



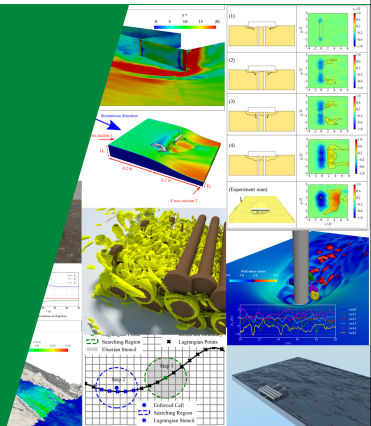
中国农业大学 流体机械与流体工程系

2023 年春季《计算流体力学编程实践》

第五章 近壁面模型 /壁面函数

徐云成

✉ycxu@cau.edu.cn



2023 年 4 月 3 日

在近壁区域需要考虑以下效应

- ▶ 低雷诺数：当趋近于壁面时，湍流雷诺数 ($Re_L = k^2/(\epsilon\nu)$) 趋近于 0
- ▶ 高剪切率 (shear rate)：最高剪切率 ($\partial U/\partial y$) 发生在壁面
- ▶ 湍流波动在垂直于壁面方向 (wall-normal) 上的减弱，较其他两个方向更快

湍流模型会因此做相应的修改



Damping functions 阻尼函数

3/29

在标准 $k - \epsilon$ 模型中，湍流粘性系数可以写成

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

但是该方程在近壁面往往高估湍流粘性系数。因此使用阻尼函数 f_μ

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

一般阻尼函数可以定义为湍流雷诺数相关，例如

$$f_\mu = e^{\frac{-2.5}{1 + Re/50}} \quad \text{Jones and Launder (1972)}$$

$$f_\mu = 1 - e^{-0.0002y^+ - 0.00065y^{+2}} \quad \text{Rodi and Mansour (1993)}$$



Damping functions 阻尼函数

3/29

在标准 $k - \epsilon$ 模型中，湍流粘性系数可以写成

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

但是该方程在近壁面往往高估湍流粘性系数。因此使用阻尼函数 f_μ

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

一般阻尼函数可以定义为湍流雷诺数相关，例如

$$f_\mu = e^{\frac{-2.5}{1 + Re/50}} \quad \text{Jones and Launder (1972)}$$

$$f_\mu = 1 - e^{-0.0002y^+ - 0.00065y^{+2}} \quad \text{Rodi and Mansour (1993)}$$



OpenFOAM® 中计算壁面上的 y^+

```
<solver> -postProcess -func yPlus
```

例如

```
simpleFoam -postProcess -func yPlus
```



```
const fvPatchList& patches = mesh_.boundary();

forAll(patches, patchi)
{
    const fvPatch& patch = patches[patchi];

    if (isA<nutWallFunctionFvPatchScalarField>(nutBf[patchi]))
    {
        const nutWallFunctionFvPatchScalarField& nutPf =
            dynamic_cast<const nutWallFunctionFvPatchScalarField&>
                (
                    nutBf[patchi]
                );

        yPlusBf[patchi] = nutPf.yPlus();
    }
    else if (isA<wallFvPatch>(patch))
    {
        yPlusBf[patchi] =
            d[patchi]
            *sqrt
            (
                nuEffBf[patchi]
                *mag(turbModel.U().boundaryField()[patchi].snGrad())
            )/nuBf[patchi];
    }
}
```

$$y^+ = d \sqrt{\nu_{Eff} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} / \nu}$$

$$y^+ = y \sqrt{\nu_{Eff} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} / \nu}$$

定义:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} = \frac{y u^*}{\nu}$$

u_τ 或 u^* 被称为剪切速度 shear velocity

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

$$u_\tau^2 = \tau = \nu_{Eff} \frac{\partial u_x}{\partial y}$$



Shear velocity/friction velocity 剪切速度:

$$u_\tau = u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

无量纲速度:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

其中 τ_w 是指壁面剪切力 wall shear stress

无量纲壁面距离 wall distance:

$$\tau_w = \tau(y=0) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

注意:

- ▶ μ 是动力粘性系数 (dynamic viscosity)
- ▶ ν 是运动粘性系数 (kinematic viscosity)
- ▶ $\nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\tau_w}$ 和 $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ 都对



Shear velocity/friction velocity 剪切速度:

$$u_\tau = u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

无量纲速度:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

其中 τ_w 是指壁面剪切力 wall shear stress

无量纲壁面距离 wall distance:

$$\tau_w = \tau(y=0) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

注意:

- ▶ μ 是动力粘性系数 (dynamic viscosity)
- ▶ ν 是运动粘性系数 (kinematic viscosity)
- ▶ $\nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\tau_w}$ 和 $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ 都对



Shear velocity/friction velocity 剪切速度:

$$u_\tau = u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

无量纲速度:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

其中 τ_w 是指壁面剪切力 wall shear stress

无量纲壁面距离 wall distance:

$$\tau_w = \tau(y=0) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

注意:

- ▶ μ 是动力粘性系数 (dynamic viscosity)
- ▶ ν 是运动粘性系数 (kinematic viscosity)
- ▶ $\nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\tau_w}$ 和 $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ 都对



Shear velocity/friction velocity 剪切速度:

$$u_\tau = u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

无量纲速度:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

其中 τ_w 是指壁面剪切力 wall shear stress

无量纲壁面距离 wall distance:

