

# Modelagem de Escoamentos Turbulentos.

## Lista de Exercícios No. 3

Cristian Herledy López Lara

Junho 2025

### Questão 1

Obtenha a equação de transporte para o tensor de Reynolds

#### Desenvolvimento

Partindo da equação de conservação de movimento linear

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \quad (1)$$

Aplicando o conceito da media de Reynolds  $A = \bar{A} + a$  para cada termo:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (2)$$

$$U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (5)$$

A equação completa fica então

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (6)$$

Agora tomando só os termos da flutuação turbulenta

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (7)$$

Multiplicando por  $u_j$  cada termo da equação

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} \quad (8)$$

$$u_j \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \bar{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - \bar{U}_k u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (9)$$

$$u_j u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \quad (10)$$

$$u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (11)$$

$$u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k \partial x_k} - u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \quad (12)$$

Escrevendo a equação completa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - \bar{U}_k u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \\ \frac{u_j}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k \partial x_k} - u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Da mesma forma, obtemos a equação para a flutuação  $u_j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - \bar{U}_k u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} - u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \\ \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k \partial x_k} - u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Somando a equação 14 da equação 13 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i u_j u_k}{\partial x_k} = \\ \frac{1}{\rho} \left( u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \nu \left( u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

E aplicando os termos da media

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} = \\ \frac{1}{\rho} \left( \overline{u_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) + \nu \left( \overline{u_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

## Questão 2

Simplifique a equação da energia cinética turbulenta  $k = (u_i u_i)/2$  para o caso de um escoamento médio turbulento plenamente desenvolvido em um duto.

### Desenvolvimento

Agora novamente da equação de transporte do tensor de Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} = \\ \frac{1}{\rho} \left( \overline{u_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) + \nu \left( \overline{u_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Faço  $i=j$  e dividindo por 2 obtemos

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} + k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \left( \overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right) + \nu \left( \overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \quad (18)$$

Para escoamento plenamente desenvolvido, a velocidade media na direção  $i$  não muda com relação a  $j$ , então  $\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} = 0$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \left( \overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right) + \nu \left( \overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \quad (19)$$

### Questão 3

Demonstre (3.39) e mostre que (3.27) pode ser reescrita como

$$\overline{\varepsilon} = \nu \frac{\overline{\partial u_i} \overline{\partial u_i}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (20)$$

#### Desenvolvimento

A equação 3.39 é

$$\frac{\overline{\partial u_i \partial u_j}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\overline{\partial^2 u_i u_j}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (21)$$

Abrindo o termo do lado direito da equação 21

$$\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (22)$$

Aplicando a igualdade da equação 3.6  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (23)$$

Pela propriedade comutativa das derivadas parciais

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (24)$$

Agora igualando e aplicando as medias

$$\frac{\overline{\partial u_i \partial u_j}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\overline{\partial^2 u_i u_j}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (25)$$

Agora para a equação 2.27

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \quad (26)$$

Abrindo o produto dos termos

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (27)$$

Agrupando os termos

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \quad (28)$$

$$2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + 2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + 2 \left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_j \partial x_i}\right) \quad (29)$$

Agora substituindo em eq. 26

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nu \overline{2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + 2 \left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_j \partial x_i}\right)} = \nu \left[ \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} + \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_j \partial x_i}\right)} \right] \quad (30)$$

## Questão 4

Usando correlações para camada limite turbulenta sobre uma superfície plana disponíveis em livros texto da graduação, determine os valores de  $U_\infty/u^*$ ,  $Re_\delta$  e  $Re^*$  em  $x = 1$  e  $2$  m.

### Desenvolvimento

A expressão para o comprimento da camada limite turbulenta é definida como

$$\delta = 0,382x Re_x^{-1/5} \quad (31)$$

Calculando os valores para  $x = 1m$

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} = \frac{25 \frac{m}{s} \cdot 1m}{1,5 \times 10^{-5} m^2/s} = 1,66 \times 10^6 \quad (32)$$

$$\delta_{1m} = 0,382x Re_x^{-1/5} = 0,382 \cdot 1m \cdot (1,66 \times 10^6)^{-1/5} = 0,021m \quad (33)$$

$$Re_\delta = \frac{U_\infty \delta}{\nu} = \frac{25 \frac{m}{s} \cdot 0,021m}{1,5 \times 10^{-5} m^2/s} = 3,5 \times 10^4 \quad (34)$$

