



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China



GAMES 102在线课程

几何建模与处理基础

刘利刚
中国科学技术大学



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China



GAMES 102在线课程：几何建模与处理基础

课程介绍

刘利刚
中国科学技术大学

欢迎来到GAMES 102课程！

GAMES 简介

GAMES: Graphics And Mixed Environment Symposium

图形学与混合现实在线平台

- 主页: <http://games-cn.org>
- 宗旨: 图形学及相关领域交流的华人[在线社区](#)
- 隶属: 中国计算机学会计算机辅助设计与图形学专委会
 - 线下活动: 2016年4月创建 (鲍虎军)
 - 线上活动: 2017年6月创建 (刘利刚)
 - 线上活动运营负责人: 刘利刚 (2017.6.-2018.12.) , 周晓巍 (2019.1.-至今)
- 在线直播活动: 所有资料 (视频/PPT) 云端保存, 总观看 50+ 万人次
 - 每周四晚8:00-9:30的在线报告 (158期)
 - 专题: 几何、绘制、模拟、视觉、可视化...
 - 课程: GAMES 101 (闫令琪) 、GAMES 201 (胡渊鸣)
 - 规划: 102 (刘利刚) 、202 (闫令琪) 、203 (黄其兴)
- 在线交流微信群: 11个群 (~5400人)

加入微信群的方法: 在微信中搜索微信号gamesrobot3或扫描二维码,
加gamesrobot3为好友; 然后回复“GAMES”即可获取群聊邀请。



GAMES: Graphics And Mixed Environment Symposium

图形学与混合现实在线平台

致 谢

GAMES指导委员会委员：

- 鲍虎军（浙江大学）
- 陈宝权（北京大学）
- 陈为（浙江大学），CCF CAD&CG专委会秘书长
- 冯结青（浙江大学），CCF CAD&CG专委会副主任
- 胡事民（清华大学）
- 刘利刚（中国科学技术大学），CCF CAD&CG专委会副主任
- 马利庄（上海交大），CCF CAD&CG专委会副主任
- 童欣（微软亚洲研究院）
- 汪国平（北京大学），CCF CAD&CG专委会主任

GAMES执行委员会常务委员：

- 主席：刘利刚（中国科学技术大学）
- 秘书长：周晓巍（浙江大学）
- 几何：徐凯（国防科技大学）、张举勇（中国科学技术大学）
- 绘制：王锐（浙江大学）、徐昆（清华大学）
- 模拟：许威威（浙江大学）、刘天添（微软亚洲研究院）
- 视觉：周晓巍（浙江大学）、韩晓光（香港中文大学深圳分校）
- 可视化：汪云海（山东大学）、夏佳志（中南大学）
- 海外：黄其兴（UT Austin）、朱俊彦（CMU）、闫令琪（UCSB）
- 混合现实：杨旭波（上海交通大学）、王莉莉（北京航空航天大学）

现任GAMES线上运营负责人：周晓巍，技术秘书：陈凌昊、董峻廷

往届技术团队：张然、王士玮、高翔、董智超；往届技术秘书：王冠、刘中远

GAMES 102 课程简介

课程主页

http://staff.ustc.edu.cn/~lgliu/Courses/GAMES102_2020/default.html

Prof. Dr. Ligang Liu (刘利刚)



Graphics&Geometric Computing Laboratory
School of Mathematical Sciences
University of Science and Technology of China
Hefei 230026, China

Phone/Fax: +86-551-63600985
Email: lgliu@ustc.edu.cn

通讯地址: 安徽省合肥市金寨路96号中国科技大学数学学院
邮政编码: 230026
办公室: 中科大东区管理科研楼1217室



[Short Bio](#) [Research](#) [Publications](#) [Professionals](#) [Teaching](#) [Resources](#)



- Geometric Modeling and Processing (几何建模与处理), GAMES在线课程
Autumn-Winter, 2020 (GAMES102)

课程信息

- 课程类型：基础课程（尽可能讲得通俗易懂）
- 课程目标：三维几何建模与处理的基础知识和方法
- 授课时间：每周日晚8:00-9:30（12次左右）
- 课程作业
 - 课程作业：5-6个编程作业（C++为主，其他语言亦可）
 - 提交系统：<http://www.smartchair.org/GAMES102>
 - 命名规范：“ID_张三_HW1.zip”（ID号为在SmartChair中的ID序号）
- 课程交流
 - 课程BBS：<http://games-cn.org/forums/forum/games102-forum>
 - 课程QQ群：913825727
- 课程助教：庄涛、刘中远、史雨宸
- 结业证书：课程结束后根据作业情况来颁发

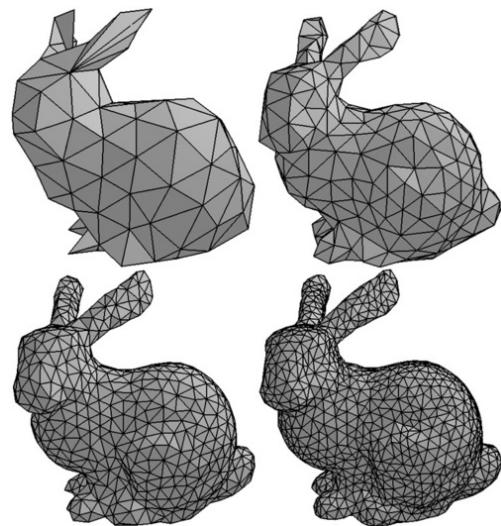
详细可见：GAMES主页（<http://games-cn.org>）的“在线课程”栏