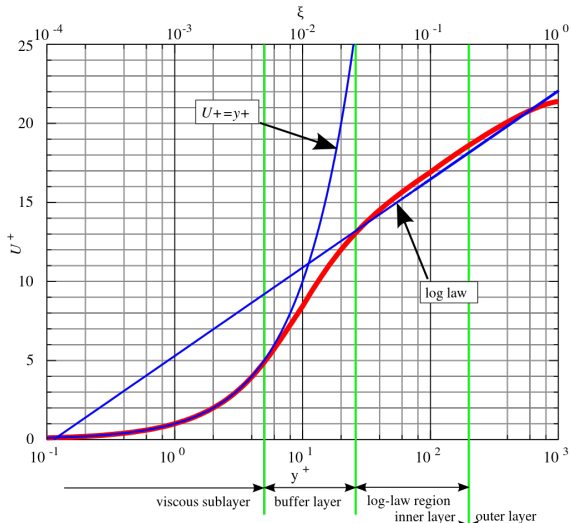
$$\tau_w = \tau(y=0) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

注意:

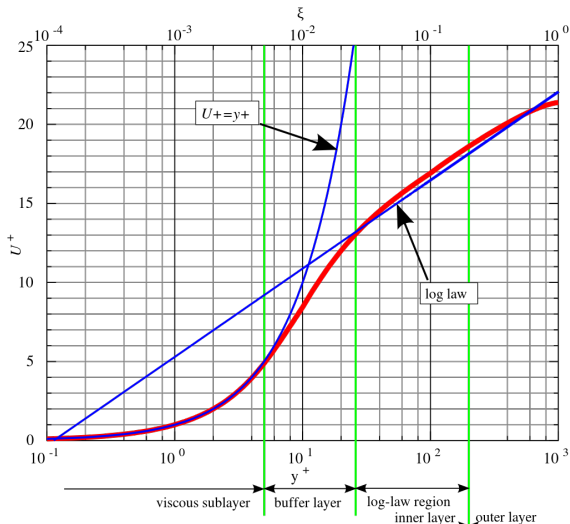
- ▶ μ 是动力粘性系数 (dynamic viscosity)
- ▶ ν 是运动粘性系数 (kinematic viscosity)
- ▶ $\nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\tau_w}$ 和 $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ 都对





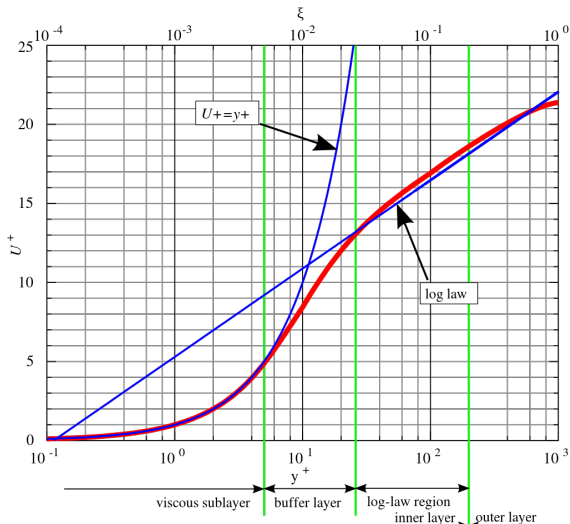
- ▶ 靠近壁面产生粘性阻尼会减弱速度波动
- ▶ 壁面阻挡会减弱垂直壁面方向速度波动
- ▶ 远离壁面方向，较大平均速度梯度 \Rightarrow 较大湍动能 \Rightarrow 强湍流
- ▶ u 、 k 、 ϵ 、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程





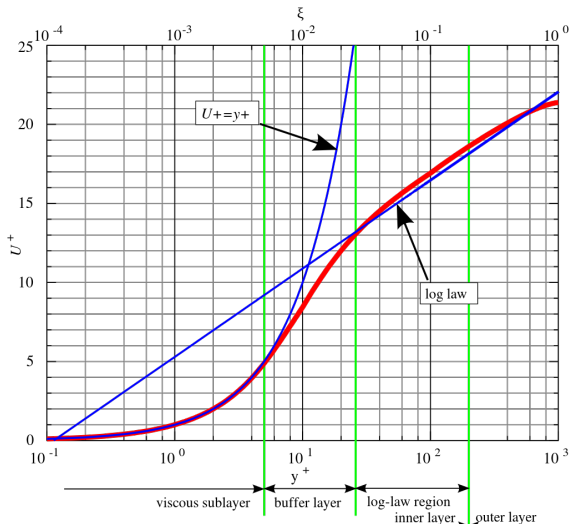
- ▶ 靠近壁面产生粘性阻尼会减弱速度波动
- ▶ 壁面阻挡会减弱垂直壁面方向速度波动
- ▶ 远离壁面方向，较大平均速度梯度
⇒ 较大湍动能 ⇒ 强湍流
- ▶ u 、 k 、 ϵ 、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程





