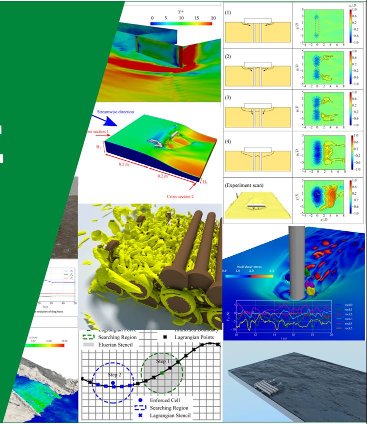
中国农业大学　流体机械与流体工程系

2023 年春季《计算流体动力学编程实践》

第二章 有限体积法编程
一维稳态扩散问题



徐云成

✉ycxu@cau.edu.cn

2023 年 2 月 28 日

本节课内容要点

- 有限体积法空间离散
- 一维稳态扩散方程离散的一般形式
- 案例分析
  - 案例 1：一维稳态无源热传导
  - 案例 2：一维稳态有源热传导
  - 案例 3：一维稳态有源热传导带通量边界
  - 案例 4：二维稳态有源热传导

什么是离散?

离散 discretisation

- 通用输运方程很少存在解析解，这就是为什么需要数值分析方法
- 离散是指用一组线性表达来表示所求的微分方程
- 有很多中离散方法，包括：有限差分法 (FDM, finite difference method)、有限单元法 (FEM, finite element method)、有限体积法 (FVM, finite volume method)
- 这门课我们主要介绍 OpenFOAM 所使用的 FVM

FVM 具体步骤

- 将控制方程在控制体积上进行积分
- 假定适合的分布函数
- 将分布函数代入并完成积分，整理化简得离散化方程

离散一维稳态扩散方程

扩散是高浓度向低浓度输移的过程

- 完整通用输运方程:

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\substack{\text{temopral derivative}\\ \text{时间偏导}}} + \underbrace{\nabla \cdot (\phi \mathbf{u})}_{\substack{\text{convection term}\\ \text{对流项}}} - \underbrace{\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} = \underbrace{\mathbf{S}_\phi}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} \tag{1}$$

- 简化的稳态扩散方程

$$\underbrace{\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} + \underbrace{\mathbf{S}_\phi}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} = 0 \tag{2}$$

离散一维稳态扩散方程

扩散是高浓度向低浓度输移的过程

- 完整通用输运方程：

$$\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\substack{\text{temopral derivative}\\ \text{时间偏导}}} + \underbrace{\nabla\cdot(\phi\mathbf{u})}_{\substack{\text{convection term}\\ \text{对流项}}} - \underbrace{\nabla\cdot(\gamma\nabla\phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} = \underbrace{\mathbf{S}_\phi}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} \tag{1}$$

- 简化的稳态扩散方程

$$\underbrace{\nabla\cdot(\gamma\nabla\phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} + \underbrace{\mathbf{S}_\phi}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} = 0 \tag{2}$$

离散一维稳态扩散方程

扩散是高浓度向低浓度输移的过程

- 完整通用输运方程：

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\substack{\text{temopral derivative}\\ \text{时间偏导}}} + \underbrace{\nabla \cdot (\phi \mathbf{u})}_{\substack{\text{convection term}\\ \text{对流项}}} - \underbrace{\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} = \underbrace{\mathbf{S}_\phi}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} \tag{1}$$

- 简化的稳态扩散方程

$$\underbrace{\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} + \underbrace{\mathbf{S}_\phi}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} = 0 \tag{2}$$

离散一维稳态扩散方程

有限体积法（FVM）离散

- 在控制体积上进行积分

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = \int_A \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0 \quad (3)$$

- 以简化后的一维方程为例

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0 \quad (4)$$

离散一维稳态扩散方程

有限体积法（FVM）离散

- 在控制体积上进行积分

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = \int_A \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0 \quad (3)$$

- 以简化后的一维方程为例

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0 \quad (4)$$

FVM 离散 1D 扩散

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+S=0 \quad \phi|_{x=0}=1,\quad \phi|_{x=L}=0 \tag{5}$$

一维稳态扩散稳态

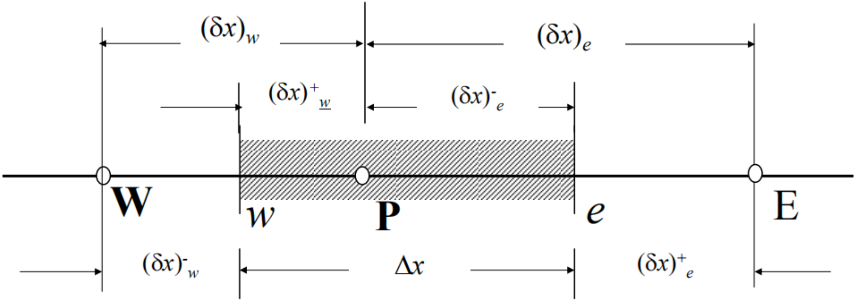


图: 一维问题空间区域的离散化

回忆数值方法步骤: 1、前处理（包括生成网格）2、求解离散方程 3、后处理

FVM 离散 1D 扩散

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+S=0 \qquad \phi|_{x=0}=1, \quad \phi|_{x=L}=0 \tag{5}$$ 一维稳态扩散稳态

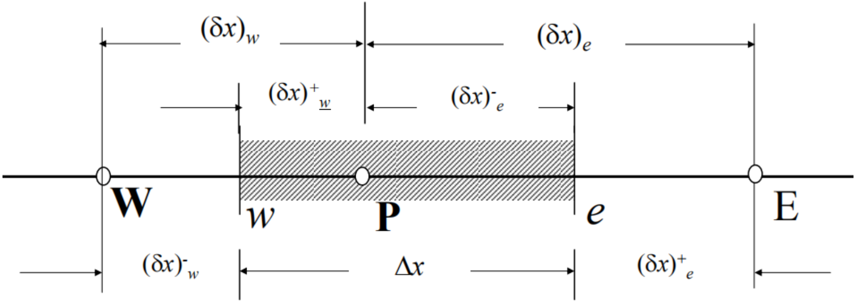
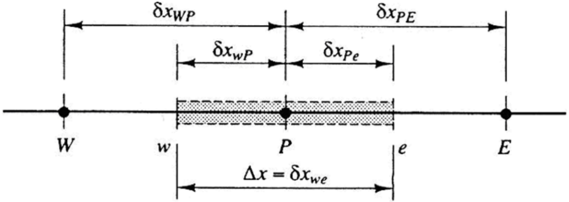


图: 一维问题空间区域的离散化

回忆数值方法步骤：1、前处理（包括生成网格）2、求解离散方程 3、后处理

OpenFOAM® 中一维稳态扩散方程



扩散方程积分形式：

$$\int_A \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)\,dA + \int_{CV} S\,dV = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$$

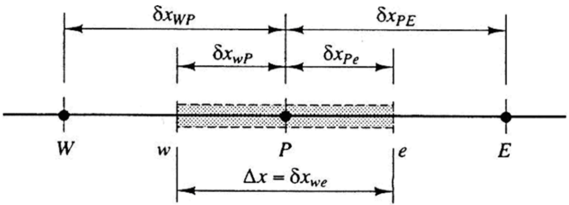
OpenFOAM® 中使用 3D 网格处理 1D、2D 计算问题

使用 FVM 进行离散：

$$\int_A \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)\,dA + \int_{CV} S\,dV = 0$$

$$\left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$

OpenFOAM® 中一维稳态扩散方程



扩散方程积分形式：

$$\int_A \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)dA + \int_{CV} SdV = 0$$

