

## Apêndice A

# NOTAÇÃO INDICIAL

A notação indicial é uma forma compacta de se representar e manipular sistemas de equações, combinações lineares e somatórios. Foi introduzida por Einstein para denotar grandezas em espaços de dimensão superior a 3.

Embora vários conceitos em Mecânica do Contínuo possam ser introduzidos empregando a notação indicial, limita-se o seu uso neste texto. De forma geral, ao se empregar índices, pode haver uma confusão entre a definição do conceito e a sua representação em notação indicial. Por exemplo, um vetor  $\mathbf{v}$  é dado pela diferença de pontos do espaço euclidiano, enquanto a representação em notação indicial é indicada como  $v_i$ . Logo, a definição de vetor é independente da sua representação em notação indicial. No entanto, em várias situações, a notação indicial é bastante útil, como por exemplo ao se trabalhar com equações constitutivas de materiais. Neste texto, emprega-se a notação direta para a definição de conceitos, sendo a notação indicial usada apenas para ilustrar e operar sobre os conceitos já definidos.

Basicamente, deve-se definir o conceito de notação indicial, o significado de índices repetidos e livres e as operações empregando estes índices.

### A.1 Definição de Notação Indicial

Um conjunto de variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é geralmente denotado como  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Quando escrito isoladamente, o símbolo  $x_i$  indica qualquer uma das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . O intervalo de variação do índice  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) deve ser sempre dado. Este índice pode ser denotado como um subscrito ou sobrescrito, ou seja,  $x_i$  ou  $x^i$  são ambos válidos. Um sistema de notações usando índices é denominado *notação indicial*.

### A.2 Convenção de Somatório

Considere a equação de um plano no sistema de referência cartesiano tridimensional com eixos  $x_1, x_2, x_3$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = p, \quad (\text{A.1})$$

sendo  $a_1, a_2, a_3$  e  $p$  constantes. Usualmente, a expressão anterior é escrita como

$$ax + by + cz = d.$$

A notação indicial permite escrever as expressões numa forma compacta. Desta maneira, denotam-se as expressões como em (A.1). Essa equação pode ser escrita em termos do seguinte somatório

$$\sum_{i=1}^3 a_i x_i = p. \quad (\text{A.2})$$

Introduzindo a *convenção de somatório*, denota-se a equação anterior como

$$a_i x_i = p. \quad (\text{A.3})$$

A convenção é a seguinte: a *repetição de um índice num termo representará um somatório com respeito a esse índice no seu intervalo de variação*. O intervalo de variação de um índice é o conjunto de números inteiros de 1 a  $n$ . Em geral, na Mecânica do Contínuo,  $n$  será 1, 2 ou 3 respectivamente para problemas uni, bi e tridimensionais. Como este índice é empregado apenas para uma soma é chamado *índice falso ou repetido*, pois o símbolo usado no somatório se torna indiferente no resultado final. Assim, por exemplo  $a_i x_i$  pode ser denotado como  $a_j x_j$  sem alterar o significado da expressão. Um índice que não é somado é denominado *índice livre* e indica o número de equações associado ao termo em notação indicial. Observe os exemplos a seguir, onde  $i$  e  $k$  representam índices livres, enquanto  $j$  é um índice repetido.

**Exemplo A.1** Expandir a expressão  $b_{ij}c_j$  dada em notação indicial para  $i, j = 1, 2, 3$ .

Neste caso,  $j$  é um índice repetido pois aparece duas vezes no termo  $b_{ij}c_j$ . Aplica-se então a convenção do somatório, ou seja,

$$b_{ij}c_j = \sum_{j=1}^3 b_{ij}c_j = b_{i1}c_1 + b_{i2}c_2 + b_{i3}c_3.$$

Por sua vez,  $i$  é um índice não-repetido ou livre e seu intervalo de variação também é de 1 a 3. Cada valor de  $i$  corresponderá a uma equação. Logo, tomando a expressão anterior vem que

$$\begin{aligned} i = 1 & \rightarrow b_{11}c_1 + b_{12}c_2 + b_{13}c_3, \\ i = 2 & \rightarrow b_{21}c_1 + b_{22}c_2 + b_{23}c_3, \\ i = 3 & \rightarrow b_{31}c_1 + b_{32}c_2 + b_{33}c_3. \end{aligned}$$

Portanto,  $b_{ij}c_j$  representa as 3 equações seguintes

$$b_{ij}c_j = \begin{cases} b_{11}c_1 + b_{12}c_2 + b_{13}c_3 \\ b_{21}c_1 + b_{22}c_2 + b_{23}c_3 \\ b_{31}c_1 + b_{32}c_2 + b_{33}c_3 \end{cases}.$$

Verifica-se ainda que as 3 expressões anteriores indicam o produto de uma matriz  $[B]$  por um vetor  $\{c\}$ , ou seja,

$$b_{ij}c_j = [B]\{c\} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}.$$

□

**Exemplo A.2** Expandir a expressão  $\alpha_{ij}\beta_{jk}$  em notação indicial para  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Observa-se que  $j$  é um índice repetido e aplica-se a convenção do somatório, ou seja,

$$\alpha_{ij}\beta_{jk} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}\beta_{jk} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \alpha_{i3}\beta_{3k}.$$

Neste caso,  $i$  e  $k$  são índices livres e para cada índice deve-se expandir 3 equações resultando num total de 9 equações. Considerando o índice  $i$  inicialmente vem que

$$\alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \alpha_{i3}\beta_{3k} = \begin{cases} \alpha_{11}\beta_{1k} + \alpha_{12}\beta_{2k} + \alpha_{13}\beta_{3k} \\ \alpha_{21}\beta_{1k} + \alpha_{22}\beta_{2k} + \alpha_{23}\beta_{3k} \\ \alpha_{31}\beta_{1k} + \alpha_{32}\beta_{2k} + \alpha_{33}\beta_{3k} \end{cases}.$$