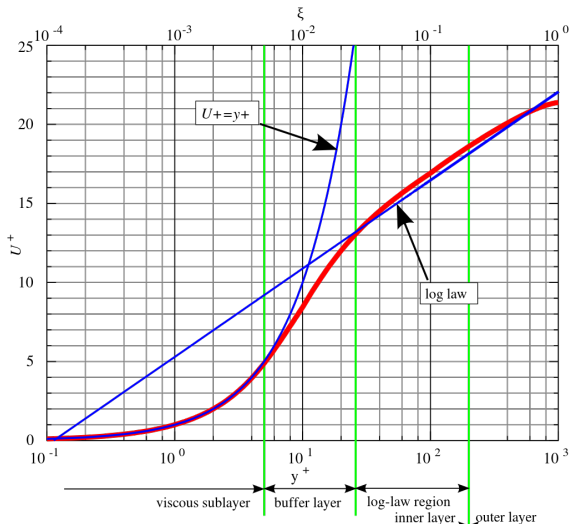
- ▶ 靠近壁面产生粘性阻尼会减弱速度波动
- ▶ 壁面阻挡会减弱垂直壁面方向速度波动
- ▶ 远离壁面方向，较大平均速度梯度
⇒ 较大湍动能 ⇒ 强湍流
- ▶ u 、 k 、 ϵ 、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程





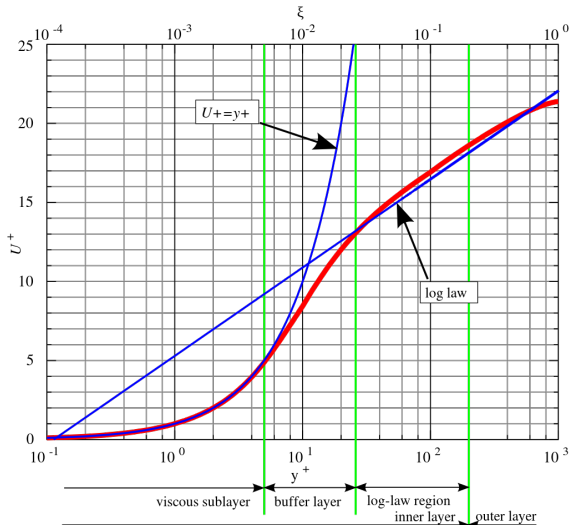
- ▶ 靠近壁面产生粘性阻尼会减弱速度波动
- ▶ 壁面阻挡会减弱垂直壁面方向速度波动
- ▶ 远离壁面方向，较大平均速度梯度
⇒ 较大湍动能 ⇒ 强湍流
- ▶ u 、 k 、 ϵ 、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程





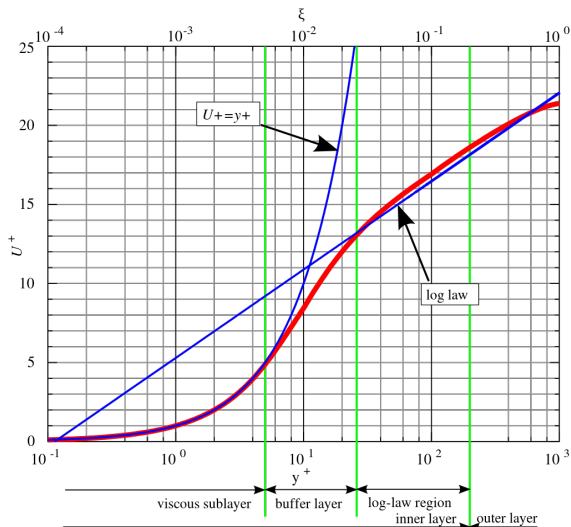
- ▶ 靠近壁面产生粘性阻尼会减弱速度波动
- ▶ 壁面阻挡会减弱垂直壁面方向速度波动
- ▶ 远离壁面方向，较大平均速度梯度
⇒ 较大湍动能 ⇒ 强湍流
- ▶ u 、 k 、 ϵ 、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程





- ▶ viscous sub-layer/ laminar sub-layer (粘性层) ($0 < y^+ < 5$): 层流, 粘性力主导
- ▶ buffer layer ($5 < y^+ < 30$): 粘性和湍流同样重要
- ▶ log-layer (对数层) ($y^+ > 30$): 完全湍流 fully turbulent, inertial sub-layer (惯性层) ($30 < y^+ < 200$)





log-law (无量纲形式) :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (1)$$

其中, κ 是冯卡门常数, 对于光滑壁面 $\kappa \approx 0.41$, $C = 5.56$

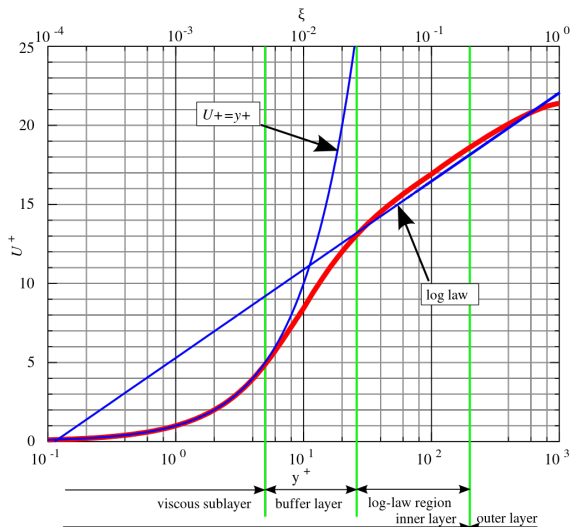
另一种形式:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (2)$$

log-law (有量纲形式) :