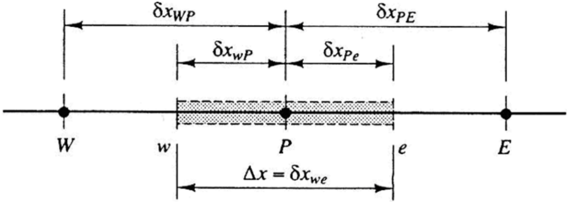
$$\frac{d}{dx}\left(\gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$$

OpenFOAM® 中使用 3D 网格处理 1D、2D 计算问题
使用 FVM 进行离散：

$$\int_A \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)dA + \int_{CV} SdV = 0$$

$$\left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$

OpenFOAM® 中一维稳态扩散方程



线性分布假设下 w 和 e 上的扩散系数：

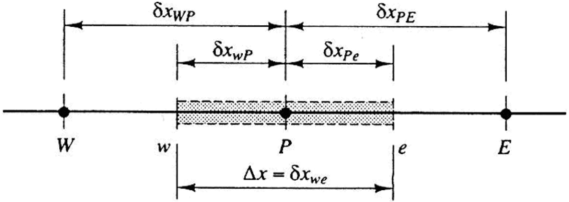
$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

利用中心差分计算导数（梯度）：

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

扩散方程 FVM 离散形式：

$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$



线性分布假设下 w 和 e 上的扩散系数：

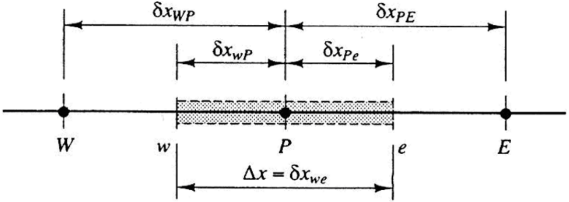
$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

利用中心差分计算导数（梯度）：

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

扩散方程 FVM 离散形式：

$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S} \Delta V = 0$$



扩散方程 FVM 离散形式：

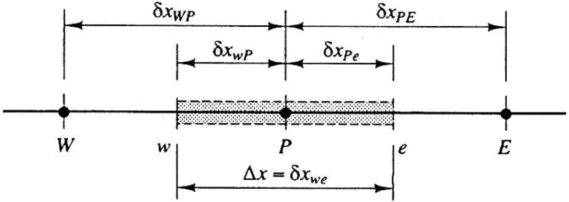
$$\left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$

线性分布假设下 w 和 e 上的扩散系数：

$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

利用中心差分计算导数（梯度）：

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$



交界面上的扩散通量

diffusive fluxes at interfaces

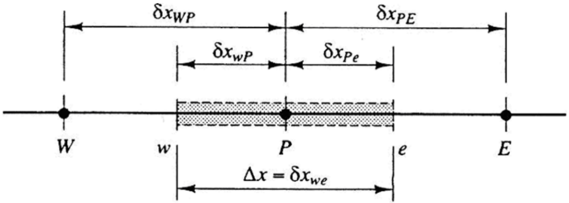
$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}$$

$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

扩散方程 FVM 离散形式：

$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S} \Delta V = 0$$

system/fvSchemes



interpolation scheme (插值格式)

$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

gradient scheme (梯度格式)

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

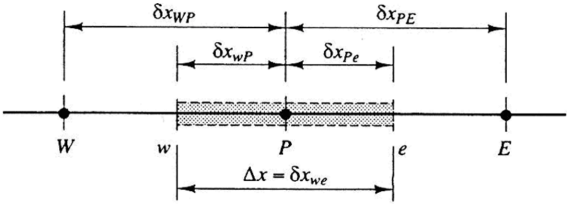
在算例目录中的`system/fvScheme` 中存在

`laplacian(nu,U) Gauss linear corrected;`

`Gauss <interpolationScheme> <snGradScheme>` (其中 sn=>surface normal)

`laplacian(nu,U)` 数学表达： $\nabla\cdot(\nu\nabla U) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\gamma\frac{d\phi}{dx}\right)$

system/fvSchemes



interpolation scheme (插值格式)

$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

gradient scheme (梯度格式)

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

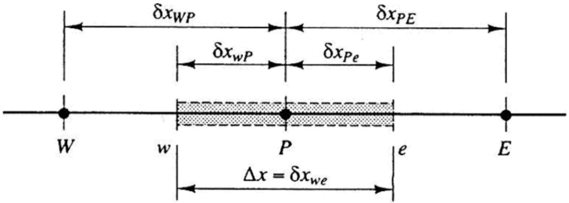
在算例目录中的`system/fvScheme` 中存在

`laplacian(nu,U) Gauss linear corrected;`

`Gauss <interpolationScheme> <snGradScheme>` (其中 sn=>surface normal)

`laplacian(nu,U)` 数学表达: $\nabla \cdot (\nu \nabla U) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$

system/fvSchemes



interpolation scheme (插值格式)

$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

gradient scheme (梯度格式)

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

在算例目录中的`system/fvScheme` 中存在

`laplacian(nu,U) Gauss linear corrected;`

`Gauss <interpolationScheme> <snGradScheme>` (其中 sn=>surface normal)

`laplacian(nu,U)` 数学表达：$\nabla \cdot (\nu \nabla U) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$

FVM 离散–源项 source term

源项 S 通常与变量 ϕ 相关，如果用线性方式表达：

$$\overline{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P \tag{6}$$

将所有离散项代入一维稳态扩散方程 $\dfrac{d}{dx}\left(\gamma\dfrac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$

$$\gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} + (S_u + S_p\phi_P) = 0 \tag{7}$$

整理后得到

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P}\phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E + S_u \tag{8}$$

FVM 离散–源项 source term

源项 S 通常与变量 ϕ 相关，如果用线性方式表达：

$$\overline{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P \tag{6}$$

将所有离散项代入一维稳态扩散方程 $\frac{d}{dx}\left(\gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$

$$\gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} + (S_u + S_p\phi_P) = 0 \tag{7}$$

整理后得到

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P}\phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E + S_u \tag{8}$$

FVM 离散–源项 source term

源项 S 通常与变量 ϕ 相关，如果用线性方式表达：

$$\overline{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P \tag{6}$$

将所有离散项代入一维稳态扩散方程 $\dfrac{d}{dx}\left(\gamma\dfrac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$

$$\gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} + (S_u + S_p\phi_P) = 0 \tag{7}$$

整理后得到

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P}\phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E + S_u \tag{8}$$

离散方程的一般形式

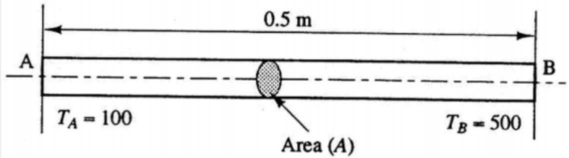
$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$$

一般形式：

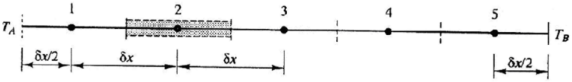
$$a_P\phi_P=a_W\phi_W+a_E\phi_E+S_u \tag{9}$$