Para cada um das 3 equações anteriores, expande-se o índice  $k$ . Logo,

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\beta_{1k} + \alpha_{12}\beta_{2k} + \alpha_{13}\beta_{3k} &= \begin{cases} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} \\ \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32} \\ \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{23} + \alpha_{13}\beta_{33} \end{cases} , \\ \alpha_{21}\beta_{1k} + \alpha_{22}\beta_{2k} + \alpha_{23}\beta_{3k} &= \begin{cases} \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{31} \\ \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32} \\ \alpha_{21}\beta_{13} + \alpha_{22}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{33} \end{cases} , \\ \alpha_{31}\beta_{1k} + \alpha_{32}\beta_{2k} + \alpha_{33}\beta_{3k} &= \begin{cases} \alpha_{31}\beta_{11} + \alpha_{32}\beta_{21} + \alpha_{33}\beta_{31} \\ \alpha_{31}\beta_{12} + \alpha_{32}\beta_{22} + \alpha_{33}\beta_{32} \\ \alpha_{31}\beta_{13} + \alpha_{32}\beta_{23} + \alpha_{33}\beta_{33} \end{cases} . \end{aligned}$$

Portanto, a expressão  $\alpha_{ij}\beta_{jk}$  em notação indicial com  $i, j, k = 1, 2, 3$  representa as 9 equações anteriores, as quais podem ser denotadas matricialmente como o seguinte produto de duas matrizes  $[\alpha]$  e  $[\beta]$  de ordem 3

$$\alpha_{ij}\beta_{jk} = [\alpha][\beta] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} .$$

□

Verifica-se, então, que um índice repetido faz com que a expressão cresça na direção horizontal ao se aplicar a convenção do somatório. Por sua vez, o índice livre indica o número total de equações, fazendo com que a expressão em notação indicial se expanda na direção vertical. Esta idéia está ilustrada na Figura A.1. Nos exemplos anteriores, o índice repetido  $j$  é somado de 1 a 3 abrindo as expressões horizontalmente. Já os índices livres  $i$  e  $k$  indicam o número de equações na direção vertical. No segundo exemplo, como se tem dois índices livres ( $i$  e  $k$ ), deve-se expandir cada um deles no intervalo de 1 a 3, obtendo-se um total de 9 equações. Considere agora mais dois exemplos.

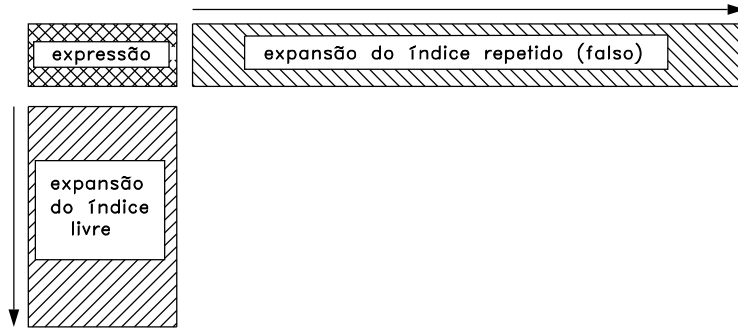


Figura A.1: Índices livre e repetido.

**Exemplo A.3** Considere a expressão em notação indicial  $y_i = a_{im}x_m$  ( $i, m = 1, 2, 3$ ). Observa-se que  $i$  é um índice livre enquanto  $m$  é um índice repetido. A expressão  $y_i = a_{im}x_m$  ( $i, m = 1, 2, 3$ ) representa um sistema de equações como pode ser visto pelo desenvolvimento dos ndices a seguir.

Expandindo o índice livre  $i$  e aplicando a convenção de somatório para  $m$  vem que

$$y_i = a_{im}x_m = \begin{cases} y_1 = a_{1m}x_m = \sum_{m=1}^3 a_{1m}x_m = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{2m}x_m = \sum_{m=1}^3 a_{2m}x_m = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{3m}x_m = \sum_{m=1}^3 a_{3m}x_m = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} .$$

A expressão anterior representa um sistema de equações da forma  $\{y\} = [A]\{x\}$ , ou seja,

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$$

□

**Exemplo A.4** Na expressão  $T_{ij} = a_{im}x_{jm}$  ( $i, j, m = 1, 2, 3$ ) tem-se que  $i$  e  $j$  são índices livres enquanto  $m$  é um índice repetido. Logo, expandindo os índices livres  $i$  e  $j$  tem-se 9 equações e aplicando a convenção de somatório para cada uma delas vem que

$$\begin{cases} T_{11} = a_{1m}x_{1m} = \sum_{m=1}^3 a_{1m}x_{1m} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} \\ T_{12} = a_{1m}x_{2m} = \sum_{m=1}^3 a_{1m}x_{2m} = a_{11}x_{21} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{23} \\ T_{13} = a_{1m}x_{3m} = \sum_{m=1}^3 a_{1m}x_{3m} = a_{11}x_{31} + a_{12}x_{32} + a_{13}x_{33} \\ T_{21} = a_{2m}x_{1m} = \sum_{m=1}^3 a_{2m}x_{1m} = a_{21}x_{11} + a_{22}x_{12} + a_{23}x_{13} \\ T_{22} = a_{2m}x_{2m} = \sum_{m=1}^3 a_{2m}x_{2m} = a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} \\ T_{23} = a_{2m}x_{3m} = \sum_{m=1}^3 a_{2m}x_{3m} = a_{21}x_{31} + a_{22}x_{32} + a_{23}x_{33} \\ T_{31} = a_{3m}x_{1m} = \sum_{m=1}^3 a_{3m}x_{1m} = a_{31}x_{11} + a_{32}x_{12} + a_{33}x_{13} \\ T_{32} = a_{3m}x_{2m} = \sum_{m=1}^3 a_{3m}x_{2m} = a_{31}x_{21} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{23} \\ T_{33} = a_{3m}x_{3m} = \sum_{m=1}^3 a_{3m}x_{3m} = a_{31}x_{31} + a_{32}x_{32} + a_{33}x_{33} \end{cases}.$$