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (3)$$





log-law (无量纲形式) :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (1)$$

其中, κ 是冯卡门常数, 对于光滑壁面 $\kappa \approx 0.41$, $C = 5.56$

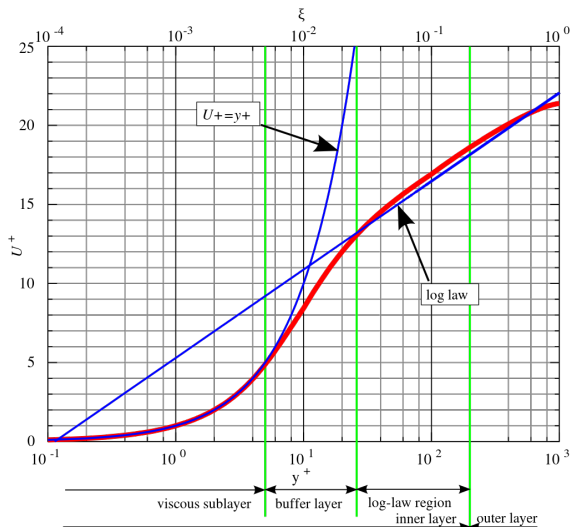
另一种形式:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (2)$$

log-law (有量纲形式) :

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (3)$$





log-law (无量纲形式) :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (1)$$

其中, κ 是冯卡门常数, 对于光滑壁面 $\kappa \approx 0.41$, $C = 5.56$

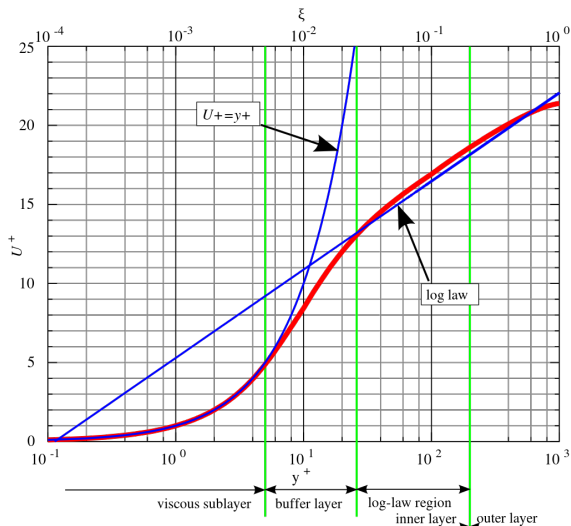
另一种形式:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (2)$$

log-law (有量纲形式) :

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (3)$$



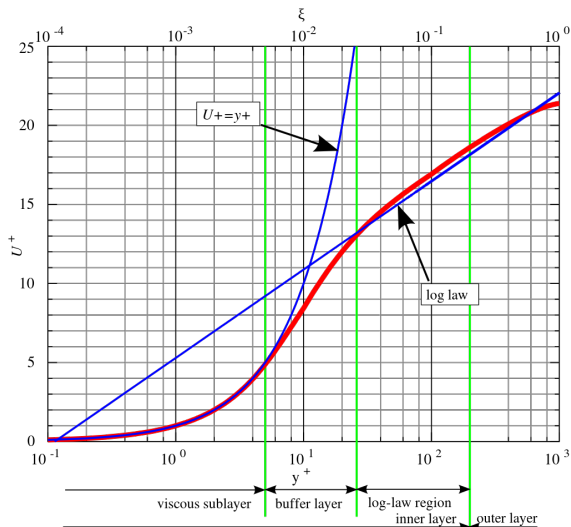


$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \geq y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$

Spalding wall function (Spalding, 1961)
`nutUSpaldingWallFunction`

$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!} \right]$$





$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \geq y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$

Spalding wall function (Spalding, 1961)
`nutUSpaldingWallFunction`

$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!} \right]$$

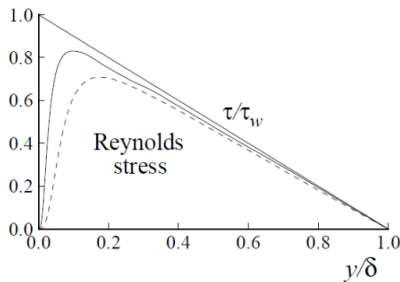
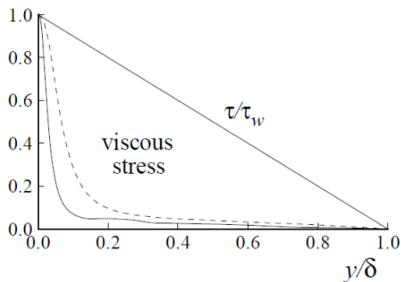


壁面函数的推导

1/29

总剪切应力 total shear stress

$$\tau = \underbrace{\mu \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{粘性部分}} \underbrace{-\rho \overline{u'v'}}_{\text{湍流部分}} \quad (4)$$



当 $y < 0.1\delta$ 时, 总剪切力几乎是常数, 等于壁面剪切力 $\tau \approx \tau_w$



壁面函数的推导

12/29

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- ▶ 非常靠近壁面时，运动粘性系数 ν 和壁面剪切力 τ_w 这两个参数比较重要
- ▶ 因此，速度尺度用剪切速度 τ ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- ▶ 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显， y^+ 是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和惯性力的相对重要性。



壁面函数的推导

12/29

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- ▶ 非常靠近壁面时，运动粘性系数 ν 和壁面剪切力 τ_w 这两个参数比较重要
- ▶ 因此，速度尺度用剪切速度 τ ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- ▶ 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显， y^+ 是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和湍



