deste elemento de área, portanto, para fluidos em repouso,

$$\vec{t}_n = \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}} = -p\hat{n} \quad (4.15)$$

onde  $p$  é um escalar positivo comumente denominado de pressão hidrostática. A Eq.(4.15) indica que a tensão normal é sempre de compressão e que o tensor tensão é esférico e dado por,

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} \quad (4.16)$$

Para fluidos compressíveis  $p$  é a pressão termodinâmica. Para fluidos incompressíveis a pressão termodinâmica não pode ser definida e  $p$  deve ser tratada como uma variável do escoamento, a exemplo da velocidade e aceleração.

Retornando agora à equação do movimento, Eq.(4.7), para fluido em repouso tem-se  $\vec{u} = 0$  de onde resulta,

$$\begin{aligned} \rho \vec{f} &= \vec{\nabla} \cdot (p\overline{\overline{I}}) \\ &= \hat{e}_i \partial_i \cdot (p\delta_{jk}\hat{e}_j\hat{e}_k) \\ &= \hat{e}_i \partial_i p = \vec{\nabla} p \end{aligned} \quad (4.17)$$

Conhecendo a relação entre densidade e pressão para o fluido em análise a equação anterior possibilita que  $\rho(\vec{r})$  e  $p(\vec{r})$  sejam determinadas. Em situação onde  $\rho$  é constante, a Eq.(4.17) torna-se uma equação para a  $p(\vec{r})$ .

Como exemplo de determinação do campo de pressão em um fluido em repouso vamos considerar um reservatório aberto contendo água conforme mostrado na Fig.4.5.

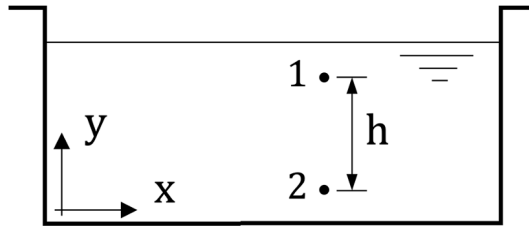


Figura 4.5: Reservatório aberto contendo água.

Fazendo referência à Fig.4.5, o campo gravitacional pode ser escrito como  $\vec{f} = -g\hat{j}$ . Assumindo que  $\rho$  é constante, da Eq.(4.17) resulta que,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 + \rho gh$$

Observe que no exemplo anterior  $p = p(y)$ , indicando que a pressão só varia com a profundidade do fluido.

Em escoamento gerais, e em decorrência do resultado obtido anteriormente para o fluido em repouso, é conveniente expressar o tensor tensão como,

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{P}} \quad (4.18)$$



onde  $\overline{\overline{P}}$  recebe o nome de tensor tensão viscoso e representa a parcela do tensor tensão associada ao movimento do fluido. Note que como  $\overline{\overline{T}}$  é simétrico  $\overline{\overline{P}}$  é também simétrico. Para fluidos em repouso  $\overline{\overline{P}} = 0$ .

## 4.5 Forças sobre Corpos em Escoamentos Permanentes

A equação do movimento pode ser escrita como,

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (4.19)$$

Para escoamentos em regime permanente e sem a presença de forças de campo, a equação anterior torna-se,

$$\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (4.20)$$

Mas,

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \quad (4.21)$$

Como, pela equação da continuidade,  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$  para regime permanente, a substituição da Eq.(4.21) na Eq.(4.20) fornece,

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \overline{\overline{T}}) = 0 \quad (4.22)$$

Fazendo uso do teorema da divergência, a equação anterior pode ser escrita na forma integral como,

$$\int_{v(t)} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \overline{\overline{T}}) d\tau = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \overline{\overline{T}}) d\sigma = 0 \quad (4.23)$$

Considere agora o escoamento sobre um determinado corpo conforme indicado na Fig.4.6.

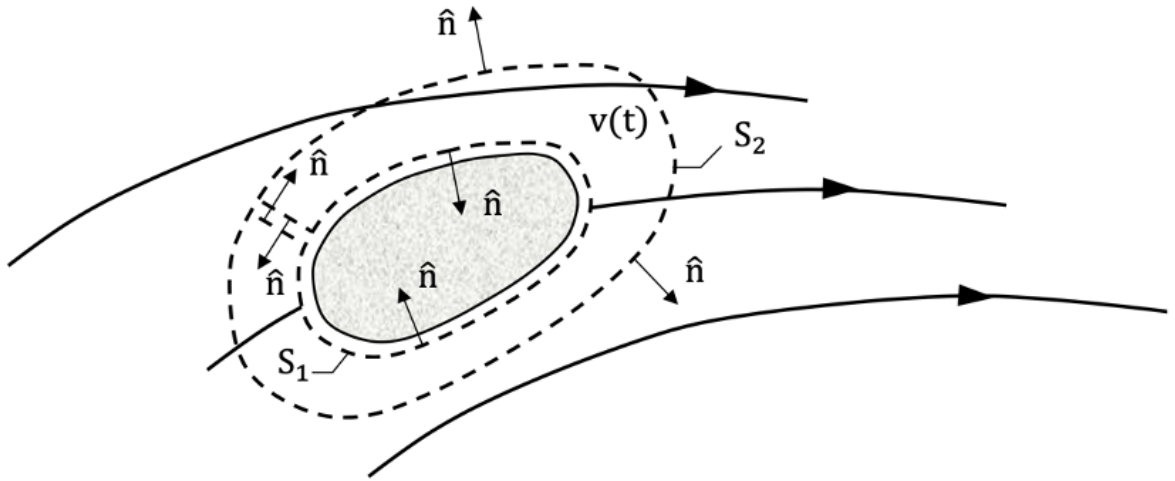


Figura 4.6: Corpo imerso em um escoamento e circundado pelo volume material  $v(t)$ .

Para o volume material  $v(t)$  indicado na figura, cuja superfície material é  $S(t) = S_1 + S_2$ , a Eq.(4.23) torna-se,

$$\begin{aligned}
\int_{S(t)} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \overline{\overline{T}}) d\sigma &= \int_{S_1} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \overline{\overline{T}}) d\sigma + \int_{S_2} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \overline{\overline{T}}) d\sigma \\
&= \int_{S_1} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) d\sigma - \int_{S_1} \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}} d\sigma + \\
&+ \int_{S_2} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) d\sigma - \int_{S_2} \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}} d\sigma = 0
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) d\sigma &= 0 \rightarrow \text{para o corpo impermeável} \\
\int_{S_1} \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}} d\sigma &\rightarrow \text{força que o corpo exerce na superfície } S_1 \text{ de } v(t)
\end{aligned}$$

Assim, denominando de  $\vec{F}$  a força que o fluido exerce na superfície do corpo, que coincide com a superfície material  $S_1$  no instante indicado na Fig.4.6, resulta em,

$$\vec{F} = - \int_{S_2} \hat{n} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) d\sigma + \int_{S_2} \hat{n} \cdot \overline{\overline{T}} d\sigma \quad (4.24)$$

Para  $S_2$  longe do corpo, em uma região onde o escoamento é aproximadamente uniforme, podemos ignorar as tensões viscosas ( $\overline{\overline{P}} = 0$ ) e fazendo uso da Eq.(4.18) escrever,

$$\vec{F} = - \int_S [(\hat{n} \cdot \vec{u}) \rho \vec{u} + p \hat{n}] d\sigma \quad (4.25)$$

onde  $S$  é qualquer superfície material que envolva o corpo e que esteja suficientemente longe deste para que as tensões viscosas possam ser ignoradas.

A Eq.(4.25) é de grande utilidade quando se deseja calcular a força que o fluido exerce na superfície de corpos em contato com o escoamento.

Para exemplificar a importância e utilidade da Eq.(4.25) vamos considerar o escoamento de um fluido sobre uma placa plana horizontal, conforme ilustrado na Fig.4.7. O comprimento da placa é  $L$  e sua largura na orientação perpendicular à figura é  $W$ . Indicado na figura pela linha tracejada está a camada limite, ou seja, a região do fluido que é afetada pela presença da placa; ao término da placa a espessura da camada limite é  $h$ .

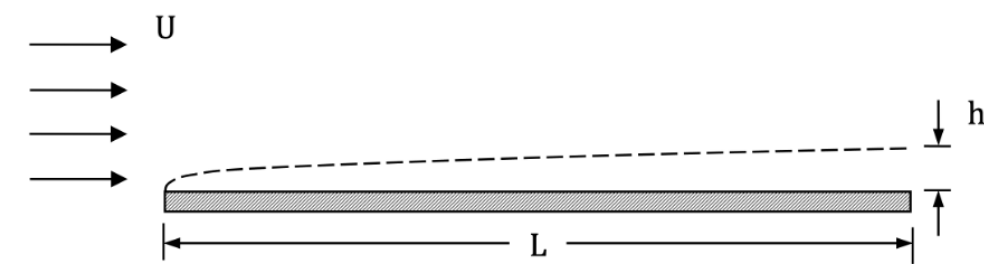


Figura 4.7: Escoamento sobre uma placa plana horizontal.

O fluido se aproxima da borda esquerda da placa com velocidade uniforme  $U$ . Ao encontrar a placa a parte do fluido no interior da camada limite interage com a placa e devido as tensões de cisalhamento tende a arrastar a placa para a direita. Vamos estimar a força de arraste sobre a placa.

Para o fluido que deixa a região da camada limite no final da

placa, em  $x = L$ , assume-se por simplicidade um perfil linear de velocidade dado por  $u(y) = yU/h$ , conforme mostrado na Fig.4.8. Nesta figura a espessura da camada limite foi aumentada para melhor ilustrar o problema. A espessura  $h$  da camada limite ao término da placa pode ser estimada como  $h = 5\sqrt{\mu L/(\rho U)}$ . A figura Fig.4.8 mostra o volume material do fluido sobre a placa identificando a superfície material formada pelas superfícies  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$ .

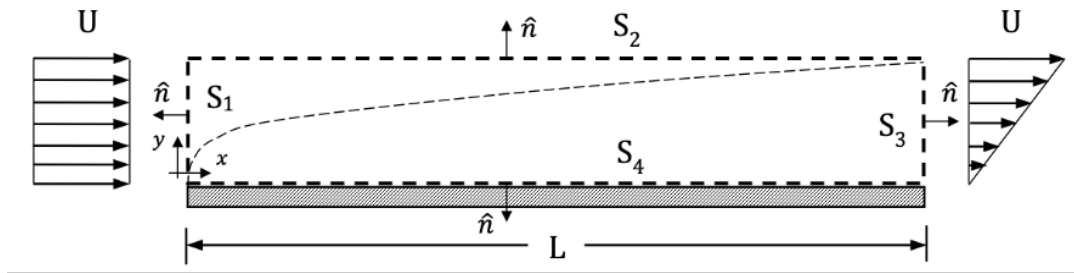


Figura 4.8: Volume material para o cálculo da força de arraste de um fluido escoando sobre uma placa plana horizontal.