对于靠近计算域边界的控制体积，需要根据特定的边界条件对该方程进行修改

案例 1：一维稳态无源热传导



铁棒总长 $0.5m$，平均分成 5 份，每份长度 $\delta x = 0.1m$



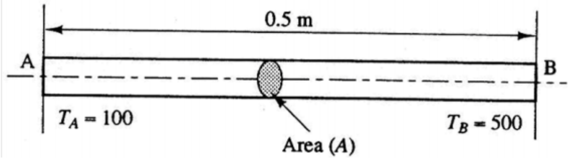
控制方程

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \qquad (10)$$

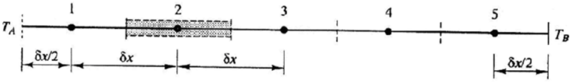
共有五个网格，2、3、4 是内部网格，1 和 5 是与边界相邻网格

边界条件: $T_{\text{A}} = 100,\ \ T_{\text{B}} = 500$
$k = 1000\, W/m/K$ 和 $A = 10 \times 10^{-3} m^2$

案例 1：一维稳态无源热传导



铁棒总长 $0.5m$，平均分成 5 份，每份长度 $\delta x = 0.1m$



控制方程

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{10}$$

边界条件: $T_\mathrm{A} = 100,\ T_\mathrm{B} = 500$

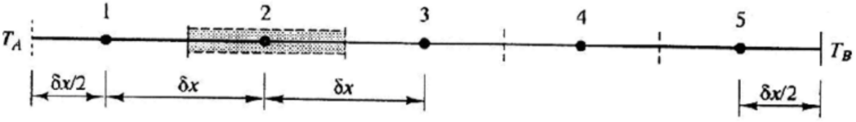
$k = 1000\,W/m/K$ 和 $A = 10 \times 10^{-3} m^2$

共有五个网格，2、3、4 是内部网格，1 和 5 是与边界相邻网格

内部网格离散

离散方程的一般形式：

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$$

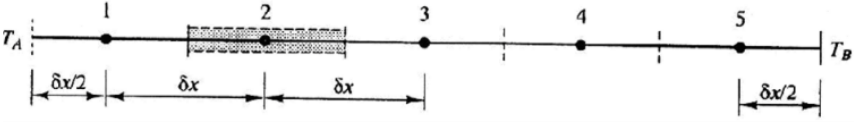


对于内部网格 2、3、4，离散方程可写成：

$$a_P T_P=a_W T_W+a_E T_E+S_u \tag{11}$$

其中 $a_W=\frac{k}{\delta x}A$, $a_E=\frac{k}{\delta x}A$, $a_P=a_W+a_E=2\frac{k}{\delta x}A$

边界网格离散



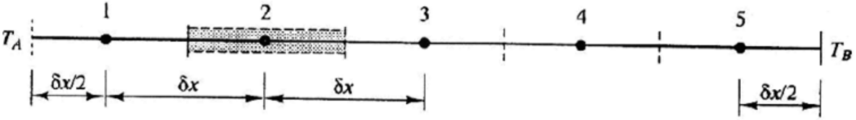
假设网格 1 中心与边界 A 之间温度呈线性分布，边界网格 1 的离散方程：

$$kA\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - kA\left(\frac{T_P - T_\mathrm{A}}{\delta x/2}\right) = 0 \tag{12}$$

整理后得到

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right)T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A} \tag{13}$$

边界网格离散



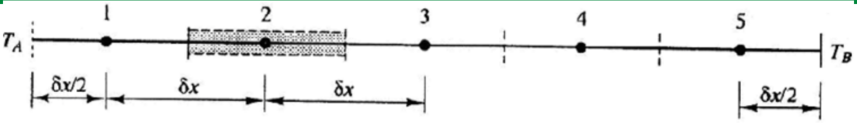
假设网格 1 中心与边界 A 之间温度呈线性分布，边界网格 1 的离散方程：

$$kA\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - kA\left(\frac{T_P - T_\mathrm{A}}{\delta x/2}\right) = 0 \tag{12}$$

整理后得到

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right)T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A} \tag{13}$$

边界网格离散形式



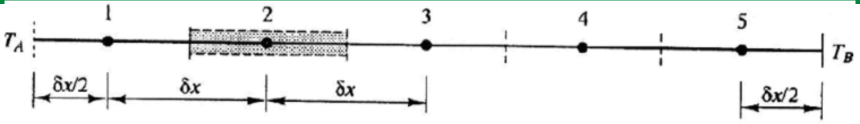
边界网格离散: $\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right) T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_{\mathrm{A}}$

一般形式: $\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P} \phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W} \phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E} \phi_E + S_u$

观察 $\Rightarrow$ 相当于源项 $(S_u + S_P T_P)$:

$$S_u = \frac{2kA}{\delta x} T_{\mathrm{A}}, \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}$$

边界网格离散形式



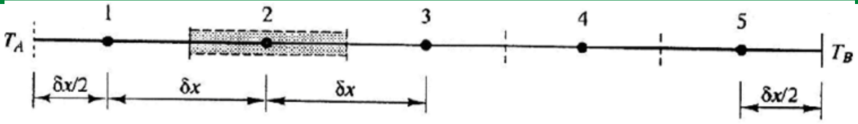
边界网格离散: $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P = 0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_{\mathrm{A}}$

一般形式: $\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$

观察 $\Rightarrow$ 相当于源项 $(S_u+S_PT_P)$:

$$S_u=\frac{2kA}{\delta x}T_{\mathrm{A}},\quad S_P=-\frac{2kA}{\delta x}$$

边界网格离散形式



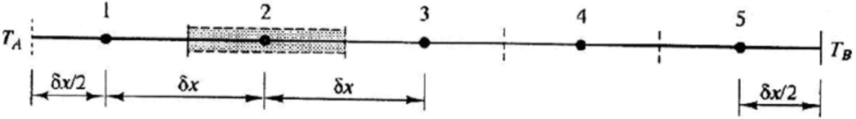
边界网格离散: $\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right) T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_{\mathsf{A}}$

一般形式: $\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P} \phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W} \phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E} \phi_E + S_u$

观察 $\Rightarrow$ 相当于源项 $(S_u + S_P T_P)$:

$$S_u = \frac{2kA}{\delta x} T_{\mathsf{A}}, \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}$$

网格离散



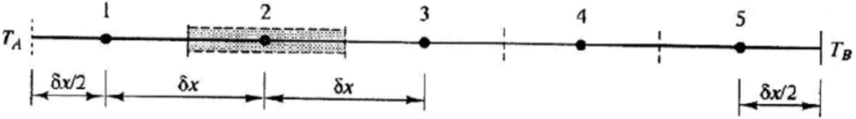
网格 1: $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_{\mathrm{A}}$

网格 2、3、4: $\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E$

网格 5: $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+0\cdot T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_{\mathrm{B}}$

铁棍的横截面 A 可以消掉，整个计算与 A 无关

网格离散



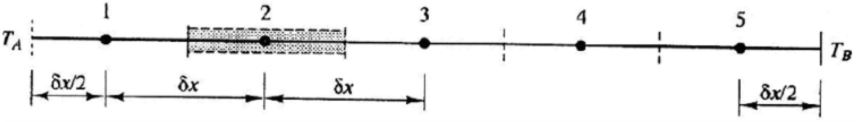
网格 1： $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A}$