壁面函数的推导

12/29

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- ▶ 非常靠近壁面时，运动粘性系数 ν 和壁面剪切力 τ_w 这两个参数比较重要
- ▶ 因此，速度尺度用剪切速度 τ ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- ▶ 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显， y^+ 是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和湍



壁面函数的推导

12/29

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- ▶ 非常靠近壁面时，运动粘性系数 ν 和壁面剪切力 τ_w 这两个参数比较重要
- ▶ 因此，速度尺度用剪切速度 τ ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- ▶ 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显， y^+ 是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和湍流的相对重要性



壁面函数的推导

2/29

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- ▶ 非常靠近壁面时，运动粘性系数 ν 和壁面剪切力 τ_w 这两个参数比较重要
- ▶ 因此，速度尺度用剪切速度 τ ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- ▶ 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显， y^+ 是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和湍流的相对重要性



- ▶ 在边界层内部 ($y < 0.1\delta$), 重要的参数包括 U, y, τ_w, ρ, ν , 但是边界层厚度 δ 不重要
- ▶ 3 个变量, 3 个独立量纲 (m,s,kg), 组成 2 个独立的无量纲组:
$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \text{ 和 } y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$$
- ▶ 存在普适性函数

$$u^+ = f_w(y^+)$$



- ▶ 在边界层外部, 重要的参数包括 $U, y, \tau_w, \rho, \delta$, 不包括 ν
- ▶ 3 个变量, 3 个独立量纲 (m,s,kg), 组成 2 个独立的无量纲组:
 $\frac{u_e - u}{u_\tau}$ 和 $\eta = \frac{y}{\delta}$
- ▶ 不存在普适性函数

$$u_e - u = f_o(\eta)$$



- ▶ 边界层内部 ($y < 0.1\delta$) $u^+ = f_w(y^+)$
- ▶ 边界层外部 ($y > \delta$) $u_e^+ - u^+ = f_o(\eta)$

若 $\delta^+ = \delta u_\tau / \nu$, 那么 $y^+ = \eta \delta^+$ 。对 $0.1\delta < y < \delta$ 部分, 两个方程相加

$$u_e^+(\delta^+) = f_o(\eta) + f_w(\eta\delta^+)$$

方程两侧对 δ^+ 求导

$$u_e^{+'}(\delta^+) = 0 + \eta f_w'(\eta\delta^+)$$

再对 η 求导

$$\begin{aligned} 0 &= f_w'(\eta\delta^+) + \eta\delta^+ f_w''(\eta\delta^+) \\ &= f_w'(y^+) + y^+ f_w''(y^+) \\ &= \frac{d}{dy^+} \left(y^+ \frac{df_w}{dy^+} \right) \end{aligned}$$



- ▶ 边界层内部 ($y < 0.1\delta$) $u^+ = f_w(y^+)$
- ▶ 边界层外部 ($y > \delta$) $u_e^+ - u^+ = f_o(\eta)$

若 $\delta^+ = \delta u_\tau / \nu$, 那么 $y^+ = \eta \delta^+$ 。对 $0.1\delta < y < \delta$ 部分, 两个方程相加

$$u_e^+(\delta^+) = f_o(\eta) + f_w(\eta\delta^+)$$

方程两侧对 δ^+ 求导

$$u_e^{+'}(\delta^+) = 0 + \eta f_w'(\eta\delta^+)$$

再对 η 求导

$$\begin{aligned} 0 &= f_w'(\eta\delta^+) + \eta\delta^+ f_w''(\eta\delta^+) \\ &= f_w'(y^+) + y^+ f_w''(y^+) \\ &= \frac{d}{dy^+} \left(y^+ \frac{df_w}{dy^+} \right) \end{aligned}$$



- ▶ 边界层内部 ($y < 0.1\delta$) $u^+ = f_w(y^+)$
- ▶ 边界层外部 ($y > \delta$) $u_e^+ - u^+ = f_o(\eta)$

若 $\delta^+ = \delta u_\tau / \nu$, 那么 $y^+ = \eta \delta^+$ 。对 $0.1\delta < y < \delta$ 部分, 两个方程相加

$$u_e^+(\delta^+) = f_o(\eta) + f_w(\eta\delta^+)$$

方程两侧对 δ^+ 求导

$$u_e^{+'}(\delta^+) = 0 + \eta f_w'(\eta\delta^+)$$

再对 η 求导

$$\begin{aligned} 0 &= f_w'(\eta\delta^+) + \eta\delta^+ f_w''(\eta\delta^+) \\ &= f_w'(y^+) + y^+ f_w''(y^+) \\ &= \frac{d}{dy^+} \left(y^+ \frac{df_w}{dy^+} \right) \end{aligned}$$



- ▶ 边界层内部 ($y < 0.1\delta$) $u^+ = f_w(y^+)$
- ▶ 边界层外部 ($y > \delta$) $u_e^+ - u^+ = f_o(\eta)$

