

# Modelagem de Escoamentos Turbulentos.

## Lista de Exercícios No. 2

Cristian Herledy López Lara

Junho 2025

### Questão 1

A partir do conjunto de dados fornecido no arquivo Re125.txt para a velocidade instantânea medida em um ponto de um jato (coluna 1: tempo em segundos; coluna 2: velocidade em m/s), e considerando amostras para intervalos de tempo  $T = 0,005; 0,05; 0,5$  e  $5s$ :

- Obtenha a velocidade média e desvio padrão;
- Explique eventuais diferenças entre os resultados para os três períodos  $T$  supracitados.

#### Desenvolvimento

A velocidade média e o desvio padrão são calculados para cada intervalo mostrando os seguintes valores:

Periodo T [s]	U media [m/s]	Desvio padrão [m/s];
0 - 0,005	8,8854	1,0636
0 - 0,05	8,5692	1,1724
0 - 0,5	8,5342	1,2415
0 - 5	8,5417	1,2330

Tabela 1: Valores de velocidade media e desvio padrão para diferentes intervalos

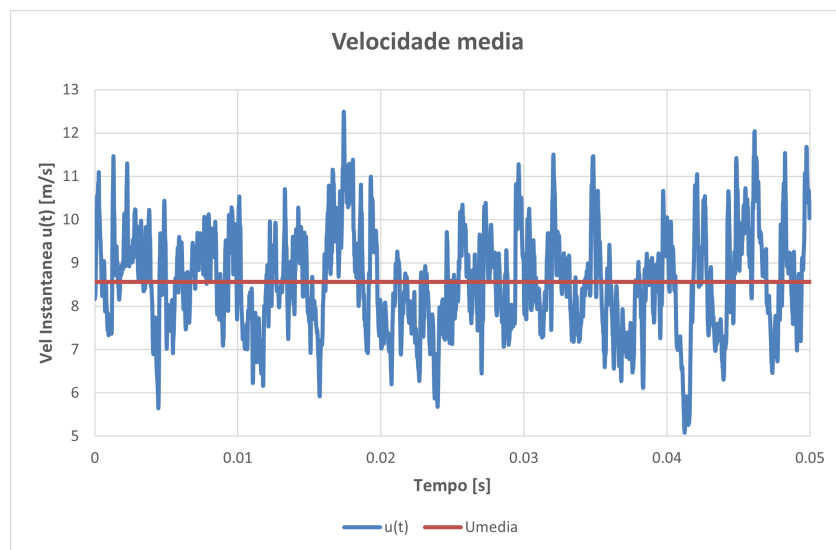


Figura 1: Velocidade instantanea e velocidade media ate  $t = 0,05s$

O gráfico a seguir mostra a evolução da velocidade média e do desvio padrão. Ambas as grandezas convergem para um valor à medida que o tempo avança. Isso ocorre porque há mais dados para calcular a média da amostra em  $t = 5s$ . As grandes e pequenas escalas terão passado pelo dispositivo de medição um número maior de vezes, o que permite estatísticas turbulentas mais homogêneas e, portanto, a medição do escoamento em regime permanente.

