

Computational Physics HomeWork 2

林祥

2018 年 12 月 13 日

1 一维扩散问题

1.1 问题描述

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 \leq x \leq 1, 0 < t) \\ u(0, t) = \sin(t), u(1, t) = 0 & (0 < t) \\ u(x, 0) = 0, & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (1)$$

给出计算所用的离散化公式，计算流程，并绘制 $0 < t < 1$ 时间范围内 $u(x, t)$ 数据图

1.2 基本方案

分别对方程两边进行差分，得到显式 FTCS 公式如下

$$u(i, l+1) = u(i, l) + \lambda(u(i+1, l) - 2u(i, l) + u(i-1, l)) \quad (2)$$

隐式 FTCS 公式如下

$$-\lambda u(i-1, l+1) + (1+2\lambda)u(i, l+1) - \lambda u(i+1, l+1) = u(i, l) \quad (3)$$

其中下标 i, l 分别对应 x, t ，取时间差分元 $\tau = 0.0001$ ， x 差分元 $h = 0.02$ ， $\lambda = \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ ，由于 τ 太小，实际画图时，每 100 个时间的数据取 1 组用来画图即可

对于显式公式，已知初始条件，可以直接由前一时刻求得下一时刻，另外考虑边界条件即可。

对于隐式公式，无法直接由上一时刻求得下一时刻，观察隐式公式发现，可以使用三对角矩阵追赶法来求解下一时刻的数据。其中 $a = -\lambda, b = 1 + 2\lambda, c = -\lambda$ ，特别地，考虑 $x=1$ 处的边界条件， $a[-1]=0$ (基于 python, a 数组最后一位为 0), $b[-1]=1$ ，考虑 $x=0$ 处

的边界条件, 由于 t 相差 0.0001, $\sin(t)$ 相差几乎为 0, 可令 $b[0]=1, c[0]=0$, 求解完后需要对 $x=1$ 处的 u 修正到准确值, 防止误差放大。

1.3 显式 FTCS 方法

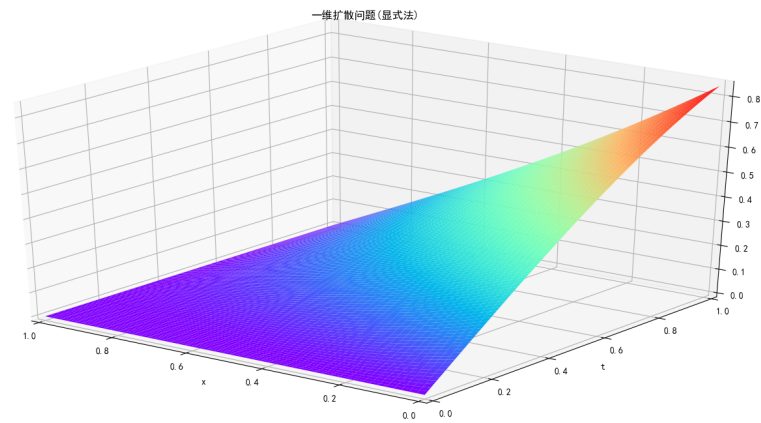


图 1: 显式 FTCS 方法求解一维扩散问题

1.4 隐式 FTCS 方法

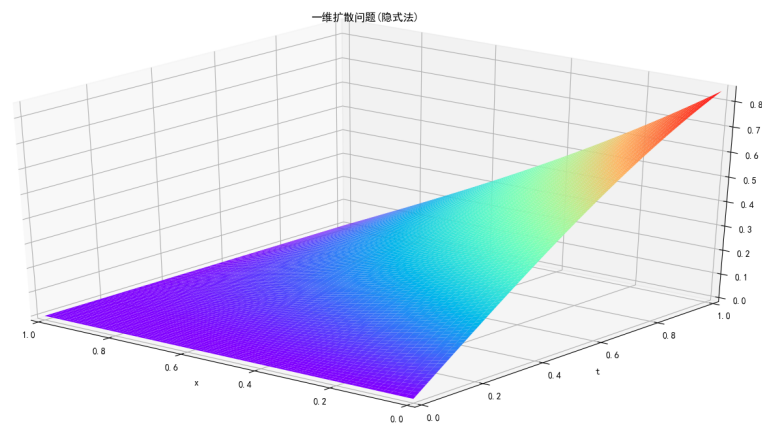


图 2: 隐式 FTCS 方法求解一维扩散问题

2 二维 Laplace 问题

2.1 问题描述

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1) \\ \text{边界条件1} \\ u(0, y) = 0, u(1, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq 1) \\ u(x, 0) = 0, u(x, 1) = 100 \quad (0 \leq x \leq 1) \\ \text{边界条件2} \\ u(0, y) = 0, u(1, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq 1) \\ u(x, 0) = 0, u(x, 1) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \\ u(x, 0.4) = -100, u(x, 0.6) = 100 \quad (0.3 \leq x \leq 0.7) \end{array} \right. \quad (4)$$