Aplicando a Eq.(4.25) na superfície material indicada, e considerando que a pressão é uniforme ao longo do escoamento, resulta em,

$$\vec{F} = - \int_{S_1} [(\hat{n} \cdot \vec{u})\rho\vec{u} d\sigma - \int_{S_2} [(\hat{n} \cdot \vec{u})\rho\vec{u} d\sigma - \int_{S_3} [(\hat{n} \cdot \vec{u})\rho\vec{u} d\sigma$$

onde  $\vec{F}$  é a força que o fluido exerce sobre a placa que é igual em magnitude e com sentido contrário à força que a placa exerce sobre o fluido através da superfície  $S_4$ .

Substituindo na equação anterior os respectivos valores da velocidade ao longo das superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , tem-se,

$$\begin{aligned} F_x &= \rho U^2 h W - \dot{m} U - \int_0^h \rho \left( \frac{yU}{h} \right)^2 W \, dy \\ &= \rho U^2 h W - \dot{m} U - \frac{\rho U^2 h W}{3} \\ &= \frac{2}{3} \rho U^2 h W - \dot{m} U \end{aligned}$$

onde  $\dot{m}$  é a vazão mássica associada à superfície  $S_2$ .

Da conservação da massa aplicada às superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , pode-se concluir que,

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho U h W - \int_0^h \rho \left( \frac{yU}{h} \right) W \, dy \\ &= \rho U h W / 2 \end{aligned}$$

Resulta então que a força de arraste sobre a placa é dada por,

$$F_x = \frac{\rho U^2 h W}{6} = \frac{5}{6} W \sqrt{\rho \mu L U^3}$$

## 4.6 Principais Resultados

No presente capítulo analisamos a dinâmica dos fluidos à luz da mecânica do contínuo e introduzimos os dois postulados de Euler,

- Primeiro Postulado de Euler  $\rightarrow$  Conservação da Quantidade de Movimento Linear
- Segundo Postulado de Euler  $\rightarrow$  Conservação da Quantidade de Movimento Angular

Estes dois postulados de Euler estão para a mecânica dos fluidos assim como as três leis de Newton estão para a mecânica dos corpos rígidos. No entanto, conforme já explorado, os postulados de Euler representam princípios distintos e não podem ser obtidos das leis de Newton.

Fazendo uso dos postulados de Euler os seguintes resultados foram obtidos,

- Existência do Tensor Tensão;
- Equação do Movimento de Cauchy;
- Equilíbrio local das forças de superfície;
- Simetria do Tensor Tensão.

Adicionalmente, as seguintes equações foram deduzidas,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.26)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{P}} \quad (4.27)$$

A Eq.(4.26) é a equação da continuidade escrita de uma forma alternativa às Eqs.(3.35) e (3.45), ao passo que a Eq.(4.26) é

a equação do movimento escrita fazendo uso do tensor tensão viscoso conforme introduzido na Eq.(4.18).

A equação escalar (4.26) e a equação vetorial (4.27) representam um sistema de quatro equações algébricas para onze incógnitas:  $\rho$ ,  $u_i$ ,  $p$  e  $P_{ij}$ . Nos capítulos seguintes iremos escrever  $\rho$  em termos de  $p$  e  $T$ , onde  $T$  é a temperatura do fluido, e para tal precisaremos de uma equação de estado e da equação da energia para um fluido em movimento. Adicionalmente, iremos escrever  $P_{ij}$  em termos de  $u_i$ , o que será feito a partir de uma equação constitutiva para o fluido. Desta forma a descrição do escoamento estará completa e será feita a partir da equação de estado para o fluido e das equações da continuidade, conservação da quantidade de movimento linear, e conservação da energia para o escoamento. Estas seis equações algébricas nos permitirão obter as seis incógnitas  $\rho$ ,  $u_i$ ,  $p$  e  $T$ .



## Capítulo 5

# Conservação da Energia

A energia de um volume material em escoamento depende tanto do estado termodinâmico como da velocidade do fluido. O estado termodinâmico impacta na energia térmica do volume material enquanto que a velocidade do fluido impacta na energia mecânica. No presente capítulo analisaremos a relação entre o movimento do fluido e seu estado termodinâmico. Para tal faremos uso das leis da termodinâmica.

### 5.1 Primeira Lei da Termodinâmica

A energia do fluido contida em um volume material  $v(t)$  em escoamento pode ser expressa por,

$$E = \int_{v(t)} \rho(e + V^2/2) d\tau \quad (5.1)$$

onde  $e$  é a energia interna e  $V^2/2$  é a energia cinética, ambas por unidade de massa.

Ao escoar o volume material pode experimentar um aquecimento proveniente tanto da troca de calor pela sua superfície como pela geração de energia interna no volume. Expressamos então o aquecimento de  $v(t)$  como,

$$A = - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{q} d\sigma + \int_{v(t)} \rho r d\tau \quad (5.2)$$

onde  $\vec{q}$  é o vetor fluxo de calor e  $r$  é a taxa de geração de calor por unidade de massa. A integral de superfície representa a taxa de transferência de calor pela superfície material e a integral de volume representa a taxa de calor que é gerada em  $v(t)$ .

A variação de energia depende do aquecimento e também da potência mecânica realizada sobre o volume. Em termos matemáticos a potência mecânica pode ser escrita como,

$$P = \int_{v(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} d\tau + \int_{S(t)} \vec{t}_n \cdot \vec{u} d\sigma \quad (5.3)$$

onde a primeira parcela do lado direito da igualdade representa o trabalho realizado pelas forças de campo e a segunda parcela representa o trabalho realizado pelas forças de superfície, ambos por unidade de tempo.

Podemos agora formular a primeira lei da termodinâmica para um volume material de fluido em escoamento como,

*”A taxa de aumento de energia de um volume material  $v(t)$  é igual à taxa com que calor é transferido para o volume, ou gerado no interior deste, mais a taxa com que trabalho é realizado sobre  $v(t)$  ”*

Em termos matemáticos o enunciado anterior se traduz em,

$$\frac{dE}{dt} = A + P \quad (5.4)$$

ou, fazendo uso das Eqs. (5.1), (5.2) e (5.3),

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & - \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{q} d\sigma + \int_{v(t)} \rho r d\tau + \\ & + \int_{v(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{u} d\tau + \int_{S(t)} \vec{t}_n \cdot \vec{u} d\sigma \end{aligned} \quad (5.5)$$

Utilizando o teorema de transporte de Reynolds, TTR, na Eq.(5.1), conforme Eq.(3.42), resulta em,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) d\tau = \int_{v(t)} \rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) d\tau \quad (5.6)$$

Pelo teorema da divergência podemos escrever,

$$\int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{q} d\sigma = \int_{v(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} d\tau \quad (5.7)$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} \vec{t}_n \cdot \vec{u} \, d\sigma &= \int_{S(t)} (\hat{n} \cdot \bar{\bar{T}}) \cdot \vec{u} \, d\sigma = \int_{S(t)} \hat{n} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{u}) \, d\sigma \\ &= \int_{v(t)} \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{u}) \, d\tau \end{aligned} \quad (5.8)$$

Retornando agora à Eq.(5.4) com as Eqs.(5.6), (5.7) e (5.8), resulta,

$$\int_{v(t)} \left[ \rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \rho r - \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{u}) \right] d\tau = 0 \quad (5.9)$$

Como  $v(t)$  é um volume arbitrário conclui-se que,

$$\rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho r + \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{u}) \quad (5.10)$$

A equação anterior estabelece a conservação da energia para meios deformáveis. Tal equação expressa a primeira lei da termodinâmica para fluidos em movimento.

### 5.1.1 Energia térmica

A equação da conservação da energia anteriormente explorada inclui tanto a parcela da energia mecânica como da energia térmica. É conveniente separarmos estas duas parcelas e para

tal vamos tomar a equação do movimento e multiplica-la escalarmente por  $\vec{u}$  conforme indicado a seguir,

$$\vec{u} \cdot \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u} \cdot \rho \vec{f} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{T}} \quad (5.11)$$

Uma vez que,

$$\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) \quad (5.12)$$

a Eq.(5.11) pode ser escrita como,

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{u} \cdot \vec{f} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(-p\vec{I} + \vec{\bar{P}})}_{\vec{\bar{T}}} \quad (5.13)$$

onde uso foi feito da Eq.(4.18). Assim,

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{u} \cdot \vec{f} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{P}} \quad (5.14)$$

A Eq.(5.14) expressa a conservação da energia mecânica para um fluido em movimento e foi deduzida a partir do primeiro postulado de Euler, ou seja, da conservação da quantidade de movimento linear.

Verifica-se pela Eq.(5.14) que a variação da energia cinética pode ocorrer através da força de campo, da resultante da pressão, ou pela resultante das forças viscosas, cada uma destas parcelas atuando sobre a velocidade do fluido. Estas três

parcelas do lado direito da Eq.(5.14) representam diferentes manifestações da potência mecânica, conforme identificado a seguir,

$$\begin{aligned}
 \rho d(V^2/2)/dt &\rightarrow \text{variação da energia cinética} \\
 \rho \vec{u} \cdot \vec{f} &\rightarrow \text{potência mecânica devido às forças de campo} \\
 -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} p &\rightarrow \text{potência mecânica devido à pressão} \\
 \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{P}} &\rightarrow \text{potência mecânica devido às tensões viscosas}
 \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que a potência mecânica devido às forças de superfície, último termo do lado direito da Eq.(5.10), pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (\overline{\overline{T}} \cdot \vec{u}) &= \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}}) + tr(\overline{\overline{T}}^T \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \\
 &= -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{P}} + tr(\overline{\overline{T}} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Combinando as Eqs.(5.14) e (5.15) a equação da conservação da energia mecânica torna-se,

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{u} \cdot \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot (\overline{\overline{T}} \cdot \vec{u}) - tr(\overline{\overline{T}} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \quad (5.16)$$

Subtraindo agora a equação anterior da equação da conservação da energia, Eqs.(5.10), obtem-se,

$$\rho \frac{de}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho r + tr(\overline{\overline{T}} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \quad (5.17)$$

onde  $tr(\bar{\bar{T}} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$  é a potência de tensão, e representa o trabalho mecânico realizado pelas forças de superfície na deformação do fluido. A potência de tensão pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
 tr(\bar{\bar{T}} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) &= tr[\bar{\bar{T}} \cdot (\bar{\bar{D}} + \bar{\bar{\Omega}})] = tr(\bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{D}}) \\
 &= (-p\delta_{ij} + P_{ij})D_{ij} = -pD_{ii} + P_{ij}D_{ij} \\
 &= -p\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + tr(\bar{\bar{P}} \cdot \bar{\bar{D}}) \\
 &= -p\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \bar{\bar{P}} : \bar{\bar{D}}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

onde adotou-se a nomenclatura  $tr(\bar{\bar{P}} \cdot \bar{\bar{D}}) = \bar{\bar{P}} : \bar{\bar{D}}$ . Substituindo a Eq.(5.18) na Eq.(5.17) resulta em

$$\rho \frac{de}{dt} = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho r}_{\text{Aquecimento}} \underbrace{-p\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \bar{\bar{P}} : \bar{\bar{D}}}_{\text{Potência Mecânica}} \tag{5.19}$$

que é a equação da conservação da energia térmica para fluidos em movimento. O significado de cada termo nesta equação é identificado a seguir,

$\rho de/dt$	$\rightarrow$	variação da energia interna
$-\vec{\nabla} \cdot \vec{q}$	$\rightarrow$	aquecimento pela condução de calor
$\rho r$	$\rightarrow$	aquecimento pela geração de calor
$-p\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$	$\rightarrow$	trabalho para deformação do fluido pela pressão
$\bar{\bar{P}} : \bar{\bar{D}}$	$\rightarrow$	trabalho para deformação pelas forças viscosas

É interessante analisar a conservação da energia na perspectiva da conservação da energia térmica, Eq.(5.19). Observa-se inicialmente que, conforme o esperado, o aquecimento do fluido só influencia a energia interna e não tem influência alguma na energia cinética. Adicionalmente, as parcelas da potência mecânica associadas à variação da energia térmica são aquela envolvendo a deformação do fluido. Na sequência vamos explorar a potência mecânica em detalhes e sua relação com as energias mecânica e térmica em um fluido em escoamento.