Calculando os valores para  $x = 2m$

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} = \frac{25 \frac{m}{s} \cdot 2m}{1,5 \times 10^{-5} m^2/s} = 3,33 \times 10^6 \quad (35)$$

$$\delta_{1m} = 0,382x Re_x^{-1/5} = 0,382 \cdot 2m \cdot (3,33 \times 10^6)^{-1/5} = 0,036m \quad (36)$$

$$Re_\delta = \frac{U_\infty \delta}{\nu} = \frac{25 \frac{m}{s} \cdot 0,036m}{1,5 \times 10^{-5} m^2/s} = 6 \times 10^4 \quad (37)$$

Considerando o modelamento da velocidade dado pela expressão de la lei logarítmica (eq 3.210 de [1])

$$\frac{U_\infty}{u_*} + \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{U_\infty}{u_*} \right) = \frac{1}{\kappa} \ln Re_\delta + a - b \quad (38)$$

Onde (de [1])

$$Re_\delta = \frac{U_\infty}{u_*} Re_* \quad (39)$$

Da eq. 38, encontra-se o valor de  $u_*$  para  $x = 1m$ , com os valores de  $k \approx 0,41$ ;  $a = 5,2$ ;  $b = -2,5$

$$\frac{25}{u_*} + \frac{1}{0,41} \ln \left( \frac{25}{u_*} \right) = 44,3 \rightarrow u_* = 0,70m/s \quad (40)$$

$$\frac{U_\infty}{u_*} = \frac{25m/s}{0,70m/s} = 35,7 \quad (41)$$

E para  $x = 2m$

$$\frac{25}{u_*} + \frac{1}{0,41} \ln \left( \frac{25}{u_*} \right) = 35,5 \rightarrow u_* = 0,95m/s \quad (42)$$

$$\frac{U_\infty}{u_*} = \frac{25m/s}{0,95m/s} = 26,1 \quad (43)$$

## Questão 5

Considere o escoamento turbulento plenamente desenvolvido de água em uma tubulação circular de parede lisa com raio  $R$ .

- Assumindo que a espessura da subcamada limite viscosa  $\delta_v$  é equivalente a  $y^+ = 5$ , mostre em um gráfico log-log, a razão  $\delta_v/R$  para números de Reynolds  $= (UD/\nu)$  iguais a  $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ . Use alguma correlação, como a de Blasius, para determinar a tensão na parede.
- Represente em um gráfico a distribuição de velocidade  $U(r)/U$  para cada um dos números de Reynolds.
- Avalie o valor local da velocidade média em  $y^+ = 5$  e  $50$ .

### Desenvolvimento

a) O primer passo é encontrar uma expressão para  $\delta_v$ . Da definição da espessura da subcamada limite viscosa

$$y^+ = 5 = \frac{u_* \delta_v}{\nu} \quad (44)$$

$$\delta_v = \frac{5\nu}{u_*} \rightarrow \frac{\delta_v}{R} = \frac{5\nu}{Ru_*} \quad (45)$$

Da expressão da velocidade de atrito e do coeficiente de atrito  $f$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} ; f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \rightarrow u_* = \sqrt{\frac{f}{2}} U \quad (46)$$

Da definição do número de Reynolds

$$Re_D = \frac{UD}{\nu} \rightarrow U = \frac{Re_D \nu}{D} \quad (47)$$

Sustituindo em (46)

$$u_* = \sqrt{\frac{f}{2}} U \rightarrow u_* = \sqrt{\frac{f}{2}} \frac{Re_D \nu}{D} \quad (48)$$

Agora, reescrevendo na equação (45)

$$\frac{\delta_v}{R} = \frac{5\nu}{Ru_*} = \frac{5\nu}{R\sqrt{\frac{f}{2}\frac{Re\nu}{D}}} \quad (49)$$

Fazendo manipulações algébricas obtém-se que

$$\frac{\delta_v}{R} = \frac{10 \cdot 2^{1/2}}{Re f^{1/2}} \quad (50)$$

Pela correlação de Blasius que relaciona o coeficiente de atrito com o número de Reynolds

$$f = 0,316 Re^{-1/4} \quad (51)$$

Agora substituindo em (51)

$$\frac{\delta_v}{R} = \frac{10 \cdot 2^{1/2}}{Re(0,316 Re^{-1/4})^{1/2}} = \frac{10 \cdot 2^{1/2}}{Re^{7/8} \cdot 0,316^{1/2}} \quad (52)$$