给出计算所用的离散化公式，计算流程，给出计算结果的数据图。

2.2 基本方案

分别对方程两边进行差分，得到迭代公式如下

$$u(i, j) = (u(i+1, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1))/4 \quad (5)$$

为了提高迭代效率，减小迭代次数，实际程序采用超松弛迭代，公式如下

$$u(i, j) = \lambda(u(i+1, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1))/4 + (1 - \lambda)u(i, j) \quad (6)$$

其中 λ 为超松弛因子，取为 1.5

将 xy 平面网格化，每个网格点对应一个 u 值，x,y 的差分元均为 $h = 0.01$ ，在边界条件 1 下， 101×101 的数组 u 取边界条件的平均值作为迭代初值；边界条件 2 下，数组 u 取 0 作为迭代初值。取最大迭代次数为 10000，容忍误差为 $1E-5$ 。

按照公式 (6) 进行循环迭代，直到达到最大迭代次数，或满足容忍误差 (前后两次计算的 u 数组的最大差值小于容忍误差)，迭代结束。

特别地，对于边界条件 2，除了考虑外围边界条件不变，还需保证 $y=0.4$ ，和 $y=0.6$ 处的 u 值不能修改 (加入判断语句)。

2.3 边界条件 1 下的电势分布

经过 2286 次迭代后，达到容忍误差

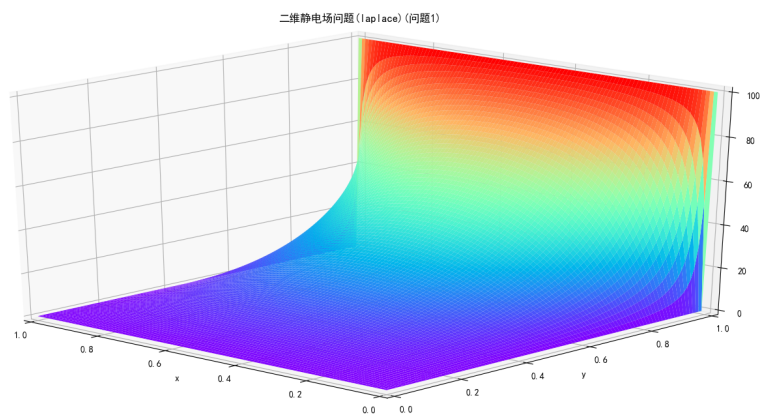


图 3: 边界条件 1 下的电势分布

2.4 边界条件 2 下的电势分布

经过 1070 次迭代后, 达到容忍误差

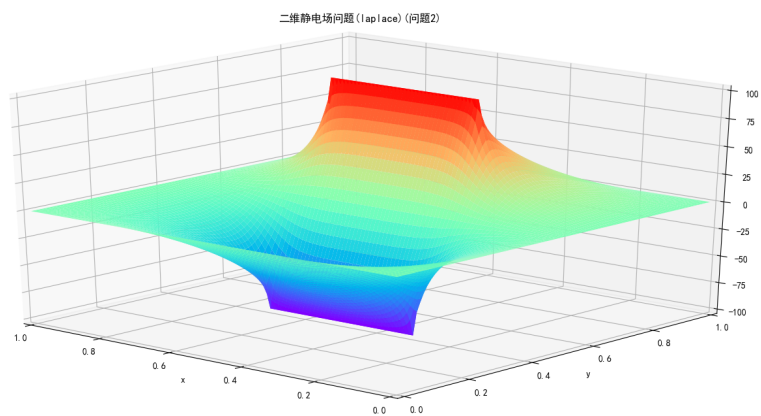


图 4: 边界条件 2 下的电势分布

3 一维波动方程问题

3.1 问题描述

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & (0 < x < 1, 0 < t) \\ y(0, t) = 0, \frac{\partial y(1, t)}{\partial x} = 0 & (0 < t) \\ y(x, 0) = \exp[-1000(x - 0.3)^2], & (0 \leq x \leq 1) \\ v = 300, (0 < x < 0.5), \quad v = 150, (0.5 < x < 1) \end{cases} \quad (7)$$