### 5.1.2 Potência mecânica devido às forças de superfície

É importante destacar o papel da potência mecânica associada às forças de superfície que atuam em um volume material em escoamento. Das Eqs.(5.15) e (5.18) vemos que esta potência pode ser decomposta em quatro parcelas,

$$\vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{u}) = \underbrace{-\vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{P}}}_{\text{energia mecânica}} \underbrace{-p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \bar{\bar{P}} : \bar{\bar{D}}}_{\text{energia térmica}} \quad (5.20)$$

As duas primeiras parcelas do lado direito da equação anterior representam as parcelas da potência mecânica que atuam na variação da energia cinética do fluido pela ação das forças de superfície, sejam estas devido ao campo de pressão sejam devido às tensões viscosas. Ambas as parcelas representam resultantes de força que multiplicam a velocidade do fluido. Observe que tais parcelas aparecem na equação da conservação da energia mecânica, Eq.(5.14).



As duas últimas parcelas do lado direito da Eq.(5.20) são as parcelas da potência mecânica que atuam na deformação do fluido e portanto variam a energia interna. Observe que estas parcelas constam da equação da conservação da energia térmica, Eq.(5.19). A parcela  $-p\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  representa a energia mecânica utilizada na contração do fluido pela ação da pressão e é um trabalho reversível, ou seja, quando o fluido expande esta energia é recuperada. Já a parcela  $\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}$  representa a energia mecânica utilizada na deformação do fluido pela ação das forças viscosas, sejam estas normais ou cisalhantes. Esta energia é sempre positiva indicando que é um trabalho irreversível, ou seja, as forças viscosas são não conservativas e dissipam a energia mecânica do fluido transformando em calor.

A equação da conservação energia mecânica (e portanto a equação do movimento) está acoplada à equação da conservação da energia térmica através da potência de tensão (duas últimas parcelas do lado direito da Eq.(5.20)). Quando esta potência é nula, ou seja, quando não há deformação do fluido (ou quando este efeito pode ser ignorado), não há relação alguma entre o movimento do fluido e seu estado termodinâmico. Nestas circunstâncias as incógnitas a serem determinadas em um dado escoamento são  $u_i$  e  $p$  e a solução é obtida através das equações da continuidade e do movimento. A pressão  $p$  torna-se então uma variável do escoamento, e não mais uma variável termodinâmica.

## 5.2 Segunda Lei da Termodinâmica

A segunda lei da termodinâmica estabelece que para um processo reversível entre dois estados termodinâmico a transferência de calor dividida pela temperatura ao longo do processo independe do caminho que une os dois estados. Em termos matemáticos podemos escrever,

$$\int_1^2 \left( \frac{dQ}{T} \right)_{rev} = S_2 - S_1 \quad (5.21)$$

onde  $S$  é a variável de estado entropia. Para processos irreversíveis entre os estados 1 e 2, a segunda lei da termodinâmica torna-se,

$$\int_1^2 \left( \frac{dQ}{T} \right)_{rev} < S_2 - S_1 \quad (5.22)$$

Uma forma mais adequada de escrever a Eq.(5.22) é,

$$dS = \left( \frac{dQ}{T} \right)_{rev} + dS_i \quad (5.23)$$

onde a primeira parcela do lado direito da equação anterior representa a parte reversível e a segunda parcela a parte irreversível do processo termodinâmico.

Considerando agora um volume material, vemos que ao escoar o fluido pode experimentar diferentes estados termodinâmicos e, portanto, a Eq.(5.23) pode ser escrita como,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_{rev}}{dt} + \frac{dS_i}{dt} \quad (5.24)$$

sendo  $dS/dt$  a derivada material da entropia. A primeira parcela do lado direito da equação anterior representa a taxa de variação de entropia devido ao aquecimento e a segunda parcela representa a produção de entropia devido às irreversibilidades e, portanto, é sempre positiva.

Para um volume material  $v(t)$ , a derivada material da entropia no volume pode ser computada como,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho s(\vec{r}, t) d\tau = \int_{v(t)} \rho \frac{d}{dt} s(\vec{r}, t) d\tau \quad (5.25)$$

onde  $s(\vec{r}, t)$  é a entropia por unidade de massa em uma determinada posição  $\vec{r}$  no instante  $t$ . Adicionalmente, fazendo uso da Eq.(5.2) podemos escrever,

$$\frac{dS_{rev}}{dt} = \frac{A}{T} = - \int_{S(t)} \frac{\hat{n} \cdot \vec{q}}{T} d\sigma + \int_{v(t)} \frac{\rho r}{T} d\tau \quad (5.26)$$

e, a partir do teorema de transporte de Reynolds, TTR,

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho s_i d\tau = \int_{v(t)} \rho \frac{ds_i}{dt} d\tau \quad (5.27)$$

Retornando agora à Eq.(5.24) com as Eqs.(5.25), (5.26) e (5.27) resulta em,

$$\int_{v(t)} \rho \frac{ds}{dt} d\tau = - \int_{S(t)} \frac{\hat{n} \cdot \vec{q}}{T} d\sigma + \int_{v(t)} \frac{\rho r}{T} d\tau + \int_{v(t)} \rho \frac{ds_i}{dt} d\tau$$

Fazendo uso do teorema da divergência para a integral de superfície, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\int_{v(t)} \left[ \rho \frac{ds}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} - \rho \frac{ds_i}{dt} \right] = 0$$

como  $v(t)$  é um volume material arbitrário, conclui-se que,

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} + \rho \frac{ds_i}{dt} \quad (5.28)$$

A Eq.(5.28) é a segunda lei da termodinâmica para um fluido em escoamento. Tal equação estabelece que há três formas de aumentar a entropia de um fluido, a primeira é através do aquecimento por condução de calor, a segunda é o aquecimento pela geração de calor, e a terceira é através das irreversibilidades associadas às mudanças do estado termodinâmico experimentadas pelo fluido ao escoar.

### 5.2.1 Irreversibilidades

É particularmente útil relacionar a primeira e a segunda leis da termodinâmica entre si pois ao fazermos isto podemos identificar as causas das irreversibilidades associadas ao escoamento.

Para tal considere inicialmente a formulação da primeira lei da termodinâmica escrita como,

$$de = dQ + dW \quad (5.29)$$

onde  $Q$  é calor e  $W$  é trabalho. Da termodinâmica sabemos que para processos reversíveis  $dQ = Tds$  e  $dW = -pdv$ , onde  $v$  é o volume específico do fluido,  $v = 1/\rho$ . Assim, fazendo uso destas expressões na Eq.(5.29) tem-se,

$$de = Tds - pdv \rightarrow \text{Equação de Gibbs} \quad (5.30)$$

que é a primeira lei da termodinâmica expressa somente em termos de propriedades termodinâmicas. Pela sua importância a Eq.(5.30) recebe o nome de "Equação de Gibbs".

Como,

$$-p \frac{dv}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (5.31)$$

combinando as Eqs.(5.30) e (5.31) podemos escrever para um volume material em escoamento,

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (5.32)$$

Substituindo a derivada material da energia interna  $de/dt$  dada pela Eq.(5.32) na expressão da conservação da energia térmica, Eq.(5.19), obtém-se,

$$\rho T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho r - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} \quad (5.33)$$

Pela equação da continuidade vê-se que a segunda parcela do lado esquerdo da equação anterior é igual à terceira parcela do lado direito, resultando em,

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}{T} + \frac{\rho r}{T} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \quad (5.34)$$

A Eq.(5.34) é a primeira lei da termodinâmica escrita em termos da entropia. Comparando-se as expressões da primeira e da segunda leis da termodinâmica dadas pelas Eqs.(5.34) e (5.28), respectivamente, obtém-se,

$$\rho \frac{ds_i}{dt} = -\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \geq 0 \quad (5.35)$$

onde uso foi feito da identidade,

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}{T} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} \quad (5.36)$$

A Eq.(5.35) explicita que a taxa de produção de entropia devido às irreversibilidades deve-se a duas parcelas. A primeira parcela está associada ao aquecimento do fluido por condução de calor e a segunda parcela é devida à potência mecânica que é dissipada pelas forças viscosas.

Retornando agora à Eq.(5.28) com o valor de  $\rho ds_i/dt$  dado pela Eq.(5.35), resulta em,

$$\rho \frac{ds}{dt} = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T}}_{\text{reversível}} \underbrace{- \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} + \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T}}_{\text{irreversível}} \quad (5.37)$$

A equação anterior nos leva de volta à Eq.(5.24), agora identificando as parcelas associadas ao aumento da entropia através de processos reversível e irreversível. É interessante observar que todo processo de transferência de calor envolve uma parcela reversível e outra parcela irreversível. Assim, vê-se que não há transferência de calor puramente reversível e que a irreversibilidade associada à transferência de calor é tanto maior quanto maior forem as diferenças de temperaturas envolvidas.

## Capítulo 6

# Equações Constitutivas

Neste capítulo vamos relacionar o tensor tensão viscoso,  $\overline{\overline{P}}$ , com o tensor taxa de deformação,  $\overline{\overline{D}}$ . A maneira como estes dois tensores relacionam-se dependem dos elementos que constituem o fluido e por isto a relação entre  $\overline{\overline{P}}$  e  $\overline{\overline{D}}$  é denominada de equação (ou relação) constitutiva. Ainda que o estudo das equações constitutivas envolva a análise de diferentes tipos de fluidos, incluindo, por exemplo, fluidos com comportamentos viscoelásticos, trataremos aqui apenas de uma classe muito particular de fluidos, aqueles ditos stokesianos. A razão para estudar os fluidos stokesianos é que tais fluidos são encontrados amplamente na natureza e na engenharia. Ar e água, por exemplo, são fluidos stokesianos.

Analisaremos também a relação constitutiva entre o vetor fluxo



de calor,  $\vec{q}$ , e o gradiente de temperatura  $\vec{\nabla}T$ .

## 6.1 Fluidos Newtonianos

Os fluidos newtonianos são casos particulares de uma classe mais geral de fluidos ditos stokesianos. Os fluidos stokesianos são aqueles que satisfazem as hipóteses de Stokes:

1. O tensor tensão  $\overline{\overline{T}}$  é função apenas do tensor taxa de deformação  $\overline{\overline{D}}$ , ou seja,  $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}(\overline{\overline{D}})$ ;
2.  $\overline{\overline{T}}$  não depende explicitamente da posição  $\vec{r}$ , ou seja, o fluido é homogêneo;
3. Tensões normais não produzem cisalhamento, ou seja, o fluido é isotrópico e portanto não existem orientações preferenciais;
4. Quando  $\overline{\overline{D}} = 0$  então  $\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}}$ .