网格 2、3、4： $\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E$

网格 5： $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+0\cdot T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{B}$

铁棍的横截面 A 可以消掉，整个计算与 A 无关

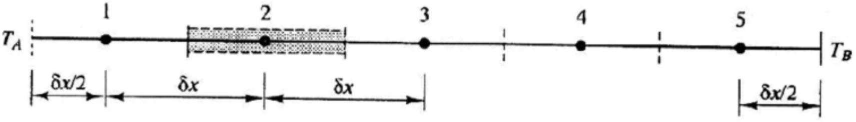
建立系数矩阵方程



$$\begin{bmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200\,T_{\mathrm{A}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200\,T_{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}$$

$$1000\,T'' = 0, \quad T(x=0) = 100, \quad T(x=0.5) = 500 \quad \Longrightarrow \quad T(x) = 800x + 100$$

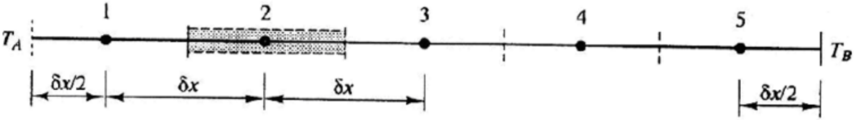
建立系数矩阵方程



$$
\begin{bmatrix}
300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\
-100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\
0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\
0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -100 & 300
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 200\,T_\mathrm{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200\,T_\mathrm{B} \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}
$$

$$1000\,T'' = 0,\ \ T(x=0) = 100,\ \ T(x=0.5) = 500 \ \Longrightarrow\ T(x) = 800x + 100$$

建立系数矩阵方程



$$\begin{bmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200\,T_{\mathrm{A}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200\,T_{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}$$

$$1000\,T'' = 0,\ \ T(x=0) = 100,\ \ T(x=0.5) = 500 \ \Longrightarrow\ T(x) = 800x + 100$$

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs/
案例名字为1D_rod
求解器名字为steadyDiffusionFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

代码解读


```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

- 控制方程离散后构成一个线性方程组 $Ax = b$，储存在 `fvScalarMatrix`。这里 `fvScalarMatrix` 是一个重要的类 (class)，定义了一个对象 (object)：`TEqn`
- `fvm::laplacian(DT, T)` 表示用隐性格式离散 $\nabla\cdot(D_T)\nabla T$，D_T 是扩散系数。
- `fvScalarMatrix` 通常不会直接考虑边界条件
- 边界条件是通过源项的方式 $(S_u + S_P T_P)$ 添加进系数矩阵，是在 `TEqn.solve()` 中完成

代码解读


```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

- 控制方程离散后构成一个线性方程组 $Ax = b$，储存在 `fvScalarMatrix`。这里 `fvScalarMatrix` 是一个重要的类 (class)，定义了一个对象 (object)：`TEqn`
- `fvm::laplacian(DT, T)` 表示用隐性格式离散 $\nabla \cdot (D_T) \nabla T$，$D_T$ 是扩散系数。
- `fvScalarMatrix` 通常不会直接考虑边界条件
- 边界条件是通过源项的方式 $(S_u + S_P T_P)$ 添加进系数矩阵，是在 `TEqn.solve()` 中完成

代码解读


```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

- 控制方程离散后构成一个线性方程组 $Ax=b$，储存在 `fvScalarMatrix`。这里 `fvScalarMatrix` 是一个重要的类 (class)，定义了一个对象 (object)：`TEqn`
- `fvm::laplacian(DT, T)` 表示用隐性格式离散 $\nabla\cdot(D_T)\nabla T$，D_T 是扩散系数。
- `fvScalarMatrix` 通常不会直接考虑边界条件
- 边界条件是通过源项的方式 $(S_u+S_PT_P)$ 添加进系数矩阵，是在 `TEqn.solve()` 中完成

代码解读


```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

- 控制方程离散后构成一个线性方程组 $Ax=b$，储存在 `fvScalarMatrix`。这里 `fvScalarMatrix` 是一个重要的类 (class)，定义了一个对象 (object)：`TEqn`
- `fvm::laplacian(DT, T)` 表示用隐性格式离散 $\nabla\cdot(D_T)\nabla T$，D_T 是扩散系数。
- `fvScalarMatrix` 通常不会直接考虑边界条件
- 边界条件是通过源项的方式 $(S_u + S_P T_P)$ 添加进系数矩阵，是在 `TEqn.solve()` 中完成

案例 1：代码使用说明

利用 git 工具下载代码

```
git clone https://gitee.com/cfdxu/cau_of_course.git
```

或者更新文件

```
cd cau_of_course
git fetch --all; git pull
```

进入储存代码的文件夹

```
cd code_practice/diffusionEqs/
```

解压缩文件包，内含有steadyDiffusion 算例和求解器

```
tar xzf steadyDiffusionFoam.tgz
```

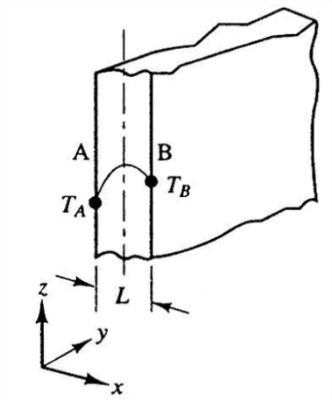
编译steadyDiffusionFoam 求解器

```
cd steadyDiffusionFoam/steadyDiffusionFoam/
wmake
```

进入1D_rod 算例，并运行算例

```
cd ../1D_rod/; ./Allrun
```

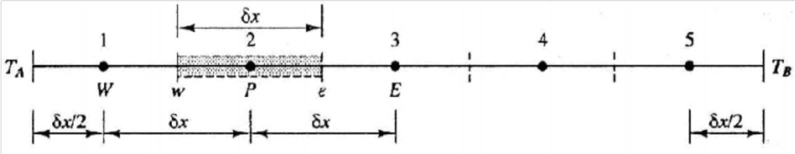
案例 2：一维稳态有源热传导



控制方程

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+q=0 \tag{14}$$

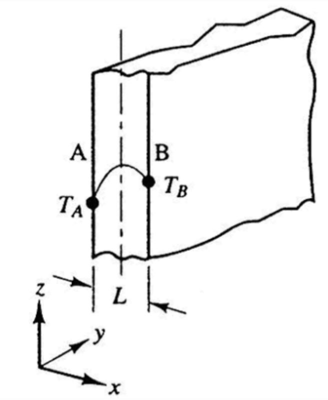
有一块平板，厚度为 $L=2cm$，热传导系数 $k=0.5\,W/m/K$，平均分布的热源 $q=10^6\,W/m^3$，A、B 两面的温度分别为 $100^\circ C$ 和 $500^\circ C$。该问题在一维上模拟时，仅考虑 x 方向。



该平板平均分成 5 份，每份长度 $\delta x=0.0.004m$

共有五个网格，2、3、4 是内部网格，1 和 5 是边界网格

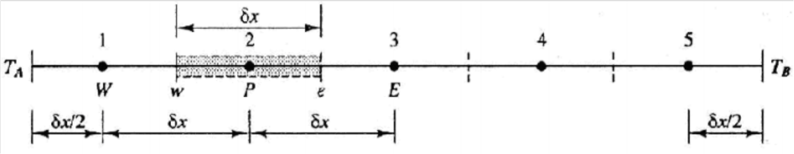
案例 2：一维稳态有源热传导



控制方程

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+q=0 \tag{14}$$

有一块平板，厚度为 $L=2cm$，热传导系数 $k=0.5\,W/m/K$，平均分布的热源 $q=10^6\,W/m^3$，A、B 两面的温度分别为 $100^\circ C$ 和 $500^\circ C$。该问题在一维上模拟时，仅考虑 x 方向。