Obtem-se então uma razão para  $\delta_v/R$  em função de  $Re$

$$\frac{\delta_v}{R} = 25,1 Re^{-7/8} \quad (53)$$

O seguinte gráfico mostra como essa relação evolui com 3 números de Reynolds diferentes

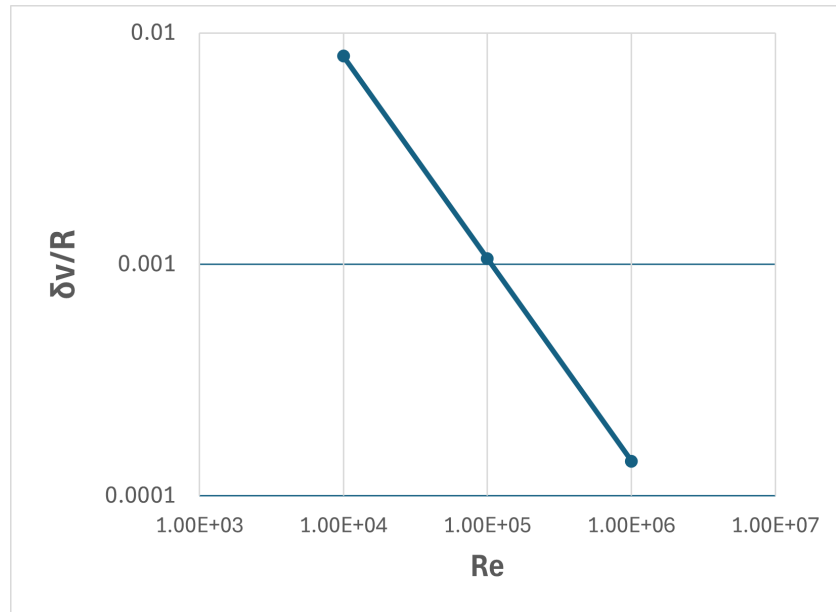


Figura 1: Avaliação da razão  $\delta_v/R$  vs  $Re$

O gráfico mostra como o tamanho da camada limite viscosa diminui a medida que a velocidade media va aumentando.

b) Para a distribuição de velocidade, fazemos uso da dependencia logaritmica do valor de  $U(y)/u_*$  em  $Re$

$$\frac{U(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + a \quad (54)$$

Podemos aplicar a relação  $y = R(1 - \frac{r}{R})$  em a eq. (44)

$$y^+ = \frac{u_* \delta_v}{\nu} = \frac{u_* R(1 - \frac{r}{R})}{\nu} \quad (55)$$

Sustituindo em (54)

$$\frac{U(r)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{u_* R(1 - \frac{r}{R})}{\nu} \right) + a \quad (56)$$

Agora, para encontrar uma expressão que relacione a velocidade radial  $U(r)$  com a velocidade média  $U$ , podemos usar as expressões calculadas anteriormente para  $u_*$  que são as duas definições da equação (48), obtendo

$$\frac{U(r)}{U} = \frac{0,39}{\kappa} Re^{1/8} \ln \left( \frac{Re^{7/8}(1 - \frac{r}{R})}{2} \right) + a \quad (57)$$

Então, o comportamento da distribuição de velocidade em função de Reynolds, pode ser analisado no gráfico a seguir, onde  $k = 0,41$  e  $a = 5.2$