Fluidos homogêneos são aqueles em que suas propriedades materiais não variam com a posição. Em fluidos isotrópicos as propriedades materiais em uma dada posição são as mesmas ao longo de todas as orientações. Fluidos isotrópicos (ou anisotrópicos) podem ser homogêneos ou não-homogêneos.

A expressão mais geral para uma dependência polinomial entre  $\overline{\overline{T}}$  e  $\overline{\overline{D}}$  é,

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \beta\overline{\overline{D}} + \gamma\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}} = -p\overline{\overline{I}} + \beta\overline{\overline{D}} + \gamma\overline{\overline{D}}^2 \quad (6.1)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são escalares, e fez-se  $\overline{\overline{D}}^2 = \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}}$ .

A representação dada pela Eq.(6.1) é possível pois pode-se mostrar que um tensor de segunda ordem como  $\overline{\overline{D}}$  satisfaz a Equação de Cayley-Hamilton, ou seja,

$$\overline{\overline{D}}^3 - I_1 \overline{\overline{D}}^2 + I_2 \overline{\overline{D}} - I_3 \overline{\overline{I}} = 0 \quad (6.2)$$

e assim potências maiores de  $\overline{\overline{D}}^2$  podem ser expressas em termos de  $\overline{\overline{D}}$  e  $\overline{\overline{D}}^2$  fazendo uso sucessivo da Eq.(6.2). As grandezas  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  na Eq.(6.2) são os invariantes de  $\overline{\overline{D}}$ .

Se a dependência de  $\overline{\overline{T}}$  com  $\overline{\overline{D}}$  é linear, o fluido é dito newtoniano e podemos então escrever a partir da Eq.(6.1)

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \underbrace{\overline{\overline{\mu}} : \overline{\overline{D}}}_{\overline{\overline{P}}} \implies T_{ij} = -p\delta_{ij} + \underbrace{\mu_{ijkp} D_{kp}}_{P_{ij}} \quad (6.3)$$

onde  $\overline{\overline{\mu}}$  é o tensor viscosidade. Observe que o surgimento de um tensor de quarta ordem se justifica para que cada uma das nove componentes de  $\overline{\overline{T}}$  possa se relacionar com cada uma das nove componentes de  $\overline{\overline{D}}$ , requerendo portanto 81 escalares.

Impondo isotropia, de acordo com a hipótese 3 de Stokes, e fazendo uso da expressão mais geral de um tensor isotrópico de quarta ordem conforme apresentado na Eq.(2.130), resulta,

$$\mu_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (6.4)$$

onde  $\lambda$ ,  $\eta$  e  $\gamma$  são escalares.

Assim, a expressão mais geral para as componentes do tensor tensão viscoso  $P_{ij}$  tornam-se,

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= (\lambda \delta_{ij} \delta_{kk} + \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}) D_{kl} \\
 &= \lambda \delta_{ij} D_{kk} + \eta D_{ij} + \gamma D_{ji} \\
 &= \lambda \delta_{ij} D_{kk} + (\eta + \gamma) D_{ij} \quad \text{pois } D_{ij} = D_{ji} \\
 &= \lambda \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu D_{ij}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

onde, por simplicidade, foi feito  $\mu = (\eta + \gamma)/2$ .

A partir da Eq.(6.5) a equação constitutiva para fluidos newtonianos pode ser escrita como,

$$\bar{\bar{T}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{P}} = -p\bar{\bar{I}} + \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}} \tag{6.6}$$

Na equação anterior o escalar  $\lambda$  é o segundo coeficiente de viscosidade e o escalar  $\mu$  é a viscosidade absoluta do fluido (ou viscosidade dinâmica). Vê-se pela Eq.(6.6) que a caracterização constitutiva do fluido newtoniano é feita pela especificação de  $\lambda$  e  $\mu$ .

Para um escoamento onde  $u = u(y)$  e  $v = w = 0$ , por exemplo,

$$P_{ij} = \lambda \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + 2\mu D_{ij} \Rightarrow P_{ij} = \mu \begin{bmatrix} 0 & du/dy & 0 \\ du/dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

assim,

$$P_{21} = \tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

que é a expressão para a conhecida "lei de Newton" da viscosidade.

## 6.2 Lei de Fourier

Da mesma forma que expressamos  $\overline{T}$  em função de  $\overline{D}$  para caracterizar o fluido em escoamento, é necessário que possamos expressar o vetor fluxo de calor  $\vec{q}$  em termos de  $\vec{\nabla}T$  para caracterizar a transferência de calor.

Adotando considerações análogas às hipóteses de Stokes, podemos escrever,

$$\vec{q} = \overline{\overline{K}} \cdot \vec{\nabla}T \implies q_i = K_{ij} \partial_j T \quad (6.7)$$

onde  $\overline{\overline{K}}$  é o tensor condutividade térmica. A condutividade térmica precisa ser um tensor de segunda ordem para que cada uma das três componentes de  $\vec{q}$  possa se relacionar com cada uma das três componentes de  $\vec{\nabla}T$ .

Impondo isotropia, as componentes de  $\overline{\overline{K}}$  tornam-se  $K_{ij} = \gamma \delta_{ij}$ . Escolhendo  $\gamma = -k$ , resulta em,

$$q_i = -k \delta_{ij} \partial_j T = -k \partial_i T \implies \vec{q} = -k \vec{\nabla}T \quad (6.8)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica. A Eq.(6.8) é a Lei de Fourier e indica que, para meios isotrópicos, o vetor fluxo de calor,  $\vec{q}$ ,

está sempre alinhado com o gradiente de temperatura.

### 6.3 Considerações sobre $\lambda$ , $\mu$ e $k$

Os escalares  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $k$  são propriedades da matéria e devem ser obtidos experimentalmente. Tais propriedades refletem o comportamento do fluido e para que possam ser exploradas em maior profundidade vamos retornar à Eq.(5.35) separando a expressão da taxa de produção de entropia devido às irreversibilidade em suas duas parcelas, conforme indicado a seguir,

$$-\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}}}{T} \geq 0 \quad (6.9)$$

A separação anterior é possível pois a transferência de calor e a taxa de deformação são fenômenos independentes um do outro.

Inicialmente vamos tratar de situações onde não há escoamento e apenas a primeira desigualdade é relevante. Para  $\vec{q} = -k\vec{\nabla}T$  tem-se então,

$$\frac{k\vec{\nabla}T \cdot \vec{\nabla}T}{T^2} = \frac{k|\vec{\nabla}T|^2}{T^2} \geq 0 \implies k \geq 0 \quad (6.10)$$

Vemos que a condutividade térmica é sempre positiva, ou seja, calor sempre flui da temperatura mais alta para a temperatura mais baixa!

Para explorar a segunda das desigualdade (6.9), vamos fazer uso da expressão de  $\overline{\overline{P}}$  para fluido newtoniano, Eq.(6.6), resultando em,

$$\begin{aligned}\overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} &= \text{tr}(\overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{D}}) \\ &= [\lambda \delta_{ij} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + 2\mu D_{ij}] D_{ij} \\ &= \lambda D_{ii} D_{jj} + 2\mu D_{ij} D_{ij} \geq 0\end{aligned}\quad (6.11)$$

onde a temperatura foi omitida por simplicidade uma vez que  $T$  é expressa em escala absoluta.

A expansão da Eq.(6.11) em termos das nove componentes de  $\overline{\overline{D}}$  resulta em,

$$\begin{aligned}\lambda(D_{11} + D_{22} + D_{33})^2 + 2\mu(D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + \\ + 2D_{12}^2 + 2D_{13}^2 + 2D_{23}^2) \geq 0\end{aligned}\quad (6.12)$$

A desigualdade (6.12) é válida para todo e qualquer escoamentos. Tomemos, por exemplo, uma expansão volumétrica pura,

$$D_{ij} = \alpha \delta_{ij} \rightarrow \begin{cases} D_{11} = D_{22} = D_{33} = \alpha \\ D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0 \end{cases}$$

Substituindo os valores anteriores de  $D_{ij}$  na Eq.(6.12) resulta em,

$$\lambda(3\alpha)^2 + 2\mu(3\alpha^2) \geq 0 \implies \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0 \quad (6.13)$$

Tomemos agora um cisalhamento puro conforme,

$$D_{ij} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A substituição das expressões anteriores de  $D_{ij}$  na Eq.(6.12) leva à importante conclusão de que  $\mu \geq 0$ .

## 6.4 Viscosidade Expansional

Como o segundo coeficiente de viscosidade,  $\lambda$ , pode ser negativo, conforme indicado pela Eq.(6.13), é conveniente introduzir a viscosidade expansional,  $\beta$ , dada por,

$$\beta = \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0 \quad (6.14)$$

Fazendo uso de  $\beta$ , a expressão de  $\bar{\bar{T}}$  para fluidos newtonianos dada pela Eq.(6.6), torna-se

$$\begin{aligned} \bar{\bar{T}} &= -p\bar{\bar{I}} + \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}} \\ &= -p\bar{\bar{I}} + \underbrace{(\beta - \frac{2}{3}\mu)(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}}}_{\bar{\bar{P}}} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ambas as viscosidades que aparecem na Eq.(6.15), a viscosidade expansional,  $\beta$ , e a viscosidade absoluta,  $\mu$ , são sempre positivas.

Para explorar o significado da viscosidade expansional,  $\beta$ , vamos calcular as tensões normais a partir da Eq.(6.15),

$$\begin{aligned} T_{ii} &= -3p + 3\left(\beta - \frac{2}{3}\mu\right)(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + 2\mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \\ &= -3p + 3\beta\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Da equação anterior conclui-se que,

$$p = -\frac{1}{3}T_{ii} + \beta\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \bar{p} + \beta\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (6.17)$$

onde  $p$  é a pressão termodinâmica e  $\bar{p}$  é a pressão mecânica (tensão normal média).

Conforme indicado na Eq.(6.17), para fluidos em movimento a pressão mecânica não é igual à pressão termodinâmica. Ainda, a pressão termodinâmica é maior durante a expansão do que durante a compressão. Adicionalmente, vê-se que as forças viscosas também contribuem para as tensões normais.

Ao multiplicarmos todas as parcelas da Eq.(6.17) por  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ , resulta,

$$-\bar{p}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = -p(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2 \quad (6.18)$$



onde  $-\bar{p}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$  é o trabalho mecânico associada às tensões normais,  $-p(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$  é o trabalho mecânico associado à contração (ou expansão) do fluido pelo campo de pressão (parcela reversível), e  $\beta(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2$  é o trabalho irreversível (sempre positivo) associado à contração (ou expansão) do fluido pelas forças viscosas. Devido à presença das forças viscosas, o trabalho mecânico para a contração do fluido é sempre maior do que o trabalho termodinâmico (trabalho reversível). Quando o fluido se expande, o trabalho mecânico recuperado é menor do que o trabalho termodinâmico, devido às perdas de energia requerida para vencer as forças viscosas. Seja na contração ou na expansão  $\beta(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2$  é sempre positivo e a viscosidade expansional  $\beta$  está associada à dissipação de energia devido à atuação das forças normais viscosas.