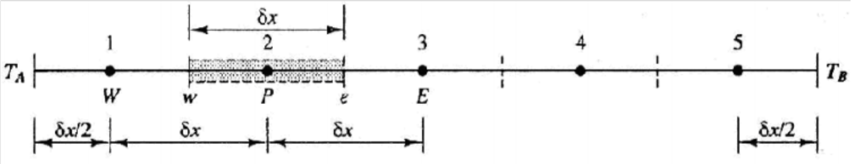


该平板平均分成 5 份，每份长度 $\delta x=0.0.004m$

共有五个网格，2、3、4 是内部网格，1 和 5 是边界网格

内部网格离散

一般形式：$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$

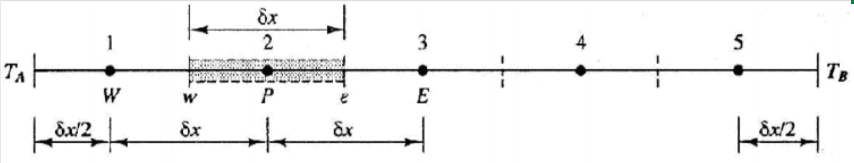


对于内部网格 2、3、4，离散方程可写成：

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \tag{15}$$

其中 $a_W=\frac{k}{\delta x}A$, $a_E=\frac{k}{\delta x}A$, $a_P=a_W+a_E-S_P=2\frac{k}{\delta x}A$, $S_u=qA\delta x$, $S_P=0$

边界网格离散



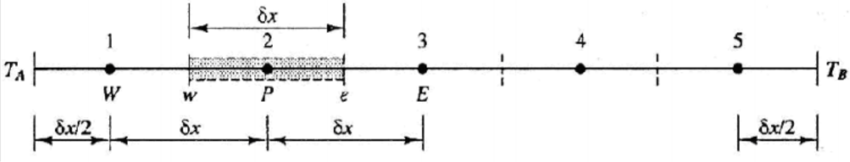
假设网格 1 中心与边界 A 之间温度呈线性分布，边界网格 1 的离散方程：

$$kA\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - kA\left(\frac{T_P - T_\mathsf{A}}{\delta x/2}\right) + qA\delta x = 0 \tag{16}$$

整理后得到

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right)T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E + qA\delta x + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathsf{A} \tag{17}$$

边界网格离散



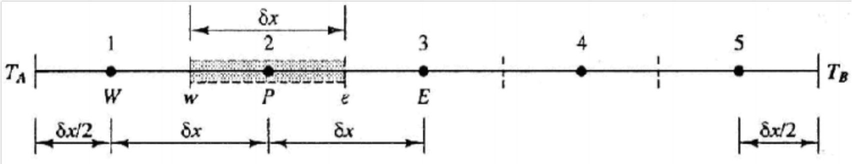
假设网格 1 中心与边界 A 之间温度呈线性分布，边界网格 1 的离散方程：

$$kA\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - kA\left(\frac{T_P - T_\mathrm{A}}{\delta x/2}\right) + qA\delta x = 0 \tag{16}$$

整理后得到

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right) T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_E + qA\delta x + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_\mathrm{A} \tag{17}$$

网格离散



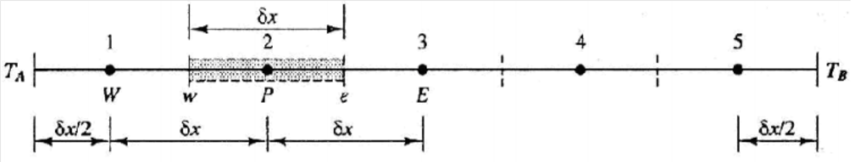
网格 1： $\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right) T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_\mathrm{A} + qA\delta x$

网格 2、3、4： $\left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_P = \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_E + qA\delta x$

网格 5： $\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right) T_P = \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_W + 0 \cdot T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_\mathrm{B} + qA\delta x$

平板的面积 A 可以消掉，整个计算与 A 无关

网格离散



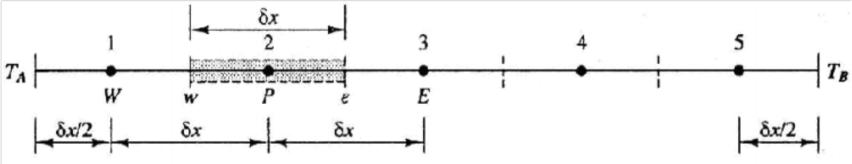
网格 1： $\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right) T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_\mathrm{A} + qA\delta x$

网格 2、3、4： $\left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_P = \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_E + qA\delta x$

网格 5： $\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right) T_P = \left(\frac{k}{\delta x}A\right) T_W + 0 \cdot T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right) T_\mathrm{B} + qA\delta x$

平板的面积 A 可以消掉，整个计算与 A 无关

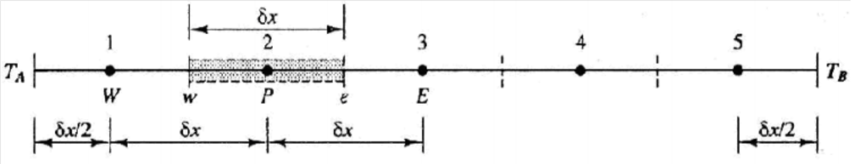
建立系数矩阵方程



$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}$$

解析解：$T(x) = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A$

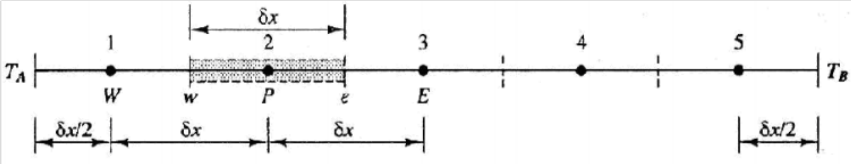
建立系数矩阵方程



$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}$$

解析解：$T(x) = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A$

建立系数矩阵方程



$$
\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}
$$

解析解： $T(x) = \left[\dfrac{T_B - T_A}{L} + \dfrac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A$

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_plate_with_src
求解器名字为steadyDiffusionWithSourceFoam 关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
   +q
);
```

热传导系数 D_T 和热源 q 在constant/transportProperties 中定义

```
DT                DT [ 0 2 -1 0 0 0 0 ] 0.5;
q                 q  [ 0 0 -1 1 0 0 0 ] 1E6;
```

质量 (kg); 长度 (m); 时间 (s); 温度 (K); 摩尔数 (mol); 电流 (A); 光强度 (cd)

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_plate_with_src
求解器名字为steadyDiffusionWithSourceFoam 关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
  +q
);
```

热传导系数 D_T 和热源 q 在constant/transportProperties 中定义

```
DT              DT [ 0 2 -1 0 0 0 0 ] 0.5;
q               q  [ 0 0 -1 1 0 0 0 ] 1E6;
```