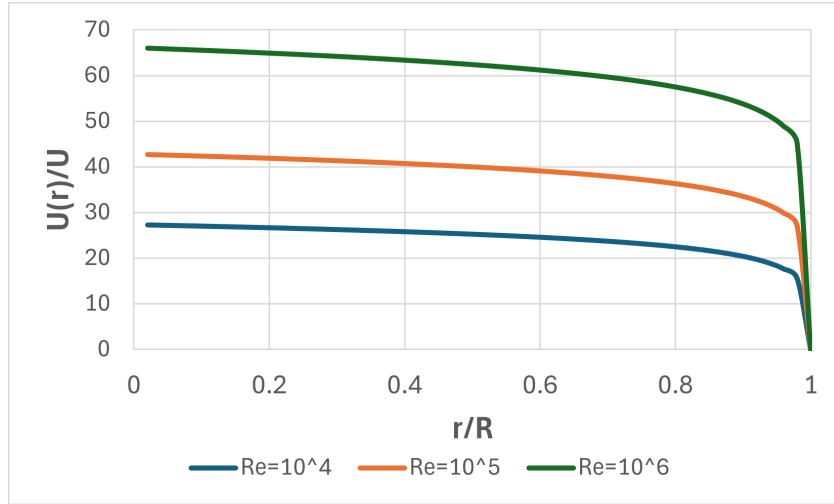


Figura 2: Avaliação da distribuição de velocidade em função de Reynolds vs  $Re$

À medida que o número de Reynolds aumenta, o perfil de velocidade torna-se mais plano no centro e com um gradiente maior na parede. Isso reflete o fortalecimento dos efeitos inerciais e turbulentos e a formação de uma camada limite fina que governa a dissipação de energia e a tensão de cisalhamento.

c) Para a avaliação da velocidade média, novamente da equação (57) obtemos que

$$\frac{U(r)}{U} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + a = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{u_* R(1 - \frac{r}{R})}{\nu} \right) + a \quad (58)$$

Os seguintes valores da distribuição de velocidade foram obtidos

Re	$y^+$	$U(y)/U$
$10^4$	5	10,0
$10^4$	50	17
$10^5$	5	11,6
$10^5$	50	20,8
$10^6$	5	13,8
$10^6$	50	26

Tabela 1: Valores de velocidade obtidos com Re y  $y^+$

Os valores obtidos mostram que, para posições diferentes da parede ( $y^+ = 5$  e  $50$ ), a velocidade cresce com o aumento do número de Reynolds. Além disso, o gradiente de velocidade também cresce com  $Re$ , indicando que a região de cisalhamento se torna mais fina e intensa, característica típica de escoamentos turbulentos com alto Reynolds.

## Questão 6

A partir da proposta de Coles para uma camada limite turbulenta, represente o perfil de velocidade para uma camada limite com gradiente de pressão nulo, favorável ( $b = 10$ ) e adverso ( $b = -10$ ). Represente o perfil de velocidade para a condição de separação ( $b \rightarrow \infty$ ).

### Desenvolvimento

Da expressão proposta por Coles para a lei do déficit de velocidade na região externa

$$F(\eta) = \frac{1}{k} \ln(\eta) + b \left[ 1 - \frac{w(\eta)}{2} \right] \quad (59)$$

Onde a função universal é dada por

$$w(\eta) = 1 - \cos(\pi\eta) \quad (60)$$

Variando o parâmetro b, variações devido ao gradiente pressão serão observadas.

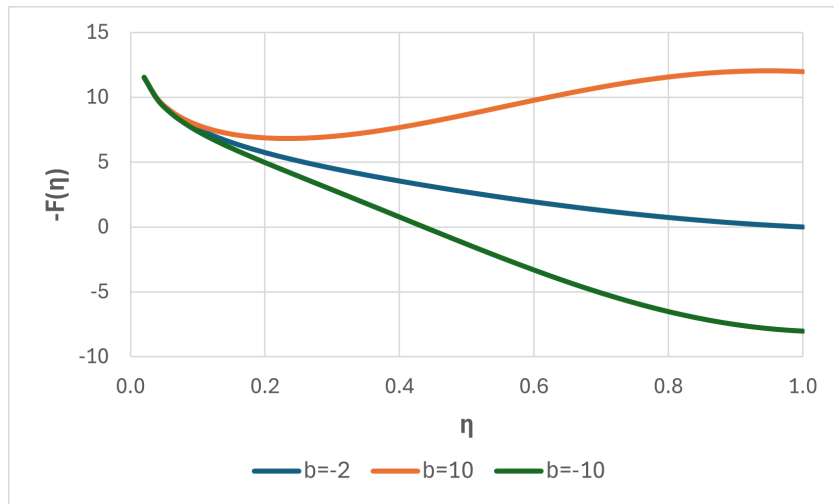


Figura 3: Déficit de velocidade para diferentes níveis de gradiente de pressão

A figura mostra o déficit de velocidade na camada externa, observando-se como muda a região de trabalho da lei logarítmica com as variações do gradiente de pressão (favorável = 10,



adverso = -10 e nulo = -2). Para o gradiente adverso, um aumento da espesura da camada limite é observada pelo alto nível do déficit. Mas, para o gradiente favorável tem uma diminuição da camada limite pela aceleração do escoamento.