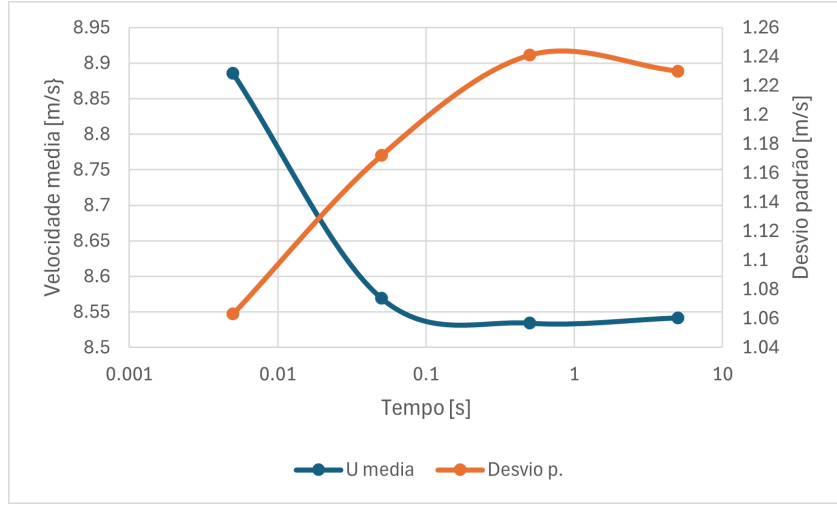


Figura 2: Velocidade media e desvio padrao nos intervalos de tempo analisados

## Questão 2

A partir dos dados do arquivo Re125.txt:

- i. **Determine a energia cinética turbulenta,  $k$ , assumindo a condição de isotropia;**

A energia cinética turbulenta é calculada com a expressão

$$k = \overline{u_i u_i} / 2 \quad (1)$$

Que para un escoamento isotrópico pode ser escrito como

$$k = \overline{u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3} / 2 = \frac{3}{2} \overline{u_1 u_1} = 2,26 \frac{m^2}{s^2} \quad (2)$$

- ii. **Faça um gráfico para o coeficiente de correlação temporal e avalie a escala de comprimento  $L$  das grandes escalas;**

Para o cálculo de correlação temporal, primeiro é necesario encontrar o valor da correlação de velocidade no ponto ( $r = 0$ ) dado pela expressão

$$R_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \tau) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t')}$$

Sendo  $\tau = t - t'$ . Logo, a correlação de velocidades é calculada como

$$\rho_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{R_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \tau)}{u'_i u'_j} \quad (3)$$

Para finalmente determinar a correpondente correlação temporal

$$\Theta_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{ij}^{(t)}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (4)$$

O gráfico a seguir mostra como se comporta a correlação temporal em uma parcela da amostra de dados selecionada até  $\tau = 0,02$ , já que com todos os dados não é fácil visualizar a tendência da curva.

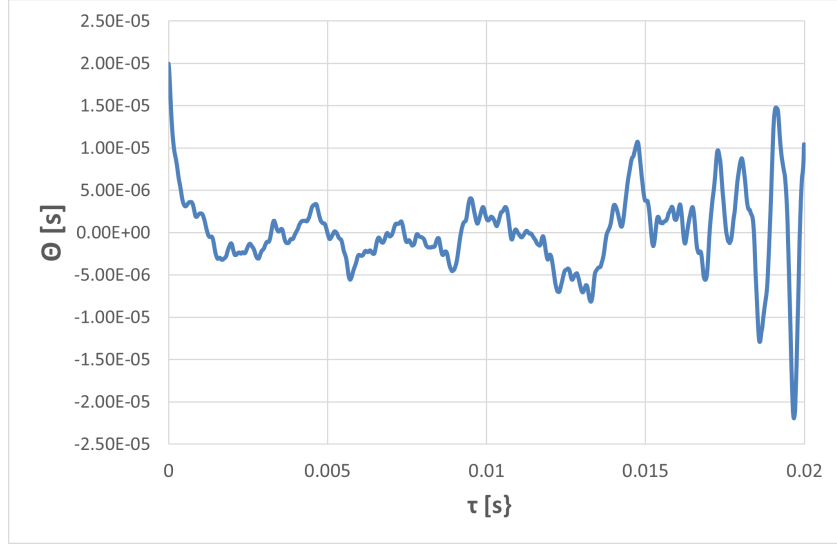


Figura 3: Evolução da correlação temporal em função de  $\tau$

Para determinar o valor da escala de comprimento para grandes escalas  $L$ , são tomados valores positivos da expressão (4) levando a sua forma integral ao calculo pelas somas em serie; uma vez que esses valores positivos correspondem à correlação direta das flutuações com o atraso. Este valor representa o tempo médio de passagem das estruturas turbulentas pelo dispositivo de medição.

