# 三　作业练习

## 3.1　第 1 题

**题 1:** 分别采用平均值法、投点法计算如下积分。

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

给出所采用的计算方案，以及根据计算方案设计程序后的计算结果和方差随计算点数 $N$ 的变化，比较同一点数 $N$ 下平均值法与投点法的方差。给出一个提高平均值法计算效率的方案并在程序上实现所设计的方案。

### 3.1.1　平均值法

计算方案为

(1) 产生 $[0,1]$ 之间的均匀分布的随机数 $\xi_i$；

(2) 计算对应的函数值 $\mathrm{e}_i^{\xi}$；

(3) 重复 (1)~(2) 步进行 $N$ 次随机抽样和计算，对得到的 $\mathrm{e}^{\xi_1}$, $\mathrm{e}^{\xi_2}$, $\cdots$, $\mathrm{e}^{\xi_N}$ 求和后再平均得到 $I$。

### 3.1.2　投点法

以 $x \in [0,1]$、$y \in [1,\mathrm{e}]$ 为投点区域，区域面积大小为 e。因此投点法的计算方案为

1) 产生 $[0,1]$ 之间的均匀分布的随机数 $\xi_i$，产生 $[0,1]$ 之间均匀分布的随机数 $\eta_i$：

2) 定义随机变量 $\zeta_i$：如果 $(e \times \eta_i) < \mathrm{e}^{\xi_i}$，则 $\zeta_i = 1$，否则 $\zeta_i = 0$；

3) 重复 (1)~(2) 步进行 $N$ 次抽样和计算，计算 $\sum(\zeta_i)/N \times \mathrm{e}$ 得到积分 $I$。

### 3.1.3　平均值法计算效率的提高

可以将被积函数变得更为平滑，以提高计算效率。

例如可以取一概率密度函数为 $g(x) = \frac{2x+1}{2}$，将积分变为

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^x}{2x+1} \cdot \left(\frac{2x+1}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x$$

其中 $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{2x+1}$,　$g(x) = \dfrac{2x+1}{2}$

概率密度函数为 $g(x)=\frac{2x+1}{2}$ 的随机变量的抽取可以采用反函数法。$g(x)$ 的反函数为：

$$F(x)=\int_0^x \frac{2x+1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=y$$

解出

$$x=\frac{-1+\sqrt{1+8y}}{2}$$

因此计算方案为

1) 产生 $[0,1]$ 之间的均匀分布的随机数 $\xi_i$，根据 $\dfrac{-1+\sqrt{1+8\xi_i}}{2}$ 得到满足 $g(x)$ 的随机变量抽样 $\eta_i$；

2) 计算 $f(\eta_i)=\dfrac{2\mathrm{e}^{\eta_i}}{2\eta_i+1}$；

3) 重复 (1)∼(2) 步进行 $N$ 次抽样和计算，对得到的 $f(\eta_1),f(\eta_2),\cdots,f(\eta_N)$ 求和后平均即积分 $I$。

在相同的抽样数 $N$ 下，所得结果应比 3.1.1 中的方案精度更高。

## 3.2 第 2 题

**题 2:** 考虑一种方法对如下概率密度函数进行抽样，给出计算公式、计算方案，并统计抽样结果，考察所产生的抽样点是否满足所给 $f(x)$。

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\quad (0\le x<+\infty)$$

可以考虑采用舍选法：

将概率密度函数变为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2\mathrm{e}}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2-2x+1}{2}\right)\cdot\exp(-x)=\sqrt{\frac{2\mathrm{e}}{\pi}}f_1(x)\cdot g(x)$$

$$\text{其中 } f_1(x)=\exp\left[-\frac{(x-1)^2}{2}\right],\quad g(x)=\exp(-x)$$

因 $\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x=1$，可视其为概率密度函数，而且很容易实现满足 $g(x)$ 分布的随机变量抽样。而 $f_1(x)$ 则作为舍选时的判断函数。

$g(x)$ 的抽样仍采用反函数法。$g(x)$ 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^x g(x)\mathrm{d}x=\int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-x},$$

分布函数 $y=F(x)$ 的反函数为

$$x=-\ln(1-y)$$

因此产生 $g(x)$ 随机变量的抽样方法为：

1. 产生 $[0,1]$ 之间的均匀分布的随机数 $\xi$；
2. 计算 $\eta=-\ln(1-\xi)$ 或 $\eta=-\ln(\xi)$；$\eta$ 即为满足 $\mathrm{e}^{-x}$ 分布的抽样值；

在此基础上，再考虑利用舍选发抽取满足 $f(x)$ 的随机变量。总的方案如下：

1. 产生 $[0,1]$ 之间的均匀分布的随机数 $\xi_i$；
2. 计算 $\eta_i = -\ln(\xi_i)$；
3. 产生 $[0,1]$ 之间的均匀分布的随机数 $\chi_i$；
4. 若 $\chi_i \le f_1(\eta_i)$，则接受 $\eta_i$ 为满足 $f(x)$ 的随机变量抽样值；否则，回到舍弃 $\eta_i$，重新进行抽样。