As equações anteriores podem ser escritas na forma matricial  $[T] = [A][X]^T$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

□

Observa-se que uma equação do tipo  $T_{ij} = T_{ik}$  não tem significado em notação indicial, pois  $i$ ,  $j$  e  $k$  são todos índices livres, ou seja, aparecem uma única vez nos termos do lado esquerdo e direito. Além disso, expressões como  $a_i b_i c_i$  não são definidas na notação indicial, pois um índice nunca pode ser repetido mais de uma vez. Neste último caso, mantém-se o sinal de somatório, ou seja,  $\sum_{i=1}^3 a_i b_i c_i$ . Verifica-se ainda que a expressão  $y_i = a_{im}x_m$  ( $i, m = 1, 2, 3$ ) é a mesma que  $y_j = a_{jm}x_m$  ( $j, m = 1, 2, 3$ ), ou seja, a letra usada para denotar o índice repetido não altera o resultado final. No entanto,  $a_i = b_j$  é uma expressão sem significado. O índice livre presente em cada termo de uma equação deve ser o mesmo, como por exemplo

$$\begin{aligned} a_i + b_i &= c_i, \\ a_i + b_i c_j d_j &= 0, \end{aligned}$$

sendo  $i$  um índice livre e  $j$  um índice repetido.

### A.3 Delta de Kronecker

O símbolo  $\delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) é denominado delta de Kronecker e definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

Como  $i$  e  $j$  são índices livres no termo  $\delta_{ij}$  e ambos variam de 1 a 3, tem-se um total de 9 valores dados segundo a definição de  $\delta_{ij}$  por

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad (\text{A.5})$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Em notação matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, o delta de Kronecker se reduz à matriz identidade de ordem 3, podendo ser denotado como  $[\delta_{ij}] = [I]$ .

**Exemplo A.5** *Empregando-se as convenções da notação indicial e os valores dados em (A.5), mostrar as seguintes propriedades do delta de Kronecker.*

1.  $\delta_{ii} = 3$ .

*Neste caso,  $i$  é um índice repetido e aplicando a convenção do somatório*

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

2.  $\delta_{im}a_m = a_i$ .

*Verifica-se que  $i$  é um índice livre. Variando-se  $i$  de 1 a 3, tem-se 3 equações. Já  $m$  é um índice repetido e aplica-se a convenção do somatório. Portanto*

$$\delta_{im}a_m = \begin{cases} \sum_{m=1}^3 \delta_{1m}a_m = \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = a_1 \\ \sum_{m=1}^3 \delta_{2m}a_m = \delta_{21}a_1 + \delta_{22}a_2 + \delta_{23}a_3 = a_2 \\ \sum_{m=1}^3 \delta_{3m}a_m = \delta_{31}a_1 + \delta_{32}a_2 + \delta_{33}a_3 = a_3 \end{cases} = a_i.$$

3.  $\delta_{im}T_{mj} = T_{ij}$ .

*Os índices  $i$  e  $j$  são livres enquanto  $m$  é um índice repetido. Logo, expandindo o índice livre  $i$  e aplicando a convenção do somatório para  $m$  vem que*

$$\delta_{im}T_{mj} = \begin{cases} \sum_{m=1}^3 \delta_{1m}T_{mj} = \delta_{11}T_{1j} + \delta_{12}T_{2j} + \delta_{13}T_{3j} = T_{1j} \\ \sum_{m=1}^3 \delta_{2m}T_{mj} = \delta_{21}T_{1j} + \delta_{22}T_{2j} + \delta_{23}T_{3j} = T_{2j} \\ \sum_{m=1}^3 \delta_{3m}T_{mj} = \delta_{31}T_{1j} + \delta_{32}T_{2j} + \delta_{33}T_{3j} = T_{3j} \end{cases} = T_{ij}.$$

*Em particular*

$$\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij} \quad e \quad \delta_{im}\delta_{mj}\delta_{jn} = \delta_{im}\delta_{mn} = \delta_{in}. \quad (\text{A.7})$$

4.  $\delta_{ij}\delta_{ji} = 3$ .

*Observa-se que  $i$  e  $j$  são índices repetidos e deve-se aplicar a convenção do somatório, ou seja,*

$$\begin{aligned} \delta_{ij}\delta_{ji} &= \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij}\delta_{ji} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}\delta_{ji} = \sum_{j=1}^3 \delta_{1j}\delta_{j1} + \delta_{2j}\delta_{j2} + \delta_{3j}\delta_{j3} \\ &= (\delta_{11}\delta_{11} + \delta_{21}\delta_{12} + \delta_{31}\delta_{13}) + (\delta_{12}\delta_{21} + \delta_{22}\delta_{22} + \delta_{32}\delta_{23}) + (\delta_{13}\delta_{31} + \delta_{23}\delta_{32} + \delta_{33}\delta_{33}). \end{aligned}$$

Substituindo os valores dados em (A.5), tem-se que

$$\delta_{ij}\delta_{ji} = 3. \quad (\text{A.8})$$

5. Se  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  são vetores unitários perpendiculares entre si, o produto interno ou escalar <sup>1</sup> destes vetores pode ser escrito como

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (\text{A.9})$$

□

## A.4 Símbolo de Permutação

A Figura A.2 ilustra os índices  $i, j, k$  e  $1, 2, 3$  ordenados nos sentidos horário e anti-horário. Utilizam-se estes índices para definir o símbolo de permutação  $e_{ijk}$  da seguinte forma

$$\begin{cases} e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 & 1, 2, 3 \text{ no sentido horário} \\ e_{213} = e_{132} = e_{321} = -1 & 1, 2, 3 \text{ no sentido anti-horário} \\ e_{ijk} = 0 & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Em outras palavras, o termo  $e_{ijk}$  se anula sempre que os valores de quaisquer dois índices coincidem, como por exemplo  $e_{112} = 0$ . Por sua vez,  $e_{ijk} = 1$  quando os subscritos permutam na ordem  $1, 2, 3$ , ou seja, no sentido horário. Finalmente,  $e_{ijk} = -1$  caso a permutação seja no sentido anti-horário.

