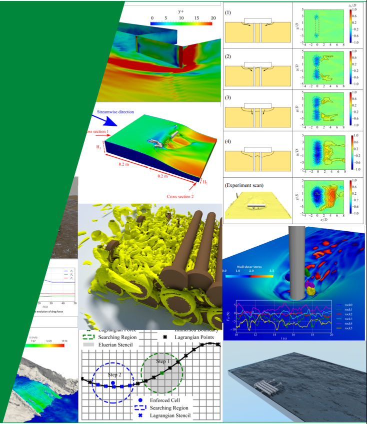
2024年春季《计算流体动力学编程实践》

2.3 有限体积法编程
一维稳态扩散问题



徐云成

✉ycxu@cau.edu.cn

2024 年 2 月 27 日

本节课内容要点

- 有限体积法空间离散
- 一维稳态扩散方程离散的一般形式
- 案例分析
  - 案例1：一维稳态无源热传导
  - 案例2：一维稳态有源热传导
  - 案例3：一维稳态有源热传导带通量边界
  - 案例4：二维稳态有源热传导

什么是离散？

离散 discretisation

- 通用输运方程很少存在解析解，这就是为什么需要数值分析方法
- 离散是指用一组线性表达来表示所求的微分方程
- 有很多中离散方法，包括：有限差分法(FDM, finite difference method)、有限单元法(FEM, finite element method)、有限体积法(FVM, finite volume method)
- 这门课我们主要介绍OpenFOAM所使用的FVM

FVM具体步骤

- 将控制方程在控制体积上进行积分
- 假定适合的分布函数
- 将分布函数代入并完成积分，整理化简得离散化方程

离散一维稳态扩散方程

扩散是高浓度向低浓度输移的过程

- 完整通用输运方程:

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\substack{\text{temopral derivative}\\ \text{时间偏导}}} + \underbrace{\nabla \cdot (\phi \mathbf{u})}_{\substack{\text{convection term}\\ \text{对流项}}} - \underbrace{\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} = \underbrace{\mathbf{S}_{\phi}}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} \tag{1}$$

- 简化的稳态扩散方程

$$\underbrace{\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} + \underbrace{\mathbf{S}_{\phi}}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} = 0 \tag{2}$$

离散一维稳态扩散方程

扩散是高浓度向低浓度输移的过程

- 完整通用输运方程：

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\substack{\text{temopral derivative}\\ \text{时间偏导}}} + \underbrace{\nabla \cdot (\phi \mathbf{u})}_{\substack{\text{convection term}\\ \text{对流项}}} - \underbrace{\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} = \underbrace{\mathbf{S}_{\phi}}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} \tag{1}$$

- 简化的稳态扩散方程

$$\underbrace{\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} + \underbrace{\mathbf{S}_{\phi}}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} = 0 \tag{2}$$

离散一维稳态扩散方程

扩散是高浓度向低浓度输移的过程

- 完整通用输运方程：

$$\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\substack{\text{temopral derivative}\\ \text{时间偏导}}} + \underbrace{\nabla\cdot(\phi\mathbf{u})}_{\substack{\text{convection term}\\ \text{对流项}}} - \underbrace{\nabla\cdot(\gamma\nabla\phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} = \underbrace{\mathbf{S}_\phi}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} \tag{1}$$

- 简化的稳态扩散方程

$$\underbrace{\nabla\cdot(\gamma\nabla\phi)}_{\substack{\text{diffusion term}\\ \text{扩散项}}} + \underbrace{\mathbf{S}_\phi}_{\substack{\text{source term}\\ \text{源项}}} = 0 \tag{2}$$

有限体积法（FVM）离散

- 在控制体积上进行积分

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = \int_A \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0 \tag{3}$$

- 以简化后的一维方程为例

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0 \tag{4}$$

离散一维稳态扩散方程

有限体积法（FVM）离散

- 在控制体积上进行积分

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = \int_A \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0 \tag{3}$$

- 以简化后的一维方程为例

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + S = 0 \quad \phi|_{x=0} = 1,\ \ \phi|_{x=L} = 0 \text{ 一维稳态扩散稳态} \tag{5}$$

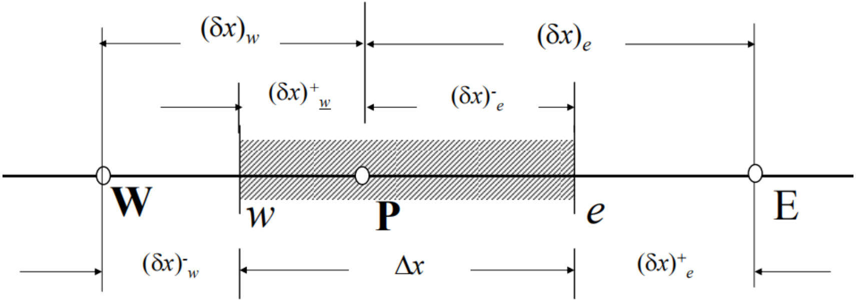


图: 一维问题空间区域的离散化

FVM离散1D扩散

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + S = 0 \quad \phi|_{x=0} = 1, \ \phi|_{x=L} = 0 \text{ 一维稳态扩散稳态} \tag{5}$$

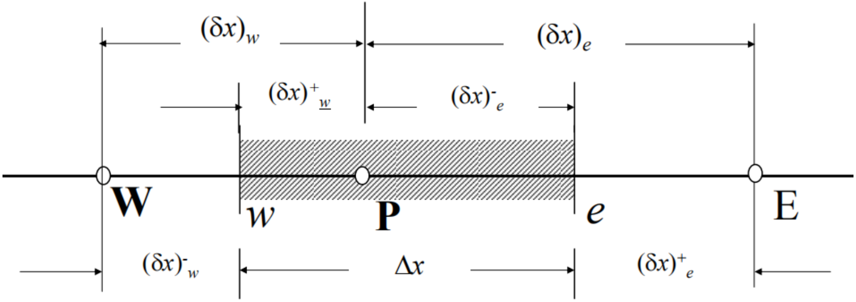
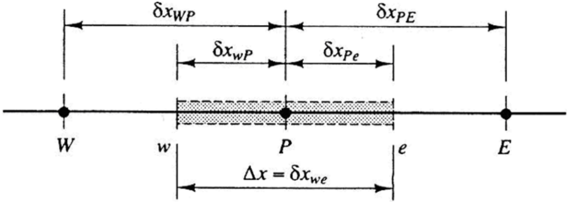


图: 一维问题空间区域的离散化

回忆数值方法步骤：1、前处理（包括生成网格）2、求解离散方程 3、后处理

OpenFOAM® 中一维稳态扩散方程



扩散方程积分形式：

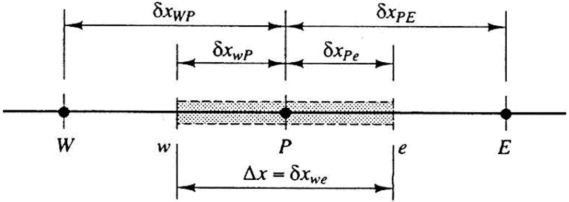
$$\int_A \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)dA + \int_{CV} SdV = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$$

OpenFOAM® 中使用3D网格处理1D、2D计算问题
使用FVM进行离散：

$$\int_A \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)dA + \int_{CV} SdV = 0$$

$$\left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$



扩散方程积分形式：

$$\int_A \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)dA + \int_{CV} SdV = 0$$