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_plate_with_src
求解器名字为steadyDiffusionWithSourceFoam 关键代码

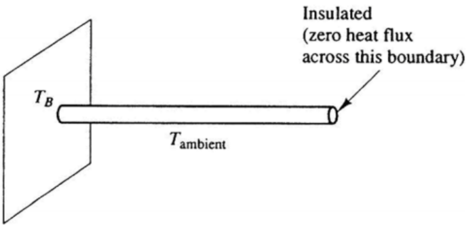
```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
   +q
);
```

热传导系数 D_T 和热源 q 在constant/transportProperties 中定义

```
DT              DT [ 0 2 -1 0 0 0 0 ] 0.5;
q               q  [ 0 0 -1 1 0 0 0 ] 1E6;
```

质量 (kg); 长度 (m); 时间 (s); 温度 (K); 摩尔数 (mol); 电流 (A); 光强度 (cd)

案例 3：一维带有边界通量热传导



一根长 $L=1m$ 棍子放置在温度恒定为 $T_\infty=20\circ C$ 的环境中，$n^2=25/m^2$。
其中一端（A）绝热的（insulated），没有热通量，即 $\mathbf{n}_x\cdot(\nabla T)=0$
另一端（B）保持恒温 $T_B=100\circ C$

控制方程

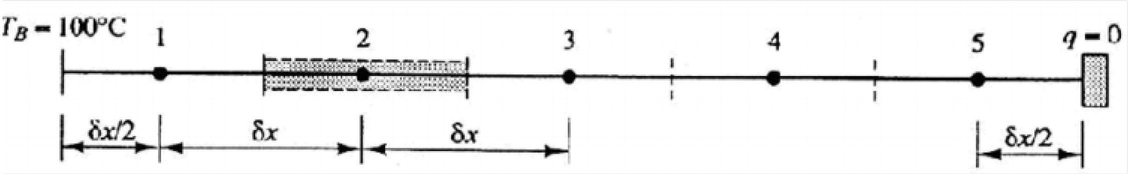
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)-n^2(T-T_\infty)=0 \qquad (18)$$

解析解是

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_B-T_\infty}=\frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)} \qquad (19)$$

其中 $n^2=hp/(kA)$,h 是对流热传导系数，
p 是圆周长，T_∞ 是环境温度

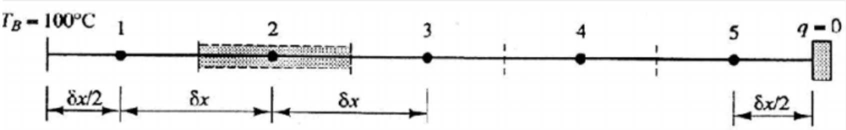
网格离散化



该平板平均分成 5 份，每份长度 $\delta x = 0.2m$
共有五个网格，2、3、4 是内部网格，1 和 5 是边界网格

内部网格离散

一般形式：
$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$$

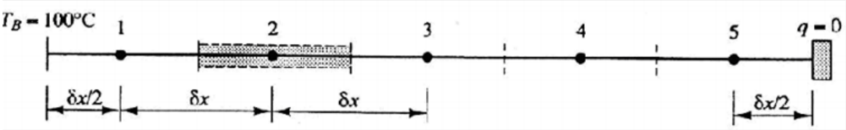


对于内部网格 2、3、4，离散方程可写成：

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \tag{20}$$

其中 $a_W=\frac{1}{\delta x}$, $a_E=\frac{1}{\delta x}$, $a_P=a_W+a_E-S_P=\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x$,
$S_u=n^2\delta x T_\infty$, $S_P=-n^2\delta x$

边界网格离散 (B 侧)



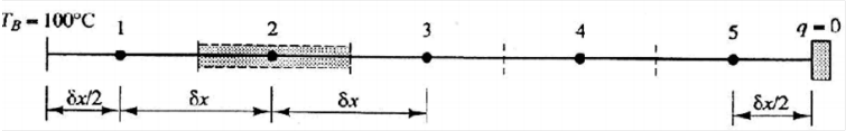
假设网格 1 中心与边界 B 之间温度呈线性分布，边界网格 1 的离散方程：

$$\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - \left(\frac{T_P - T_{\mathrm{B}}}{\delta x/2}\right) - \left[n^2(T_P - T_\infty)\delta x\right] = 0 \tag{21}$$

整理后得到

$$\left(\frac{1}{\delta x} + \frac{2}{\delta x} + n^2\delta x\right) T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{1}{\delta x}\right) T_E + n^2\delta x T_\infty + \left(\frac{2}{\delta x}\right) T_{\mathrm{B}} \tag{22}$$

边界网格离散 (B 侧)



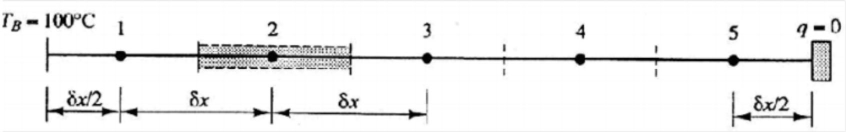
假设网格 1 中心与边界 B 之间温度呈线性分布，边界网格 1 的离散方程：

$$\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - \left(\frac{T_P - T_{\mathrm{B}}}{\delta x/2}\right) - [n^2(T_P - T_\infty)\delta x] = 0 \tag{21}$$

整理后得到

$$\left(\frac{1}{\delta x} + \frac{2}{\delta x} + n^2\delta x\right) T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{1}{\delta x}\right) T_E + n^2\delta x T_\infty + \left(\frac{2}{\delta x}\right) T_{\mathrm{B}} \tag{22}$$

边界网格离散 (B 侧)

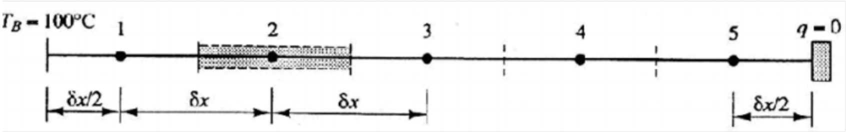


观察： $\left(\frac{1}{\delta x}+\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P = 0\cdot T_W + \left(\frac{1}{\delta x}\right)T_E + n^2\delta x T_\infty + \left(\frac{2}{\delta x}\right)T_{\mathrm{B}}$ ⇒ 相当

于源项 $(S_u + S_P T_P)$：

$$S_u = \frac{2}{\delta x}T_{\mathrm{B}}, \quad S_P = -\frac{2}{\delta x}$$

边界网格离散 (B 侧)

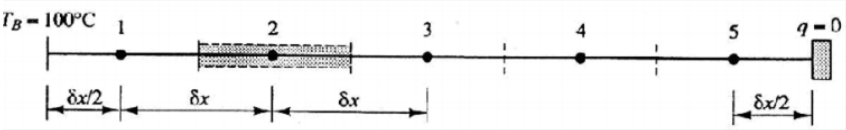


观察： $\left(\frac{1}{\delta x}+\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P = 0\cdot T_W + \left(\frac{1}{\delta x}\right)T_E + n^2\delta x T_\infty + \left(\frac{2}{\delta x}\right)T_\mathsf{B} \Rightarrow$ 相当

于源项 $(S_u + S_P T_P)$：

$$S_u = \frac{2}{\delta x}T_\mathsf{B}, \quad S_P = -\frac{2}{\delta x}$$

边界网格离散 (q=0 一侧)



