Computational Physics HomeWork 2

林祥

2018 年 12 月 26 日

1 一维扩散问题

1.1 问题描述

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 \leq x \leq 1, 0 < t) \\ u(0,t) = \sin(t), u(1,t) = 0 \qquad (0 < t) \\ u(x,0) = 0, \qquad (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \tag{1}$$

给出计算所用的离散化公式，计算流程，并绘制 0<t<1 时间范围内 u(x,t) 数据图

1.2 基本方案

分别对方程两边进行差分，得到显式 FTCS 公式如下

$$u(i,l+1) = u(i,l) + \lambda(u(i+1,l) - 2u(i,l) + u(i-1,l)) \tag{2}$$

隐式 FTCS 公式如下

$$-\lambda u(i-1,l+1) + (1+2\lambda)u(i,l+1) - \lambda u(i+1,l+1) = u(i,l) \tag{3}$$

其中下标 i,l 分别对应 x,t, 取时间差分元 $tau = 0.0001$ ，x 差分元 $h = 0.02, \lambda = \frac{tau}{h^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, 由于 tau 太小，实际画图时，每 100 个时间的数据取 1 组用来画图即可

对于显式公式，已知初始条件，可以直接由前一时刻求得下一时刻，另外考虑边界条件即可。

对于隐式公式，无法直接由上一时刻求得下一时刻，观察隐式公式发现，可以使用三对角矩阵追赶法来求解下一时刻的数据。其中 $a = -\lambda, b = 1+2\lambda, c = -\lambda$, 特别地, 考虑 x=1 处的边界条件，a[-1]=0(基于 python,a 数组最后一位为 0),b[-1]=1, 考虑 x=0 处

的边界条件，由于 t 相差 0.0001，$\sin(t)$ 相差几乎为 0，可令 b[0]=1,c[0]=0, 求解完后需要对 x=0 处的 u 修正到准确值，防止误差放大。

1.3 显式 FTCS 方法

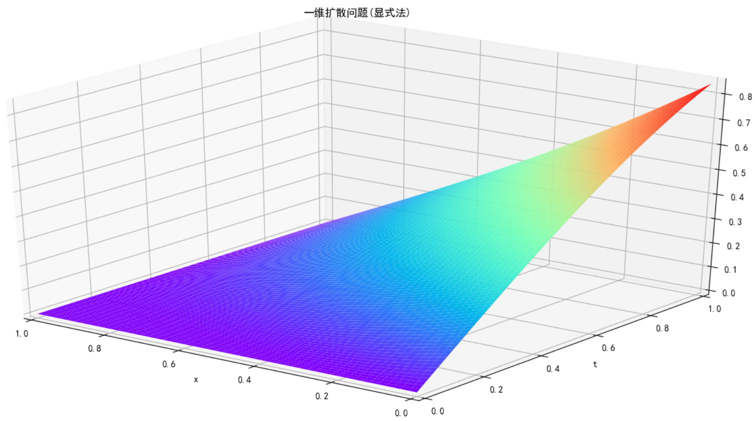

图 1: 显式 FTCS 方法求解一维扩散问题

1.4 隐式 FTCS 方法

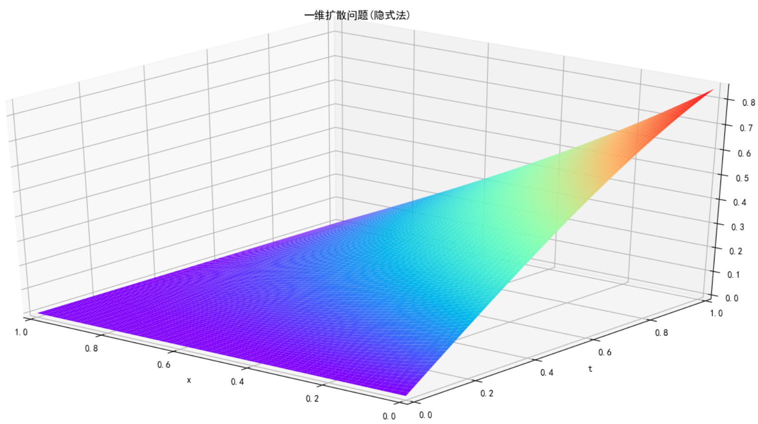

图 2: 隐式 FTCS 方法求解一维扩散问题

2 二维 Laplace 问题

2.1 问题描述

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (0<x<1, 0<y<1) \\
\text{边界条件1} \\
u(0,y)=0, u(1,y)=0 \qquad (0\le y\le 1) \\
u(x,0)=0, u(x,1)=100 \qquad (0\le x\le 1) \\
\text{边界条件2} \\
u(0,y)=0, u(1,y)=0 \qquad (0\le y\le 1) \\
u(x,0)=0, u(x,1)=0 \qquad (0\le x\le 1) \\
u(x,0.4)=-100, u(x,0.6)=100 \qquad (0.3\le x\le 0.7)
\end{cases} \tag{4}
$$