缘起：计算机图形学



2013年8月8日

计算机图形学： 表达与表现三维数字对象



建模（设计）
Modeling

内容创建



动画（仿真）
Animation

内容仿真

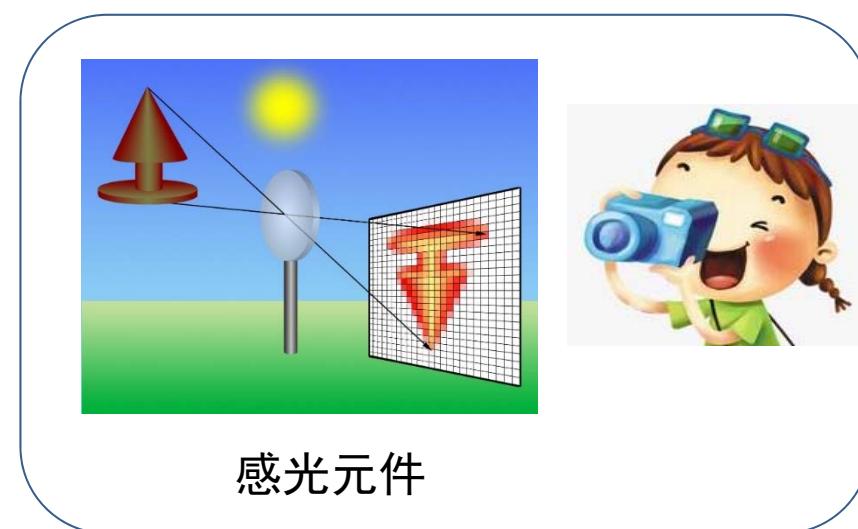
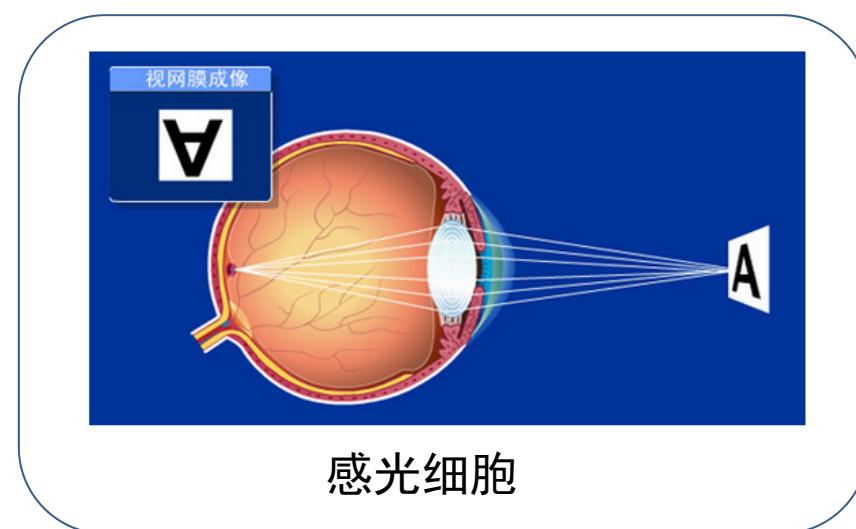


渲染（绘制）
Rendering

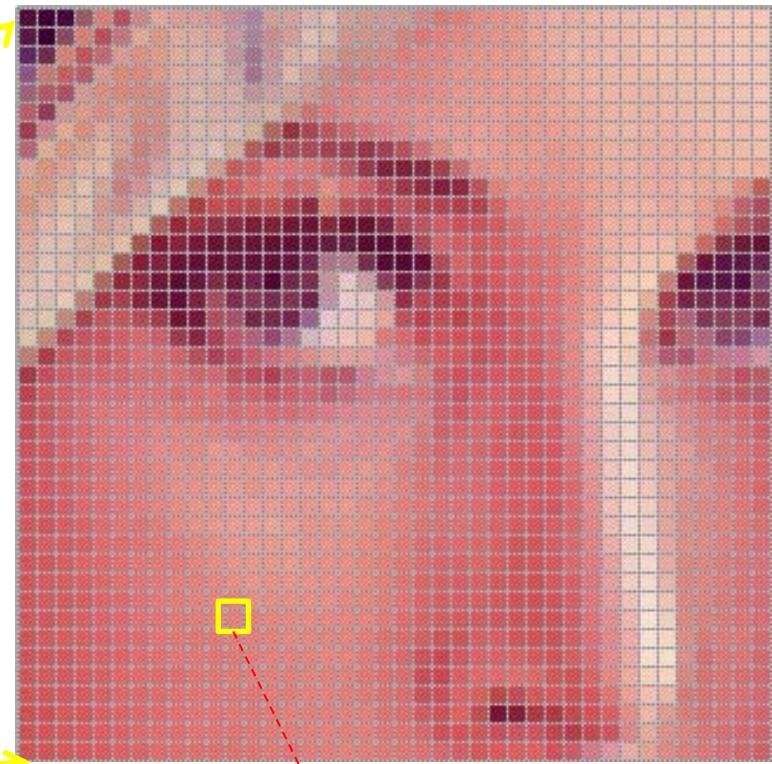
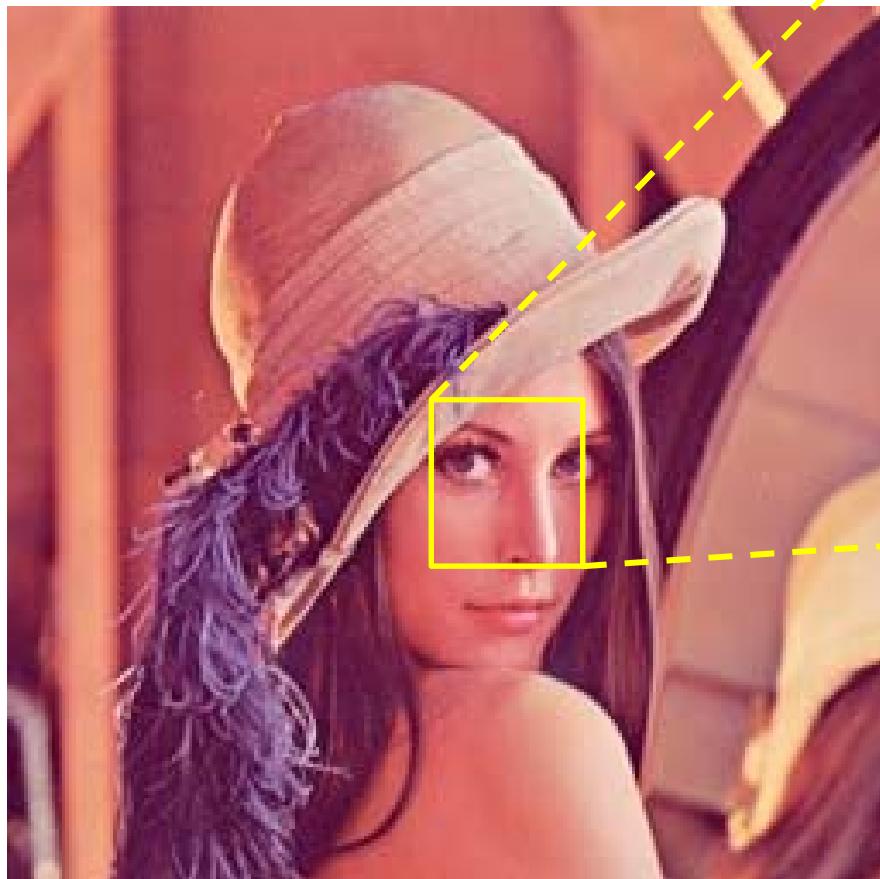
内容呈现