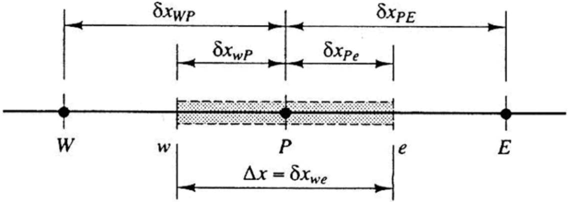
$$\frac{d}{dx}\left(\gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$$

OpenFOAM® 中使用3D网格处理1D、2D计算问题

使用FVM进行离散：

$$\int_A \mathbf{n}\cdot(\gamma\nabla\phi)dA + \int_{CV} SdV = 0$$

$$\left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$



扩散方程FVM离散形式：

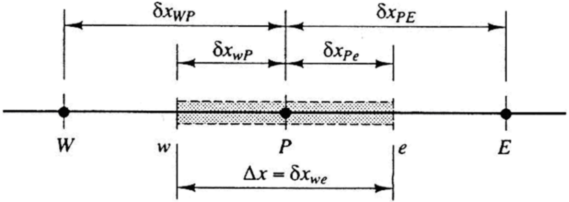
$$\left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e-\left(\gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w+\overline{S}\Delta V=0$$

线性分布假设下w和e上的扩散系数：

$$\gamma_w=\frac{\gamma_W+\gamma_P}{2},\quad \gamma_e=\frac{\gamma_P+\gamma_E}{2}$$

利用中心差分计算导数（梯度）：

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e=\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_{PE}},\quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w=\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_{WP}}$$



线性分布假设下w和e上的扩散系数：

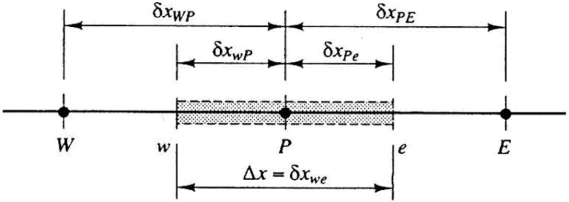
$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

利用中心差分计算导数（梯度）：

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

扩散方程FVM离散形式：

$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$



线性分布假设下w和e上的扩散系数：

$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

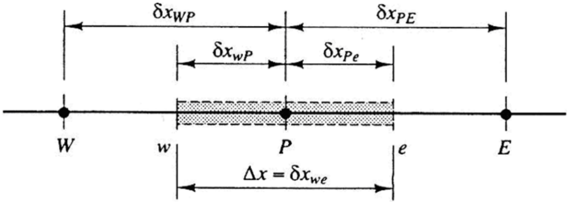
利用中心差分计算导数（梯度）：

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

扩散方程FVM离散形式：

$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$

OpenFOAM® 中一维稳态扩散方程



交界面上的扩散通量

diffusive fluxes at interfaces

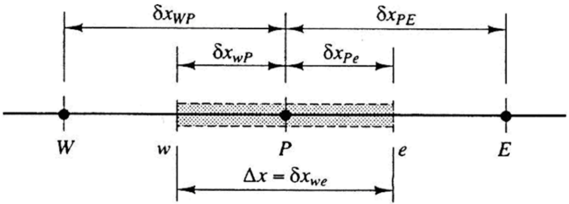
$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}$$

$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

扩散方程FVM离散形式：

$$\left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$

system/fvSchemes



interpolation scheme (插值格式)

$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

gradient scheme (梯度格式)

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

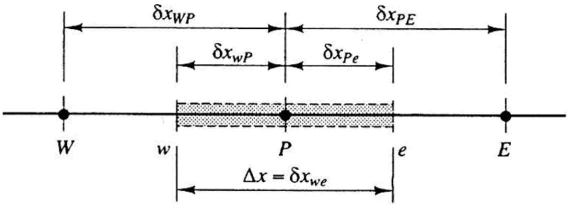
在算例目录中的system/fvScheme中存在

`laplacian(nu,U) Gauss linear corrected;`

`Gauss <interpolationScheme> <snGradScheme>` （其中sn=>surface normal)

`laplacian(nu,U)`数学表达: $\nabla \cdot (\nu \nabla U) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$

system/fvSchemes



interpolation scheme (插值格式)

$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

gradient scheme (梯度格式)

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

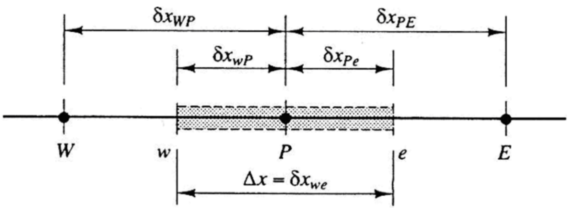
在算例目录中的`system/fvScheme`中存在

`laplacian(nu,U) Gauss linear corrected;`

`Gauss <interpolationScheme> <snGradScheme>` （其中sn=>surface normal)

`laplacian(nu,U)`数学表达: $\nabla \cdot (\nu \nabla U) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$

system/fvSchemes



interpolation scheme (插值格式)

$$\gamma_w = \frac{\gamma_W + \gamma_P}{2}, \quad \gamma_e = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2}$$

gradient scheme (梯度格式)

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}$$

在算例目录中的`system/fvScheme`中存在

`laplacian(nu,U) Gauss linear corrected;`

`Gauss <interpolationScheme> <snGradScheme>` （其中sn=>surface normal)

`laplacian(nu,U)`数学表达： $\nabla \cdot (\nu \nabla U) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$

FVM 离散–源项 source term

源项S通常与变量ϕ相关，如果用线性方式表达：

$$\overline{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P \tag{6}$$

将所有离散项代入一维稳态扩散方程$\frac{d}{dx}\left(\gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$

$$\gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} + (S_u + S_p\phi_P) = 0 \tag{7}$$

整理后得到

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P}\phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E + S_u \tag{8}$$

源项S通常与变量ϕ相关，如果用线性方式表达：

$$\overline{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P \tag{6}$$

将所有离散项代入一维稳态扩散方程$\frac{d}{dx}\left(\gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$

$$\gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} + (S_u + S_p\phi_P) = 0 \tag{7}$$

整理后得到

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P}\phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E + S_u \tag{8}$$

FVM 离散–源项 source term

源项S通常与变量ϕ相关，如果用线性方式表达：

$$\overline{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P \tag{6}$$

将所有离散项代入一维稳态扩散方程$\dfrac{d}{dx}\left(\gamma\dfrac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$

$$\gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} + (S_u + S_p\phi_P) = 0 \tag{7}$$

整理后得到

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P}\phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E + S_u \tag{8}$$

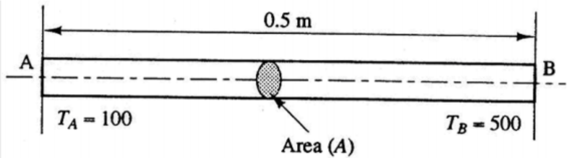
离散方程的一般形式

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P}\phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E + S_u$$