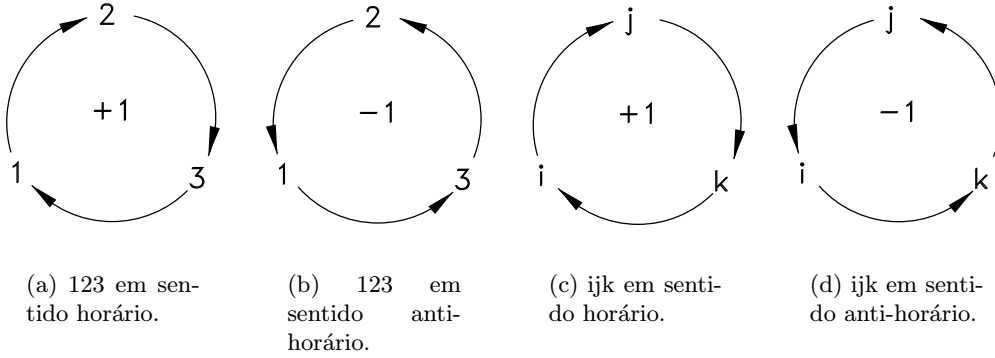


Figura A.2: Símbolo de permutação.

Como exemplo de aplicação, considere o determinante  $|A|$  de uma matriz  $[A]$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

A equação anterior pode ser denotada como

$$|A| = e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} = \sum_{i,j,k=1}^3 e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}, \quad (\text{A.11})$$

<sup>1</sup>Ver Seção B.1.

sendo  $i, j, k$  índices livres e  $e_{ijk}$  o símbolo de permutação.

O delta de Kronecker e o símbolo de permutação estão associados pela identidade (ver exercício resolvido A.3)

$$e_{ijm}e_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}, \quad (\text{A.12})$$

como pode ser comprovado manipulando-se os índices.

**Exemplo A.6** *Mostrar que as seguintes relações expressas em notação indicial são válidas.*

1.  $e_{ijk}e_{jki} = 6.$

Neste caso,  $i, j$  e  $k$  são índices repetidos e aplicando a convenção do somatório

$$e_{ijk}e_{jki} = \sum_{i,j,k=1}^3 e_{ijk}e_{jki} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 e_{ijk}e_{jki} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_{ij1}e_{j1i} + e_{ij2}e_{j2i} + e_{ij3}e_{j3i}$$

Lembrando a definição (A.10) do símbolo de permutação, tem-se que  $e_{ijk}$  é igual a zero quando pelo menos dois índices são iguais (por exemplo,  $e_{112} = e_{212} = e_{211} = 0$ ). Logo, na expressão anterior o somatório em  $j$  para cada termo do lado direito se reduz a

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij1}e_{j1i} &= \sum_{i=1}^3 e_{i11}e_{11i} + e_{i21}e_{21i} + e_{i31}e_{31i} = \sum_{i,j=1}^3 e_{i21}e_{21i} + e_{i31}e_{31i}, \\ \sum_{i,j}^3 e_{ij2}e_{j2i} &= \sum_i^3 e_{i12}e_{12i} + e_{i22}e_{22i} + e_{i32}e_{32i} = \sum_{i=1}^3 e_{i12}e_{12i} + e_{i32}e_{32i}, \\ \sum_{i,j=1}^3 e_{ij3}e_{j3i} &= \sum_{i=1}^3 e_{i13}e_{13i} + e_{i23}e_{23i} + e_{i33}e_{33i} = \sum_{i=1}^3 e_{i13}e_{13i} + e_{i23}e_{23i}. \end{aligned}$$

Portanto, somando as 3 expressões anteriores

$$e_{ijk}e_{jki} = \sum_{i=1}^3 e_{i21}e_{21i} + e_{i31}e_{31i} + e_{i12}e_{12i} + e_{i32}e_{32i} + e_{i13}e_{13i} + e_{i23}e_{23i}.$$

De forma análoga, expandindo o somatório em  $i$  e mantendo apenas os termos não-nulos do símbolo de permutação (ver definição (A.10)) vem que

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{jki} &= e_{321}e_{213} + e_{231}e_{312} + e_{312}e_{123} + e_{132}e_{321} + e_{213}e_{132} + e_{123}e_{231} \\ &= (-1)(-1) + (1)(1) + (1)(1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) + (1)(1) = 6. \end{aligned}$$

2.  $e_{ijk}a_ja_k = 0.$

De forma análoga ao caso anterior,  $i$  é um índice livre enquanto  $j$  e  $k$  são índices repetidos. Logo, expandindo  $i$ , empregando a convenção do somatório para  $i$  e  $j$  e a definição (A.10), tem-se que a expressão  $e_{ijk}a_ja_k$  é equivalente a

$$e_{ijk}a_ja_k = \begin{cases} \sum_{j,k=1}^3 e_{1jk}a_ja_k = e_{123}a_2a_3 + e_{132}a_3a_2 = a_2a_3 - a_3a_2 = 0 \\ \sum_{j,k=1}^3 e_{2jk}a_ja_k = e_{213}a_1a_3 + e_{231}a_3a_1 = a_1a_3 - a_3a_1 = 0 \\ \sum_{j,k=1}^3 e_{3jk}a_ja_k = e_{312}a_1a_2 + e_{321}a_2a_1 = a_1a_2 - a_2a_1 = 0 \end{cases}.$$

Logo, como resultado final tem-se que  $e_{ijk}a_ja_k = 0.$

$$3. \delta_{ij}e_{ijk} = 0.$$

Lembre-se que o delta de Kronecker  $\delta_{ij}$  é igual a 1 apenas quando  $i = j$ . Para  $i = j$ , tem-se que  $\delta_{ij}e_{ijk} = \delta_{ii}e_{iik} = (1)e_{iik}$ . Mas o símbolo de permutação  $e_{ijk}$  é zero sempre que dois índices são iguais. Logo, quando  $i = j$ , tem-se que  $\delta_{ij}e_{ijk} = \delta_{ii}e_{iik} = (1)(0) = 0$ .