构建和创造（虚拟）平行世界

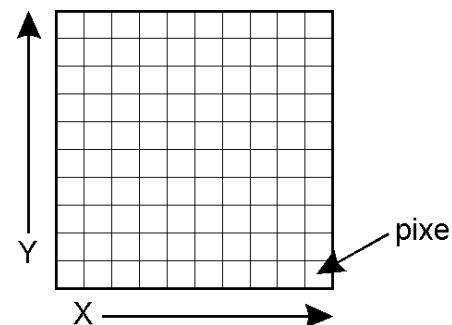
照片（图像）： 记录真实世界投影在相机成像平面的影像



离散表达：光栅

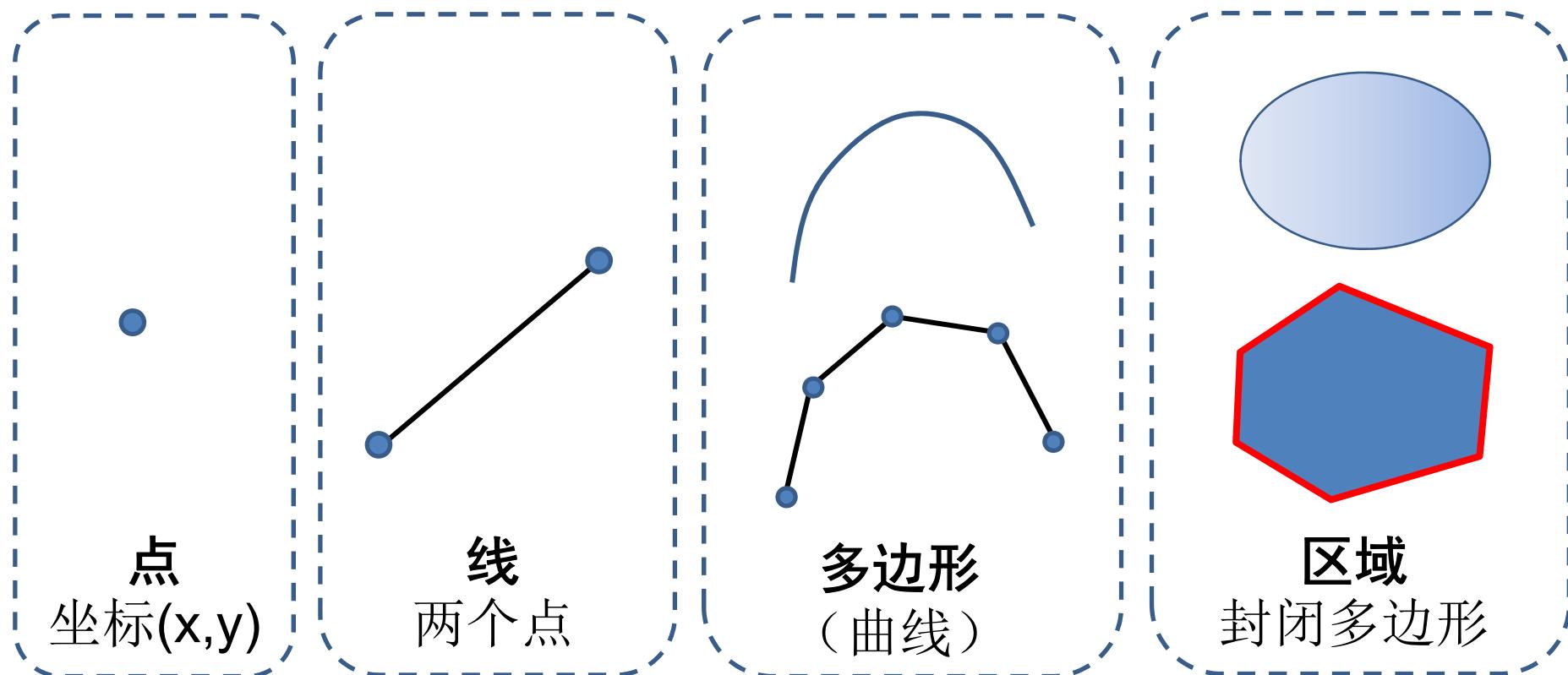


$$0.6 R + 0.3 G + 0.1 B$$



2D图形：矢量/几何图形

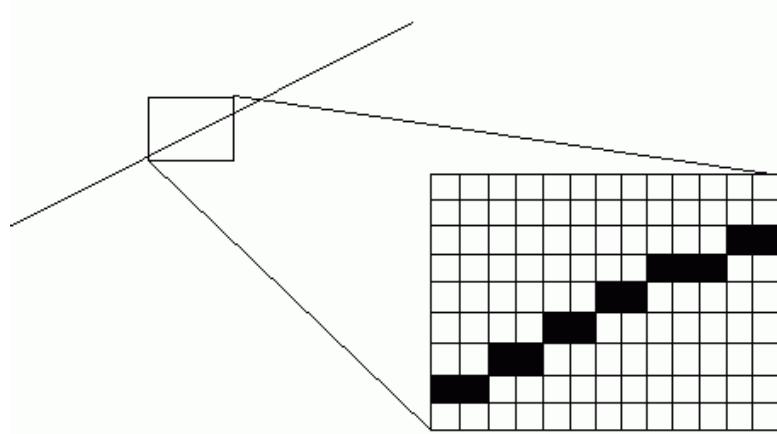
具有数学表达的几何对象（点、线、面）



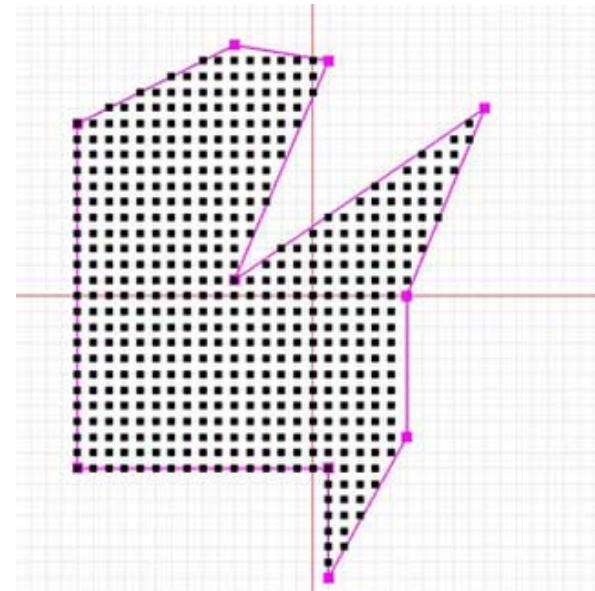
图形对象的属性：大小、线宽、类型、填充、颜色…



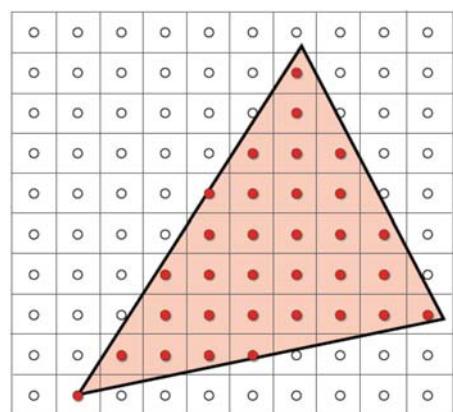
矢量图形的光栅化：扫描转化