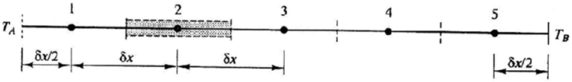
一般形式：

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u \tag{9}$$

对于靠近计算域边界的控制体积，需要根据特定的边界条件对该方程进行修改



铁棒总长$0.5m$，平均分成5份，每份长度$\delta x = 0.1m$



控制方程

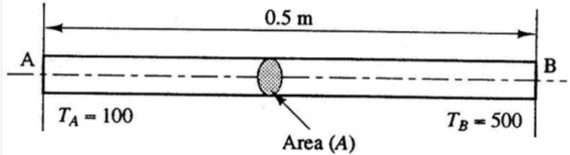
$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{10}$$

共有五个网格，2、3、4是内部网格，1和5是与边界相邻网格

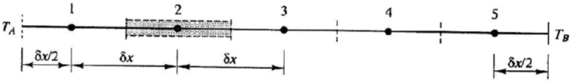
边界条件:$T_\mathrm{A} = 100,\ T_\mathrm{B} = 500$

$k = 1000W/m/K$和$A = 10 \times 10^{-3}m^2$

案例1：一维稳态无源热传导



铁棒总长$0.5m$，平均分成5份，每份长度$\delta x = 0.1m$



控制方程

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{10}$$

边界条件:$T_{\mathrm{A}} = 100,\ T_{\mathrm{B}} = 500$

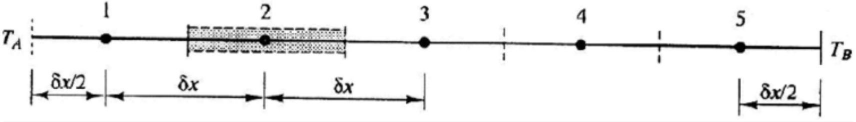
$k = 1000W/m/K$和$A = 10 \times 10^{-3}m^2$

共有五个网格，2、3、4是内部网格，1和5是与边界相邻网格

内部网格离散

离散方程的一般形式：

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$$

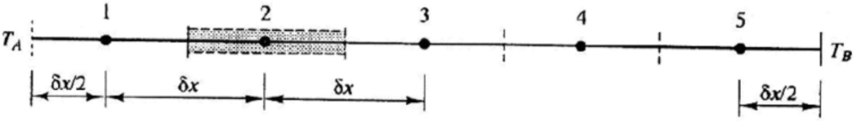


对于内部网格2、3、4，离散方程可写成：

$$a_PT_P=a_WT_W+a_ET_E+S_u \tag{11}$$

其中$a_W=\frac{k}{\delta x}A$, $a_E=\frac{k}{\delta x}A$, $a_P=a_W+a_E=2\frac{k}{\delta x}A$

边界网格离散



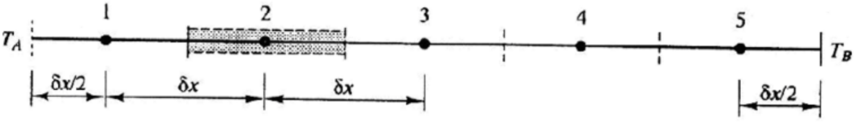
假设网格1中心与边界A之间温度呈线性分布，边界网格1的离散方程：

$$kA\left(\frac{T_E-T_P}{\delta x}\right)-kA\left(\frac{T_P-T_\mathrm{A}}{\delta x/2}\right)=0 \tag{12}$$

整理后得到

$$\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A} \tag{13}$$

边界网格离散



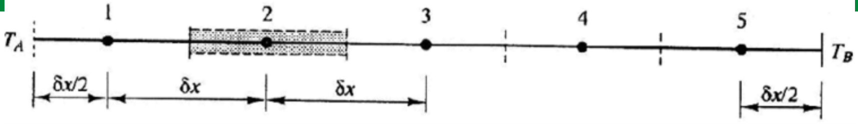
假设网格1中心与边界A之间温度呈线性分布，边界网格1的离散方程：

$$kA\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - kA\left(\frac{T_P - T_\mathrm{A}}{\delta x/2}\right) = 0 \tag{12}$$

整理后得到

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right)T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A} \tag{13}$$

边界网格离散形式



边界网格离散: $\left(\dfrac{k}{\delta x}A + \dfrac{2k}{\delta x}A\right)T_P = 0 \cdot T_W + \left(\dfrac{k}{\delta x}A\right)T_E + \left(\dfrac{2k}{\delta x}A\right)T_{\mathrm{A}}$

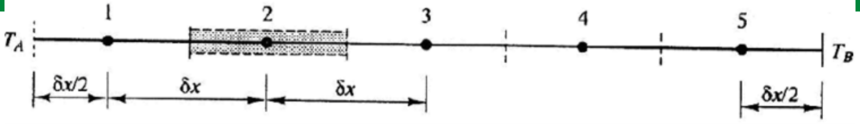
一般形式:

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)}_{a_P}\phi_P = \underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W + \underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E + S_u$$

观察⇒相当于源项$(S_u + S_P T_P)$:

$$S_u = \frac{2kA}{\delta x}T_{\mathrm{A}}, \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}$$

边界网格离散形式



边界网格离散: $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_{\mathsf{A}}$

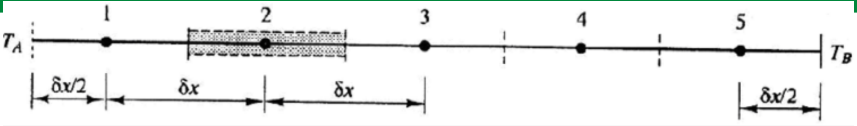
一般形式:

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$$

观察⇒相当于源项$(S_u+S_PT_P)$:

$$S_u=\frac{2kA}{\delta x}T_{\mathsf{A}},\quad S_P=-\frac{2kA}{\delta x}$$

边界网格离散形式



边界网格离散: $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathsf{A}$

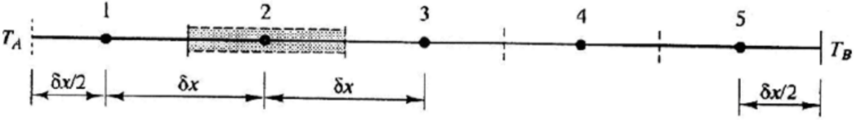
一般形式:

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$$

观察⇒相当于源项$(S_u+S_PT_P)$:

$$S_u=\frac{2kA}{\delta x}T_\mathsf{A},\quad S_P=-\frac{2kA}{\delta x}$$

网格离散

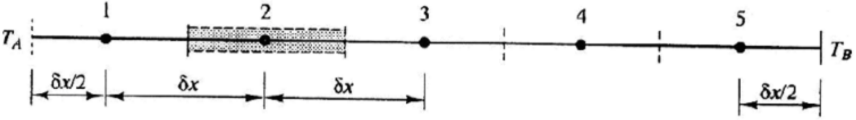


网格1： $\left(\dfrac{k}{\delta x}A+\dfrac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\dfrac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\dfrac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A}$

网格2、3、4： $\left(\dfrac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\dfrac{k}{\delta x}A\right)T_W+\left(\dfrac{k}{\delta x}A\right)T_E$

网格5： $\left(\dfrac{k}{\delta x}A+\dfrac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\dfrac{k}{\delta x}A\right)T_W+0\cdot T_E+\left(\dfrac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{B}$

铁棍的横截面A可以消掉，整个计算与A无关



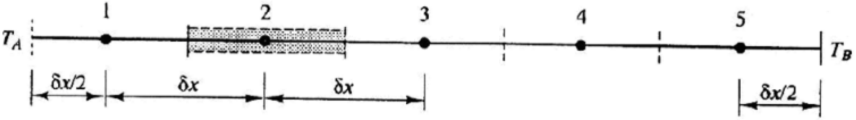
网格1： $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A}$