若 $\delta^+ = \delta u_\tau / \nu$, 那么 $y^+ = \eta \delta^+$ 。对 $0.1\delta < y < \delta$ 部分, 两个方程相加

$$u_e^+(\delta^+) = f_o(\eta) + f_w(\eta\delta^+)$$

方程两侧对 δ^+ 求导

$$u_e^{+'}(\delta^+) = 0 + \eta f_w'(\eta\delta^+)$$

再对 η 求导

$$\begin{aligned} 0 &= f_w'(\eta\delta^+) + \eta\delta^+ f_w''(\eta\delta^+) \\ &= f_w'(y^+) + y^+ f_w''(y^+) \\ &= \frac{d}{dy^+} \left(y^+ \frac{df_w}{dy^+} \right) \end{aligned}$$



$$0 = \frac{d}{dy^+} \left(y^+ \frac{df_w}{dy^+} \right)$$

由该公式可得 $y^+ \frac{df_w}{dy^+}$ 应该是一个常数项，定义为 $\frac{1}{\kappa}$ ，所以

$$\frac{df_w}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y^+}$$

方程两侧积分可以得到

$$f_w = u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C = \frac{1}{\kappa} (Ey^+)$$



$$0 = \frac{d}{dy^+} \left(y^+ \frac{df_w}{dy^+} \right)$$

由该公式可得 $y^+ \frac{df_w}{dy^+}$ 应该是一个常数项，定义为 $\frac{1}{\kappa}$ ，所以

$$\frac{df_w}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y^+}$$

方程两侧积分可以得到

$$f_w = u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C = \frac{1}{\kappa} (Ey^+)$$



$$0 = \frac{d}{dy^+} \left(y^+ \frac{df_w}{dy^+} \right)$$

由该公式可得 $y^+ \frac{df_w}{dy^+}$ 应该是一个常数项，定义为 $\frac{1}{\kappa}$ ，所以

$$\frac{df_w}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y^+}$$

方程两侧积分可以得到

$$f_w = u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C = \frac{1}{\kappa} (Ey^+)$$



- ▶ 常数项: $\kappa \approx 0.41, \frac{1}{\kappa} = 2.44, C = 5.56, E = 9.8$
- ▶ 在 log-law 区域

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y}, \quad \frac{y}{u_\tau} \frac{\partial u}{\partial y} = y^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \text{constant}$$



在粘性层 (viscous sub-layer), 湍流波动主要受粘性阻尼作用, 壁面函数也是只考虑粘性力作用

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w$$

两边积分得到线性速度分布 $u(y) = \frac{\tau_w}{\mu} y$

由于在壁面存在无滑移条件: $u(y=0) = 0$, 所以线性速度分布可以写成无量纲形式

$$u^+ = y^+$$

DNS 和实验测量结果显示线性粘性层大致在 $y^+ < 5$



在粘性层 (viscous sub-layer), 湍流波动主要受粘性阻尼作用, 壁面函数也是只考虑粘性力作用

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w$$

两边积分得到线性速度分布 $u(y) = \frac{\tau_w}{\mu} y$

由于在壁面存在无滑移条件: $u(y=0) = 0$, 所以线性速度分布可以写成无量纲形式

$$u^+ = y^+$$

DNS 和实验测量结果显示线性粘性层大致在 $y^+ < 5$



在粘性层 (viscous sub-layer), 湍流波动主要受粘性阻尼作用, 壁面函数也是只考虑粘性力作用

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w$$

两边积分得到线性速度分布 $u(y) = \frac{\tau_w}{\mu} y$

由于在壁面存在无滑移条件: $u(y=0) = 0$, 所以线性速度分布可以写成无量纲形式

$$u^+ = y^+$$

DNS 和实验测量结果显示线性粘性层大致在 $y^+ < 5$



- ▶ 许多真实问题中，壁面都不是光滑的
- ▶ 其中一种经典的粗糙高度 (Nikuradse) 无量纲形式定义为

$$k_s^+ = \frac{u_\tau k_s}{\nu} = \frac{k_s}{\delta_\nu}$$

- ▶ (Cebeci 1978)

$$E = \begin{cases} 0.9 \left(\frac{k_s^+ - 2.25}{87.75} + 0.5k_s^+ \right)^{-\sin[0.4258(\ln k_s^+) - 0.811]} & \text{if } k_s^+ > 90 \\ 0.9(1 + 0.5k_s^+)^{-1} & \text{if } k_s^+ \leq 90 \end{cases} \quad (5)$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$



OpenFOAM® 利用壁面函数?

20/29

OpenFOAM® 中的代码

```
if (yPlus > yPlusLam_)
{
    nutw[facei] = nuw[facei]*(yPlus*kappa_/log(E_*yPlus) - 1.0);
}
```

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \geq y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}$$

注：下标 1 代表第一层网格

$$u_\tau^2 = \tau = \nu_{\text{Eff}} \frac{\partial u}{\partial y} = (\nu_t + \nu) \frac{\partial u}{\partial y} \approx (\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$$



OpenFOAM® 利用壁面函数?