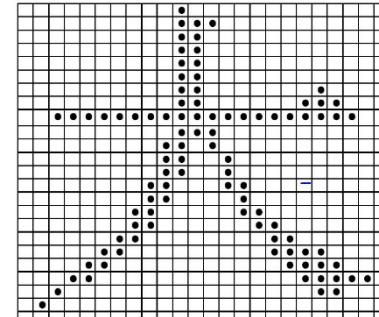
直线的光栅化



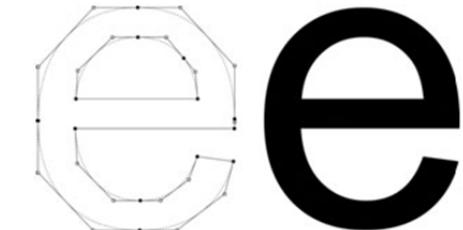
多边形的光栅化



三角形的光栅化



文字的光栅化



e

栅格图像与矢量图形

栅格图

100%显示比例



矢量图

100%显示比例



放大后的栅格图



放大后的矢量图



绘画艺术：创造“虚拟”世界的影像



抽象型



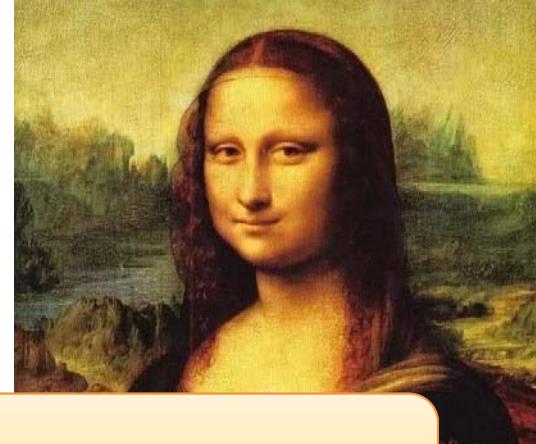
表意型



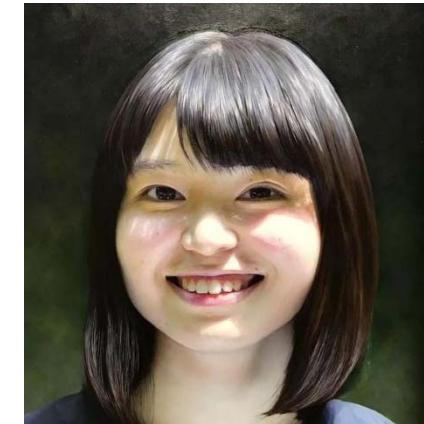
写实型



绘画艺术：创造“虚拟”世界的影像

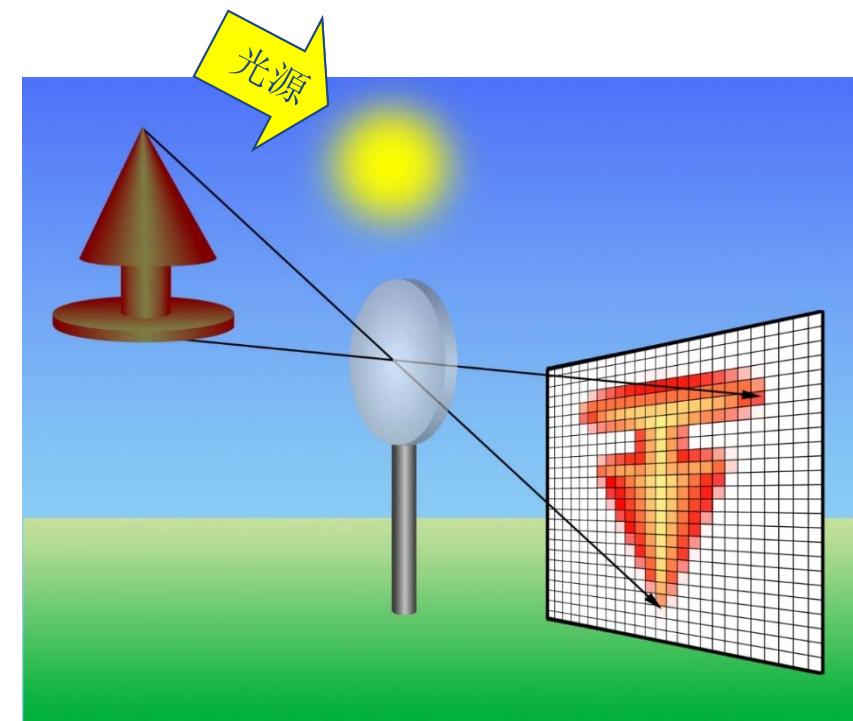