网格2、3、4： $\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E$

网格5： $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+0\cdot T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{B}$

铁棍的横截面A可以消掉，整个计算与A无关

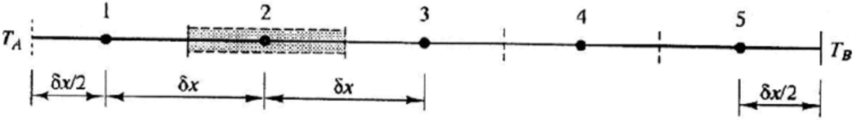
建立系数矩阵方程



$$
\begin{bmatrix}
300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\
-100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\
0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\
0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -100 & 300
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 200T_\mathrm{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_\mathrm{B} \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}
$$

$$1000T'' = 0,\ T(x=0) = 100,\ T(x=0.5) = 500 \Longrightarrow T(x) = 800x + 100$$

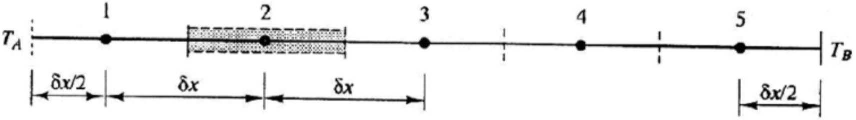
建立系数矩阵方程



$$
\begin{bmatrix}
300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\
-100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\
0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\
0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -100 & 300
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 200T_\mathsf{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_\mathsf{B} \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}
$$

$$1000T'' = 0,\ T(x=0) = 100,\ T(x=0.5) = 500 \Longrightarrow T(x) = 800x + 100$$

建立系数矩阵方程



$$
\begin{bmatrix}
300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\
-100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\
0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\
0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\
0 & 0 & 0 & -100 & 300
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 200T_\mathsf{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_\mathsf{B} \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}
$$

$$
1000T'' = 0,\ T(x=0) = 100,\ T(x=0.5) = 500 \Longrightarrow T(x) = 800x + 100
$$

该案例已放至code_practice/diffusionEqs/
案例名字为1D_rod
求解器名字为steadyDiffusionFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

代码解读


```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

- 控制方程离散后构成一个线性方程组$Ax=b$，储存在fvScalarMatrix。这里fvScalarMatrix是一个重要的类(class)，定义了一个对象(object)：TEqn
- fvm::laplacian(DT, T)表示用隐性格式离散$\nabla\cdot(D_T)\nabla T$，D_T是扩散系数。
- fvScalarMatrix通常不会直接考虑边界条件
- 边界条件是通过源项的方式$(S_u+S_PT_P)$添加进系数矩阵，是在TEqn.solve()中完成

代码解读


```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

- 控制方程离散后构成一个线性方程组$Ax = b$，储存在fvScalarMatrix。这里fvScalarMatrix是一个重要的类(class)，定义了一个对象(object)：TEqn
- fvm::laplacian(DT, T)表示用隐性格式离散$\nabla \cdot (D_T)\nabla T$，$D_T$是扩散系数。
- fvScalarMatrix通常不会直接考虑边界条件
- 边界条件是通过源项的方式$(S_u + S_P T_P)$添加进系数矩阵，是在TEqn.solve()中完成

代码解读


```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

- 控制方程离散后构成一个线性方程组$Ax = b$，储存在fvScalarMatrix。这里fvScalarMatrix是一个重要的类(class)，定义了一个对象(object)：TEqn
- fvm::laplacian(DT, T)表示用隐性格式离散$\nabla \cdot (D_T)\nabla T$，$D_T$是扩散系数。
- fvScalarMatrix通常不会直接考虑边界条件
- 边界条件是通过源项的方式$(S_u + S_P T_P)$添加进系数矩阵，是在TEqn.solve()中完成

代码解读


```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
);

//save the matrix and source to a file
saveMatrix(TEqn);

TEqn.solve();
```

- 控制方程离散后构成一个线性方程组$Ax = b$，储存在fvScalarMatrix。这里fvScalarMatrix是一个重要的类(class)，定义了一个对象(object)：TEqn
- fvm::laplacian(DT, T)表示用隐性格式离散$\nabla \cdot (D_T)\nabla T$，$D_T$是扩散系数。
- fvScalarMatrix通常不会直接考虑边界条件
- 边界条件是通过源项的方式$(S_u + S_P T_P)$添加进系数矩阵，是在TEqn.solve()中完成

案例1：代码使用说明

利用git工具下载代码

```
git clone https://gitee.com/cfdxu/cau_of_course.git
```

或者更新文件

```
cd cau_of_course
git fetch --all; git pull
```

进入储存代码的文件夹

```
cd code_practice/diffusionEqs/
```

解压缩文件包，内含有steadyDiffusion算例和求解器

```
tar xzf steadyDiffusionFoam.tgz
```

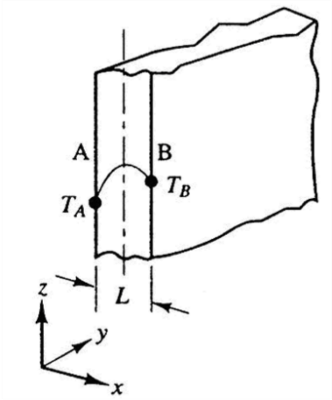
编译steadyDiffusionFoam求解器

