



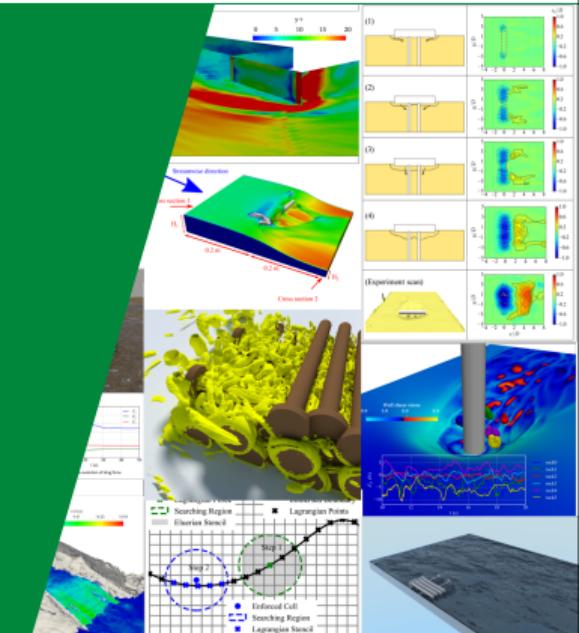
中国农业大学 流体机械与流体工程系

2023 年春季《计算流体力学编程实践》

第五章 湍流模型

徐云成

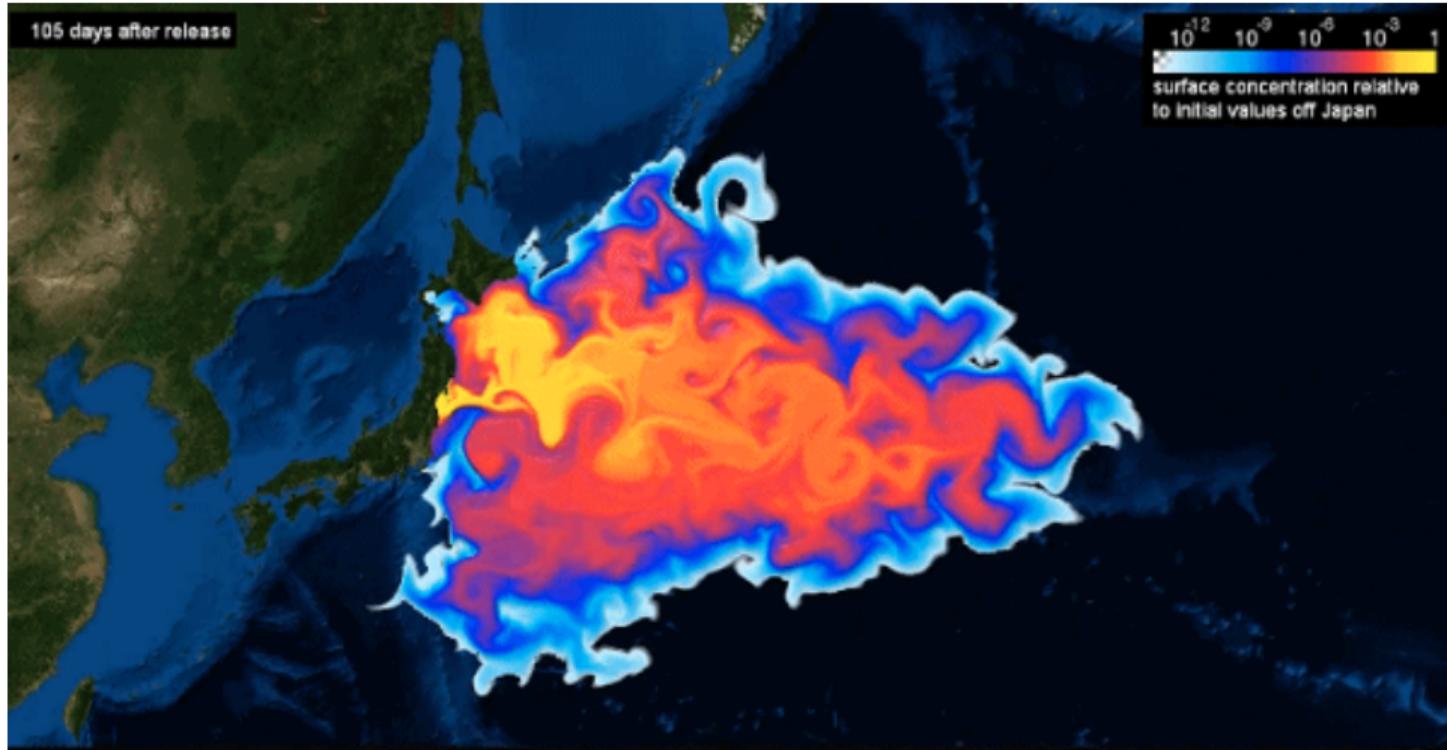
ycxu@cau.edu.cn



2023 年 3 月 27 日

什么是湍流？

2/45

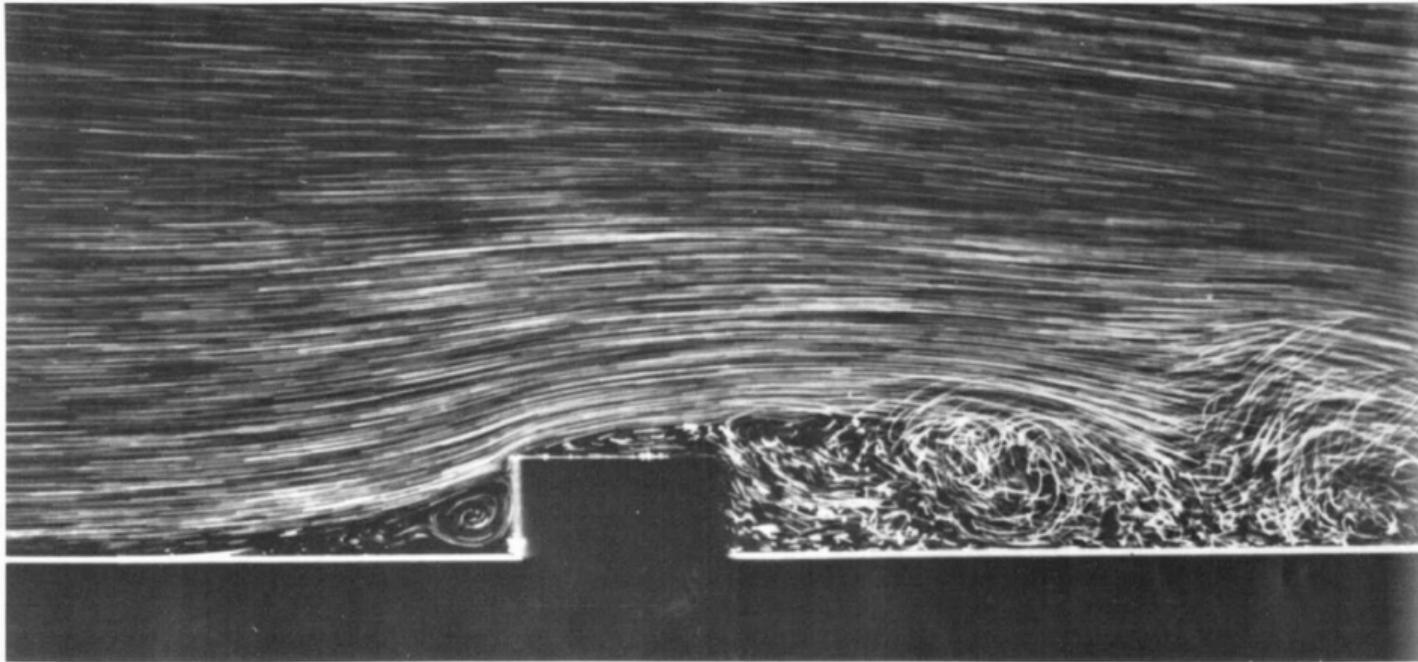


Model simulations on the long-term dispersal of Cs-137 released into the Pacific Ocean off Fukushima
Erik Behrens, Franziska U. Schwarzkopf, Joke F. Lübbecke and Claus W. Böning



什么是湍流?