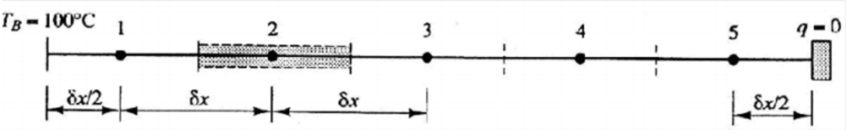
边界网格 5 与边界网格 1 的离散方式不同，边界网格 5 右侧的面的通量为零

$$\left[0-\left(\frac{T_P-T_W}{\delta x}\right)\right]-\left[n^2(T_P-T_\infty)\delta x\right]=0 \tag{23}$$

整理后得到

$$\left(\frac{1}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P=\frac{1}{\delta x}\cdot T_W+0\cdot T_E+n^2\delta x T_\infty \tag{24}$$

网格离散

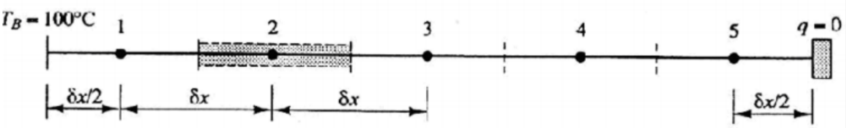


网格 1：$\left(\frac{1}{\delta x}+\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P = 0\cdot T_W+\left(\frac{1}{\delta x}\right)T_E+n^2\delta x T_\infty+\left(\frac{2}{\delta x}\right)T_\mathrm{B}$

网格 2、3、4：$\left(\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P=\left(\frac{1}{\delta x}\right)T_W+\left(\frac{1}{\delta x}\right)T_E+n^2\delta x T_\infty$

网格 5：$\left(\frac{1}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P=\frac{1}{\delta x}\cdot T_W+0\cdot T_E+n^2\delta x T_\infty$

建立系数矩阵方程

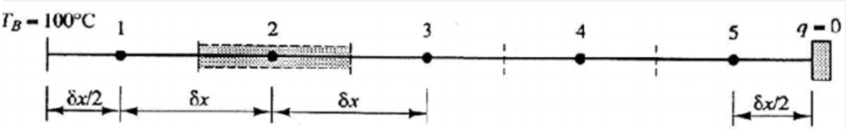


$$
\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.22 \\ 36.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 22.30 \end{bmatrix}
$$

解析解是

$$
\frac{T(x) - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)}
$$

建立系数矩阵方程

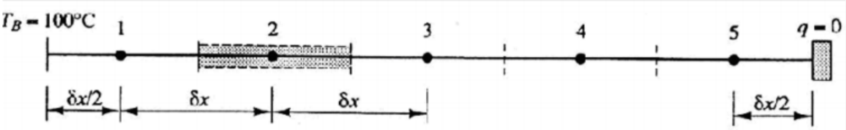


$$\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.22 \\ 36.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 22.30 \end{bmatrix}$$

解析解是

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)}$$

建立系数矩阵方程



$$\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.22 \\ 36.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 22.30 \end{bmatrix}$$

解析解是

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)}$$

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_rod_convective_cooling
求解器名字为steadyDiffusionWithCoolingFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(T)
  ==
    fvm::Sp(alpha,T)
  - alpha*Tinf
);
```

其中
alpha: $\alpha = n^2$
Tinf: T_∞
LaTeX 代码T_∞

fvm::Sp(alpha,T)
$\Downarrow$
源项 $(S_u + S_P T_P)$
内部网格：$S_P = -n^2 \delta x$
B 边界网格：$S_P = -\dfrac{2}{\delta x}$

alpha 和环境温度Tinf 在constant/transportProperties 中定义

```
alpha        alpha [ 0 -2 0 0 0 0 0 ] 25;
Tinf         Tinf [ 0 0 0 1 0 0 0 ] 20;
```

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_rod_convective_cooling
求解器名字为steadyDiffusionWithCoolingFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(T)
  ==
    fvm::Sp(alpha,T)
  - alpha*Tinf
);
```

其中
alpha:$\alpha = n^2$
Tinf: T_∞
LaTeX 代码T_∞

fvm::Sp(alpha,T)
$\Downarrow$
源项 $(S_u + S_P T_P)$
内部网格：$S_P = -n^2 \delta x$
B 边界网格：$S_P = -\dfrac{2}{\delta x}$

alpha 和环境温度Tinf 在constant/transportProperties 中定义

```
alpha    alpha [ 0 -2 0 0 0 0 0 ] 25;
Tinf     Tinf [ 0 0 0 1 0 0 0 ] 20;
```

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_rod_convective_cooling
求解器名字为steadyDiffusionWithCoolingFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(T)
  ==
    fvm::Sp(alpha,T)
  - alpha*Tinf
);
```

其中
alpha:$\alpha = n^2$
Tinf:T_∞
LaTeX 代码T_∞

fvm::Sp(alpha,T)

$\Downarrow$

源项 $(S_u + S_P T_P)$
内部网格：$S_P = -n^2\delta x$
B 边界网格：$S_P = -\dfrac{2}{\delta x}$

alpha 和环境温度Tinf 在constant/transportProperties 中定义

```
alpha           alpha [ 0 -2 0 0 0 0 0 ] 25;
Tinf            Tinf [ 0 0 0 1 0 0 0 ] 20;
```

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_rod_convective_cooling
求解器名字为steadyDiffusionWithCoolingFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(T)
  ==
    fvm::Sp(alpha,T)
  - alpha*Tinf
);
```

其中
alpha: $\alpha = n^2$
Tinf: T_∞
LaTeX 代码T_∞

fvm::Sp(alpha,T)

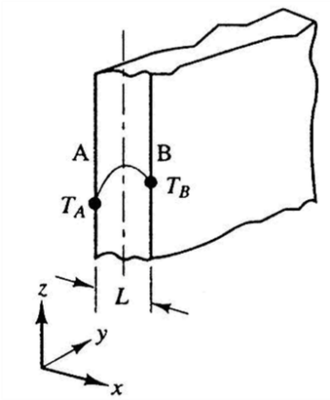
$\Downarrow$

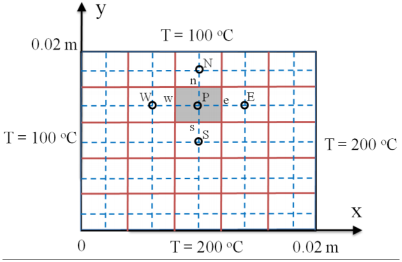
源项 $(S_u + S_P T_P)$
内部网格：$S_P = -n^2\delta x$
B 边界网格：$S_P = -\dfrac{2}{\delta x}$

alpha 和环境温度Tinf 在constant/transportProperties 中定义

```
alpha          alpha [ 0 -2 0 0 0 0 0 ] 25;
Tinf           Tinf [ 0 0 0 1 0 0 0 ] 20;
```

案例 4：二维稳态有源热传导

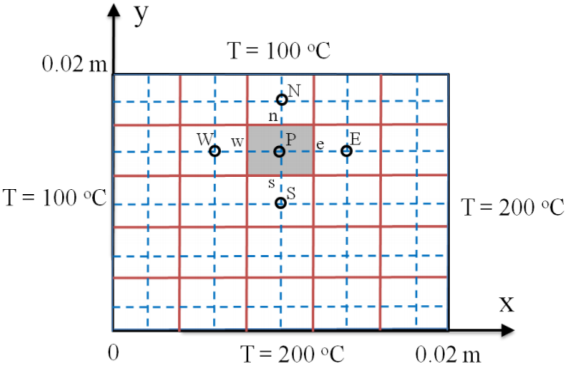




控制方程: $$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(k\frac{dT}{dy}\right)+q=0$$