```
cd steadyDiffusionFoam/steadyDiffusionFoam/
wmake
```

进入1D_rod算例，并运行算例

```
cd ../1D_rod/; ./Allrun
```

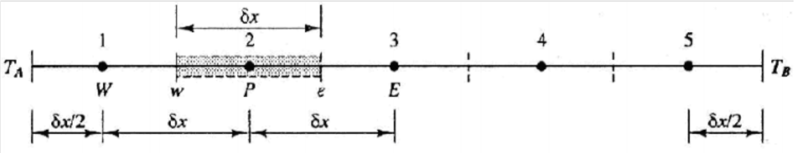
案例2：一维稳态有源热传导



控制方程

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+q=0 \tag{14}$$

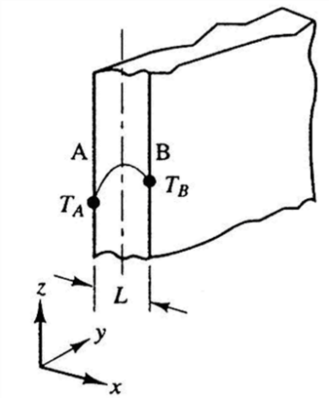
有一块平板，厚度为$L=2cm$，热传导系数$k=0.5W/m/K$，平均分布的热源$q=10^6W/m^3$，A、B两面的温度分别为$100°C$和$500°C$。该问题在一维上模拟时，仅考虑x方向。



该平板平均分成5份，每份长度$\delta x=0.0.004m$

共有五个网格，2、3、4是内部网格，1和5是边界网格

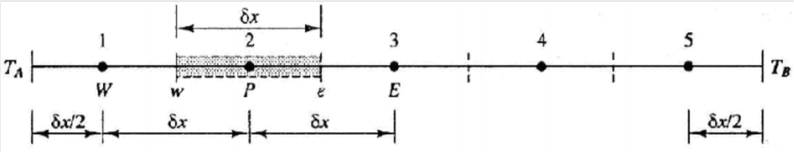
案例2：一维稳态有源热传导



控制方程

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+q=0 \tag{14}$$

有一块平板，厚度为$L=2cm$，热传导系数$k=0.5W/m/K$，平均分布的热源$q=10^6W/m^3$，A、B两面的温度分别为$100°C$和$500°C$。该问题在一维上模拟时，仅考虑x方向。



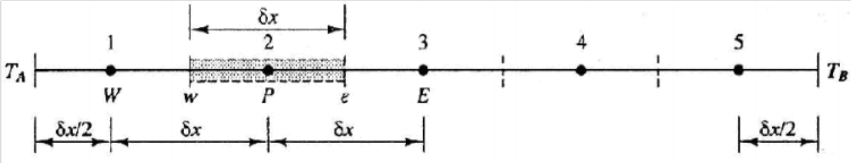
该平板平均分成5份，每份长度$\delta x=0.0.004m$

共有五个网格，2、3、4是内部网格，1和5是边界网格

内部网格离散

一般形式:

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$$

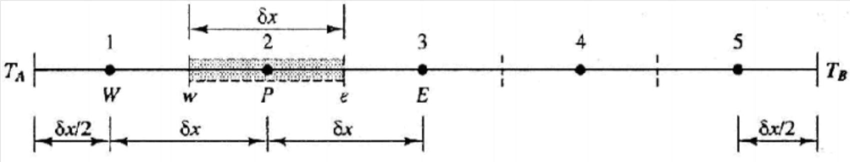


对于内部网格2、3、4，离散方程可写成:

$$a_PT_P=a_WT_W+a_ET_E+S_u \tag{15}$$

其中$a_W=\frac{k}{\delta x}A$, $a_E=\frac{k}{\delta x}A$, $a_P=a_W+a_E-S_P=2\frac{k}{\delta x}A$, $S_u=qA\delta x$, $S_P=0$

边界网格离散



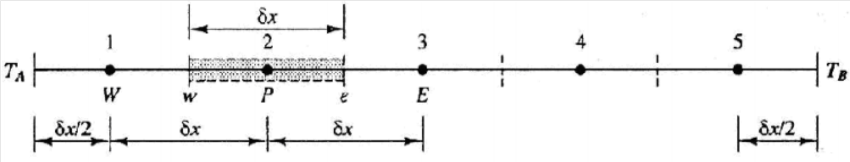
假设网格1中心与边界A之间温度呈线性分布，边界网格1的离散方程：

$$kA\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - kA\left(\frac{T_P - T_\mathrm{A}}{\delta x/2}\right) + qA\delta x = 0 \tag{16}$$

整理后得到

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right)T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E + qA\delta x + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A} \tag{17}$$

边界网格离散



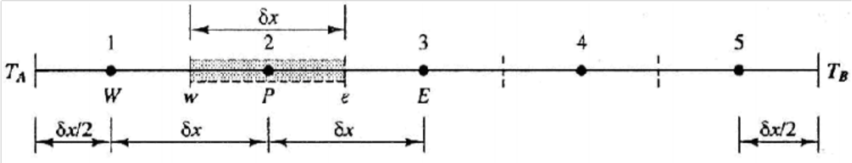
假设网格1中心与边界A之间温度呈线性分布，边界网格1的离散方程：

$$kA\left(\frac{T_E-T_P}{\delta x}\right)-kA\left(\frac{T_P-T_\mathrm{A}}{\delta x/2}\right)+qA\delta x=0 \tag{16}$$

整理后得到

$$\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+qA\delta x+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A} \tag{17}$$

网格离散



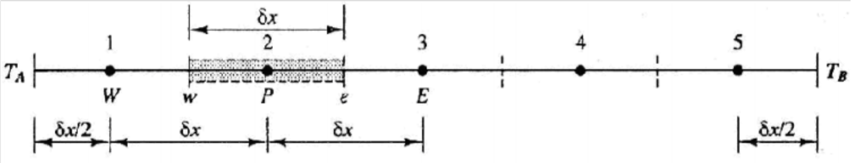
网格1： $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_{\mathsf{A}}+qA\delta x$

网格2、3、4： $\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+qA\delta x$

网格5： $\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+0\cdot T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_{\mathsf{B}}+qA\delta x$

平板的面积A可以消掉，整个计算与A无关

网格离散



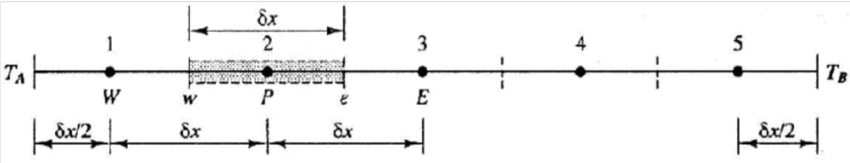
网格1：$\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\cdot T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{A}+qA\delta x$

网格2、3、4：$\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+qA\delta x$

网格5：$\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W+0\cdot T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_\mathrm{B}+qA\delta x$

平板的面积A可以消掉，整个计算与A无关

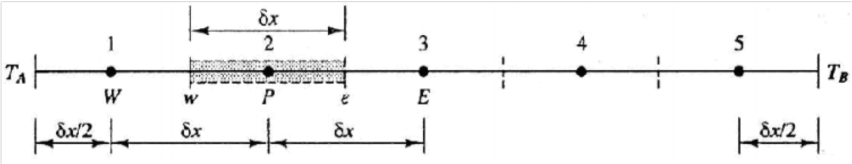
建立系数矩阵方程



$$
\begin{bmatrix}
375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\
-125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\
0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\
0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\
0 & 0 & 0 & -125 & 375
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}
$$

解析解：$T(x) = \left[\dfrac{T_B - T_A}{L} + \dfrac{q}{2k}(L - x)\right] x + T_A$

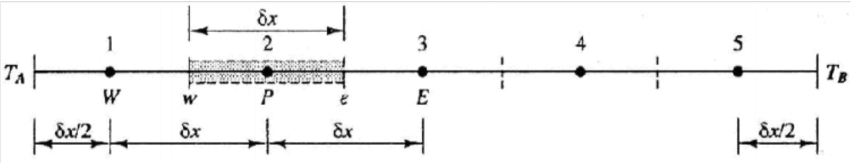
建立系数矩阵方程



$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}$$

解析解：$T(x) = \left[\dfrac{T_B - T_A}{L} + \dfrac{q}{2k}(L-x)\right] x + T_A$

建立系数矩阵方程



$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}$$

解析解：$T(x) = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A$

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_plate_with_src
求解器名字为steadyDiffusionWithSourceFoam 关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
   +q
);
```

热传导系数D_T和热源q在constant/transportProperties中定义

```
DT              DT [ 0 2 -1 0 0 0 0 ] 0.5;
q               q  [ 0 0 -1 1 0 0 0 ] 1E6;
```

质量(kg);长度(m);时间(s);温度(K);摩尔数(mol);电流(A);光强度(cd)

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_plate_with_src
求解器名字为steadyDiffusionWithSourceFoam 关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
   +q
);
```

热传导系数D_T和热源q在constant/transportProperties中定义