3/45



39. Turbulent separation over a rectangular block on a plate. The step height is large compared with the thickness of the oncoming laminar boundary layer. The flow is effectively plane, so that the recirculating region

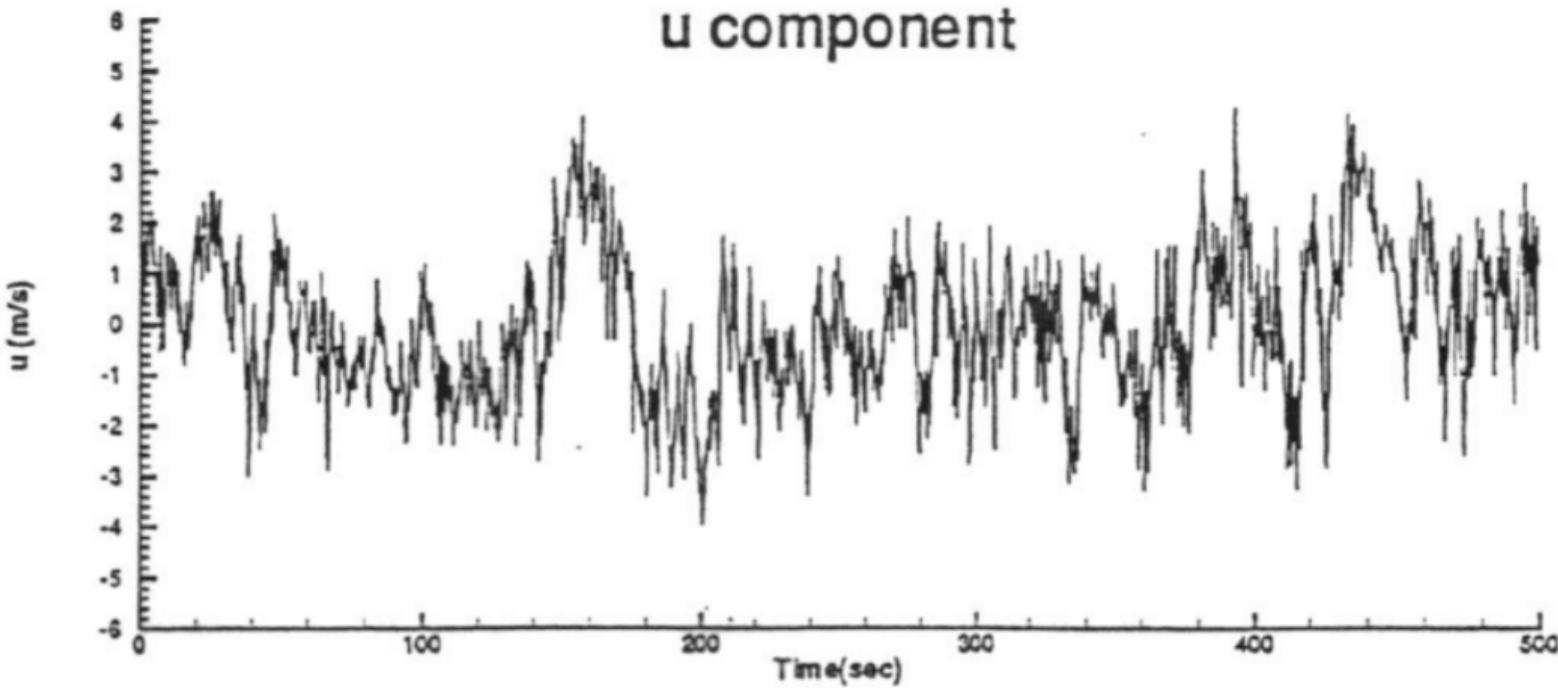
ahead of the step is closed, whereas in the corresponding three-dimensional flow of figure 92 it is open and drains around the sides. ONERA photograph, Werlé 1974

什么是湍流？

4/45



什么是湍流?



- ▶ 湍流是完全由纳维-斯托克斯方程控制
- ▶ 一个重要的参数是雷诺数

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1)$$

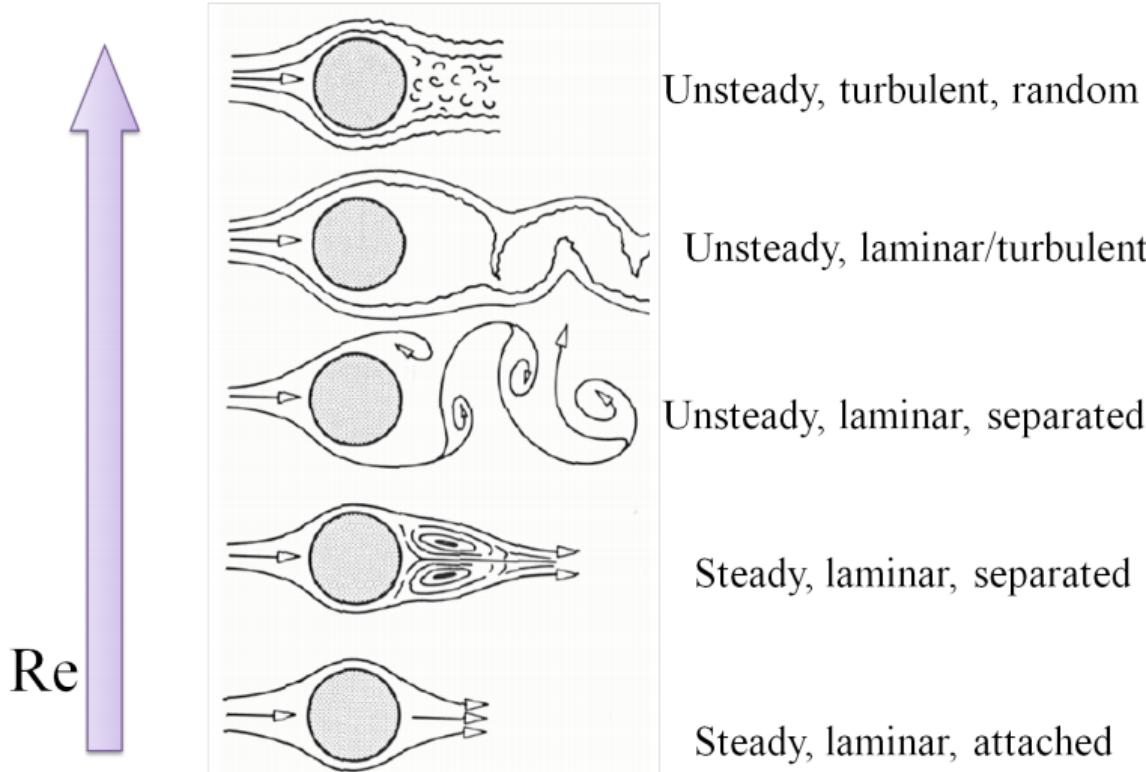
用于描述对流和扩散的相对重要性



湍流特征分类

7/45

雷诺数是关键，流体从层流状态 (laminar) 转变为湍流状态 (turbulent)