□

## A.5 Operações

A seguir apresentam-se operações envolvendo a notação indicial.

### A.5.1 Substituição

Considere as seguinte relações

$$a_i = U_{im}b_m, \quad (\text{A.13})$$

$$b_i = V_{im}c_m. \quad (\text{A.14})$$

Observa-se que o termo  $b$  aparece nas duas relações mas com índices distintos. Deseja-se substituir  $b$  dado em (A.14) na expressão (A.13). Para isso, muda-se o índice livre de  $i$  para  $m$  em (A.14), obtendo-se

$$b_m = V_{mm}c_m.$$

No entanto, a expressão resultante não é válida em notação indicial, pois o índice  $m$  está repetido mais de uma vez no lado direito da equação. Para resolver este problema, lembre-se que a letra empregada para um índice falso num termo não afeta o resultado, ou seja,  $V_{im}c_m = V_{in}c_n$ . Logo, alterando o índice falso de  $m$  para  $n$  em (A.14) e o índice livre de  $i$  para  $m$  vem que

$$b_m = V_{mn}c_n. \quad (\text{A.15})$$

Como agora tem-se o mesmo índice  $m$  nas expressões (A.14) e (A.15), efetua-se a substituição

$$a_i = U_{im}b_m = U_{im}V_{mn}c_n. \quad (\text{A.16})$$

Observe que (A.16) representa três equações ao se variar o índice livre  $i$  de 1 a 3. Por sua vez, cada equação resulta numa soma de nove termos no lado direito, pois os índices repetidos  $m$  e  $n$  variam cada um de 1 a 3. Logo

$$a_i = U_{im}V_{mn}c_n \rightarrow \begin{cases} a_1 = \sum_{m,n=1}^3 U_{1m}V_{mn}c_n = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 U_{1m}V_{mn}c_n \\ a_2 = \sum_{m,n=1}^3 U_{2m}V_{mn}c_n = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 U_{2m}V_{mn}c_n \\ a_3 = \sum_{m,n=1}^3 U_{3m}V_{mn}c_n = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 U_{3m}V_{mn}c_n \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

De forma geral, deve-se ter cuidado ao se fazer substituições convenientes, ou seja, não substituir índices repetidos por livres, podendo dar origem a um somatório inexistente na notação indicial.



### A.5.2 Multiplicação

Considere a multiplicação de  $p$  e  $q$  dados respectivamente por

$$\begin{aligned} p &= a_m b_m = \sum_{m=1}^3 a_m b_m = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \\ q &= c_m d_m = \sum_{m=1}^3 c_m d_m = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A partir daí, o produto  $pq$  é calculado como

$$pq = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) (c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3),$$

podendo ainda ser denotado em notação indicial

$$pq = \left( \sum_{m=1}^3 a_m b_m \right) \left( \sum_{n=1}^3 c_n d_n \right) = \sum_{m,n=1}^3 a_m b_m c_n d_n = a_m b_m c_n d_n.$$

Portanto, o produto  $pq$  é indicado em notação indicial como  $pq = a_m b_m c_n d_n$ . É importante notar que para obter o produto  $pq$  não basta simplesmente multiplicar  $p$  e  $q$  dados em (A.18), ou seja,  $pq \neq a_m b_m c_m d_m$  pois

$$a_m b_m c_m d_m = \sum_{m=1}^3 a_m b_m c_m d_m = a_1 b_1 c_1 d_1 + a_2 b_2 c_2 d_2 + a_3 b_3 c_3 d_3.$$

De fato, o termo  $a_m b_m c_m d_m$  não possui significado na convenção de somatório, pois o índice repetido  $m$  aparece mais de uma vez num mesmo termo. Logo, ao se efetuar o produto de termos em notação indicial, deve-se inicialmente compatibilizar os índices. No caso anterior, trocou-se o índice repetido  $m$  para  $n$  no termo  $q = c_m d_m = c_n d_n$ . Lembre-se que a letra usada para o índice repetido é irrelevante, ou seja, para o exemplo considerado  $c_m d_m = c_n d_n = c_j d_j = c_k d_k = \dots$ .

Como exemplo, sabe-se que o produto escalar de vetores é distributivo<sup>2</sup>. Sejam os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  dados, respectivamente, por  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ . Para efetuar o produto escalar destes dois vetores, altera-se inicialmente o índice de  $i$  para  $j$  no vetor  $\mathbf{b}$ , ou seja,  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ . Aplica-se então a definição de produto escalar de vetores, ou seja,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j).$$

Em particular, se  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  são vetores unitários perpendiculares<sup>3</sup> entre si, então  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ , de maneira que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij}.$$

Por sua vez,  $b_j \delta_{ij} = \delta_{ij} b_j = b_i$ . Logo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

---

<sup>2</sup>Ver Seção B.1.

<sup>3</sup>Ver Seção B.1.

### A.5.3 Fatoração

Considere a seguinte expressão

$$T_{ij}n_j - \lambda n_i = 0,$$

a qual define um problema de autovalor do tensor  $T_{ij}$ , como será visto posteriormente. Verifica-se que na expressão anterior  $i$  e  $j$  são, respectivamente, índices livre e repetido. Em particular, empregam-se estes dois índices para o termo  $n$ . Para uniformizar os índices em  $n$  e fatorar a expressão, colocando o termo  $n_j$  em evidência, emprega-se o delta de Kronecker de tal forma que  $n_i = \delta_{ij}n_j$ . Logo, verifica-se que

$$T_{ij}n_j - \lambda \delta_{ij}n_j = 0 \rightarrow (T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0.$$

Observa-se que a expressão anterior pode ser denotada matricialmente como

$$([T] - \lambda[I])\{n\} = \{0\},$$

ou seja, tem-se a forma padrão de um problema de autovalor. De forma geral, para se fatorar um termo denotado em notação indicial, deve-se compatibilizar os índices empregando o delta de Kronecker ou o símbolo de permutação.