```
DT                DT [ 0 2 -1 0 0 0 0 ] 0.5;
q                 q  [ 0 0 -1 1 0 0 0 ] 1E6;
```

质量(kg);长度(m);时间(s);温度(K);摩尔数(mol);电流(A);光强度(cd)

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_plate_with_src
求解器名字为steadyDiffusionWithSourceFoam 关键代码

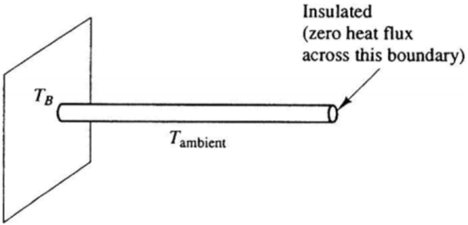
```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
   +q
);
```

热传导系数D_T和热源q在constant/transportProperties中定义

```
DT              DT [ 0 2 -1 0 0 0 0 ] 0.5;
q               q  [ 0 0 -1 1 0 0 0 ] 1E6;
```

质量(kg);长度(m);时间(s);温度(K);摩尔数(mol);电流(A);光强度(cd)

案例3：一维带有边界通量热传导



一根长$L=1m$棍子放置在温度恒定为$T_\infty=20\circ C$的环境中，$n^2=25/m^2$。
其中一端（A）绝热的（insulated），没有热通量，即$\mathbf{n}_x\cdot(\nabla T)=0$
另一端（B）保持恒温$T_B=100\circ C$
解析解是

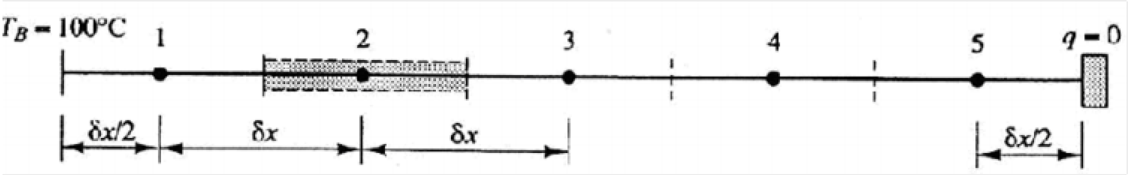
$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_B-T_\infty}=\frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)} \tag{19}$$

控制方程

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)-n^2(T-T_\infty)=0 \tag{18}$$

其中$n^2=hp/(kA)$,h是对流热传导系数，p是圆周长，T_∞是环境温度

网格离散化

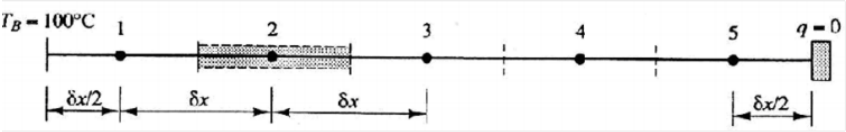


该平板平均分成5份，每份长度$\delta x = 0.2m$
共有五个网格，2、3、4是内部网格，1和5是边界网格

内部网格离散

一般形式：

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)}_{a_P}\phi_P=\underbrace{\left(\frac{\gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)}_{a_W}\phi_W+\underbrace{\left(\frac{\gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)}_{a_E}\phi_E+S_u$$



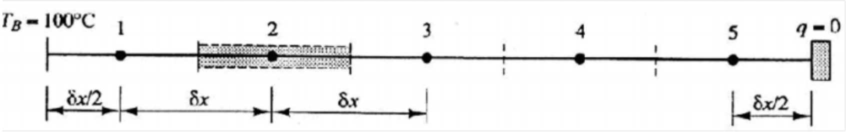
对于内部网格2、3、4，离散方程可写成：

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \tag{20}$$

其中$a_W=\frac{1}{\delta x}$, $a_E=\frac{1}{\delta x}$, $a_P=a_W+a_E-S_P=\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x$,

$S_u=n^2\delta x T_\infty$, $S_P=-n^2\delta x$

边界网格离散(B侧)



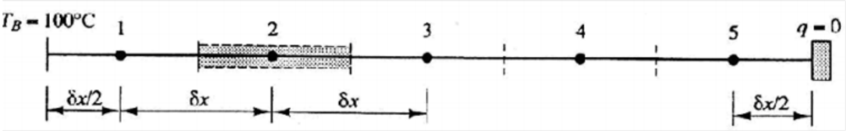
假设网格1中心与边界B之间温度呈线性分布，边界网格1的离散方程：

$$\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - \left(\frac{T_P - T_{\mathrm{B}}}{\delta x/2}\right) - [n^2(T_P - T_\infty)\delta x] = 0 \tag{21}$$

整理后得到

$$\left(\frac{1}{\delta x} + \frac{2}{\delta x} + n^2 \delta x\right) T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{1}{\delta x}\right) T_E + n^2 \delta x T_\infty + \left(\frac{2}{\delta x}\right) T_{\mathrm{B}} \tag{22}$$

边界网格离散(B侧)



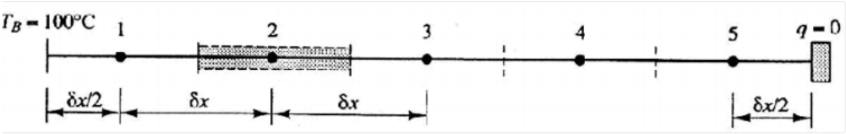
假设网格1中心与边界B之间温度呈线性分布，边界网格1的离散方程：

$$\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - \left(\frac{T_P - T_\mathsf{B}}{\delta x/2}\right) - [n^2(T_P - T_\infty)\delta x] = 0 \tag{21}$$

整理后得到

$$\left(\frac{1}{\delta x} + \frac{2}{\delta x} + n^2\delta x\right) T_P = 0 \cdot T_W + \left(\frac{1}{\delta x}\right) T_E + n^2\delta x T_\infty + \left(\frac{2}{\delta x}\right) T_\mathsf{B} \tag{22}$$

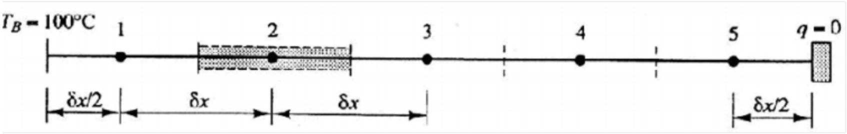
边界网格离散(B侧)



观察： $\left(\frac{1}{\delta x}+\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P = 0\cdot T_W + \left(\frac{1}{\delta x}\right)T_E + n^2\delta x T_\infty + \left(\frac{2}{\delta x}\right)T_{\mathrm{B}}$ $\Rightarrow$相当于源项$(S_u + S_P T_P)$：

$$S_u = \frac{2}{\delta x}T_{\mathrm{B}}, \quad S_P = -\frac{2}{\delta x}$$

边界网格离散(B侧)

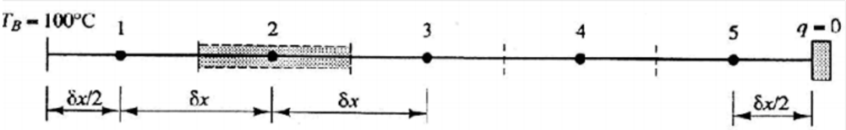


观察： $$\left(\frac{1}{\delta x}+\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P = 0\cdot T_W + \left(\frac{1}{\delta x}\right)T_E + n^2\delta x T_\infty + \left(\frac{2}{\delta x}\right)T_{\mathrm{B}}$$ ⇒相当

于源项$(S_u + S_P T_P)$：

$$S_u = \frac{2}{\delta x}T_{\mathrm{B}},\quad S_P = -\frac{2}{\delta x}$$

边界网格离散(q=0一侧)



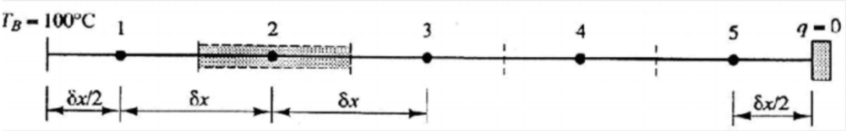
边界网格5与边界网格1的离散方式不同，边界网格5右侧的面的通量为零

$$\left[0-\left(\frac{T_P-T_W}{\delta x}\right)\right]-\left[n^2(T_P-T_\infty)\delta x\right]=0 \tag{23}$$

整理后得到

$$\left(\frac{1}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P=\frac{1}{\delta x}\cdot T_W+0\cdot T_E+n^2\delta x T_\infty \tag{24}$$

网格离散

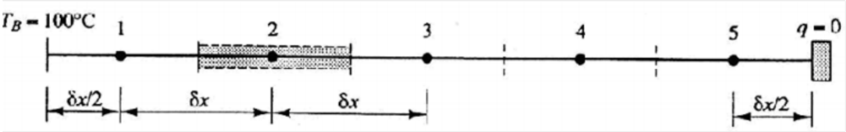


网格1： $\left(\frac{1}{\delta x}+\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P = 0\cdot T_W+\left(\frac{1}{\delta x}\right)T_E+n^2\delta x T_\infty+\left(\frac{2}{\delta x}\right)T_\mathrm{B}$

网格2、3、4： $\left(\frac{2}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P = \left(\frac{1}{\delta x}\right)T_W+\left(\frac{1}{\delta x}\right)T_E+n^2\delta x T_\infty$

网格5： $\left(\frac{1}{\delta x}+n^2\delta x\right)T_P = \frac{1}{\delta x}\cdot T_W+0\cdot T_E+n^2\delta x T_\infty$

建立系数矩阵方程

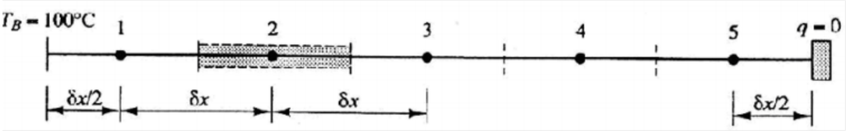


$$
\begin{bmatrix}
20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
-5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\
0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\
0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\
0 & 0 & 0 & -5 & 10
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 64.22 \\ 36.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 22.30 \end{bmatrix}
$$

解析解是

$$
\frac{T(x) - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)}
$$

建立系数矩阵方程

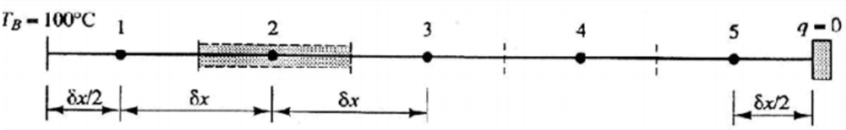


$$\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.22 \\ 36.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 22.30 \end{bmatrix}$$

解析解是

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)}$$

建立系数矩阵方程



$$\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.22 \\ 36.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 22.30 \end{bmatrix}$$

解析解是

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)}$$

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_rod_convective_cooling
求解器名字为steadyDiffusionWithCoolingFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(T)
  ==
    fvm::Sp(alpha,T)
  - alpha*Tinf
);
```