- ▶ 根据雷诺数得到的最小尺度：柯尔莫果洛夫空间尺度 Kolmogorov length scale

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (2)$$

柯尔莫果洛夫时间尺度 Kolmogorov time scale

$$\tau = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad (3)$$

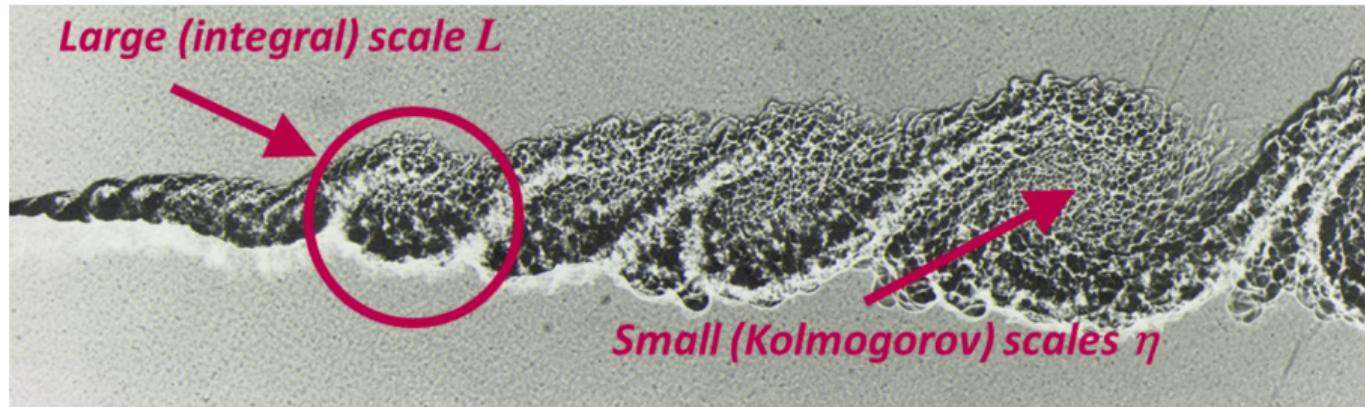
- ▶ 如果空间尺度是 $1m$, 速度是 $1m/s$, 水的运动粘性系数是 $10^{-6} m^2/s$, 那么估计的柯尔莫果洛夫空间尺度为 $30\mu m$, 时间尺度为 $1ms$
- ▶ 当前计算能力不足以捕捉高雷诺数下的所有空间尺度, 因此需要湍流模型 turbulence modeling



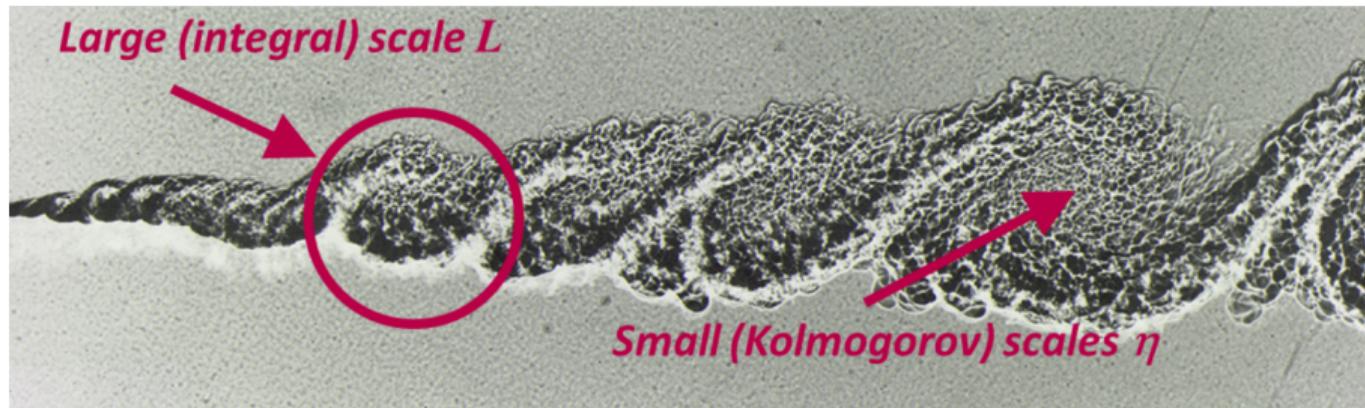
- ▶ 控制方程：是由 N-S 方程的非线性产生
- ▶ 湍流看似随机、无序，但是确实会存在相干结构 coherent structures
- ▶ 由于非线性，即使初始条件和边界条件是稳定的，流场仍可能进化成非稳态



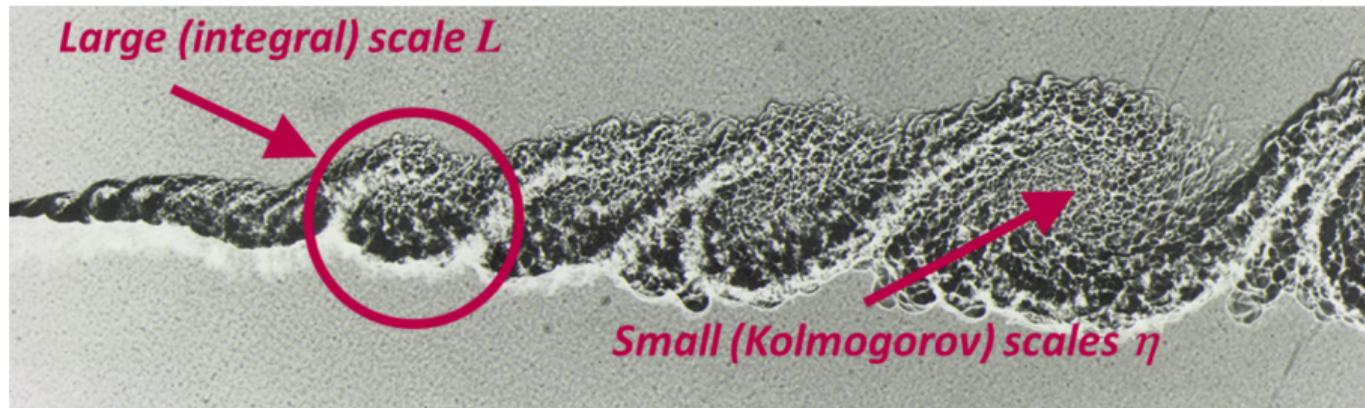
- ▶ 湍流中的能量主要在大尺度湍流结构
- ▶ 湍流中的能量传递主要依靠大尺度结构一级一级分成更小尺度（无耗散）(cascade)
- ▶ 当达到某一最小尺度（柯尔莫果洛夫尺度）时，速度梯度会足够大，以至于耗散大到足以阻尼掉更小尺度的产生。能量耗散率（energy dissipation rate） ϵ 是指单位体积单位时间内转变成热能的量。



- ▶ 湍流中的能量主要在大尺度湍流结构
- ▶ 湍流中的能量传递主要依靠大尺度结构一级一级分成更小尺度（无耗散）(cascade)
- ▶ 当达到某一最小尺度（柯尔莫果洛夫尺度）时，速度梯度会足够大，以至于耗散大到足以阻尼掉更小尺度的产生。能量耗散率（energy dissipation rate） ϵ 是指单位体积单位时间内转变成热能的量。



- ▶ 湍流中的能量主要在大尺度湍流结构
- ▶ 湍流中的能量传递主要依靠大尺度结构一级一级分成更小尺度（无耗散）(cascade)
- ▶ 当达到某一最小尺度（柯尔莫果洛夫尺度）时，速度梯度会足够大，以至于耗散大到足以阻尼掉更小尺度的产生。能量耗散率（energy dissipation rate） ϵ 是指单位体积单位时间内转变成热能的量。