Segregando o primeiro intervalo de valores positivos  $\Theta_1$  no intervalo da figura 3, obtém-se a curva

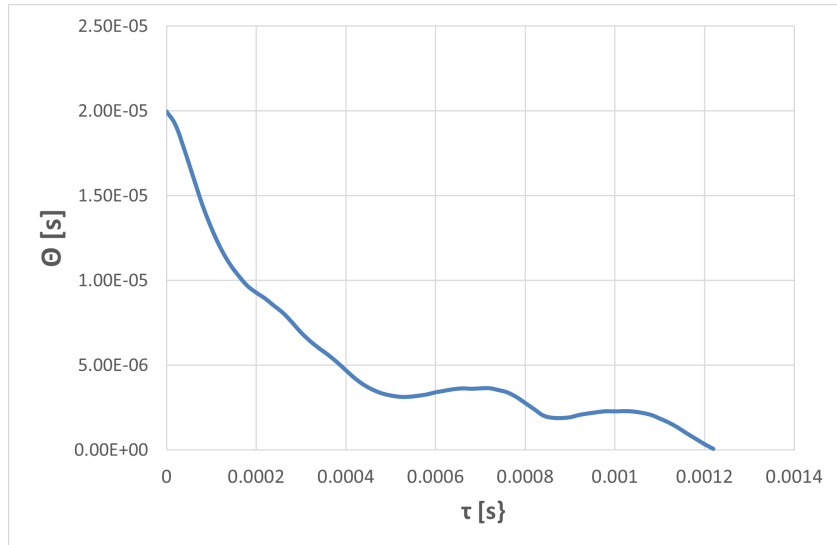


Figura 4: Evolução da correlação temporal ate  $\Theta_1 = 0$

Agora, da seguinte expressão,  $L$  pode ser calculada

$$\Theta = \frac{L}{U} \rightarrow L = 0,003059 \text{ m} \quad (5)$$

**iii. Avalie o número de Reynolds das grandes escalas,  $Re_L$ , a partir das medições**

O número de Reynolds é avaliado, tomando o valor da viscosidade do ar @ 298,15K

$$Re_L = \frac{u' \cdot L}{\nu} = \frac{1,2330 \text{ m/s} \cdot 0,0030 \text{ m}}{1,5e^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 251,5 \quad (6)$$

**iv. Obtenha estimativas para as escalas de Kolmogorov (comprimento, tempo e velocidade)**

**v. Avalie a dissipação turbulenta**

Para avaliar as escalas de Kolmogorov e a dissipação turbulenta as seguintes considerações serão feitas para usar a nomenclatura das equações da aula

- $\ell_0 = L$
- $u_0 = u'$
- $\tau_0 = \ell_0/u_0$

$$\varepsilon \equiv \frac{(u_0)^3}{\ell_0} \equiv \frac{(1,2330 \text{ m/s})^3}{0,0030 \text{ m}} \equiv 625 \text{ m}^2/\text{s}^3 \quad (7)$$

$$\frac{\eta}{\ell_0} \sim Re_L^{-3/4} \rightarrow \eta \sim Re_L^{-3/4} \cdot \ell_0 \rightarrow 251,5^{-3/4} \cdot 0,0030 \text{ m} \sim 4,84 \times 10^{-5} \text{ m} \quad (8)$$

$$\frac{u_\eta}{u_0} = Re_L^{-1/4} \rightarrow u_\eta = Re_L^{-1/4} \cdot u_0 \rightarrow 251,5^{-1/4} \cdot 1,2330 \text{ m/s} = 0,3096 \text{ m/s} \quad (9)$$

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_0} = Re_L^{-1/2} \rightarrow \tau_\eta = Re_L^{-1/2} \cdot \tau_0 \rightarrow 251,5^{-1/2} \cdot 0,0024 \text{ s} = 1,51 \times 10^{-4} \text{ s} \quad (10)$$

Em resumo das escalas de Kolmogorov obtém-se que:

- $\varepsilon \equiv 625 \text{ m}^2/\text{s}^3$
- $\eta = 4,84 \times 10^{-5} \text{ m}$
- $u_\eta = 0,3096 \text{ m/s}$
- $\tau_\eta = 1,51 \times 10^{-4} \text{ s}$

Os resultados obtidos refletem o regime turbulento de grandes escalas, onde  $Re > 1$  mostra que grandes estruturas contêm uma grande parcela da energia inercial.