20/29

OpenFOAM® 中的代码

```
if (yPlus > yPlusLam_)
{
    nutw[facei] = nuw[facei]*(yPlus*kappa_/log(E_*yPlus) - 1.0);
}
```

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \geq y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}$$

注：下标 1 代表第一层网格

$$u_\tau^2 = \tau = \nu_{\text{Eff}} \frac{\partial u}{\partial y} = (\nu_t + \nu) \frac{\partial u}{\partial y} \approx (\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$$



$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \quad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$u^+ \frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau} \frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+ \nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$



$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \quad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$u^+ \frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau} \frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+ \nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$



$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \quad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$u^+ \frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau} \frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+ \nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$



$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \quad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$u^+ \frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau} \frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+ \nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$



$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \quad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$u^+ \frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau} \frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+ \nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+} \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$




```
forAll(yPlus, facei)
{
    const scalar Re = magUp[facei]*y[facei]/nuw[facei];
    const scalar ryPlusLam = 1/yPlusLam_;

    int iter = 0;
    scalar yp = yPlusLam_;
    scalar yPlusLast = yp;

    do
    {
        yPlusLast = yp;
        if (yp > yPlusLam_)
        {
            yp = (kappa_*Re + yp)/(1 + log(E_*yp));
        }
        else
        {
            yp = sqrt(Re);
        }
    } while(mag(ryPlusLam*(yp - yPlusLast)) > 0.0001 && ++iter < 20);

    yPlus[facei] = yp;
}
```

nutUWallFunction: 循环内

$$y_{\text{new}}^+ = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \leq y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)} & \text{if } y^+ > y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$

$$\text{其中 } Re = \frac{u_1 y_1}{\nu}$$

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \geq y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$



```
forAll(yPlus, facei)
{
    const scalar Re = magUp[facei]*y[facei]/nuw[facei];
    const scalar ryPlusLam = 1/yPlusLam_;

    int iter = 0;
    scalar yp = yPlusLam_;
    scalar yPlusLast = yp;

    do
    {
        yPlusLast = yp;
        if (yp > yPlusLam_)
        {
            yp = (kappa_*Re + yp)/(1 + log(E_*yp));
        }
        else
        {
            yp = sqrt(Re);
        }
    } while(mag(ryPlusLam*(yp - yPlusLast)) > 0.0001 && ++iter < 20);

    yPlus[facei] = yp;
}
```

nutUWallFunction: 循环内

$$y_{\text{new}}^+ = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \leq y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)} & \text{if } y^+ > y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$

$$\text{其中 } Re = \frac{u_1 y_1}{\nu}$$

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \geq y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$



OpenFOAM® 如何计算 y^+

23/29

牛顿迭代法求解 $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于 $y^+ > y_{\text{Laminar}}^+$ 构造:

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+ \nu / y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y_{\text{new}}^+ = y^+ - \frac{\frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{-\frac{1}{E} \frac{1}{y^+} + \frac{1}{Re} \frac{1}{\ln(Ey^+)}} = y^+ - \frac{y^+ \ln(Ey^+) - Re\kappa}{1 + \ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)}$$



牛顿迭代法求解 $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于 $y^+ > y_{\text{Laminar}}^+$ 构造:

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+ \nu / y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y_{\text{new}}^+ = y^+ - \frac{\frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{-\frac{1}{E} \frac{1}{y^+} + \frac{1}{Re} \frac{1}{\ln(Ey^+)}} = y^+ - \frac{y^+ \ln(Ey^+) - Re\kappa}{1 + \ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)}$$



牛顿迭代法求解 $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于 $y^+ > y_{\text{Laminar}}^+$ 构造:

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+ \nu / y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y_{\text{new}}^+ = y^+ - \frac{\frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{-\frac{1}{y^+} \frac{E}{Re} + \frac{1}{y^+} \frac{1}{\ln(Ey^+)}} = y^+ - \frac{y^+ \ln(Ey^+) - Re\kappa}{1 + \ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)}$$



牛顿迭代法求解 $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于 $y^+ > y_{\text{Laminar}}^+$ 构造:

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+ \nu / y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y_{\text{new}}^+ = y^+ - \frac{\frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{-\frac{1}{\kappa Ey^+} \frac{E}{Re} y^+ + \frac{1}{\kappa Re} \ln(Ey^+)} = y^+ - \frac{y^+ \ln(Ey^+) - Re\kappa}{1 + \ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)}$$



牛顿迭代法求解 $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于 $y^+ > y_{\text{Laminar}}^+$ 构造:

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+ \nu / y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y_{\text{new}}^+ = y^+ - \frac{\frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{-\frac{1}{\kappa Ey^+} \frac{E}{Re} y^+ + \frac{1}{\kappa Re} \ln(Ey^+)} = y^+ - \frac{y^+ \ln(Ey^+) - Re\kappa}{1 + \ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)}$$



牛顿迭代法求解 $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于 $y^+ > y_{\text{Laminar}}^+$ 构造:

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+ \nu / y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y_{\text{new}}^+ = y^+ - \frac{\frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{-\frac{1}{\kappa Ey^+} \frac{E}{Re} y^+ + \frac{1}{\kappa Re} \ln(Ey^+)} = y^+ - \frac{y^+ \ln(Ey^+) - Re\kappa}{1 + \ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)}$$



OpenFOAM® 如何计算 y^+

24/29

对于 $y^+ < y_{\text{Laminar}}^+$:

$$y^+ = u^+ = \frac{1}{Re y^+} \Rightarrow y^+ = \sqrt{Re}$$

nutUWallFunction: 循环内迭代公式 (y^+ 迭代初值是 $y_{\text{Laminar}}^+ = 11.0$)

$$y_{\text{new}}^+ = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \leq y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)} & \text{if } y^+ > y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$

其中 $Re = \frac{u_1 y_1}{\nu}$

nutkWallFunction: (其中 $C_\mu = 0.09$)

$$y^+ = C_\mu^{0.25} y_1 \sqrt{k_1 / \nu} \quad \text{if } y^+ > y_{\text{Laminar}}^+$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+)}$$