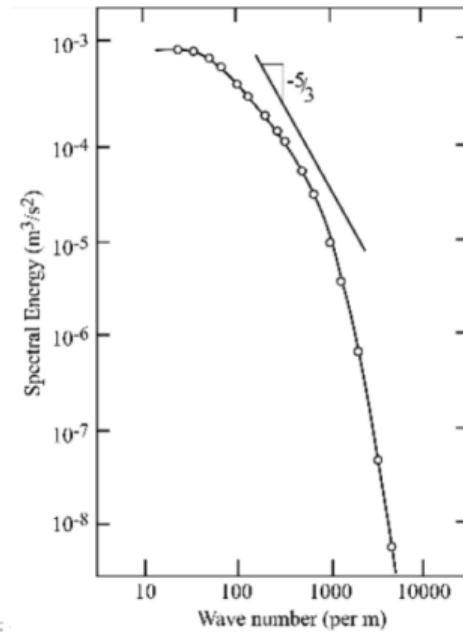
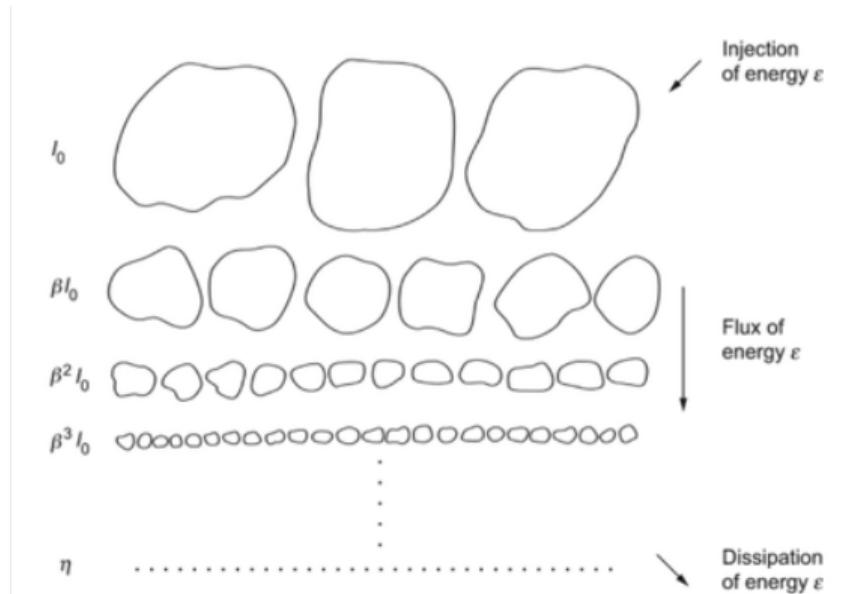


能量分级 energy cascade

1/45

K41 Theory (Kolmogorov 1941 Theory)

能谱 spectral energy $E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$, $k = 2\pi/\lambda$, 其中 k 是波数 (wave number), λ 是波长 (wave length) 也是湍流结构尺度

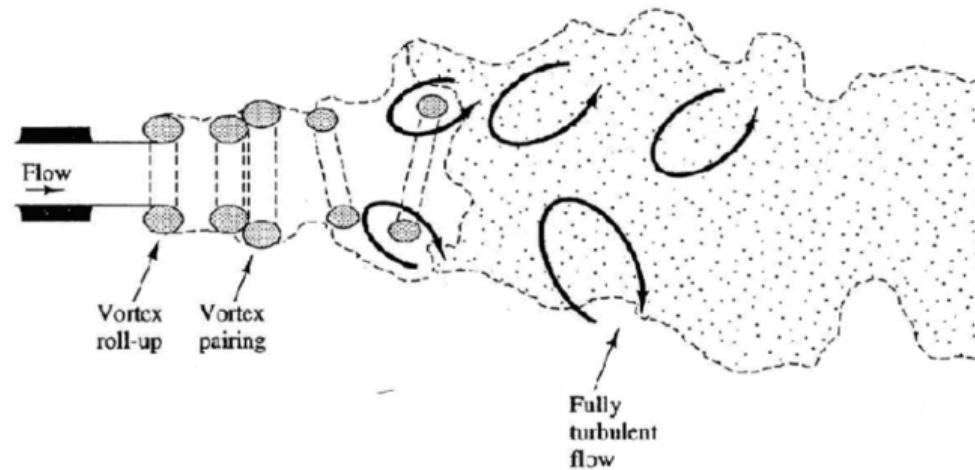


- ▶ 大尺度涡 (large eddies) 一般是非均匀分布的，流动在不同方向上的波动不同，受到问题边界条件的影响
- ▶ 小尺度涡 (small eddies) 更趋向于均匀分布 (homogeneous) 和各向同性 (isotropic)

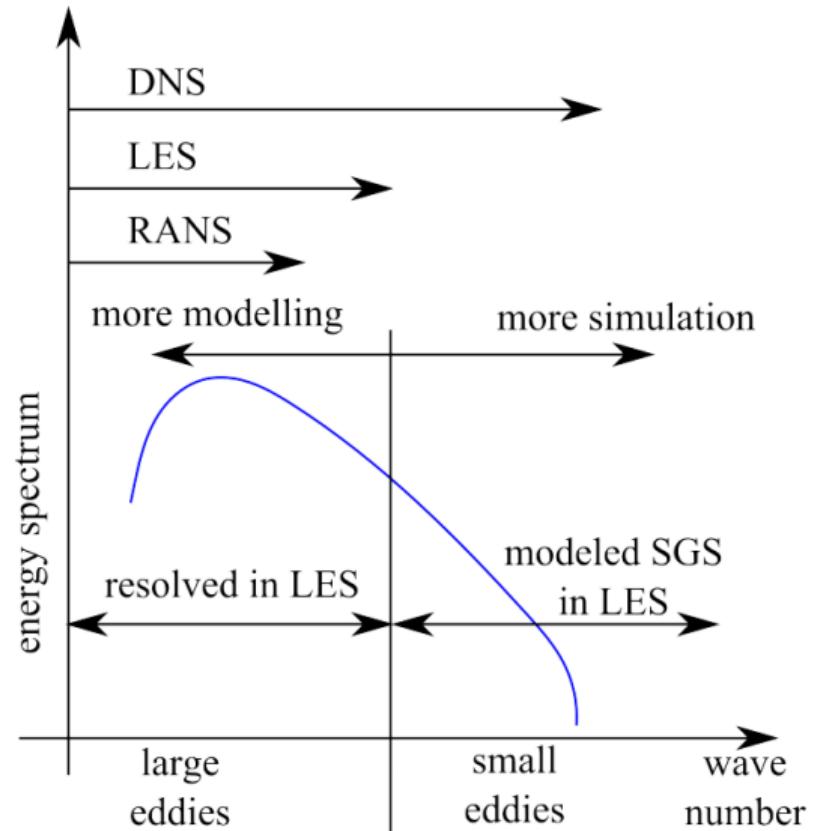


转捩是指流动从层流过渡到湍流

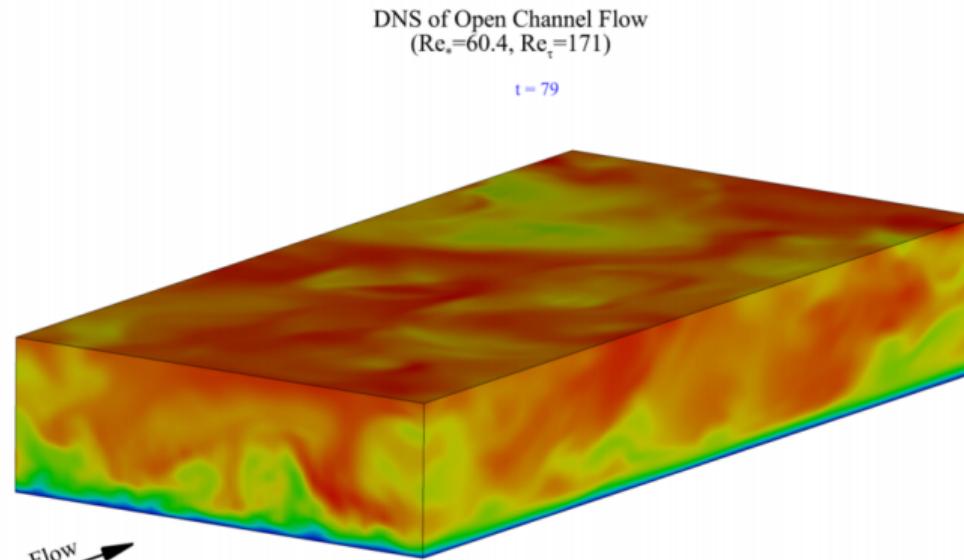
- 当流动产生小扰动时，转捩开始发生
- 许多 CFD 代码一般都不考虑转捩，通常把流动分为层流和湍流