### A.5.4 Contração

A operação de igualar dois índices distintos e somar os mesmos é conhecida como contração. Por exemplo,  $T_{ii}$  é a contração de  $T_{ij}$ , ou seja,

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

Considere a equação constitutiva de um material elástico linear isotrópico

$$T_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu E_{ij},$$

a qual será discutida posteriormente. Logo, a contração  $T_{ii}$  de  $T_{ij}$  é dada por

$$T_{ii} = \lambda \theta \delta_{ii} + 2\mu E_{ii}.$$

Lembrando-se que  $\delta_{ii} = 3$ , obtém-se

$$T_{ii} = 3\lambda \theta + 2\mu E_{ii}.$$

## A.6 Notações de diferenciação

As operações de derivação (gradiente, divergente e rotacional<sup>4</sup>) também podem ser representadas via notação indicial. Observe os seguintes exemplos, respectivamente, para as derivadas total e parcial de  $u$

$$\frac{du}{dx_i} = u_{,i}, \quad (A.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{,i}. \quad (A.20)$$

Considerando uma função  $u = u(a_j(x_i))$ , emprega-se a regra da cadeia para obter a derivada  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  da função  $u$  com relação a  $x_i$ , ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = u_{,j} a_{j,i}. \quad (A.21)$$

---

<sup>4</sup>Ver Seção??.

Considerando uma função escalar  $a = a(x_i)$ , o seu gradiente em notação indicial é denotado como

$$\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = a_{,i} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.22})$$

Por sua vez, o divergente de uma função vetorial  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_i)$  é expresso como

$$\text{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = u_{i,i}. \quad (\text{A.23})$$

Finalmente, o rotacional de  $\mathbf{u}$  é dado por

$$\nabla \times \mathbf{u} = e_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = e_{ijk} u_{k,j} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.24})$$

## A.7 Exercícios Resolvidos

**Exercício A.1** Considere as matrizes

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [B_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Demonstrar a equivalência das seguintes expressões em notação indicial e em forma matricial.

$$1. \underbrace{D_{ji} = B_{ij}}_{(A)} \text{ e } \underbrace{[D] = [B]^T}_{(B)}.$$

No termo (A),  $i$  e  $j$  são índices livres e expandindo os mesmos vem que

$$\begin{aligned} D_{11} = B_{11} = 2, & \quad D_{12} = B_{21} = 0, & \quad D_{13} = B_{31} = 0, \\ D_{21} = B_{12} = 3, & \quad D_{22} = B_{22} = 5, & \quad D_{23} = B_{32} = 2, \\ D_{31} = B_{13} = 0, & \quad D_{32} = B_{23} = 1, & \quad D_{33} = B_{33} = 1. \end{aligned} \quad (i)$$

Por sua vez, da equação (B)

$$[D] = [B]^T \rightarrow \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (ii)$$

Comparando-se os termos  $D_{ji}$  em (i) e (ii), observa-se que são iguais, demonstrando a igualdade entre as expressões (A) e (B), ou seja,  $D_{ji} = B_{ij}$  é equivalente a  $[D] = [B]^T$ .

$$2. \underbrace{b_i = B_{ij}a_j}_{(A)} \text{ e } \underbrace{[b] = [B][a]}_{(B)}.$$

Em (A), observa-se que  $i$  é um índice livre enquanto  $j$  é um índice repetido. Logo, expandindo  $i$  e aplicando a convenção do somatório para  $j$ , tem-se

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum_{j=1}^3 B_{1j}a_j = B_{11}a_1 + B_{12}a_2 + B_{13}a_3 = (2)(1) + (3)(0) + (0)(2) = 2, \\ b_2 &= \sum_{j=1}^3 B_{2j}a_j = B_{21}a_1 + B_{22}a_2 + B_{23}a_3 = (0)(1) + (5)(0) + (1)(2) = 2, \\ b_3 &= \sum_{j=1}^3 B_{3j}a_j = B_{31}a_1 + B_{32}a_2 + B_{33}a_3 = (0)(1) + (2)(0) + (1)(2) = 2. \end{aligned} \quad (i)$$

Da equação (B)

$$[b] = [B][a] \rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(1) + (3)(0) + (0)(2) \\ (0)(1) + (5)(0) + (1)(2) \\ (0)(1) + (2)(0) + (1)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (ii)$$

Comparando-se os termos  $b_i$  em (i) e (ii) observa-se que são iguais, demonstrando a igualdade entre as expressões (A) e (B), ou seja,  $b_i = B_{ij}a_j$  e  $[b] = [B][a]$ .

$$3. \underbrace{D_{ik} = B_{ij}C_{jk}}_{(A)} \text{ e } \underbrace{[D] = [B][C]}_{(B)}.$$

Na equação (A), os índices  $i$  e  $k$  são livres os quais expandidos resultam em 9 equações. Aplicando a convenção de somatório ao índice  $j$ , tem-se

$$\begin{aligned} D_{11} &= B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21} + B_{13}C_{31} = (2)(0) + (3)(1) + (0)(2) = 3, \\ D_{12} &= B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22} + B_{13}C_{32} = (2)(3) + (3)(0) + (0)(4) = 6, \\ D_{13} &= B_{11}C_{13} + B_{12}C_{23} + B_{13}C_{33} = (2)(1) + (3)(2) + (0)(3) = 8, \\ D_{21} &= B_{21}C_{11} + B_{22}C_{21} + B_{23}C_{31} = (0)(0) + (5)(1) + (1)(2) = 7, \\ D_{22} &= B_{21}C_{12} + B_{22}C_{22} + B_{23}C_{32} = (0)(3) + (5)(0) + (1)(4) = 4, \\ D_{23} &= B_{21}C_{13} + B_{22}C_{23} + B_{23}C_{33} = (0)(1) + (5)(2) + (1)(3) = 13, \\ D_{31} &= B_{31}C_{11} + B_{32}C_{21} + B_{33}C_{31} = (0)(0) + (2)(1) + (1)(2) = 4, \\ D_{32} &= B_{31}C_{12} + B_{32}C_{22} + B_{33}C_{32} = (0)(3) + (2)(0) + (1)(4) = 4, \\ D_{33} &= B_{31}C_{13} + B_{32}C_{23} + B_{33}C_{33} = (0)(1) + (2)(2) + (1)(3) = 7. \end{aligned}$$