OpenFOAM® 如何计算 y^+

24/29

对于 $y^+ < y_{\text{Laminar}}^+$:

$$y^+ = u^+ = \frac{1}{Re y^+} \Rightarrow y^+ = \sqrt{Re}$$

nutUWallFunction: 循环内迭代公式 (y^+ 迭代初值是 $y_{\text{Laminar}}^+ = 11.0$)

$$y_{\text{new}}^+ = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \leq y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(E y^+)} & \text{if } y^+ > y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$

其中 $Re = \frac{u_1 y_1}{\nu}$

nutkWallFunction: (其中 $C_\mu = 0.09$)

$$y^+ = C_\mu^{0.25} y_1 \sqrt{k_1 / \nu} \quad \text{if } y^+ > y_{\text{Laminar}}^+$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Re y^+)}$$



对于 $y^+ < y_{\text{Laminar}}^+$:

$$y^+ = u^+ = \frac{1}{Re y^+} \Rightarrow y^+ = \sqrt{Re}$$

nutUWallFunction: 循环内迭代公式 (y^+ 迭代初值是 $y_{\text{Laminar}}^+ = 11.0$)

$$y_{\text{new}}^+ = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \leq y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)} & \text{if } y^+ > y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$

其中 $Re = \frac{u_1 y_1}{\nu}$

nutkWallFunction: (其中 $C_\mu = 0.09$)

$$y^+ = C_\mu^{0.25} y_1 \sqrt{k_1 / \nu} \quad \text{if } y^+ > y_{\text{Laminar}}^+$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$



$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!} \right]$$

由 $u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}$, $y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}$, 可得到 $f(u_\tau) = 0$, 用迭代法求出 u_τ (初值 $(\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$)

计算 ν_t

$$\nu_t = \frac{u_\tau^2}{u_1/y_1} - \nu$$



$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!} \right]$$

由 $u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}$, $y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}$, 可得到 $f(u_\tau) = 0$, 用迭代法求出 u_τ (初值 $(\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$)

计算 ν_t

$$\nu_t = \frac{u_\tau^2}{u_1/y_1} - \nu$$



$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!} \right]$$

由 $u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}$, $y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}$, 可得到 $f(u_\tau) = 0$, 用迭代法求出 u_τ (初值 $(\nu_t + \nu) \frac{u_1}{y_1}$)
计算 ν_t

$$\nu_t = \frac{u_\tau^2}{u_1/y_1} - \nu$$



$$\epsilon_1 = \begin{cases} 2.0k_1\nu/y_1^2 & \text{if } y^+ \leq y_{\text{Laminar}}^+ \\ \frac{C_\mu^{0.75}k_1^{1.5}}{\nu_t y_1} & \text{if } y^+ > y_{\text{Laminar}}^+ \end{cases}$$



$$\omega_{Vis} = 6\nu/(\beta_1 y_1^2)$$

$$\omega_{Log} = u_*/(C_\mu^{0.5} \kappa y_1), \quad u_* = \sqrt{C_\mu^{0.5} k_1}$$

- 如果blended=false:

$$\omega_1 = \begin{cases} \omega_{Vis} & \text{if } y^+ \leq y_{Laminar}^+ \\ \omega_{Log} & \text{if } y^+ > y_{Laminar}^+ \end{cases}$$

- 如果blended=true:

$$\omega_1 = \alpha \omega_{Vis} + (1 - \alpha) \omega_{Log}$$

其中 $\alpha = e^{-Re_y/11}$, $Re_y = y_1 \sqrt{k_1}/\nu$

且 ω_{Log} 中的 $y_1 = \sqrt{\alpha \nu y_1 / y_1 + (1 - \alpha) C_\mu^{0.5} k_1}$



$$\omega_{Vis} = 6\nu/(\beta_1 y_1^2)$$

$$\omega_{Log} = u_*/(C_\mu^{0.5} \kappa y_1), \quad u_* = \sqrt{C_\mu^{0.5} k_1}$$

- 如果blended=false:

$$\omega_1 = \begin{cases} \omega_{Vis} & \text{if } y^+ \leq y_{Laminar}^+ \\ \omega_{Log} & \text{if } y^+ > y_{Laminar}^+ \end{cases}$$

- 如果blended=true:

$$\omega_1 = \alpha \omega_{Vis} + (1 - \alpha) \omega_{Log}$$

其中 $\alpha = e^{-Re_y/11}$, $Re_y = y_1 \sqrt{k_1}/\nu$

且 ω_{Log} 中的 $u_* = \sqrt{\alpha \nu u_1 / y_1 + (1 - \alpha) C_m u^{0.5} k_1}$



一般有两种策略

- ▶ 求解粘性层 (viscous sub-layer)
 - 计算包括整个边界层
 - 如果边壁效应比较重要, 比如关心反梯度、流动阻力等
 - 近壁第一层网格尺度 $y^+ \sim \mathcal{O}(1)$
 - 选择合适的低雷诺数湍流模型 (比如 $k - \omega$ SST)
- ▶ 采用壁面函数
 - 用 log-law 模拟边界层内部流动
 - 适合那些边壁效应不重要的问题
 - 理论上 $y^+ > 11$
 - 选择高雷诺数湍流模型

湍流模型和壁面函数完整的介绍可以参考官网

<https://cfd.direct/openfoam/user-guide/v8-turbulence/>



Thank you.

欢迎私下交流，请勿私自上传网络，谢谢！