有一块二维平板，$2cm\times 2cm$，热传导系数 $k=0.5\,W/m/K$，平均分布的热源 $q=10^6\,W/m^3$，上、左两面温度恒定为 $100^\circ C$，下、右两侧温度恒定为 $200^\circ C$

2D FVM



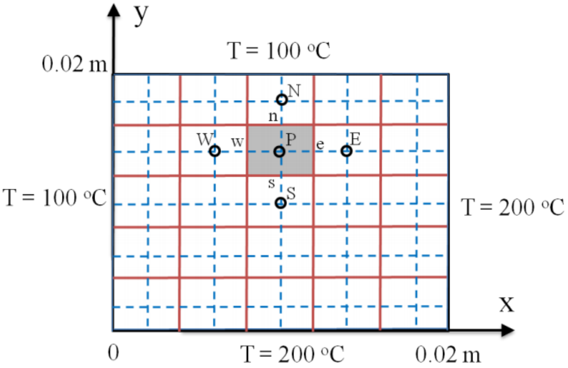
x 和 y 方向平均分成 5 份，总共 25 个控制体积/网格单元

- 对于指定阴影部分的内部网格 P，存在四个边 n, e, s, w, 分别对应四个相邻网格 N, E, S, W
- 对中心在 P 的控制体积，积分 ($\int_{CV}$) 应该发生在阴影部分
- 对于各边上的通量以及相关插值计算，处理方式与一维问题一样

$$\int_{CV} \nabla\cdot(\gamma\nabla\phi)dV + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

$$\int_{A} \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

2D FVM



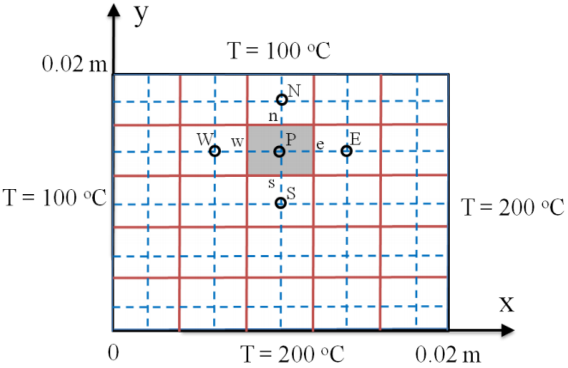
x 和 y 方向平均分成 5 份，总共 25 个控制体积/网格单元

- 对于指定阴影部分的内部网格 P，存在四个边 n, e, s, w，分别对应四个相邻网格 N, E, S, W
- 对中心在 P 的控制体积，积分 $(\int_{CV})$ 应该发生在阴影部分
- 对于各边上的通量以及相关插值计算，处理方式与一维问题一样

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

$$\int_{A} \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

2D FVM



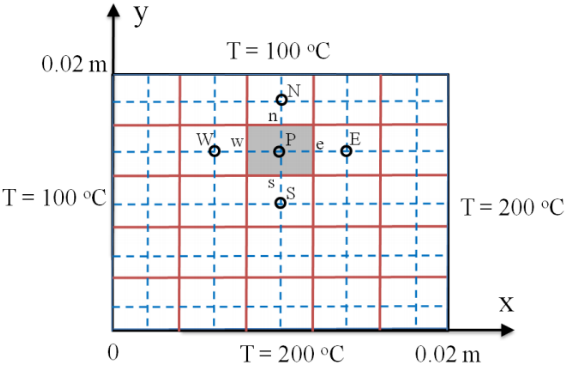
x 和 y 方向平均分成 5 份，总共 25 个控制体积/网格单元

- 对于指定阴影部分的内部网格 P，存在四个边 n, e, s, w，分别对应四个相邻网格 N, E, S, W
- 对中心在 P 的控制体积，积分 $(\int_{CV})$ 应该发生在阴影部分
- 对于各边上的通量以及相关插值计算，处理方式与一维问题一样

$$\int_{CV} \nabla\cdot(\gamma\nabla\phi)dV + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

$$\int_{A} \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

2D FVM



x 和 y 方向平均分成 5 份，总共 25 个控制体积/网格单元

- 对于指定阴影部分的内部网格 P，存在四个边 n, e, s, w，分别对应四个相邻网格 N, E, S, W
- 对中心在 P 的控制体积，积分 $(\int_{CV})$ 应该发生在阴影部分
- 对于各边上的通量以及相关插值计算，处理方式与一维问题一样

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

$$\int_{A} \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为2D_plate_with_src
求解器名字为steadyDiffusionWithSourceFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
   +q
);
```

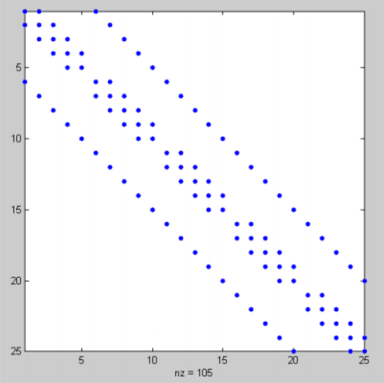
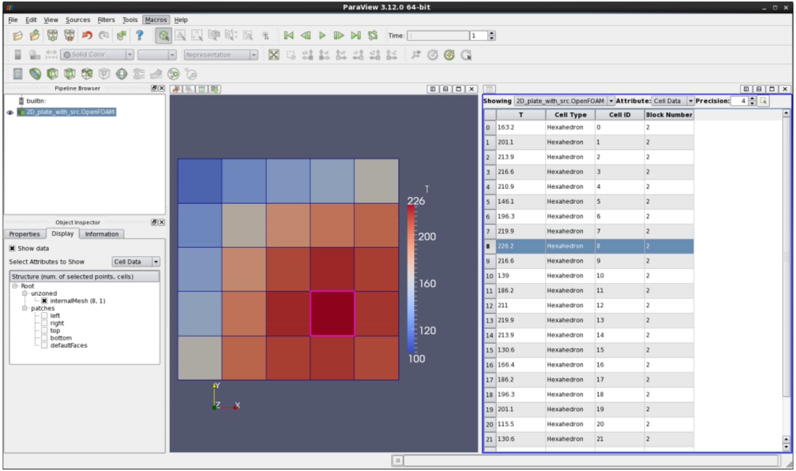


图: 系数矩阵 A 的对称结构

对于每一个控制体积(网格单元)，可以通过 ParaView 检查 cellID 和 field value



总结

主要介绍了稳态热传导问题 $\nabla\cdot(\gamma\nabla\phi)+S_\phi=0$

- 离散后方程的一般形式 ($\sum$ 是对所有相邻边界通量 ϕ_{nb} 求和)

$$a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+S_u$$

- 系数 a_P 满足以下关系

$$a_P=\sum a_{nb}-S_P$$

- 源项的一般形式 $S_\phi\Delta V=S_u+S_P\phi_P$
- 边界处理方式：切断联系、引入边界通量

Thank you.

欢迎私下交流，请勿私自上传网络，谢谢！