给出计算所用的离散化公式，计算流程，给出计算结果的数据图。

2.2 基本方案

分别对方程两边进行差分，得到迭代公式如下

$$u(i,j)=(u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1))/4 \tag{5}$$

为了提高迭代效率，减小迭代次数，实际程序采用超松弛迭代，公式如下

$$u(i,j)=\lambda(u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1))/4+(1-\lambda)u(i,j) \tag{6}$$

其中 λ 为超松弛因子，取为 1.5

将 xy 平面网格化，每个网格点对应一个 u 值，x,y 的差分元均为 $h=0.01$, 在边界条件 1 下，101×101 的数组 u 取边界条件的平均值作为迭代初值; 边界条件 2 下，数组 u 取 0 作为迭代初值。取最大迭代次数为 10000，容忍误差为 1E-5.

按照公式 (6) 进行循环迭代，直到达到最大迭代次数，或满足容忍误差 (前后两次计算的 u 数组的最大差值小于容忍误差)，迭代结束。

特别地，对于边界条件 2，除了考虑外围边界条件不变，还需保证 y=0.4, 和 y=0.6 处的 u 值不能修改 (加入判断语句)。

2.3 边界条件 1 下的电势分布

经过 2286 次迭代后，达到容忍误差

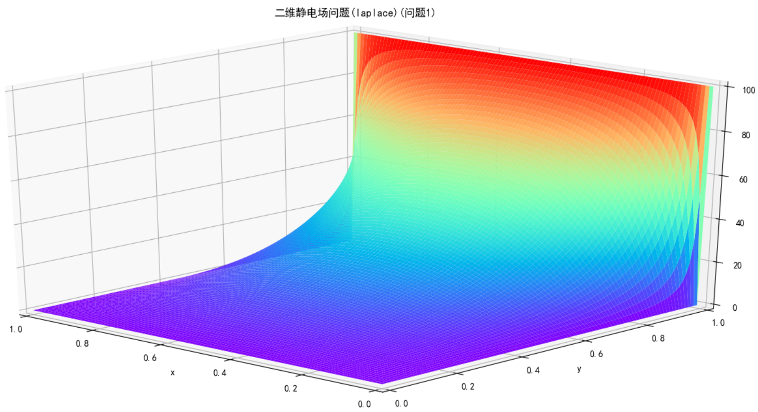

图 3: 边界条件 1 下的电势分布

2.4 边界条件 2 下的电势分布

经过 1070 次迭代后，达到容忍误差

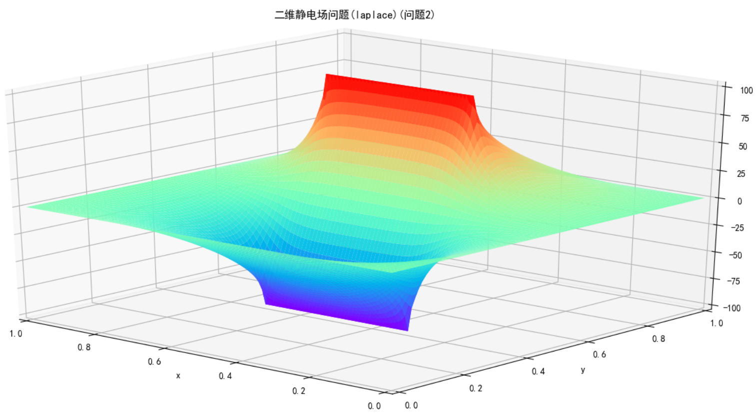

图 4: 边界条件 2 下的电势分布

3 一维波动方程问题

3.1 问题描述

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & (0 < x < 1, 0 < t) \\ y(0,t) = 0, \frac{\partial y(1,t)}{\partial x} = 0 & (0 < t) \\ y(x,0) = \exp[-1000(x-0.3)^2], & (0 \le x \le 1) \\ v = 300, (0 < x < 0.5), & v = 150, (0.5 < x < 1) \end{cases} \tag{7}$$