Assumir que  $\beta = 0$  equivale a assumir que a pressão mecânica é igual à pressão termodinâmica, e que a dissipação de energia mecânica associada às forças normais viscosas é nula. Tal aproximação é conhecida como hipótese de Stokes e representa uma boa simplificação para a maioria das aplicações encontradas em engenharia e na natureza. Com  $\beta = 0$  a expressão de  $\bar{\bar{T}}$  para fluidos newtonianos torna-se,

$$\begin{aligned}\bar{\bar{T}} &= -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{P}} \\ &= -p\bar{\bar{I}} - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}}\end{aligned}\tag{6.19}$$

## 6.5 Tensor Tensão Viscoso

Expressões para as componentes do tensor tensão viscoso,  $\overline{\overline{P}}$ , são apresentadas a seguir em termos das componentes da velocidade e assumindo que  $\beta = 0$ , tanto para coordenadas cartesianas como para coordenadas cilíndricas.

Coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned}
 P_{xx} &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\
 P_{yy} &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\
 P_{zz} &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\
 P_{xy} &= P_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\
 P_{xz} &= P_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\
 P_{yz} &= P_{zy} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

Coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ :

$$\begin{aligned}
P_{rr} &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\
P_{\theta\theta} &= \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\
P_{zz} &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\
P_{r\theta} &= P_{\theta r} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\
P_{rz} &= P_{zr} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\
P_{\theta z} &= P_{z\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

## Capítulo 7

# Escoamento de Fluidos Newtonianos

Nos capítulos anteriores apresentamos as equações gerais que governam o escoamento dos fluidos. Agora iremos particularizar tais equações para fluidos newtonianos e transformaremos a equação da energia térmica em uma equação para a temperatura.

### 7.1 Equação de Navier-Stokes

Para que tenhamos uma perspectiva ampliada o conjunto das equações fundamentais apresentadas anteriormente é reproduzido a seguir.

- Equação da Continuidade

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (7.1)$$

- Equação do Movimento

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \quad (7.2)$$

- Equação da Energia Térmica

$$\rho \frac{de}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho r - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} \quad (7.3)$$

As equações listadas aplicam-se a fluidos em escoamento independente de suas respectivas equações constitutivas. Para fluidos newtonianos, vimos que a expressão geral para o tensor tensão  $\overline{\overline{T}}$  é dada por,

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + (\beta - \frac{2}{3}\mu)(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}} \quad (7.4)$$

Substituindo a Eq.(7.4) na Eq.(7.2) obtemos a equação do movimento para fluidos newtonianos,

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} [(\beta - \frac{2}{3}\mu)\vec{\nabla} \cdot \vec{u}] + \vec{\nabla} \cdot (2\mu\overline{\overline{D}}) + \rho \vec{f} \quad (7.5)$$

A equação anterior é a celebrada Equação de Navier-Stokes em sua forma mais geral. Fazendo  $\beta$  e  $\mu$  constantes na equação anterior tem-se,

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu\right) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + 2\mu \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} + \rho \vec{f} \quad (7.6)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} &= \hat{e}_i \partial_i \cdot \left[ \frac{1}{2} (\partial_j u_k + \partial_k u_j) \hat{e}_j \hat{e}_k \right] \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \partial_i u_k + \partial_i \partial_k u_i) \hat{e}_k \\ &= \frac{1}{2} [\nabla^2 \vec{u} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \end{aligned} \quad (7.7)$$

e, substituindo a Eq.(7.7) na Eq.(7.6) resulta,

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \left(\beta + \frac{\mu}{3}\right) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f} \quad (7.8)$$

A Eq.(7.8) é a Equação de Navier-Stokes para  $\beta$  e  $\mu$  constantes.

Para escoamentos isocóricos (mesmo que  $\beta$  e  $\mu$  não sejam constantes), a Eq.(7.5) torna-se

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (2\mu \overline{\overline{D}}) + \rho \vec{f} \quad (7.9)$$

Como,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (2\mu \overline{\overline{D}}) &= 2\mu \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{D}} + 2\overline{\overline{D}} \cdot \vec{\nabla} \mu \\
&= 2\mu \left\{ \frac{1}{2} [\nabla^2 \vec{u} + \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}_0] \right\} + (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T) \cdot \vec{\nabla} \mu \\
&= \mu \nabla^2 \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T) \cdot \vec{\nabla} \mu
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Da Eq.(7.9) resulta,

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T) \cdot \vec{\nabla} \mu + \rho \vec{f} \tag{7.11}$$

que é a Equação de Navier-Stokes para  $\rho$  constante (e  $\mu$  variável).

Para  $\rho$  e  $\mu$  constantes a Equação de Navier-Stokes torna-se,

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{f} \tag{7.12}$$

Em coordenadas cartesianas com  $\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ , a Eq.(7.12) pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) &= -\vec{\nabla} p + \\
&+ \mu \left( \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \right) + \rho \vec{f}
\end{aligned}$$

Para uma situação bi-dimensional em regime permanente e ignorando a força de campo, as duas componentes da equação anterior tornam-se,

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (7.13)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (7.14)$$

cujas incógnitas são  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  e  $p(x, y)$ . Para a solução é necessário especificar as propriedades do fluido  $\rho$  e  $\mu$ , e fazer uso da equação da continuidade que, para a situação em questão, é dada por,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.15)$$

As Eqs.(7.13) e (7.14) são utilizadas para determinar  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ , respectivamente, enquanto que a Eq.(7.15) é utilizada para a obtenção de  $p(x, y)$ . Para que a Eq.(7.15) torne-se uma equação para a pressão é necessário que  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  sejam escritas em termos de  $\partial p / \partial x$  e  $\partial p / \partial y$ , respectivamente, e substituídas na Eq.(7.15). Nem sempre isto é possível de ser feito analiticamente e deve-se então proceder numericamente.

Neste caso em que  $\rho$  é constante e especificada a priori como uma propriedade do fluido, a pressão deixa de ser uma variável termodinâmica e passa a ser uma variável do escoamento, assim como  $u$  e  $v$ .

Como exemplo de aplicação das equações anteriores, vamos considerar o cilindro metálico que cai lentamente com velocidade constante e igual a  $U$ , no interior de uma tubulação conforme ilustrado na Fig. 7.1.



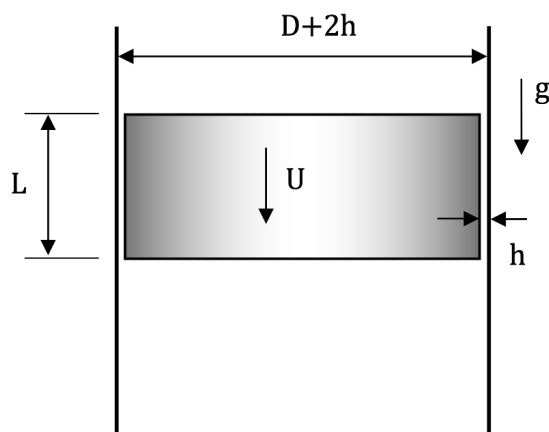


Figura 7.1: Cilindro metálico em queda livre no interior de uma tubulação.

O cilindro metálico possui densidade  $\rho_m$ , diâmetro  $D$ , e comprimento  $L$ . A folga radial entre o cilindro metálico e a tubulação é  $h$ , e  $h \ll D$  e  $L$ .

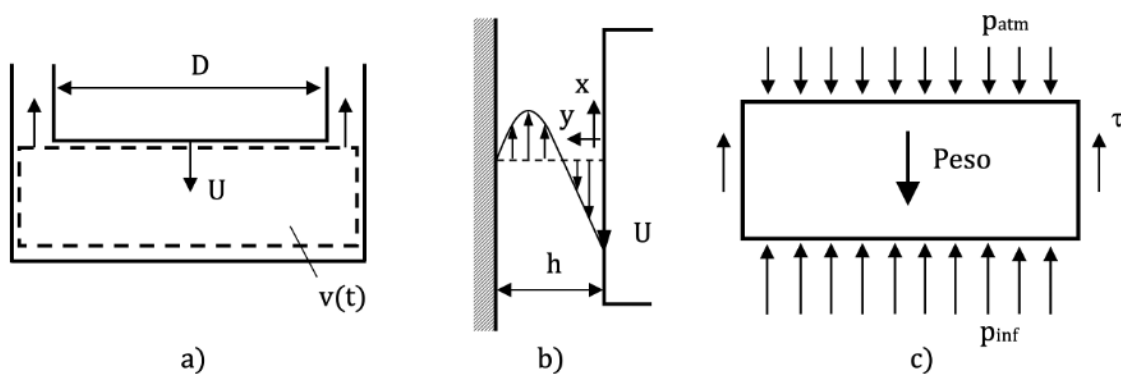


Figura 7.2: Detalhes do cilindro em queda livre: a) volume material na parte inferior do cilindro, b) perfil de velocidade na folga radial e c) forças que atuam no cilindro.

O fundo da tubulação é fechado e ao cair o cilindro empurra o

fluido de densidade  $\rho$  e viscosidade  $\mu$  a escoar pela folga radial mantendo constante a pressão na parte inferior do cilindro. A pressão na parte superior do cilindro é atmosférica. Deseja-se obter uma expressão para a velocidade de queda  $U$ , em função da densidade do cilindro,  $\rho_m$ , dos parâmetro geométricos, e das propriedades do fluido que circunda o cilindro.

Considerando que o fluido contido no fundo da tubulação permanece com sua densidade constante e igual a  $\rho$ , a equação da conservação da massa para o volume material  $v(t)$  indicado na Fig. 7.2a) resulta em,

$$\int_{S(t)} \hat{n} \cdot \rho \vec{u} d\sigma = 0$$

de onde concluiu-se que a vazão volumétrica que escoar axialmente pela folga radial é igual a  $U\pi D^2/4$ .

Como a folga radial  $h$  é muito menor do que  $D$  e  $L$ , para calcular a velocidade do fluido na folga radial podemos ignorar os efeitos de aceleração e da força de campo e assumir que o escoamento é unidimensional e que a velocidade é função apenas da coordenada  $y$ , conforme indicado na Fig. 7.2b). Adicionalmente, como o cilindro cai lentamente em velocidade constante, vamos considerar regime permanente e escoamento isocórico. A equação de Navier-Stokes torna-se então,

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

onde  $u(y)$  é a componente da velocidade ao longo da orientação  $x$  indicada na Fig. 7.2b).

Assumindo que  $dp/dx$  é constante, a equação anterior é facilmente integrada resultando no seguinte perfil de velocidade,

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (hy - y^2) - \frac{U}{h} (h - y)$$

onde fez-se uso das seguintes condições de contorno:  $u = -U$  para  $y = 0$  e  $u = 0$  para  $y = h$ .