Efetuada a multiplicação  $[D] = [B][C]$  indicada em (B) vem que

$$\begin{aligned} [D] &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2)(0) + (3)(1) + (0)(2) & (2)(3) + (3)(0) + (0)(4) & (2)(1) + (3)(2) + (0)(3) \\ (0)(0) + (5)(1) + (1)(2) & (0)(3) + (5)(0) + (1)(4) & (0)(1) + (5)(2) + (1)(3) \\ (0)(0) + (2)(1) + (1)(2) & (0)(3) + (2)(0) + (1)(4) & (0)(1) + (2)(2) + (1)(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 13 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comparando-se os termos  $D_{ik}$  nas expressões anteriores, observa-se que são iguais, demonstrando a igualdade entre as expressões (A) e (B), ou seja,  $D_{ik} = B_{ij}C_{jk}$  e  $[D] = [B][C]$ .

□

**Exercício A.2** Considere os seguintes vetores e matrizes

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [b_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [S_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Avaliar  $[T_{ij}]$  se  $T_{ij} = e_{ijk}a_k$ .

Em  $T_{ij} = e_{ijk}a_k$ ,  $i$  e  $j$  são índices livres e  $k$  é um índice repetido. Usando a definição do símbolo de permutação, tem-se as 9 equações abaixo

$$\begin{aligned} T_{11} &= e_{111}a_1 + e_{112}a_2 + e_{113}a_3 = (0)(1) + (0)(2) + (0)(0) = 0, \\ T_{12} &= e_{121}a_1 + e_{122}a_2 + e_{123}a_3 = (0)(1) + (0)(2) + (1)(0) = 0, \\ T_{13} &= e_{131}a_1 + e_{132}a_2 + e_{133}a_3 = (0)(1) - (1)(2) + (0)(0) = -2, \\ T_{21} &= e_{211}a_1 + e_{212}a_2 + e_{213}a_3 = (0)(1) + (0)(2) - (1)(0) = 0, \\ T_{22} &= e_{221}a_1 + e_{222}a_2 + e_{223}a_3 = (0)(1) + (0)(2) + (0)(0) = 0, \\ T_{23} &= e_{231}a_1 + e_{232}a_2 + e_{233}a_3 = (1)(1) + (0)(2) + (0)(0) = 1, \\ T_{31} &= e_{311}a_1 + e_{312}a_2 + e_{313}a_3 = (0)(1) + (1)(2) + (0)(0) = 2, \\ T_{32} &= e_{321}a_1 + e_{322}a_2 + e_{323}a_3 = (-1)(1) + (0)(2) + (0)(0) = -1, \\ T_{33} &= e_{331}a_1 + e_{332}a_2 + e_{333}a_3 = (0)(1) + (0)(2) + (0)(0) = 0, \end{aligned}$$

resultando na seguinte forma matricial para  $T_{ij}$

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Avaliar  $[C_i]$  se  $C_i = e_{ijk}S_{jk}$ .

Em  $C_i = e_{ijk}S_{jk}$ , tem-se que  $i$  é um índice livre enquanto para  $j$  e  $k$  utiliza-se a convenção de somatório para índices falsos. Expandindo os índices e utilizando apenas os coeficientes não-nulos do termo de permutação vem que

$$C_i = e_{ijk}S_{jk} \rightarrow \begin{cases} C_1 = e_{123}S_{23} + e_{132}S_{32} = (1)(3) - (1)(0) = 3 \\ C_2 = e_{213}S_{13} + e_{231}S_{31} = (-1)(2) + (1)(4) = 2 \\ C_3 = e_{312}S_{12} + e_{321}S_{21} = (1)(1) + (-1)(1) = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Logo, } [C_i] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

3. Avaliar  $[d_i]$  se  $d_k = e_{ijk}a_ib_j$  e mostrar que este resultado é o mesmo que  $d_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_k$ .

Tomando a expressão  $d_k = e_{ijk}a_ib_j$ , verifica-se que  $i$  e  $j$  são índices repetidos e  $k$  é um índice livre. Expandindo  $k$ , aplicando a convenção de somatório para  $i$  e  $j$  e mantendo apenas os termos não-nulos do símbolo de permutação tem-se que

$$\begin{aligned} d_1 &= e_{231}a_2b_3 + e_{321}a_3b_2 = (1)(2)(3) - (1)(0)(2) = 6, \\ d_2 &= e_{132}a_1b_3 + e_{312}a_3b_1 = (-1)(1)(3) + (1)(0)(0) = -3, \\ d_3 &= e_{123}a_1b_2 + e_{213}a_2b_1 = (1)(1)(2) + (-1)(2)(0) = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } [d_i] = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

Por sua vez, o produto vetorial  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  em  $d_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_k$  pode ser efetuado através do seguinte determinante

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3).$$

Observe que  $k$  é um índice livre e efetuando o produto escalar por  $\mathbf{e}_k$  vem que

$$\begin{aligned} d_1 &= (6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = 6, \\ d_2 &= (6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = -3, \\ d_3 &= (6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3 = 2, \end{aligned}$$

obtendo-se  $[d_i] = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T$  comprovando a equivalência das expressões  $d_k = e_{ijk}a_i b_j$  e  $d_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_k$ .