给出计算所用的离散化公式，计算流程，并绘制 t=0, t=1E-3, t=1E-2 时刻的波形图。

3.2 基本方案

分别对方程两边进行差分，得到递推公式如下

$$y(i,l+1) = -y(i,l-1) + (2-2\lambda^2)y(i,l) + \lambda^2(y(i+1,l) + y(i-1,l)) \tag{8}$$

其中 i,l 分别对应 x,t. 取时间差分元 $tau = 1.25E-5$,x 差分元 $h1 = 0.005, h2 = 0.0025, \lambda_1 = v_1 * tau/h1 = 0.75, \lambda_2 = v_2 * tau/h2 = 0.75 \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1), \lambda$ 取值满足稳定性要求，但是相应的 x 在 (0,0.5) 和 (0.5,1) 步长是不一样的，需要特别注意。

定义一个三行的数组 y，每行数据代表不同时刻 y 在 x 处的值，考虑到递推公式 (8) 中，要求下一时刻 y 值，需要知道前 2 个时刻的 y 值，我们假设存在时刻 $t = -tau$，其对应的 y 值与 $t = 0$ 时刻 y 值相等，基于此按照时间递推即可求得下一时刻的 y 值，每次求完值之后，更新 y 数组，以便于求解下一时刻。

当然，递推过程中也需要保证边界条件; x=0 处 y 值始终为 0，x=1 处 y 对 x 斜率为 0，利用一阶近似，保证 x=1 处 y 值始终等于 x=1-h 处即可。

3.3 不同时刻的波形图

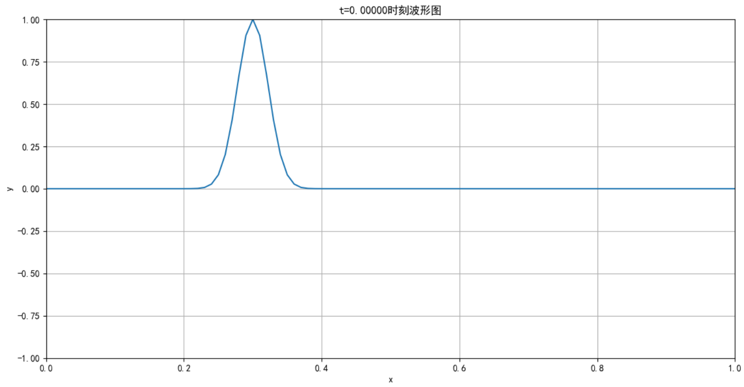

图 5: t=0 时刻波形图

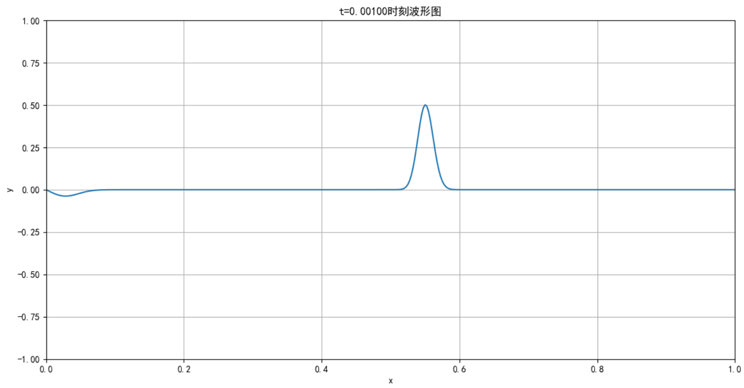

图 6: t=1E-3 时刻波形图

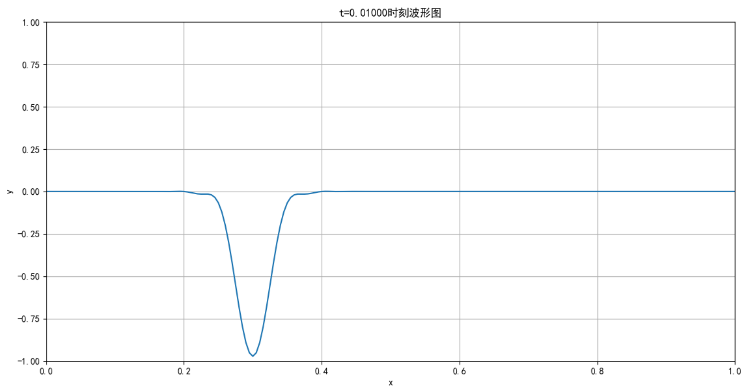

图 7: t=1E-2 时刻波形图