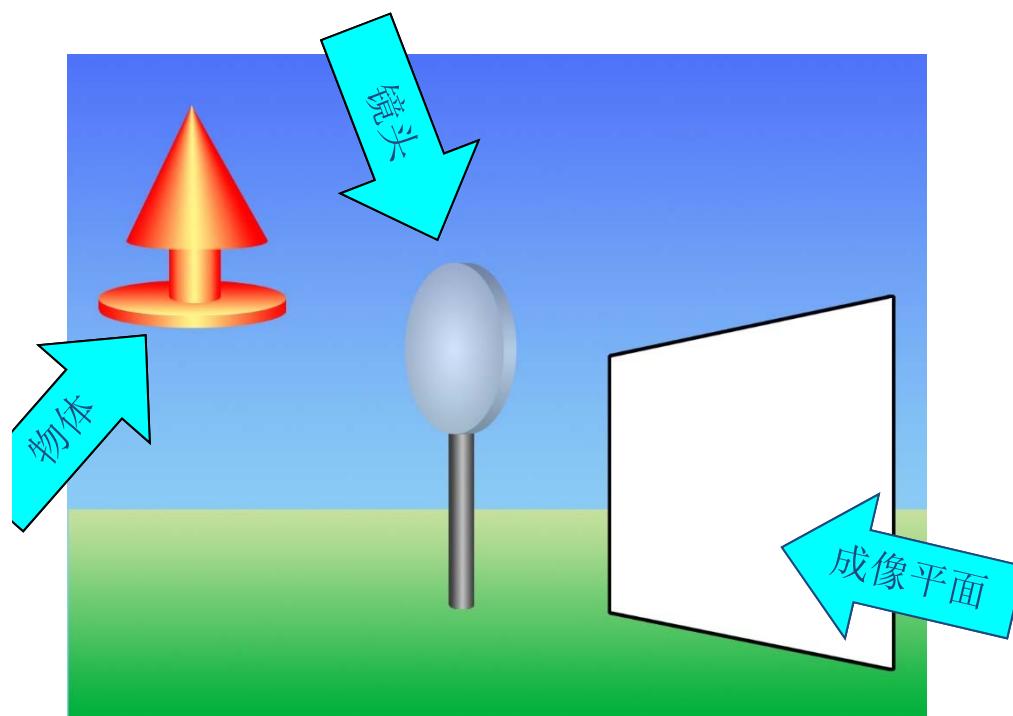


能否通过计算自动生成？

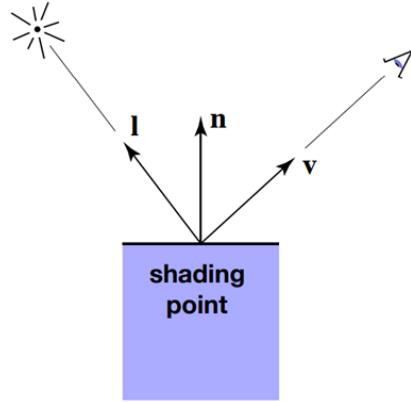


写实型

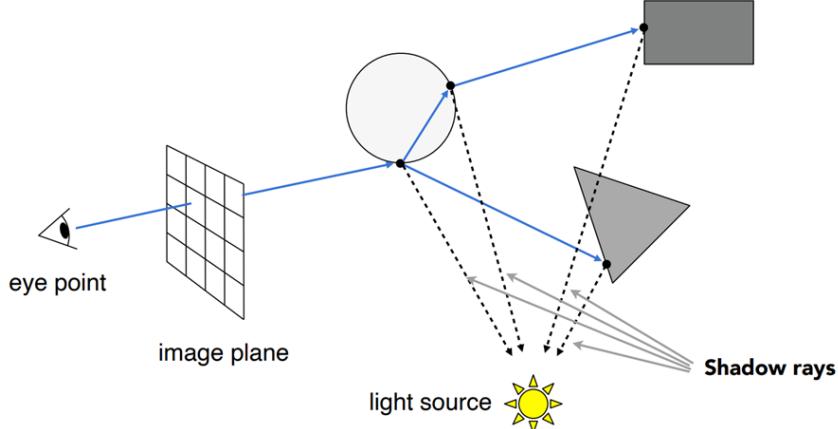
图像成像的原理



渲染成像：光的计算科学



$$L_d = k_d (I/r^2) \max(0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{l})$$



$$L_o(x, \omega) = L_e(x, \omega) + \int_{\Omega_x} f_r(x, \omega', \omega) L_i(x, \omega') \cos \theta' d\omega'$$