给出计算所用的离散化公式，计算流程，并绘制 $t=0$, $t=1E-3$, $t=1E-2$ 时刻的波形图。

3.2 基本方案

分别对方程两边进行差分，得到递推公式如下

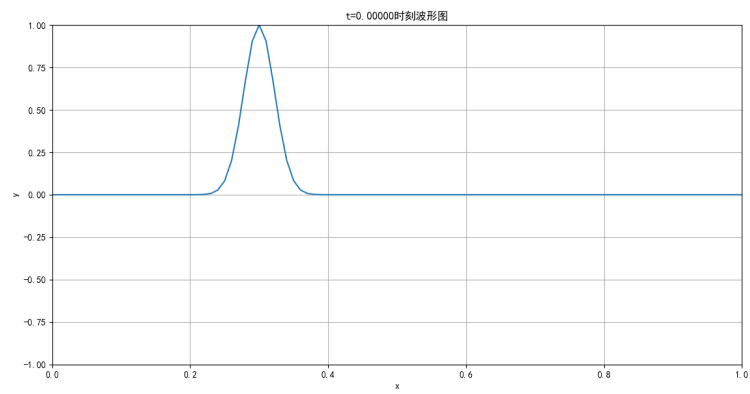
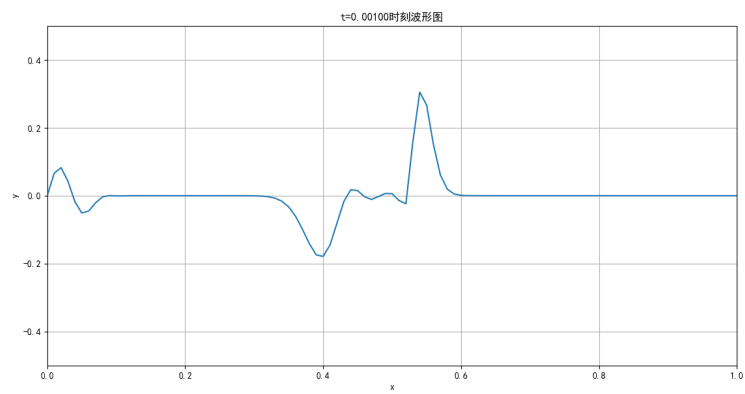
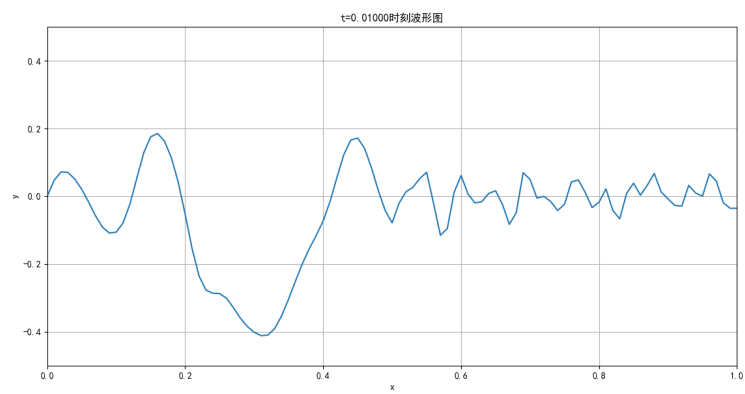
$$y(i, l+1) = -y(i, l-1) + (2 - 2\lambda^2)y(i, l) + \lambda^2(y(i+1, l) + y(i-1, l)) \quad (8)$$

其中 i, l 分别对应 x, t . 取时间差分元 $\tau = 1E-5$, x 差分元 $h = 0.01$, $\lambda_1 = v_1 * \tau/h = 0.3$, $\lambda_2 = v_2 * \tau/h = 0.15$

定义一个三行的数组 y ，每行数据代表不同时刻 y 在 x 处的值，考虑到递推公式 (8) 中，要求下一时刻 y 值，需要知道前 2 个时刻的 y 值，我们假设存在时刻 $t = -\tau$ ，其对应的 y 值与 $t = 0$ 时刻 y 值相等，基于此按照时间递推即可求得下一时刻的 y 值，每次求完值之后，更新 y 数组，以便于求解下一时刻。

当然，递推过程中也需要保证边界条件; $x=0$ 处 y 值始终为 0， $x=1$ 处 y 对 x 斜率为 0，利用一阶近似，保证 $x=1$ 处 y 值始终等于 $x=1-h$ 处即可。

3.3 不同时刻的波形图

图 5: $t=0$ 时刻波形图图 6: $t=1E-3$ 时刻波形图图 7: $t=1E-2$ 时刻波形图