Dado que

$$F(\eta) = \frac{U_\infty - U}{u_*} \quad (61)$$

O perfil de velocidade adimensional  $U/U_\infty$  pode ser analisado em função de  $\eta$  como é mostrado no seguinte gráfico

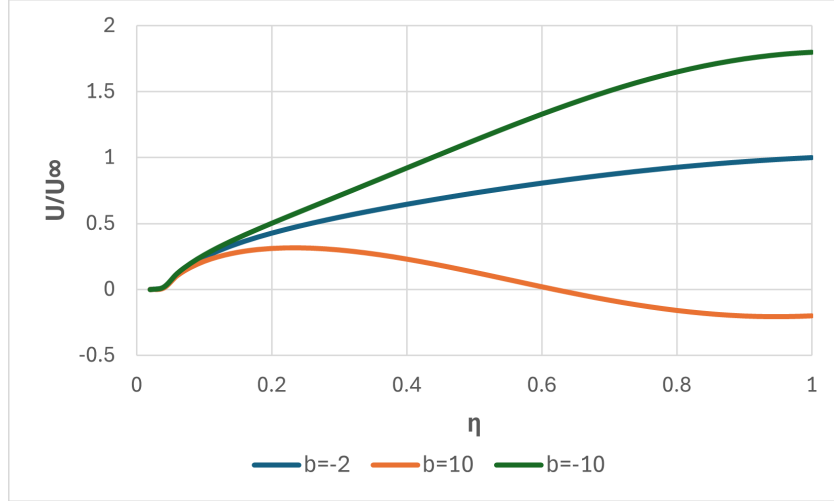


Figura 4: Perfil de velocidade para condições de gradiente nulo, favorável e adverso.

A curva de perfil sem gradiente de pressão (azul) mostra uma transição suave da parede para a camada externa. Para o gradiente favorável (verde), vemos como ele se achata para altos valores de  $\eta$  devido à aceleração do fluxo. Para o gradiente desfavorável, observa-se uma tendência a um déficit menor, com a pendente aumentando para altos valores de  $n$ .

Por último, quando  $b \rightarrow \infty$ , a condição de separação pode ser encontrada (para o exemplo mostrado  $b = 50$ ). O gradiente é casi nulo em regiões perto da parede e para altos valores de  $\eta$ , a separação da camada turbulente pode ser deducida.

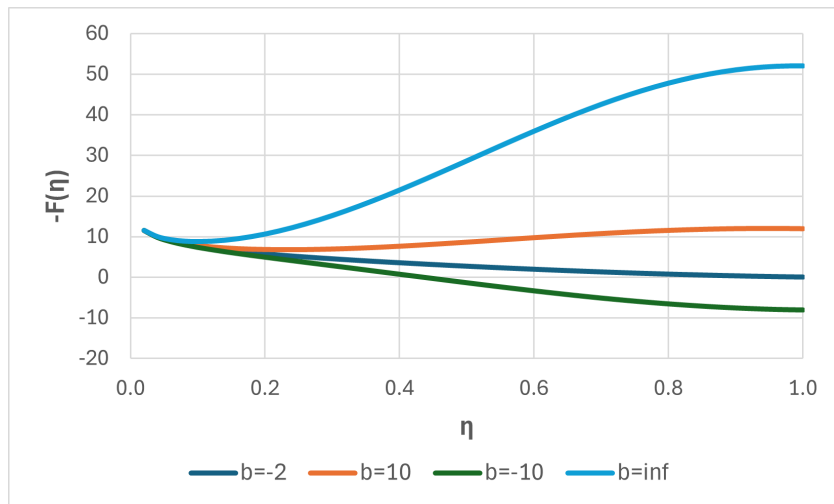


Figura 5: Déficit de velocidade para condições de separação, favorável e adversa.

## Referências

- [1] Cesar Deschamps, Escalas da turbulencia Cap 3. UFSC Florianopolis, SC, Notas de aula, 2025.
- [2] Adrian Bejan, Convection Heat Transfer. Durham, North Carolina, 3rd Edition, 2004.