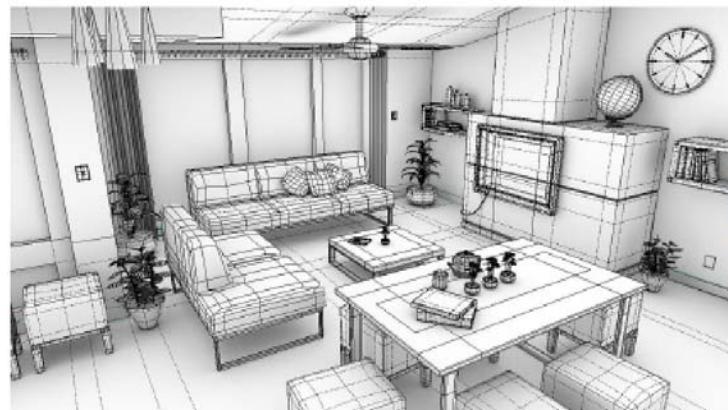
光源

几何

纹理

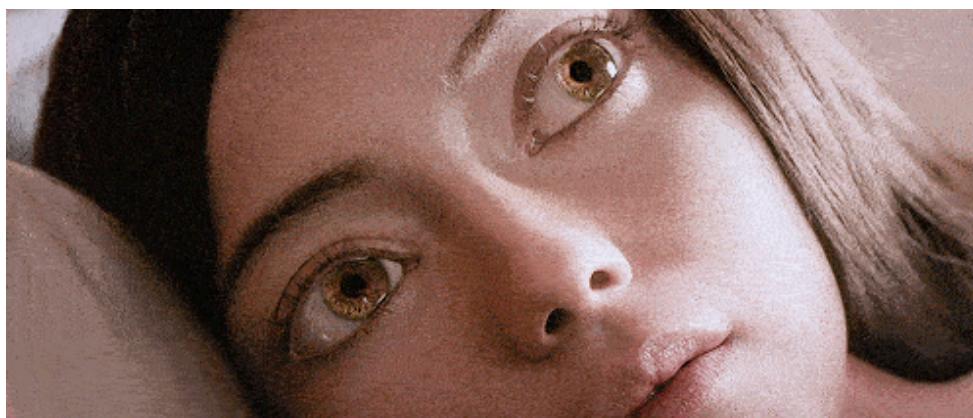
材质

...

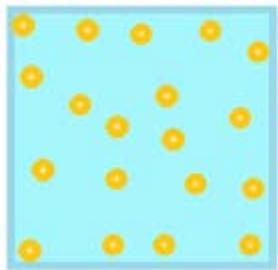


See more in GAMES 101

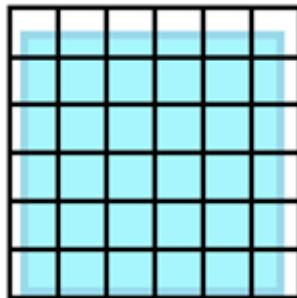
真实感渲染：照片级的渲染



仿真动画：运动的计算科学

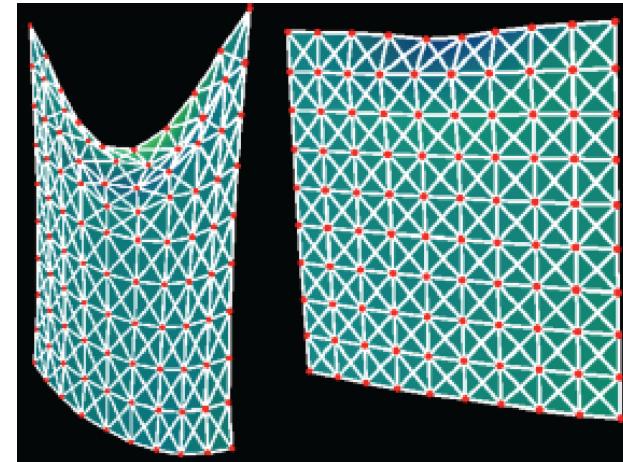


拉格朗日视角
(粒子采样)

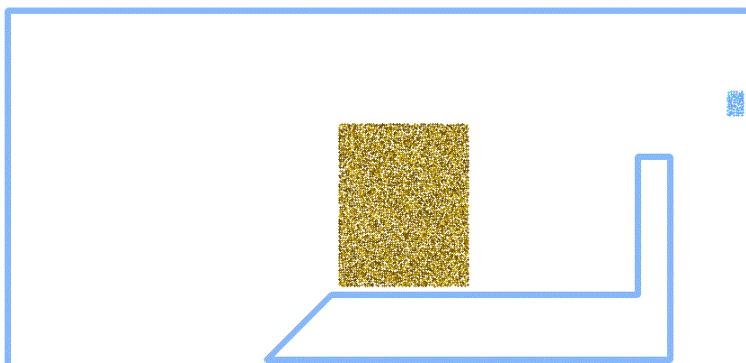


欧拉视角
(网格格点采样)

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}$$

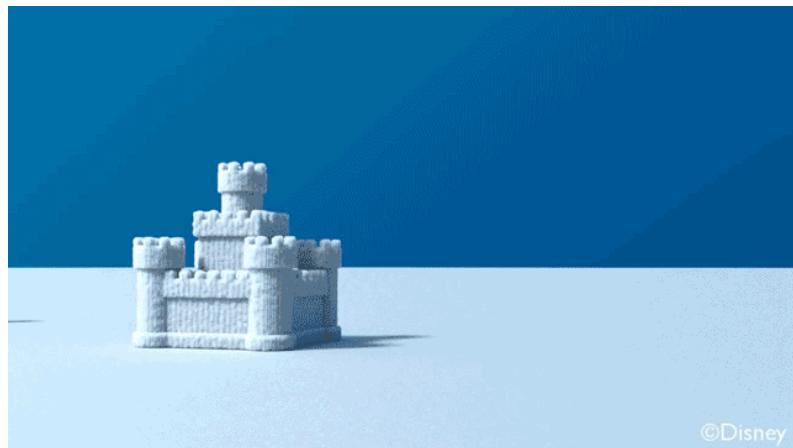


$$f_p = k_d \left(\frac{v_q - v_p}{r} \cdot \frac{x_q - x_p}{\|x_q - x_p\|} \right) \frac{x_q - x_p}{\|x_q - x_p\|}$$