其中
alpha:$\alpha = n^2$
Tinf:T_∞
LaTeX代码T_∞

fvm::Sp(alpha,T)
$\Downarrow$
源项$(S_u + S_P T_P)$
内部网格：$S_P = -n^2\delta x$
B边界网格：$S_P = -\dfrac{2}{\delta x}$

alpha和环境温度Tinf在constant/transportProperties中定义

```
alpha        alpha [ 0 -2 0 0 0 0 0 ] 25;
Tinf         Tinf [ 0 0 0 1 0 0 0 ] 20;
```

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_rod_convective_cooling
求解器名字为steadyDiffusionWithCoolingFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(T)
  ==
    fvm::Sp(alpha,T)
  - alpha*Tinf
);
```

其中
alpha:$\alpha = n^2$
Tinf:T_∞
LaTeX代码T_∞

fvm::Sp(alpha,T)
$\Downarrow$
源项$(S_u + S_P T_P)$
内部网格：$S_P = -n^2 \delta x$
B边界网格：$S_P = -\dfrac{2}{\delta x}$

alpha和环境温度Tinf在constant/transportProperties中定义

```
alpha          alpha [ 0 -2 0 0 0 0 0 ] 25;
Tinf           Tinf [ 0 0 0 1 0 0 0 ] 20;
```

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_rod_convective_cooling
求解器名字为steadyDiffusionWithCoolingFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(T)
  ==
    fvm::Sp(alpha,T)
  - alpha*Tinf
);
```

其中
alpha:$\alpha = n^2$
Tinf:T_∞
LaTeX代码T_∞

fvm::Sp(alpha,T)

$\Downarrow$

源项$(S_u + S_P T_P)$
内部网格：$S_P = -n^2\delta x$
B边界网格：$S_P = -\dfrac{2}{\delta x}$

alpha和环境温度Tinf在constant/transportProperties中定义

```
alpha          alpha [ 0 -2 0 0 0 0 0 ] 25;
Tinf           Tinf [ 0 0 0 1 0 0 0 ] 20;
```

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为1D_rod_convective_cooling
求解器名字为steadyDiffusionWithCoolingFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(T)
  ==
    fvm::Sp(alpha,T)
  - alpha*Tinf
);
```

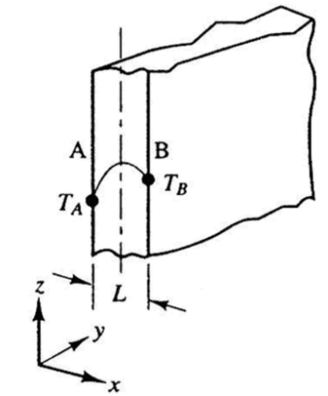
其中
alpha:$\alpha = n^2$
Tinf:T_∞
LaTeX代码T_∞

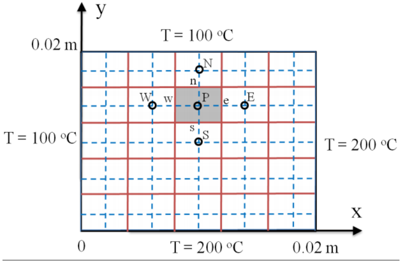
fvm::Sp(alpha,T)
$\Downarrow$
源项$(S_u + S_P T_P)$
内部网格：$S_P = -n^2 \delta x$
B边界网格：$S_P = -\frac{2}{\delta x}$

alpha和环境温度Tinf在constant/transportProperties中定义