- ▶ 如果能量较大（雷诺数较大），模拟会非常困难
- ▶ 三种基本方法：
 - Direct Numerical Simulation (DNS)
直接数值模拟
 - Large Eddy Simulation (LES)
大涡模拟
 - Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations (RANS) 雷诺平均方程
- ▶ 右图横坐标跟网格尺度的倒数相关



- ▶ 模拟 (simulate) 所有时、空间尺度，没有任何模化 (modeling)
- ▶ 网格要求 $B \sim (Re)^{9/4}$ ，时间步长要求 $\Delta t \sim (Re)^{-1/2}$
- ▶ 目前只能模拟中低雷诺数流动问题
- ▶ 主要用于一些几何相对简单的基础性研究
- ▶ 还用于搜集模型验证数据，以及一些重要湍流作用的理解



- ▶ 较大尺度涡取决于计算域边界
- ▶ 较小尺度涡受边界影响较小
- ▶ 小尺度涡是各项同性 (isotropic)、均匀分布 (homogenous) 的，所以更好模拟 (model)
- ▶ LES 的思想：求解 (resolve) 大尺度涡，模拟 (model) 小尺度涡



雷诺平均方程

雷诺分解 Reynolds decomposition:

- ▶ 速度、压力还有一些其它结果变量可以分解成平均部分 (mean) 和波动部分 (fluctuating)

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

$$C = \bar{C} + C'$$

- ▶ 将上述等式带入 N-S 方程，消去带有平均的二阶项 ($\bar{\mathbf{u}}$, \bar{p} , \bar{C})

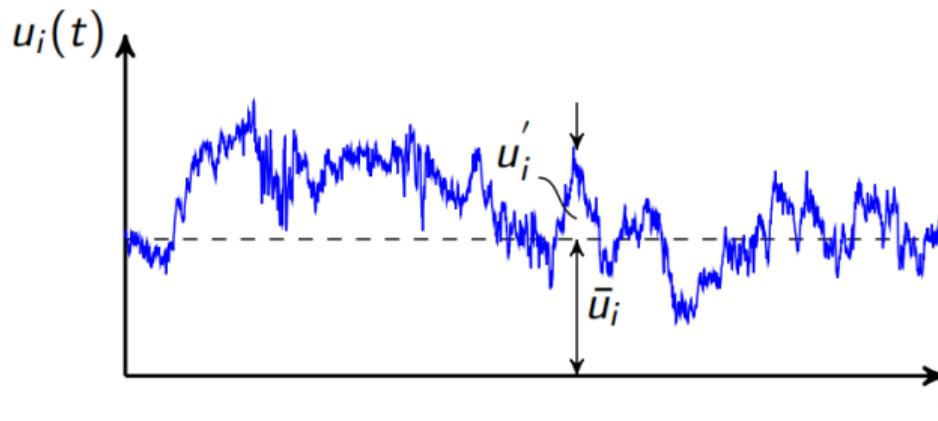




$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_i dt \quad (4)$$

其中 t_0 是任意时刻, T 是取平均的时间段, 一般而言 T 需要足够大

- ▶ 雷诺分解: $u_i = \bar{u}_i + u'_i$
其中 u'_i 是 u_i 的波动部分

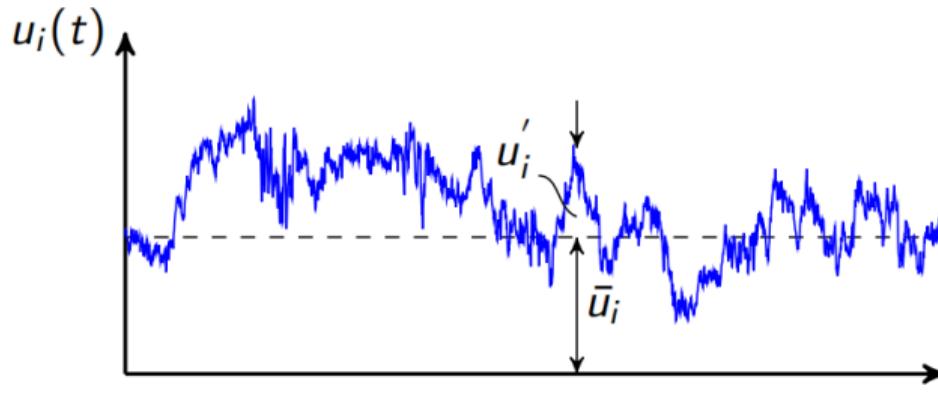




$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_i dt \quad (4)$$

其中 t_0 是任意时刻, T 是取平均的时间段, 一般而言 T 需要足够大

- 雷诺分解: $u_i = \bar{u}_i + u'_i$
其中 u'_i 是 u_i 的波动部分



如果 f 和 g 是任意量, a 是常数, 以下雷诺条件成立:

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{af} = a\bar{f}, \quad \overline{a} = a$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, \quad \overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}, \quad \overline{\bar{f}} = \bar{f}$$

$$\overline{f'} = 0, \quad \overline{\bar{f}\bar{g}} = \bar{f}\bar{g}, \quad \overline{\bar{f}h'} = \bar{f}\bar{h}' = 0$$



方差:

$$\overline{(f')^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (f')^2 dt$$

均方根:

$$f_{rms} = \sqrt{\overline{(f')^2}}$$

速度分量的均方根是有实际意义的，用于代表速度的平均波动强度
由此可得到 $\overline{(u')^2}, \overline{(v')^2}, \overline{(w')^2}$ ，与由湍流涡引起的动量成比例关系



TKE (turbulence kinetic energy):

$$k = \frac{1}{2} \left[\overline{(u')^2} + \overline{(v')^2} + \overline{(w')^2} \right] \quad (5)$$

湍流强度 (Turbulence intensity) T_i 是由均方根速度的平均值除以参考速度:

$$T_i = \frac{\left(\frac{2}{3}k\right)^{1/2}}{U_{ref}} \quad (6)$$



$$\overline{f'g'} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'g' dt \quad (7)$$

- ▶ 能反映一些流场结构的重要特征
- ▶ 如果 f' 和 g' 相互独立、不相干，那么 $\overline{f'g'} = 0$
- ▶ 虽然湍流中的涡结构以及由此引起的速度是杂乱无序的 (chaotic)，但却不是相互独立的，因此 $\overline{u'v'}$ 、 $\overline{u'w'}$ 、 $\overline{v'w'}$ 不为零 (雷诺切应力 Reynolds shear stress)



$$\overline{f'g'} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'g' dt \quad (7)$$

- ▶ 能反映一些流场结构的重要特征
- ▶ 如果 f' 和 g' 相互独立、不相干，那么 $\overline{f'g'} = 0$
- ▶ 虽然湍流中的涡结构以及由此引起的速度是杂乱无序的 (chaotic)，但却不是相互独立的，因此 $\overline{u'v'}$ 、 $\overline{u'w'}$ 、 $\overline{v'w'}$ 不为零 (雷诺切应力 Reynolds shear stress)



$$\overline{f'g'} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'g' dt \quad (7)$$

- ▶ 能反映一些流场结构的重要特征
- ▶ 如果 f' 和 g' 相互独立、不相干，那么 $\overline{f'g'} = 0$
- ▶ 虽然湍流中的涡结构以及由此引起的速度是杂乱无序的 (chaotic)，但却不是相互独立的，因此 $\overline{u'v'}$ 、 $\overline{u'w'}$ 、 $\overline{v'w'}$ 不为零 (雷诺切应力 Reynolds shear stress)



$$\overline{f'g'} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'g' dt \quad (7)$$

- ▶ 能反映一些流场结构的重要特征
- ▶ 如果 f' 和 g' 相互独立、不相干，那么 $\overline{f'g'} = 0$
- ▶ 虽然湍流中的涡结构以及由此引起的速度是杂乱无序的 (chaotic)，但却不是相互独立的，因此 $\overline{u'v'}$ 、 $\overline{u'w'}$ 、 $\overline{v'w'}$ 不为零 (雷诺切应力 Reynolds shear stress)