A integração da expressão de  $u(y)$  ao longo da folga radial permite que a vazão volumétrica seja determinada e igualada ao valor de  $U\pi D^2/4$ , obtido anteriormente. Desta forma, ignorando-se os efeitos de curvatura, tem-se,

$$\int_0^h u(y) \pi D \, dy = U \frac{\pi D^2}{4}$$

de onde concluiu-se que,

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U}{h^3} (D/2 + h)$$

Já que assumimos  $dp/dx$  constante, a pressão varia linearmente ao longo de  $x$  e da equação anterior resulta que a pressão na parte inferior do cilindro metálico será,

$$p_{inf} = p_{atm} + \frac{6\mu U L}{h^3} (D/2 + h)$$

Fazendo uso do perfil de velocidade na folga radial, podemos determinar também a tensão de cisalhamento na superfície lateral do cilindro em queda a partir de,

$$\begin{aligned}
\tau|_{y=0} &= \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = -\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \mu \frac{U}{h} \\
&= \mu \frac{U}{h} \left( \frac{3}{2} \frac{D}{h} + 4 \right)
\end{aligned}$$

Como o cilindro metálico cai lentamente com velocidade constante, a resultante das forças que atuam sobre o mesmo é zero. Desta forma, fazendo uso da Fig. 7.2c) podemos escrever,

$$p_{inf} \frac{\pi D^2}{4} + \tau|_{y=0} \pi D L = p_{atm} \frac{\pi D^2}{4} + \underbrace{\rho_m \frac{\pi D^2}{4} L g}_{\text{Peso}}$$

Substituindo na equação anterior as expressões para  $p_{inf}$  e  $\tau|_{y=0}$  obtém-se,

$$U = \frac{\rho_m D h^3 g}{\mu \underbrace{(3D^2 + 12Dh + 16h^2)}_{\simeq 3D^2}} \simeq \frac{\rho_m h^3 g}{3\mu D}$$

Para um cilindro de aço,  $\rho_m = 2.700 \text{ kg/m}^3$ , com  $D = 10 \text{ cm}$  e  $h = 2 \text{ mm}$ , caindo na água,  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ , resulta em  $U = 7,2 \text{ cm/s}$ .

## 7.2 Considerações Termodinâmicas

Para situações não isotérmicas o campo de temperatura precisa ser determinado e para tal uso deve ser feito da equação da

energia térmica. Inicialmente é preciso introduzir a lei de Fourier, Eq.(6.8), na Eq.(7.3) que passa a ser escrita como,

$$\rho \frac{de}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \rho r - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} \quad (7.16)$$

Adicionalmente, para a expressão de  $\overline{\overline{P}}$  dada pela Eq.(6.15), tem-se,

$$\begin{aligned} \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{D}} &= [(\beta - \frac{2}{3}\mu)(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}}] : \overline{\overline{D}} \\ &= \text{tr}[( -\frac{2}{3}\mu \text{tr}\overline{\overline{D}} \overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}}) \cdot \overline{\overline{D}}] \quad , \quad \text{para } \beta = 0 \\ &= -\frac{2}{3}\mu(\text{tr}\overline{\overline{D}})(\text{tr}\overline{\overline{D}}) + 2\mu \text{tr}(\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}}) = \mu\Phi \end{aligned} \quad (7.17)$$

onde  $\Phi$  é a função dissipação viscosa dada por,

$$\Phi = 2[\text{tr}(\overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}}) - \frac{1}{3}\text{tr}^2\overline{\overline{D}}] \quad (7.18)$$

Substituindo a Eq.(7.17) na Eq.(7.16) resulta em,

$$\rho \frac{de}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \rho r - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \mu\Phi \quad (7.19)$$

que é a equação da energia térmica para fluidos newtonianos.

Para que a Eq.(7.19) seja uma equação para a temperatura,  $T$ , é necessário que a energia interna,  $e$ , possa ser escrita em

função da temperatura. Para isto é importante explorar dois conceitos:

- (i) Calores Específicos;
- (ii) Relações de Maxwell.

### 7.2.1 Calores específicos

Da equação de Gibbs, Eq.(5.30), tem-se que,

$$dq = de + pdv \quad (7.20)$$

Fazendo  $e = e(v, p)$  e  $T = T(v, p)$ , é possível escrever,

$$de = \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_p dv + \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_v dp \quad \text{e} \quad dT = \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_p dv + \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_v dp$$

Definindo o calor específico,  $c$ , como a quantidade de calor requerida para produzir um dado aumento de temperatura,

$$\begin{aligned} c &= \Delta Q / \Delta T \\ &= dq / dT = (de + pdv) / dT \\ &= \frac{(\partial e / \partial v)_p dv + (\partial e / \partial p)_v dp + pdv}{(\partial T / \partial v)_p dv + (\partial T / \partial p)_v dp} \end{aligned} \quad (7.21)$$

Para um processo com pressão constante, a equação anterior torna-se,

$$\begin{aligned}
c_p &= \frac{(\partial e / \partial v)_p dv + p dv}{(\partial T / \partial v)_p dv} \\
&= \frac{\partial(e + pv)}{\partial T} \Big|_p = \frac{\partial h}{\partial T} \Big|_p
\end{aligned} \tag{7.22}$$

onde  $h$  é a entalpia.

Alternativamente, para um processo com  $v$  constante (ou  $\rho$  constante), a Eq.(7.21) torna-se,

$$c_v = \frac{(\partial e / \partial p)_v dp}{\partial T / \partial p)_v dp} = \frac{\partial e}{\partial T} \Big|_v \tag{7.23}$$

As expressões de  $c_p$  e  $c_v$  apresentadas anteriormente possibilitam que a energia interna,  $e$ , seja escrita em termos da temperatura,  $T$ .

### 7.2.2 Relações de Maxwell

As relações de Maxwell são identidades termodinâmicas nas quais as diferentes variáveis de estado podem ser expressas entre si. Aqui exploraremos as identidades afetas às propriedades termodinâmicas mais comumente utilizadas na análise de fluidos em escoamento.

Retornando à equação de Gibbs, Eq.(5.30), e expressando  $e$  como  $e = e(s, v)$ , tem-se,

$$de = T ds - p dv = \frac{\partial e}{\partial s} \Big|_v ds + \frac{\partial e}{\partial v} \Big|_s dv \tag{7.24}$$

Da equação anterior resulta,

$$T = \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_v \quad \text{e} \quad -p = \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_s \quad (7.25)$$

Em relação às Eqs.(7.25) podemos agora derivar a expressão de  $T$  em relação a  $v$  mantendo  $s$  constante, e derivar a expressão de  $p$  em relação a  $s$  mantendo  $v$  constante obtendo,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_s = \frac{\partial}{\partial v} \left( \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_v \right)_s \quad \text{e} \quad - \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_v = \frac{\partial}{\partial s} \left( \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_s \right)_v \quad (7.26)$$

Como ambos os lados direitos das Eqs.(7.26) são iguais, conclui-se que,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_s = - \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_v \quad (7.27)$$

Procedendo de forma semelhante pode-se mostrar que,

$$\left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v \quad (7.28)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_s = \left. \frac{\partial v}{\partial s} \right|_p \quad (7.29)$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_T = - \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p \quad (7.30)$$



As Eqs.(7.27), (7.28), (7.29), e (7.30) são algumas das relações de Maxwell.

Na utilização das relações de Maxwell é conveniente recordar que se  $Z = Z(X, Y)$ , os desenvolvimentos envolvendo funções implícitas conduzem a,

$$(i) \quad \left. \frac{\partial X}{\partial Y} \right|_Z = \frac{1}{\partial Y / \partial X|_Z} \quad (7.31)$$

$$(ii) \quad \left. \frac{\partial X}{\partial Y} \right|_Z = \frac{\partial X / \partial W|_Z}{\partial Y / \partial W|_Z} \quad (7.32)$$

$$(iii) \quad \left. \frac{\partial X}{\partial Y} \right|_Z = - \frac{\partial Z / \partial Y|_X}{\partial Z / \partial X|_Y} \quad (7.33)$$

### 7.2.3 Equação da temperatura para fluidos newtonianos

Pretende-se que a equação da energia térmica, Eq.(7.19), seja uma equação para a temperatura do fluido em escoamento. Para tal vamos fazer  $e = e(T, v)$  e escrever,

$$\begin{aligned} de &= \left. \frac{\partial e}{\partial T} \right|_v dT + \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_T dv \\ &= c_v dT + \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_T dv \end{aligned} \quad (7.34)$$

onde foi utilizada a definição de  $c_v$  dada pela Eq.(7.23).

Mas, da equação de Gibbs, Eq.(5.30), resulta,

$$de = Tds - pdv \implies \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_T = T \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T - p \quad (7.35)$$

Substituindo a Eq.(7.35) na Eq.(7.34) obtém-se

$$de = c_v dT + \left( T \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T - p \right) dv \quad (7.36)$$

Fazendo uso da Eq.(7.28), juntamente com a Eq.(7.33), tem-se,

$$\left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v = - \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p \quad (7.37)$$

Substituindo agora a Eq.(7.37) na Eq.(7.36), obtém-se,

$$de = c_v dT + \left( -T \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p - p \right) dv \quad (7.38)$$

Na sequência vamos introduzir as seguintes grandezas termodinâmicas,

- Fator de Compressibilidade Isotérmica

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T = - \frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_T \quad (7.39)$$

- Coeficiente de Expansão Térmica

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p = \frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p \quad (7.40)$$

Introduzindo as Eqs.(7.39) e (7.40) na Eq.(7.38), resulta em,

$$de = c_v dT + \left( \frac{\beta T}{\kappa} - p \right) dv \quad (7.41)$$

onde uso foi feito da Eq.(7.31) para escrever,

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T = \frac{1}{\partial v / \partial p|_T} = -\frac{1}{v\kappa} \quad (7.42)$$

A Eq.(7.41) possibilita escrever uma variação da energia interna,  $e$ , em termos de variações de temperatura,  $T$ , e de volume específico,  $v$ .

Para um gás ideal, por exemplo, a relação termodinâmica  $p = p(\rho, T)$  é expressa por,

$$p = \rho R T \quad , \quad \text{onde } R \text{ é a constante do gás} \quad (7.43)$$

Da Eq.(7.43) e fazendo uso das Eqs.(7.39) e (7.40) resulta, para um gas ideal,

$$\kappa = 1/p \quad \text{e} \quad \beta = 1/T \quad (7.44)$$

Substituindo as Eqs.(7.44) na Eq.(7.41), obtém-se que

$$de = c_v dT \implies e = e(T) \quad (7.45)$$

Indicando que para um gás ideal a energia interna é função somente da temperatura.

Como um resultado adicional advindo das relações de Maxwell, pode-se mostrar, a partir das definições de  $c_p$  e  $c_v$ , que,

$$c_p - c_v = \frac{T\beta^2}{\rho\kappa} \quad (7.46)$$

Como o lado direito da equação anterior é sempre positivo, vê-se que  $c_p$  é sempre maior do que  $c_v$ . Fisicamente este resultado é esperado pois quando se aquece um fluido a pressão constante a energia necessária para o aquecimento deve incluir também o trabalho para o deslocamento da fronteira, pois, do contrário, a pressão tenderia a aumentar. Já quando o aquecimento ocorre com volume constante este trabalho não é requerido.