```
alpha             alpha [ 0 -2 0 0 0 0 0 ] 25;
Tinf              Tinf [ 0 0 0 1 0 0 0 ] 20;
```

案例4：二维稳态有源热传导

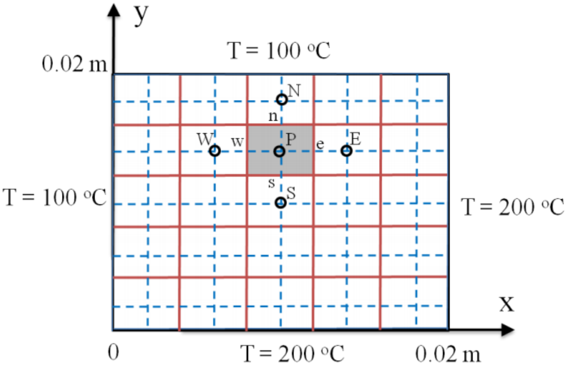




控制方程: $$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(k\frac{dT}{dy}\right)+q=0$$

有一块二维平板，$2cm\times 2cm$，热传导系数$k=0.5W/m/K$，平均分布的热源$q=10^6W/m^3$，上、左两面温度恒定为$100°C$，下、右两侧温度恒定为$200°C$。

2D FVM



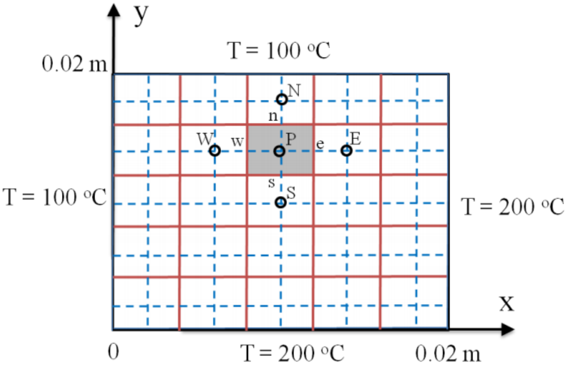
x和y方向平均分成5份，总共25个控制体积/网格单元

- 对于指定阴影部分的内部网格P，存在四个边n, e, s, w,分别对应四个相邻网格N, E, S, W
- 对中心在P的控制体积，积分($\int_{CV}$)应该发生在阴影部分
- 对于各边上的通量以及相关插值计算，处理方式与一维问题一样

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

$$\int_{A} \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

2D FVM



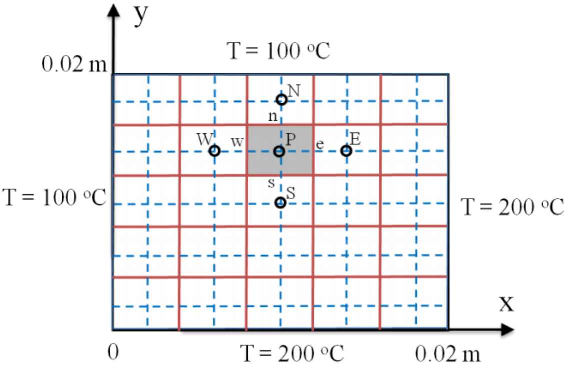
x和y方向平均分成5份，总共25个控制体积/网格单元

- 对于指定阴影部分的内部网格P，存在四个边n, e, s, w,分别对应四个相邻网格N, E, S, W
- 对中心在P的控制体积，积分($\int_{CV}$)应该发生在阴影部分
- 对于各边上的通量以及相关插值计算，处理方式与一维问题一样

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

$$\int_{A} \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

2D FVM



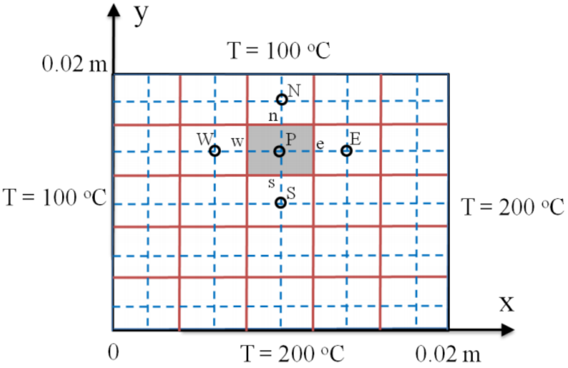
x和y方向平均分成5份，总共25个控制体积/网格单元

- 对于指定阴影部分的内部网格P，存在四个边n, e, s, w,分别对应四个相邻网格N, E, S, W
- 对中心在P的控制体积，积分($\int_{CV}$)应该发生在阴影部分
- 对于各边上的通量以及相关插值计算，处理方式与一维问题一样

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

$$\int_{A} \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

2D FVM



x和y方向平均分成5份，总共25个控制体积/网格单元

- 对于指定阴影部分的内部网格P，存在四个边n, e, s, w,分别对应四个相邻网格N, E, S, W
- 对中心在P的控制体积，积分($\int_{CV}$)应该发生在阴影部分
- 对于各边上的通量以及相关插值计算，处理方式与一维问题一样

$$\int_{CV} \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

$$\int_{A} \mathbf{n} \cdot (\gamma \nabla \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

代码解读

该案例已放至code_practice/diffusionEqs
案例名字为2D_plate_with_src
求解器名字为steadyDiffusionWithSourceFoam
关键代码

```
fvScalarMatrix TEqn
(
    fvm::laplacian(DT, T)
   +q
);
```

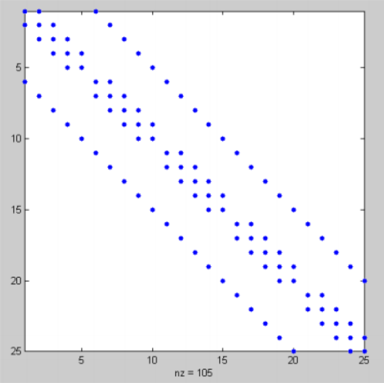
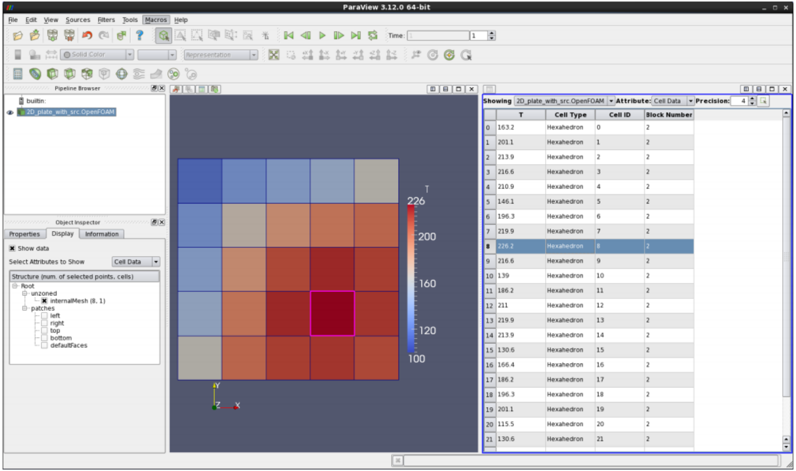


图: 系数矩阵A的对称结构

ParaView 后处理

对于每一个控制体积（网格单元），可以通过ParaView检查cellID和field value



总结

主要介绍了稳态热传导问题 $\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) + S_\phi = 0$

- 离散后方程的一般形式($\sum$是对所有相邻边界通量ϕ_{nb}求和)

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + S_u$$

- 系数a_P满足以下关系

$$a_P = \sum a_{nb} - S_P$$

- 源项的一般形式 $S_\phi \Delta V = S_u + S_P \phi_P$
- 边界处理方式：切断联系、引入边界通量

Thank you.

欢迎私下交流，请勿私自上传网络，谢谢！