A dissipação turbulenta mostra a taxa de transferência de energia para as escalas viscosas.

O valor de  $\ell_0$  é consistente com a escala de comprimento que divide a faixa inercial da faixa dissipativa  $\ell_{DI} = 60\eta \rightarrow 0,0030 \text{ m} \approx 60 \cdot 4,84 \times 10^{-5} \text{ m}$ . Este valor é necessário para definir a escala para a segunda hipótese de similaridade.

A velocidade  $u_\eta$  é muito menor que as velocidades média e de flutuação. Isso dá uma ideia sobre como escalas grandes e pequenas se desacoplaram.

O tempo característico das pequenas estruturas  $\tau_\eta$  é significativamente menor que o tempo integral  $\tau_0$ , mostrando que a dissipação ocorre rapidamente.

vi. **Determine a transformada de Fourier para energia cinética instantânea da turbulência e forneça uma interpretação do resultado, identificando as faixas de energia, inercial e de dissipação das escalas turbulentas.**

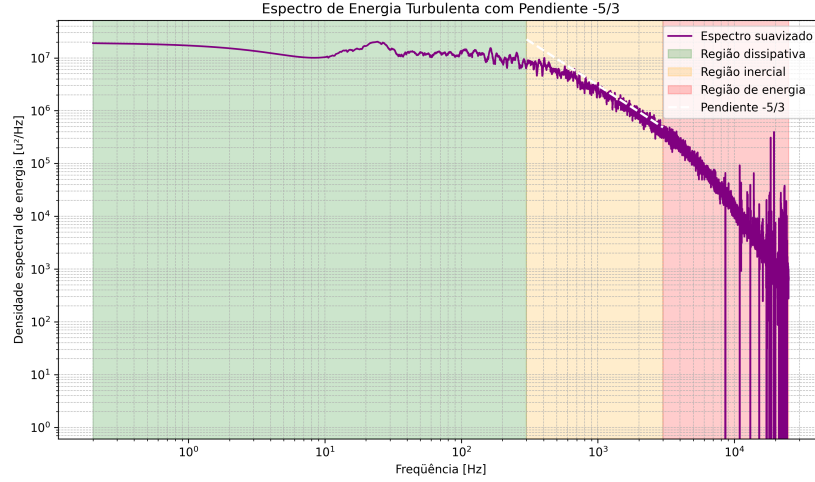


Figura 5: Transformada de Fourier para energia cinética instantânea da turbulência

As divisões das diferentes regiões podem ser vistas no anterior gráfico. A transição da faixa de energia (onde a maior parte da energia turbulenta está contida) concorda com a relação ao intervalo  $\ell_0/6 < \ell < 6\ell_0$ , começando em torno de 1200 Hz. Nessa faixa, ocorre a produção de energia turbulenta que será transferida as pequenas escalas passando pela faixa inercial.

En tanto, a região de dissipação cobre  $\approx 60\%$  do espectro, sendo esta a faixa onde ocorre a dissipação de energia das pequenas escalas ao escoamento. Para os dados analisados, o limite para esta região é da ordem de  $10^2$  Hz, o que coincide com a expressão dada para  $\ell_{DI}$ .

A região inercial (em amarelo) é o intervalo de frequências onde ocorre a transferência de energia sem dissipação, da escala  $L$  até escalas menores. Nesta faixa, o espectro tende a seguir a lei de Kolmogorov  $\approx f^{-5/3}$ :

## Referências

- [1] Cesar Deschamps, Escalas da turbulencia Cap 2. UFSC Florianopolis, SC, Notas de aula, 2025.