偏度，用于度量平均值附近波动的非对称性：

$$\text{skewness : } \overline{(f')^3} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (f')^3 dt \quad (8)$$

峰度/峰态系数，用于度量波动的间歇性/平整度：

$$\text{kurtosis/peakedness : } \overline{(f')^4} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (f')^4 dt \quad (9)$$



同一位置在时间上的自相关函数 (autocorrelation):

$$R_{f'f'}(\tau) = \overline{f'(t)f'(t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'(t)f'(t + \tau) dt \quad (10)$$

不同位置的相关函数 (correlation):

$$R_{f'f'}(\xi) = \overline{f'(\mathbf{x}, t)f'(\mathbf{x} + \xi, t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'(\mathbf{x}, t)f'(\mathbf{x} + \xi, t) dt \quad (11)$$

- ▶ 当时间长度 τ 或者位移 ξ 为零时, $R_{f'f'}(0)$ 代表方差, 值最大, 因为与自身完美相关
- ▶ 当时间或空间距离趋向于无穷时, 即 $R_{f'f'}(\tau \rightarrow \infty)$ 和 $R_{f'f'}(\xi \rightarrow \infty)$, 波动将会变得去相干化 (de-correlated)



同一位置在时间上的自相关函数 (autocorrelation):

$$R_{f'f'}(\tau) = \overline{f'(t)f'(t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'(t)f'(t + \tau) dt \quad (10)$$

不同位置的相关函数 (correlation):

$$R_{f'f'}(\xi) = \overline{f'(\mathbf{x}, t)f'(\mathbf{x} + \xi, t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'(\mathbf{x}, t)f'(\mathbf{x} + \xi, t) dt \quad (11)$$

- ▶ 当时间长度 τ 或者位移 ξ 为零时, $R_{f'f'}(0)$ 代表方差, 值最大, 因为与自身完美相关
- ▶ 当时间或空间距离趋向于无穷时, 即 $R_{f'f'}(\tau \rightarrow \infty)$ 和 $R_{f'f'}(\xi \rightarrow \infty)$, 波动将会变得去相干化 (de-correlated)



同一位置在时间上的自相关函数 (autocorrelation):

$$R_{f'f'}(\tau) = \overline{f'(t)f'(t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'(t)f'(t + \tau) dt \quad (10)$$

不同位置的相关函数 (correlation):

$$R_{f'f'}(\xi) = \overline{f'(\mathbf{x}, t)f'(\mathbf{x} + \xi, t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'(\mathbf{x}, t)f'(\mathbf{x} + \xi, t) dt \quad (11)$$

- ▶ 当时间长度 τ 或者位移 ξ 为零时, $R_{f'f'}(0)$ 代表方差, 值最大, 因为与自身完美相关
- ▶ 当时间或空间距离趋向于无穷时, 即 $R_{f'f'}(\tau \rightarrow \infty)$ 和 $R_{f'f'}(\xi \rightarrow \infty)$, 波动将会变得去相干化 (de-correlated)



同一位置在时间上的自相关函数 (autocorrelation):

$$R_{f'f'}(\tau) = \overline{f'(t)f'(t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'(t)f'(t + \tau) dt \quad (10)$$

不同位置的相关函数 (correlation):

$$R_{f'f'}(\xi) = \overline{f'(\mathbf{x}, t)f'(\mathbf{x} + \xi, t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f'(\mathbf{x}, t)f'(\mathbf{x} + \xi, t) dt \quad (11)$$

- ▶ 当时间长度 τ 或者位移 ξ 为零时, $R_{f'f'}(0)$ 代表方差, 值最大, 因为与自身完美相关
- ▶ 当时间或空间距离趋向于无穷时, 即 $R_{f'f'}(\tau \rightarrow \infty)$ 和 $R_{f'f'}(\xi \rightarrow \infty)$, 波动将会变得去相干化 (de-correlated)
- ▶ 此外, 还可以定义交叉相关 (cross-correlation) $R_{f'g'}(\tau)$ 和 $R_{f'g'}(\xi)$



$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

也就是

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (13)$$

取平均后得到

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (14)$$

根据雷诺分解可得

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = \frac{\partial u'_i}{\partial x'_i} = 0 \quad (15)$$

波动部分的散度也为零 (divergence free)



将 $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ 和 $p = \bar{p} + p'$ 代入动量方程得到雷诺方程

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}') - \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p} \quad (16)$$

其中，非线性项 $\overline{u_i u_j}$ 可简化为

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j + u'_i u'_j} = \overline{u_i \bar{u}_j} + \overline{u'_i u'_j}$$

- ▶ $\overline{u_i u_j}$ 也被称为雷诺应力项 Reynolds stress term，这是额外的项，需要进行模化，代表瞬时的对流效应



- ▶ $\overline{u'_i u'_j}$ 是一个具有 9 个分量的张量
- ▶ $\overline{u'_i u'_j}$ 一般具有对称性 symmetrical, 相当于只有 6 个变量
OpenFOAM[®] 一般用 R 表示雷诺应力, 其中包含 6 个分量

▶

$$-\overline{u'_i u'_j} = \begin{bmatrix} -\overline{u'_1 u'_1} & -\overline{u'_1 u'_2} & -\overline{u'_1 u'_3} \\ -\overline{u'_2 u'_1} & -\overline{u'_2 u'_2} & -\overline{u'_2 u'_3} \\ -\overline{u'_3 u'_1} & -\overline{u'_3 u'_2} & -\overline{u'_3 u'_3} \end{bmatrix} \quad (17)$$



- ▶ 雷诺方程

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p}$$

目前有 10 个未知量 (3 个速度分量 \bar{u}_i , 压力 \bar{p} , 6 个雷诺应力分量 $-\bar{u}'_i u'_j$)

- ▶ 但是只有 4 个方程 (1 个连续性方程, 3 个动量方程), 因此系统是不闭合的 (the system is not closed)
- ▶ 我们把这一类问题叫做湍流的闭合问题 (closure problem of turbulence)
- ▶ 大多数湍流模型的思想: 将雷诺应力与时均流场信息相联系
- ▶ 一般至少由两种方法:
 1. 布辛涅司克近似 (Boussinesq approximation): $\bar{u}'_i u'_j$ 模化为速度梯度 $\nabla \mathbf{u}$ 的函数
 2. 雷诺应力输运方程: 推导并求解 $\bar{u}'_i u'_j$ 的输运方程。但这种方法由于引入了一些新的项, 其实不能完全解决闭合问题



- ▶ 雷诺方程

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p}$$

目前有 10 个未知量 (3 个速度分量 \bar{u}_i , 压力 \bar{p} , 6 个雷诺应力分量 $-\bar{u}'_i u'_j$)

- ▶ 但是只有 4 个方程 (1 个连续性方程, 3 个动量方程), 因此系统是不闭合的 (the system is not closed)
- ▶ 我们把这一类问题叫做湍流的闭合问题 (closure problem of turbulence)
- ▶ 大多数湍流模型的思想: 将雷诺应力与时均流场信息相联系
- ▶ 一般至少由两种方法:
 1. 布辛涅司克近似 (Boussinesq approximation): $\bar{u}'_i u'_j$ 模化为速度梯度 $\nabla \mathbf{u}$ 的函数
 2. 雷诺应力输运方程: 推导并求解 $\bar{u}'_i u'_j$ 的输运方程。但这种方法由于引入了一些新的项, 其实不能完全解决闭合问题



- ▶ 雷诺方程

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p}$$

目前有 10 个未知量 (3 个速度分量 \bar{u}_i , 压力 \bar{p} , 6 个雷诺应力分量 $-\bar{u}'_i u'_j$)