Para um gás ideal a Eq.(7.46) torna-se,

$$c_p - c_v = R \quad (7.47)$$

Na Eq.(7.41) a variação de energia interna foi expressa em termos da variação de temperatura e da variação de volume específico. Lembrando que  $dv = -d\rho/\rho^2$ , a Eq.(7.41) pode ser escrita como,

$$de = c_v dT - \left( \frac{\beta T}{\kappa} - p \right) \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (7.48)$$

Para um fluido em movimento vimos que  $d\rho/dt = -\rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ , fazendo com que a Eq.(7.48) torne-se,

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho c_v \frac{dT}{dt} + \left( \frac{\beta T}{\kappa} - p \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (7.49)$$

A substituição da Eq.(7.49) na Eq.(7.19) resulta em,

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla} T) - \frac{\beta T}{\kappa} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \rho r + \mu \Phi \quad (7.50)$$

A expressão anterior, que traduz a primeira lei da termodinâmica, é a equação da temperatura para fluidos newtonianos escrita em termos de  $c_v$ .

Como  $h = e + pv$ , podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{de}{dt} + p \frac{dv}{dt} + v \frac{dp}{dt} \\ &= \frac{de}{dt} + \frac{p}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \end{aligned} \quad (7.51)$$

Isolando a parcela da energia interna na Eq.(7.51) obtém-se,

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{dh}{dt} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \frac{dp}{dt} \quad (7.52)$$

Substituindo a equação anterior na Eq.(7.19), chega-se na equação da energia térmica escrita em termos da entalpia,

$$\rho \frac{dh}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \frac{dp}{dt} + \rho r + \mu \Phi \quad (7.53)$$

Fazendo agora  $h = h(T, p)$ , resulta,

$$\begin{aligned} dh &= \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p dT + \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T dp \\ &= c_p dT + \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T dp \end{aligned} \quad (7.54)$$

Mas,

$$\begin{aligned} dh &= de + pdv + vdp = (Tds - pdv) + pdv + vdp \\ &= Tds + vdp \end{aligned} \quad (7.55)$$

onde uso foi feito da equação de Gibbs, Eq.(5.30). Derivando a equação anterior e empregando a relação de Maxwell dada pela Eq.(7.30), tem-se,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T &= T \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_T + v = -T \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p + v \\ &= -\frac{\beta T}{\rho} + \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (7.56)$$

Substituindo a equação anterior na Eq.(7.54) resulta,

$$dh = c_p dT + \left( \frac{1 - \beta T}{\rho} \right) dp \quad (7.57)$$

ou, para um fluido em escoamento,

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} + (1 - \beta T) \frac{dp}{dt} \quad (7.58)$$

Retornando com a equação anterior à Eq.(7.53), obtém-se,

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \beta T \frac{dp}{dt} + \rho r + \mu \Phi \quad (7.59)$$

que é a equação da temperatura para fluidos newtonianos escrita em termos de  $c_p$ .

#### 7.2.4 $c_p$ versus $c_v$ na equação da energia térmica

Vimos anteriormente que ao escrever a equação da energia térmica em termos da temperatura podemos fazer uso tanto do calor específico a pressão constante,  $c_p$ , como do calor específico a volume específico constante,  $c_v$ . Estas duas equações serão reproduzidas a seguir, mas re-escritas para que possamos explorar suas semelhanças e diferenças,

- Forma  $c_v$  da equação da energia térmica

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + \frac{\beta T}{\kappa} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \rho r + \mu \Phi \quad (7.60)$$

- Forma  $c_p$  da equação da energia térmica

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \beta T \frac{dp}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \rho r + \mu \Phi \quad (7.61)$$

O lado direito das equações anteriores é idêntico e a diferença entre ambas está no lado esquerdo. Como  $c_p$  é sempre maior do que  $c_v$ , conforme indicado na Eq.(7.46), tem-se que

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} > \rho c_v \frac{dT}{dt} \Rightarrow -\beta T \frac{dp}{dt} < \frac{\beta T}{\kappa} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (7.62)$$

Os termos envolvendo  $dp/dt$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  são de magnitude bem menores do que os termos envolvendo  $dT/dt$  e em geral podem ser ignorados. No entanto, na simplificação das equações é sempre mais adequado ignorar a parcela menos significativa e, portanto, é sempre preferível ignorar a parcela envolvendo  $dp/dt$  na equação de  $c_p$  do que a parcela envolvendo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  na equação de  $c_v$ . Nestas circunstâncias a equação para a temperatura torna-se,

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \rho r + \mu \Phi \quad (7.63)$$

Este resultado em geral aplica-se a escoamentos isocóricos ou quase-isocóricos. É interessante analisar a Eq.(7.63) sob esta perspectiva pois mesmo que se assuma escoamento isocórico nas equações da velocidade e pressão (conservação da quantidade de movimento linear e continuidade), o que se verifica é que para a equação da energia térmica uma maior precisão é conseguida quando se assume a pressão constante, do que quando se assume a densidade constante. Tal fato advém da maior dependência da temperatura com a densidade do que com a pressão.

Para um fluido incompressível a densidade é necessariamente



Tabela 7.1: Valores de  $c_p$  e  $c_v$  para alguns líquidos.

	T [°C]	$c_p - c_v$ [J/g/°C]	$c_p$ [J/g/°C]
água	15	0,013	4,186
	50	0,13	4,186
	90	0,34	4,205
mercúrio	20	0,018	1,394
ácido acético	20	0,353	2,180
álcool metílico	20	0,437	2,510
acetona	20	0,655	2,150
benzeno	20	0,540	1,720
clorofórmio	20	0,320	0,980

constante e das Eqs.(7.39) e (7.40) tem-se,  $\kappa = \beta = 0$ . Adicionalmente, para fluidos incompressíveis,  $c_p = c_v = c$ , e tanto a Eq.(7.60) como a Eq.(7.61) tornam-se,

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \rho r + \mu \Phi \quad (7.64)$$

O problema de assumir a incompressibilidade do fluido reside na dificuldade de atribuir-se um valor para  $c$ , a ser utilizado na Eq.(7.64). Conforme apresentado na Tab.(7.1), mesmo líquidos possuem valores de  $c_p \neq c_v$  indicando que a hipótese de incompressibilidade não é adequada. Desta forma, é sempre melhor assumir que o escoamento é isocórico do que assumir que o fluido é incompressível. Ao assumir escoamento isocórico não há necessidade de se realizar simplificações artificiais quanto à natureza termodinâmica dos fluidos.

## 7.3 Equações da Continuidade, Movimento e Energia

Nesta seção apresentaremos a equação da continuidade, do movimento e da energia escritas em termos das componentes da velocidade tanto em coordenadas cartesianas como em coordenadas cilíndricas. Comumente as equações de trabalho para a solução de problemas envolvendo o movimento dos fluidos são obtidas a partir de simplificações destas equações que aqui são apresentadas em suas formas completas.

### 7.3.1 Equação da continuidade

Coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 \quad (7.65)$$

Coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 \quad (7.66)$$

### 7.3.2 Equação do movimento para $\rho$ e $\mu$ constantes

Coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ :

- componente  $x$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \end{aligned} \quad (7.67)$$

- componente  $y$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \end{aligned} \quad (7.68)$$

- componente  $z$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{aligned} \quad (7.69)$$

Coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ :

- componente  $r$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned} \quad (7.70)$$

a parcela  $u_\theta^2/r$  do lado esquerdo do sinal de igualdade na equação anterior representa a aceleração centrípeta.

- componente  $\theta$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \quad (7.71) \end{aligned}$$

a parcela  $u_r u_\theta/r$  do lado esquerdo do sinal de igualdade na equação anterior representa a aceleração de Coriolis.

- componente  $z$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (7.72) \end{aligned}$$

### 7.3.3 Equação da energia para $k$ constante

Coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \rho r + \\ + \beta T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \mu \Phi \quad (7.73) \end{aligned}$$

onde a função dissipação viscosa  $\Phi$  é dada por,

$$\begin{aligned}\Phi = & 2 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \left[ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right]^2 + \\ & - \frac{2}{3} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]^2 \quad (7.74)\end{aligned}$$

Coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ :

$$\begin{aligned}& \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ & = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \rho r + \\ & + \beta T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \mu \Phi \quad (7.75)\end{aligned}$$

onde a função dissipação viscosa  $\Phi$  é dada por,

$$\begin{aligned}\Phi = & 2 \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]^2 + \\ & + \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]^2 \quad (7.76)\end{aligned}$$

## Capítulo 8

# Modelos para Escoamentos de Fluidos

Na análise de escoamentos encontrados em engenharia e na natureza é de grande importância que as equações que descrevem o movimento dos fluidos possam ser simplificadas. Isto porque, em geral, há termos predominantes que devem ser mantidos enquanto que termos menos importantes podem ser ignorados tornando as equações mais simples de serem resolvidas.

A simplificação das equações do movimento exige um preciso conhecimento do problema em análise bem como experiência e sabedoria. A arte de bem modelar os problemas físicos requer que apenas os termos mais importantes sejam retidos para que

a equação a ser resolvida seja a mais simples possível sem que as características do problema em consideração sejam violadas. Em geral as simplificações, ou aproximações das equações do movimento, podem ter dois enfoques: simplificações quanto ao escoamento, ou simplificações quanto ao fluido. Na sequência exploraremos em um pouco mais de detalhes estes dois enfoques.

## 8.1 Simplificações quanto ao Escoamento

Ao simplificar as equações governantes com foco no escoamento a natureza do fluido não é afetada e é o padrão do escoamento, ou seja, a configuração do movimento, que permite antecipar a importância ou não de um determinado termo da equação. Um exemplo comum de simplificação envolvendo o escoamento é adotar o regime permanente, quando se antecipa que não há variação com o tempo das grandezas de interesse, ou seja, para todas as variáveis a serem resolvidas tem-se  $\partial_t( ) = 0$ . Outro exemplo é o escoamento axissimétrico em uma tubulação onde ignora-se as variações circunferenciais e faz-se  $\partial_\theta( ) = 0$ ; ou o escoamento plenamente desenvolvido onde faz-se  $\partial_z( ) = 0$ , onde  $z$  é a coordenada ao longo da orientação do escoamento. Exemplos adicionais desse tipo de simplificação são o escoamento isocórico,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ , e o escoamento irrotacional,  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ .

Algumas das simplificações quanto ao escoamento não são a princípio óbvias e só foram percebidas tardiamente, muito depois das soluções dos problemas a elas associados já estarem cobrando suas respectivas importâncias. É o caso tanto das aproximações da camada limite, introduzidas por Ludwig

Prandtl e colaboradores no início do século XX, como da aproximação da lubrificação hidrodinâmica, introduzida por Osborne Reynolds ao término do século XIX. Dada a importância destas aproximações suas aplicações justificam disciplinas específicas que recebem os nomes de *Teoria da Camada Limite* e *Teoria da Lubrificação Hidrodinâmica*.

## 8.2 Simplificações quanto ao Fluido

Tais simplificações interferem diretamente na natureza do fluido e via de regra são simplificações fisicamente muito impactantes, ainda que algumas vezes possam ser convenientes. Exemplo deste tipo de simplificação é assumir que o fluido é incompressível. Conforme explorado na seção (7.2.4), para fluidos incompressíveis não há diferença entre os calores específicos a pressão constante e a volume constante o que, mesmo para líquidos, é uma irreabilidade termodinâmica e deve ser evitado. É sempre melhor assumir escoamento isocórico do que fluido incompressível. Embora os resultados destas simplificações para as equações do movimento sejam equivalentes, assumir escoamento isocórico não pressupõe que a natureza termodinâmica do fluido seja violada.