See more in GAMES 201

真实感仿真：物理级的运动



《冰雪奇缘》

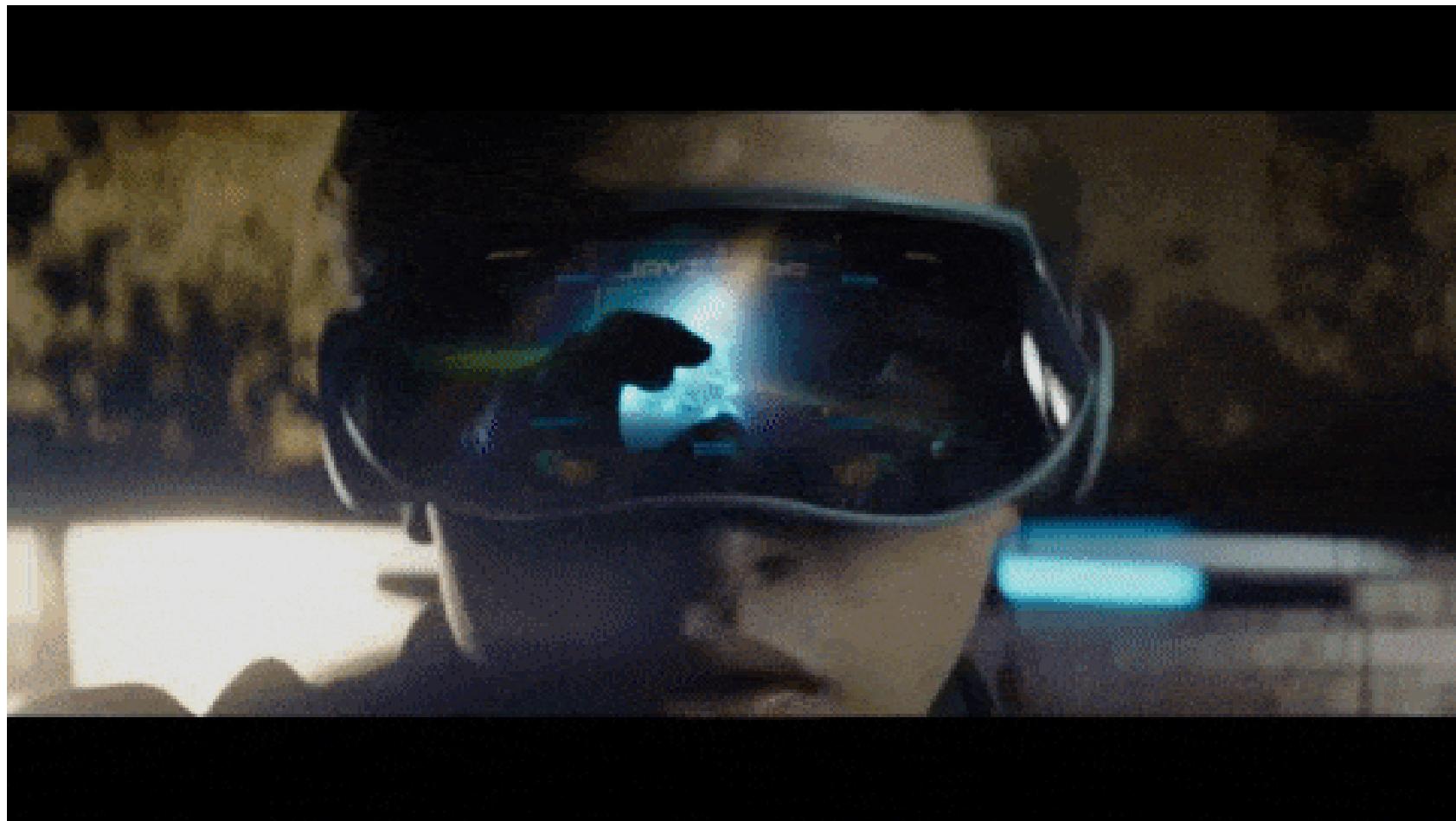
《海洋奇缘》

计算机图形学：“创造”虚拟世界



创造任意多的“平行世界”：
电影《头号玩家》

畅想VR的电影：《头号玩家》



畅想VR的电影：《头号玩家》



畅想VR的电影：《头号玩家》



大聪看电影

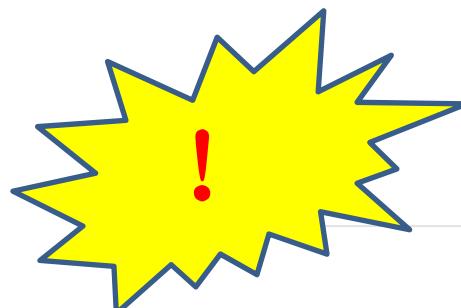
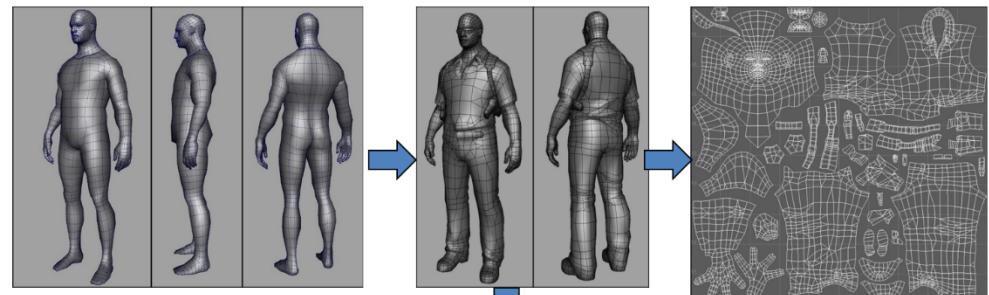
畅想VR的电影：《头号玩家》