□

**Exercício A.3** Verifique que  $e_{ijm}e_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ .

Todos os índices são livres com exceção de  $m$  que é um índice falso no lado esquerdo da expressão. Observa-se que os termos do símbolo de permutação do lado esquerdo são não-nulos quando  $i \neq j \neq m$  e  $k \neq l \neq m$ . Isto implica que as seguintes condições resultam em valores não-nulos no lado direito da expressão:  $i = l \neq m$ ,  $j = k \neq m$ ,  $i = k \neq m$  e  $j = l \neq m$ . Assim, todas as possibilidades que resultam valores não-nulos estão dadas abaixo.

| $m$ | $i$ | $j$ | $k$ | $l$ | $e_{ijm}e_{klm}$ | $\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|------------------|---|
| 1   | 2   | 3   | 2   | 3   | $(1)(1) = 1$     | $(1)(1) - (0)(0) = 1$                             |
|     | 2   | 3   | 3   | 2   | $(1)(-1) = -1$   | $(0)(0) - (1)(1) = -1$                            |
|     | 3   | 2   | 3   | 2   | $(-1)(-1) = 1$   | $(1)(1) - (0)(0) = 1$                             |
|     | 3   | 2   | 2   | 3   | $(-1)(1) = -1$   | $(0)(0) - (1)(1) = -1$                            |
| 2   | 1   | 3   | 1   | 3   | $(-1)(-1) = 1$   | $(1)(1) - (0)(0) = 1$                             |
|     | 1   | 3   | 3   | 1   | $(-1)(1) = -1$   | $(0)(0) - (1)(1) = -1$                            |
|     | 3   | 1   | 3   | 1   | $(1)(1) = 1$     | $(1)(1) - (0)(0) = 1$                             |
|     | 3   | 1   | 1   | 3   | $(1)(-1) = -1$   | $(0)(0) - (1)(1) = -1$                            |
| 3   | 2   | 1   | 2   | 1   | $(-1)(-1) = 1$   | $(1)(1) - (0)(0) = 1$                             |
|     | 2   | 1   | 1   | 2   | $(-1)(1) = -1$   | $(0)(0) - (1)(1) = -1$                            |
|     | 1   | 2   | 1   | 2   | $(1)(1) = 1$     | $(1)(1) - (0)(0) = 1$                             |
|     | 1   | 2   | 2   | 1   | $(1)(-1) = -1$   | $(0)(0) - (1)(1) = -1$                            |

Todas as demais combinações resultam em valores iguais a zero. Por exemplo, para  $i = j = k = l = m = 1$  tem-se que

$$e_{111}e_{111} = 0 = \delta_{11}\delta_{11} - \delta_{11}\delta_{11} = (1)(1) - (1)(1) = 0.$$

□

**Exercício A.4** Se  $T_{ij} = -T_{ji}$ , mostre que  $T_{ij}a_i a_j = 0$ .

Para o caso  $j = i$  tem-se  $T_{ii} = -T_{ii}$ . Portanto, a única possibilidade é  $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$ . Usando esta condição e aplicando a convenção do somatório para  $i$  e  $j$  vem que

$$\begin{aligned} T_{ij}a_i a_j &= T_{11}a_1 a_1 + T_{12}a_1 a_2 + T_{13}a_1 a_3 + T_{21}a_2 a_1 \\ &+ T_{22}a_2 a_2 + T_{23}a_2 a_3 + T_{31}a_3 a_1 + T_{32}a_3 a_2 + T_{33}a_3 a_3 \\ &= 0a_1 a_1 + T_{12}a_1 a_2 + T_{13}a_1 a_3 - T_{12}a_2 a_1 + 0a_2 a_2 \\ &+ T_{23}a_2 a_3 - T_{13}a_3 a_1 - T_{23}a_3 a_2 + 0a_3 a_3 \\ &= T_{12}(a_1 a_2 - a_2 a_1) + T_{13}(a_1 a_3 - a_3 a_1) + T_{23}(a_2 a_3 - a_3 a_2) = 0 \end{aligned}$$

□

**Exercício A.5** Se  $T_{ij} = -T_{ji}$  e  $S_{ij} = S_{ji}$ , mostre que  $T_{kl}S_{kl} = 0$ .

Para o caso  $j = i$ , tem-se  $T_{ii} = -T_{ii}$ . Portanto, novamente tem-se  $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$ . Logo, aplicando a convenção do somatório para os índices  $k$  e  $l$  vem que

$$\begin{aligned} T_{kl}S_{kl} &= T_{11}S_{11} + T_{12}S_{12} + T_{13}S_{13} + T_{21}S_{21} + T_{22}S_{22} + T_{23}S_{23} + T_{31}S_{31} + T_{32}S_{32} + T_{33}S_{33} \\ &= (0)S_{11} + T_{12}S_{12} + T_{13}S_{13} - T_{12}S_{12} + (0)S_{22} + T_{23}S_{23} - T_{13}S_{13} - T_{23}S_{23} + (0)S_{33} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

## A.8 Exercícios Propostos

1. Considere o vetor  $\{a\}$  e as matrizes  $[B]$  e  $[C]$  dadas no exercsguintes relações
  - $B_{ij}a_ia_j$  e  $s = [a]^T [B] [a]$ ,
  - $c_j = B_{ji}a_i$  e  $[c] = [B] [a]$ ,
  - $D_{ik} = B_{ij}C_{kj}$  e  $[D] = [B] [C]^T$ .
2. Verificar que o determinante de uma matriz  $[A]$  pode ser denotado de acordo com a expressão (A.11).
3. Mostre que  $e_{ilm}e_{jlm} = 2\delta_{ij}$ .
4. Dado que  $T_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda(E_{kk})\delta_{ij}$  mostre que

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}T_{ij}E_{ij} = \mu E_{ij}E_{ij} + \frac{\lambda}{2}(E_{kk})^2, \\ P &= T_{ji}T_{ij} = 4\mu^2 E_{ij}E_{ij} + (E_{kk})^2(4\mu\lambda + 3\lambda^2). \end{aligned}$$

5. Mostrar que o rotacional de um campo vetorial  $\mathbf{u}$  pode ser escrito como  $\nabla \times \mathbf{u} = e_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = e_{ijk} u_{k,j} \mathbf{e}_i$ .