Exemplo similar aplica-se ao escoamento barotrópico e ao fluido piezotrópico onde, para ambos,  $p = p(\rho)$ . No entanto, é completamente diferente assumir que em um escoamento a pressão é apenas função da densidade, do que assumir que para um fluido a pressão só depende da densidade. Fluidos piezotrópicos sempre escoam barotropicamente enquanto que fluidos não-piezotrópicos podem ou não escoar barotropicamente. Adicionalmente, fluidos piezotrópicos são insensíveis



à convecção natural já que o seu coeficiente de expansão volumétrica é nulo, conforme percebido pela Eq.(7.40). Se queremos ignorar a variação de temperatura de um gás em um determinado escoamento, é melhor assumir que o escoamento é barotrópico do que assumir o fluido piezotrópico; um gás ideal não é um fluido piezotrópico, ainda que possa escoar barotropicamente.

Exemplos muito bem aceitos e amplamente utilizados para simplificações em relação aos fluidos são a aproximação de gás ideal, e a aproximação de fluido newtoniano, conforme explorado nos capítulos anteriores. Um outro exemplo muito conveniente e que encontra importantes aplicações em diversas áreas como ventilação e condicionamento de ar é o de fluido perfeito, onde a viscosidade absoluta é nula resultando em  $\overline{\overline{P}} = 0$ . A combinação de fluido perfeito com escoamento irrotacional possibilita aplicações muito interessantes e soluções muito engenhosas como será explorado na seção (8.4).

No que se segue serão explorados alguns modelos para escoamentos de fluidos, de maneira a ilustrar abordagens possíveis de serem feitas a partir dos fundamentos explorados nos capítulos anteriores.

### 8.3 Equação de Bernoulli

Vamos considerar o escoamento barotropico de fluidos perfeitos. Neste caso tem-se  $p = p(\rho)$  e  $\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}}$ , e a equação do movimento, Eq.(4.7), pode ser escrita como,

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p \quad \rightarrow \quad \text{Equação de Euler} \quad (8.1)$$

A equação anterior, denominada de Equação de Euler, se aplica em situações onde efeitos térmicos não são importantes e as forças viscosas podem ser ignoradas. Como são as forças viscosas que impedem o deslizamento do fluido sobre uma superfície sólida, para fluidos perfeitos tem-se, como condição de contorno,

$$\vec{u} \cdot \hat{n} = \vec{U} \cdot \hat{n} \quad (8.2)$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal à superfície sólida e  $\vec{U}$  é a velocidade da superfície sólida. Para  $\vec{u} \perp \hat{n}$  o fluido "desliza" sobre o sólido. Assim, com a Eq.(8.2) a condição de não deslizamento é relaxada já que é a viscosidade que impede o fluido de deslizar sobre uma superfície sólida.

Considerando agora que as forças de campo são conservativas, ou seja,  $\vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$ , podemos escrever,

$$\vec{f} = \vec{\nabla} G \quad (8.3)$$

e, para o campo gravitacional em coordenadas cartesianas, tem-se  $G = -gz$ , onde  $z$  é a coordenada alinhada com a vertical. Conforme explorado na seção (2.9.2) vê-se, pelo teorema de Stokes, que assumir as forças de campo conservativas equivale a dizer que o trabalho realizado pelas mesmas ao longo de um caminho fechado é zero, ou seja,

$$\oint_C \vec{f} \cdot \hat{t} d\ell = \int_S \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{f} = 0 \quad (8.4)$$

Retornando agora à Eq.(8.1) com a informação de que as forças de campo são conservativas resulta em

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{\nabla} G - \vec{\nabla} p \quad (8.5)$$

Fazendo,

$$P = \int \frac{dp}{\rho} \quad \Rightarrow \quad dP = \frac{dp}{\rho} = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} P \quad (8.6)$$

Como  $dp = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} p$ , tem-se, da equação anterior,

$$d\vec{r} \cdot \left( \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} P \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} P = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \quad (8.7)$$

Fazendo uso da Eq.(8.7) na Eq.(8.5) pode-se escrever,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\nabla} G - \vec{\nabla} P = \vec{\nabla} (G - P) \quad (8.8)$$

Como o gradiente do rotacional de um campo escalar é sempre nulo, conclui-se da equação anterior que para o escoamento barotrópico de fluidos perfeitos o campo de aceleração é irrotacional, ou seja,  $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$ .

A Eq.(8.8) pode ser escrita como,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} \right) \quad (8.9)$$

onde fez-se uso da definição de  $P$  introduzida na Eq.(8.6).

Adicionalmente, considerando a identidade

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\nabla} (V^2/2) - \vec{u} \times \vec{\omega} \quad (8.10)$$

onde  $V^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$  e  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ , a Eq.(8.9) resulta em,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{\omega} = \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) \quad (8.11)$$

A equação anterior é a forma mais geral da equação de Bernoulli. Esta equação é válida para escoamentos barotrópicos de fluidos perfeitos.

Para regime permanente, e multiplicando a Eq.(8.11) escalarmente por  $\vec{u}$ , tem-se

$$\underbrace{-\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{\omega})}_{=0} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) \quad (8.12)$$

De onde resulta,

$$\vec{u} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right)}_{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{\nabla} \phi \quad (8.13)$$

ou seja,  $\vec{u}$  é paralelo a linhas de  $\phi$  constante. Desta forma linhas de  $\phi$  constante são também linhas de corrente. Conclui-se então, que a equação de Bernoulli em regime permanente estabelece que, ao longo de uma linha de corrente,

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} - G = \text{constante} \quad (8.14)$$

onde a constante na equação anterior é única para cada linha de corrente no escoamento. Para  $\rho$  constante e  $G = -gz$ , a Eq.(8.14) torna-se,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \quad (8.15)$$

As parcelas do lado esquerdo da equação anterior representam energia mecânica por unidade de massa. Ao multiplicarmos a Eq.(8.11) escalarmente pela velocidade do fluido obtendo a Eq.(8.12), transformamos a equação do movimento na equação da energia mecânica. O que a Eq.(8.15) estabelece é que na ausência de forças viscosas a energia mecânica se conserva.

Para um escoamento irrotacional, ou seja,  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ , tem-se, da Eq.(8.11),

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{\nabla} \left( G - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) \quad (8.16)$$

Adicionalmente, pela Eq.(2.97) vemos que em escoamentos irrotacionais a velocidade pode ser escrita como o gradiente de

um campo escalar. Assim, fazendo  $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ , a equação anterior pode ser escrita como,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\varphi) + \vec{\nabla} \left( \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi}{2} - G \right) = 0 \quad (8.17)$$

ou,

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi}{2} - G \right) = 0 \quad (8.18)$$

Da equação anterior concluiu-se então que para escoamentos irrotacionais a equação de Bernoulli torna-se,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi}{2} - G = F(t) \quad (8.19)$$

Se além de irrotacional o escoamento é isocórico e ocorre em regime permanente com  $G = -gz$ , a Eq.(8.19) pode ser escrita como,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C \quad (8.20)$$

onde a constante  $C$  é única para todos os pontos do escoamento.

### 8.3.1 Equação de Bernoulli generalizada

Anteriormente vimos que a conservação da energia mecânica para um fluido em movimento é expressa pela Eq.(5.14), conforme reproduzida a seguir

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{u} \cdot \vec{f} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Para forças de campo conservativas,  $\vec{f} = \vec{\nabla} G$ , e com  $\rho$  e  $\mu$  constantes,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \mu \nabla^2 \vec{u}$ , a equação anterior torna-se,

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} G - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{u} \cdot (\mu \nabla^2 \vec{u}) \quad (8.21)$$

Assumindo que o escoamento ocorre em regime permanente, e que  $G = -gz$ , a Eq.(8.21), pode ser escrita como,

$$\vec{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (8.22)$$

onde  $\nu = \mu/\rho$  é a viscosidade cinemática. A equação Eq.(8.22) é conhecida como equação de Bernoulli generalizada pois, diferente da equação de Bernoulli original, aplica-se também para escoamentos viscosos. Para fluidos perfeitos,  $\mu = 0$ , e a Eq.(8.22) se reduz à Eq.(8.20).

### 8.3.2 Teorema de Kelvin

Vamos agora explorar um importante teorema com aplicações sobretudo em aerodinâmica. Para tal vamos considerar a cir-

culação da velocidade  $\vec{u}$  ao longo da curva fechada  $C$  expressa por,

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (8.23)$$

A derivada material da circulação da velocidade é,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (8.24)$$

Assim, a partir da Eq.(8.24) tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_C \frac{d}{dt} (\vec{u} \cdot d\vec{r}) \\ &= \oint_C \left[ \vec{u} \cdot \frac{d(d\vec{r})}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{r} \right] \\ &= \oint_C \left( \vec{u} \cdot d\vec{u} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{r} \right) \end{aligned} \quad (8.25)$$

Para um fluido perfeito em escoamento isocórico, podemos fazer uso da Eq.(8.8) e escrever,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}(G - P) \cdot d\vec{r} = d(G - P) \quad (8.26)$$

Substituindo o resultado anterior na Eq.(8.25) e fazendo uso da igualdade  $\vec{u} \cdot d\vec{u} = d[(\vec{u} \cdot \vec{u})/2]$  resulta em,



$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C [d[(\vec{u} \cdot \vec{u})/2] + d(G - P)] = 0 \quad (8.27)$$

O resultado obtido na Eq.(8.27) mostra que a derivada material da circulação da velocidade é zero para um fluido perfeito em escoamento isocórico. Este resultado é conhecido como teorema de Kelvin e estabelece, por exemplo, que se em uma determinada posição a circulação é zero (escoamento irrotacional) esta se manterá igual a zero ao longo do escoamento; ou seja, um escoamento irrotacional se mantém irrotacional.

## 8.4 Escoamento Potencial

Nesta seção serão considerados os escoamentos irrotacionais ( $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ ) e isocóricos ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ) de um fluido perfeito ( $\bar{P} = 0$ ) com forças de campo conservativas ( $\vec{f} = \vec{\nabla} G$ ). Nestes escoamentos a velocidade é dada por,

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi \quad (8.28)$$

onde a função escalar  $\varphi(\vec{r}, t)$  é o potencial de velocidade e tal escoamento é dito escoamento potencial. O escoamento potencial é um bom modelo para escoamentos reais em regiões onde os gradientes de velocidade são pequenos e os efeitos viscosos podem ser ignorados.

A equação da continuidade combinada com o potencial de velocidade resulta em,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0 \implies \nabla^2 \varphi = 0 \quad (8.29)$$

Vê-se assim que para escoamentos potenciais o campo de velocidade é obtido pela solução da equação de Laplace.

Tendo obtido o potencial de velocidade  $\varphi(\vec{r}, t)$ , o campo de pressão  $p(\vec{r}, t)$  é calculado a partir da equação de Bernoulli para escoamento isocórico e irrotacional,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi}{2} - G = F(t) \quad (8.30)$$

### 8.4.1 Potencial Complexo e Velocidade Complexa

Na análise de escoamentos potenciais consideraremos aqui situações bidimensionais. Assim, em termos do potencial de velocidade, as componentes cartesianas da velocidade são escritas como,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{e} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (8.31)$$

Alternativamente, podemos definir a função corrente  $\psi$ , de maneira que,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8.32)$$