- ▶ 但是只有 4 个方程 (1 个连续性方程, 3 个动量方程), 因此系统是不闭合的 (the system is not closed)
- ▶ 我们把这一类问题叫做湍流的闭合问题 (closure problem of turbulence)
- ▶ 大多数湍流模型的思想: 将雷诺应力与时均流场信息相联系
- ▶ 一般至少由两种方法:
 1. 布辛涅司克近似 (Boussinesq approximation): $\bar{u}'_i u'_j$ 模化为速度梯度 $\nabla \mathbf{u}$ 的函数
 2. 雷诺应力输运方程: 推导并求解 $\bar{u}'_i u'_j$ 的输运方程。但这种方法由于引入了一些新的项, 其实不能完全解决闭合问题



- ▶ 雷诺方程

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p}$$

目前有 10 个未知量 (3 个速度分量 \bar{u}_i , 压力 \bar{p} , 6 个雷诺应力分量 $-\bar{u}'_i u'_j$)

- ▶ 但是只有 4 个方程 (1 个连续性方程, 3 个动量方程), 因此系统是不闭合的 (the system is not closed)
- ▶ 我们把这一类问题叫做湍流的闭合问题 (closure problem of turbulence)
- ▶ 大多数湍流模型的思想: 将雷诺应力与时均流场信息相联系
- ▶ 一般至少由两种方法:
 1. 布辛涅司克近似 (Boussinesq approximation): $\bar{u}'_i u'_j$ 模化为速度梯度 $\nabla \mathbf{u}$ 的函数
 2. 雷诺应力输运方程: 推导并求解 $\bar{u}'_i u'_j$ 的输运方程。但这种方法由于引入了一些新的项, 其实不能完全解决闭合问题

- ▶ 雷诺方程

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p}$$

目前有 10 个未知量 (3 个速度分量 \bar{u}_i , 压力 \bar{p} , 6 个雷诺应力分量 $-\bar{u}'_i u'_j$)

- ▶ 但是只有 4 个方程 (1 个连续性方程, 3 个动量方程), 因此系统是不闭合的 (the system is not closed)
- ▶ 我们把这一类问题叫做湍流的闭合问题 (closure problem of turbulence)
- ▶ 大多数湍流模型的思想: 将雷诺应力与时均流场信息相联系
- ▶ 一般至少由两种方法:
 1. 布辛涅司克近似 (Boussinesq approximation): $\bar{u}'_i u'_j$ 模化为速度梯度 $\nabla \mathbf{u}$ 的函数
 2. 雷诺应力输运方程: 推导并求解 $\bar{u}'_i u'_j$ 的输运方程。但这种方法由于引入了一些新的项, 其实不能完全解决闭合问题



- ▶ 雷诺方程

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p}$$

目前有 10 个未知量 (3 个速度分量 \bar{u}_i , 压力 \bar{p} , 6 个雷诺应力分量 $-\bar{u}'_i u'_j$)

- ▶ 但是只有 4 个方程 (1 个连续性方程, 3 个动量方程), 因此系统是不闭合的 (the system is not closed)
- ▶ 我们把这一类问题叫做湍流的闭合问题 (closure problem of turbulence)
- ▶ 大多数湍流模型的思想: 将雷诺应力与时均流场信息相联系
- ▶ 一般至少由两种方法:
 1. 布辛涅斯克近似 (Boussinesq approximation): $\bar{u}'_i u'_j$ 模化为速度梯度 $\nabla \mathbf{u}$ 的函数
 2. 雷诺应力输运方程: 推导并求解 $\bar{u}'_i u'_j$ 的输运方程。但这种方法由于引入了一些新的项, 其实不能完全解决闭合问题



- ▶ Algebraic models (代数模型)
- ▶ Turbulence-energy equation models (湍流-能量方程模型)
- ▶ 其他模拟技术，比如 DNS, LES, DES



雷诺应力通常表示为湍流粘性系数 (turbulence viscosity/eddy viscosity) 和平均应变率 (mean strain rate) 的乘积。这种方法称为布辛涅司克湍流粘性系数近似 (Boussinesq eddy-viscosity approximation)：

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \nu_t \frac{1}{2} [\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T] \quad (18)$$

其中 ν_t 是湍流粘性系数，OpenFOAM[®] 中常用nut 表示代数模型：

- ▶ 是最简单的模型，一般也叫零方程模型 zero-equation models
- ▶ ν_t 一般需要进行模化
- ▶ 代数模型中，不需要额外方程来求解 ν_t ，是直接从流场变量中计算得到
- ▶ 缺点：对于复杂流动而言太简单，而且不具有记忆性
- ▶ OpenFOAM[®] 没有代数模型



雷诺应力通常表示为湍流粘性系数 (turbulence viscosity/eddy viscosity) 和平均应变率 (mean strain rate) 的乘积。这种方法称为布辛涅司克湍流粘性系数近似 (Boussinesq eddy-viscosity approximation)：

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \nu_t \frac{1}{2} [\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T] \quad (18)$$

其中 ν_t 是湍流粘性系数，OpenFOAM[®] 中常用nut 表示代数模型：

- ▶ 是最简单的模型，一般也叫零方程模型 zero-equation models
- ▶ ν_t 一般需要进行模化
- ▶ 代数模型中，不需要额外方程来求解 ν_t ，是直接从流场变量中计算得到
- ▶ 缺点：对于复杂流动而言太简单，而且不具有记忆性
- ▶ OpenFOAM[®] 没有代数模型



- ▶ 同样也用到了 Boussinesq approximation, 需模化 ν_t
- ▶ ν_t 来自于湍动能 (tke) $k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}$
- ▶ 两种湍流-能量方程模型
 - one-equation model: Prandtl' s one-equation model, Spalart-Allmaras model 等
 - two-equation model: $k - \epsilon$, $k - \omega$ 等



- ▶ 为解决零方程模型的一些缺陷，比如没有记忆性
- ▶ 单方程湍流模型通常只求解一个湍流输运方程，一般是湍动能 k

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}k) = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_j u'_j u'_i} + \overline{p' u'_i} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} - \epsilon \quad (19)$$

其中

$$\frac{1}{2} \overline{u'_j u'_j u'_i} + \overline{p' u'_i} \approx -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (20)$$

$$\epsilon \approx C^* \frac{k^{3/2}}{l} \quad (21)$$

- ▶ $\nu_t = \frac{\sqrt{k}}{l}$

- ▶ 这个是 Prandtl's one-equation model，缺点是不好确定空间尺度 l



OpenFOAM® 中的 Spalart-Allmaras (SA) 湍流模型, 用近似粘性系数 $\tilde{\nu}$ (nuTilda) 表示, $\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$, 也需要定义一个空间尺度 d , 离最近边界距离:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma_{\nu_t}} \left\{ \nabla \cdot [(\tilde{\nu} + \nu) \nabla \tilde{\nu}] + C_{b2} |\nabla \tilde{\nu}|^2 \right\} + C_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} - C_{w1} f_w \frac{\tilde{\nu}}{d^2} \tilde{\nu} \quad (22)$$

其中

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad f_{v2} = 1.0 - \frac{\chi}{1.0 + \chi f_{v1}}$$

$$\tilde{S} = \max \left(\Omega + \frac{f_{v2} \tilde{\nu}}{\kappa d}, C_s \Omega \right), \quad \Omega = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\nabla U - \nabla U^T) \right|$$

$$r = \min \left(\frac{\tilde{\nu}}{\max(\tilde{S}, 0.0) \kappa^2 d^2}, 10.0 \right), \quad g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad f_w = g \left[\frac{1.0 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}$$



- ▶ 改进 one-equation model，例如避免计算空间尺寸
- ▶ 引入另一个湍流变量来确定空间尺度 l
- ▶ 比较常见的第二湍流变量是耗散率 ϵ ，也就是著名的 $k - \epsilon$ 模型
- ▶ 另一个第二湍流变量 ω ，也是耗散率 specific dissipation rate，形成 $k - \omega$ 模型
- ▶ ϵ 和 ω (包括 k) 的输运方程可以从 NS 方程中推导出来



- ▶ 改进 one-equation model，例如避免计算空间尺寸
- ▶ 引入另一个湍流变量来确定空间尺度 l
- ▶ 比较常见的第二湍流变量是耗散率 ϵ ，也就是著名的 $k - \epsilon$ 模型
- ▶ 另一个第二湍流变量 ω ，也是耗散率 specific dissipation rate，形成 $k - \omega$ 模型
- ▶ ϵ 和 ω (包括 k) 的输运方程可以从 NS 方程中推导出来



- ▶ 改进 one-equation model，例如避免计算空间尺寸
- ▶ 引入另一个湍流变量来确定空间尺度 l
- ▶ 比较常见的第二湍流变量是耗散率 ϵ ，也就是著名的 $k - \epsilon$ 模型
- ▶ 另一个第二湍流变量 ω ，也是耗散率 specific dissipation rate，形成 $k - \omega$ 模型
- ▶ ϵ 和 ω (包括 k) 的输运方程可以从 NS 方程中推导出来



- ▶ 改进 one-equation model，例如避免计算空间尺寸
- ▶ 引入另一个湍流变量来确定空间尺度 l
- ▶ 比较常见的第二湍流变量是耗散率 ϵ ，也就是著名的 $k - \epsilon$ 模型
- ▶ 另一个第二湍流变量 ω ，也是耗散率 specific dissipation rate，形成 $k - \omega$ 模型
- ▶ ϵ 和 ω (包括 k) 的输运方程可以从 NS 方程中推导出来



- ▶ 改进 one-equation model，例如避免计算空间尺寸
- ▶ 引入另一个湍流变量来确定空间尺度 l
- ▶ 比较常见的第二湍流变量是耗散率 ϵ ，也就是著名的 $k - \epsilon$ 模型
- ▶ 另一个第二湍流变量 ω ，也是耗散率 specific dissipation rate，形成 $k - \omega$ 模型
- ▶ ϵ 和 ω (包括 k) 的输运方程可以从 NS 方程中推导出来



- ▶ 改进 one-equation model，例如避免计算空间尺寸
- ▶ 引入另一个湍流变量来确定空间尺度 l
- ▶ 比较常见的第二湍流变量是耗散率 ϵ ，也就是著名的 $k - \epsilon$ 模型
- ▶ 另一个第二湍流变量 ω ，也是耗散率 specific dissipation rate，形成 $k - \omega$ 模型
- ▶ ϵ 和 ω (包括 k) 的输运方程可以从 NS 方程中推导出来



$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}k) - \nabla \cdot \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_k} \nabla k \right) = G - \epsilon$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\epsilon) - \nabla \cdot \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right) = C_1 G \frac{\epsilon}{k} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k}$$

其中

$$\nu_t = C\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \nu_t \frac{1}{2} [\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T], \quad G = 2\nu_t \nabla |\bar{\mathbf{u}}|$$

$$C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad C_3 = 0.33, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$



▶ 优点

- 适用范围广，常数已经调参好，可以使用一些常规情景
- 直接计算时均值，不需要额外的时间平均，模型能够进行稳态计算
- 如果时间平均后流动是二维的，可以只进行二维计算
- 模型的方程不多，常数参数也不多

▶ 缺点

- 假设雷诺应力与速度梯度相关，严格意义上不正确（所有 RANS 模型都有这个假设）
- 无法模拟一些特定情况流动，比如明渠流动在横截面上的二次流动
- 也不能模拟转捩过程



▶ 优点

- 适用范围广，常数已经调参好，可以使用一些常规情景
- 直接计算时均值，不需要额外的时间平均，模型能够进行稳态计算
- 如果时间平均后流动是二维的，可以只进行二维计算
- 模型的方程不多，常数参数也不多

▶ 缺点

- 假设雷诺应力与速度梯度相关，严格意义上不正确（所有 RANS 模型都有这个假设）
- 无法模拟一些特定情况流动，比如明渠流动在横截面上的二次流动
- 也不能模拟转捩过程



- ▶ 总的来说， $k - \epsilon$ 模型是一个非常经典的湍流模型，在工业领域有着非常广泛的应用，但其局限性也很明确（尤其是在研究领域）
- ▶ 有一些改进模型
 - Realisable k-epsilon model
 - RNG k-epsilon model



The $k - \omega$ Model (Wilcox, 1988):

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (23)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}k) = \nabla \cdot [(\nu + \sigma^* \nu_t) \nabla k] + P_k - \beta^* k \omega \quad (24)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\omega) = \nabla \cdot [(\nu + \sigma \nu_t) \nabla \omega] + P_\omega - \beta \omega^2 \quad (25)$$

$$P_k = \nu_t |\mathbf{S}|, \quad P_\omega = \alpha \frac{\omega}{k} P_k$$

$$\alpha = \frac{5}{9}, \quad \beta = \frac{3}{40}, \quad \beta^* = \frac{9}{100}, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \sigma^* = \frac{1}{2}, \quad \epsilon = \beta^* \omega k$$



- ▶ SST 代表 shear stress transport model
- ▶ $k - \omega$ SST 仍旧是一个 two-equation eddy-viscosity model
- ▶ 包括了 eddy-viscosity model 和 SST 模型
 - $k - \omega$ 确保近壁附近边界层内部计算准确
 - 在远离避免时，变成 $k - \epsilon$ 计算，确保准确性
 - $k - \omega$ SST 可以很好的模拟反向压力梯度和分离流动稳态
- ▶ $k - \omega$ SST 存在问题：
 - 在正应变较大的地方产生的湍流强度过大，比如 stagnation regions 以及加速度较大的区域，反而 $k - \epsilon$ 会更好一些



$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}k) = \nabla \cdot [(\nu + \sigma_k \nu_t) \nabla k] + P_k - \beta^* k \omega \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\omega) &= \nabla \cdot [(\nu + \sigma_{\omega 1} \nu_t) \nabla \omega] + P_\omega - \beta \omega^2 \\ &\quad + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \nabla \omega \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{kw} y^2} \right] \right\}^4 \right\} \quad (28)$$

$$P_k = \min (\nu_t |\mathbf{S}|, 10\beta^* k \omega), \quad P_\omega = \alpha |\mathbf{S}|^2, \quad CD_{kw} = (\sigma_{\omega 2} \omega^{-1} \nabla k \nabla \omega, 10^{-10})$$

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, |\mathbf{S}| F_2)}, \quad F_2 = \tanh \left[\left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right]$$



对于任意一个 C , 存在雷诺分离

$$C = \bar{C} + C'$$

代入雷诺输运方程得到

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{C}) = \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{C}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}' C')$$

其中

$$-\bar{\mathbf{u}}' C' = \begin{bmatrix} -\bar{u_1}' C' \\ -\bar{u_2}' C' \\ -\bar{u_3}' C' \end{bmatrix}$$



- ▶ 近壁面通常含有高梯度，例如很薄的边界层、快速变化的 k 、 ϵ
- ▶ 普通边界条件不能模拟
- ▶ 一般需要使用壁面函数，具体的数学过程在《边界条件》会讲



需要考虑 ν_t 、 k 、 ϵ 、 ω 的壁面函数
相关源文件放在

```
src/MomentumTransportModels/momentumTransportModels/  
derivedFvPatchFields/wallFunctions
```



- ▶ nut (核心设置)
 - nutkWallFunction 和 nutUWallFunction 等效, 一般要求 $y^+ > 30$
 - nutUSpaldingWallFunction, y^+ 适应性较好
 - nutkRoughWallFunction 和 nutURoughWallFunction 等效考虑 (粗糙程度)
- ▶ k
 - kqRWallFunction, 等同于 zeroGradient
 - kLowReWallFunction, 低雷诺数, 或者 y^+ 较小
- ▶ epsilon
 - epsilonWallFunction
- ▶ omega
 - omegaWallFunction



Thank you.

欢迎私下交流， 请勿私自上传网络， 谢谢！