一个问题：数据从哪来？

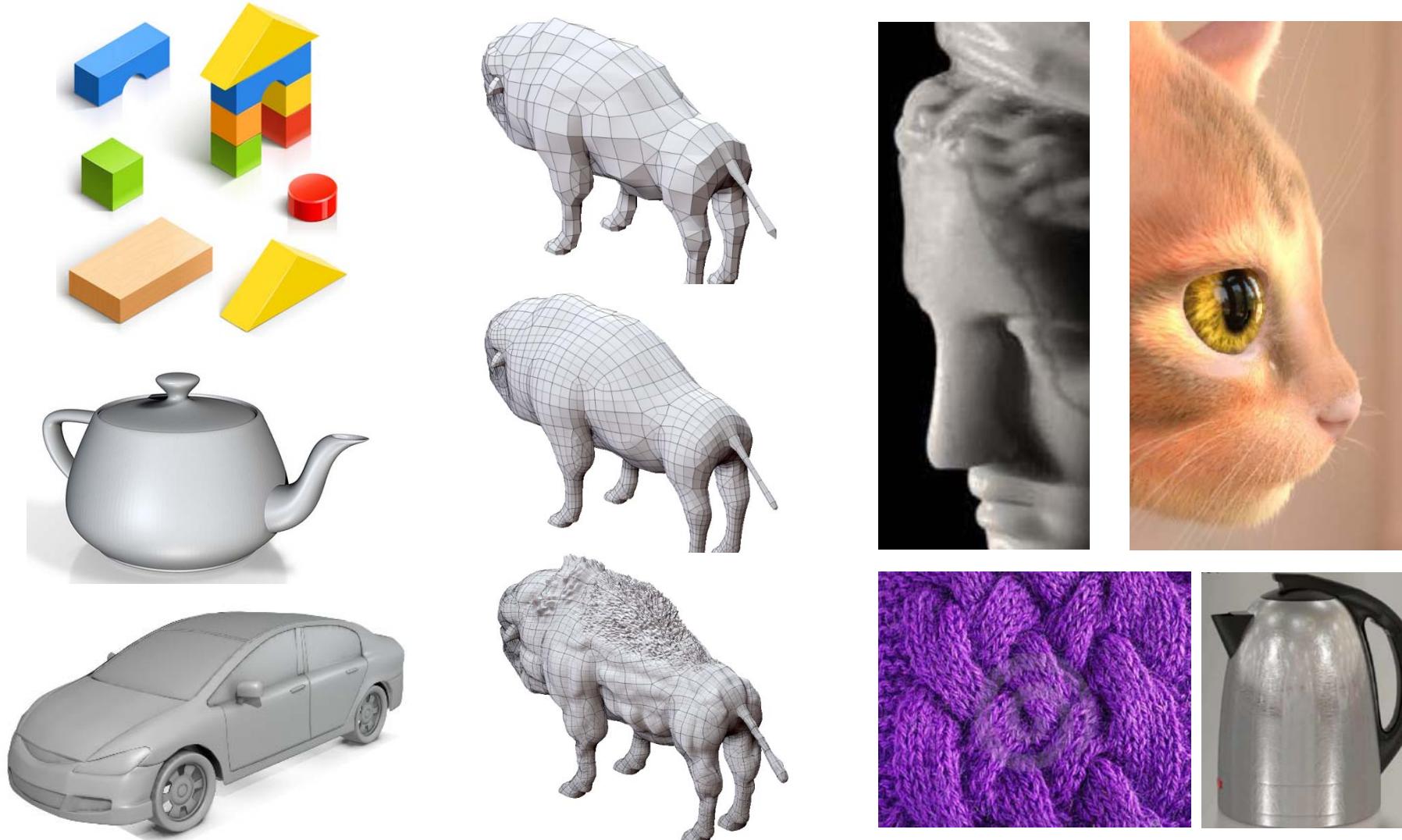
巧妇难为无米之炊！

- 制作三维数据：
 - 几何数据
 - UV展开
 - 贴图（纹理）
 - 材质
 - 灯光
 - 动画
 - ...



一点一点靠美术堆？一点一点靠美术画？一点一点靠美术调？

构建三维几何数据的类型与挑战

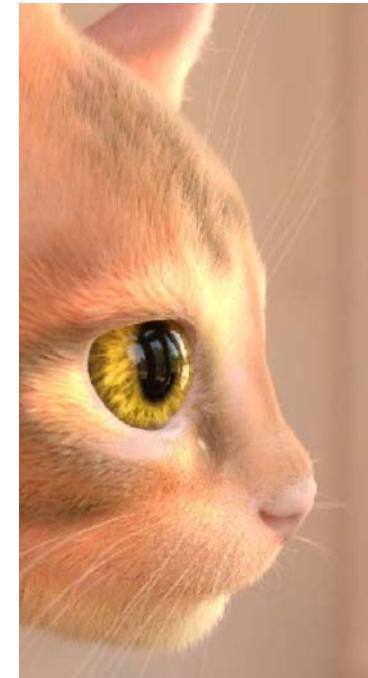


几何内容的生成仍然是计算机图形学应用的瓶颈问题之一！

构建三维几何数据的类型与挑战



本课程覆盖的内容



几何内容的生成仍然是计算机图形学应用的瓶颈问题之一！



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China



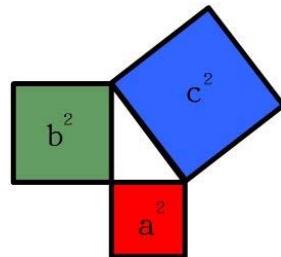
GAMES 102在线课程：几何建模与处理基础

函数拟合

从“一点点”数学开始… 😊

关于“数学”：自然科学的语言

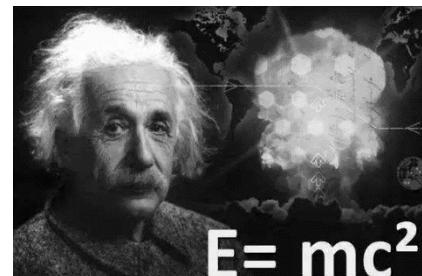
一种对客观世界规律进行描述的符号系统



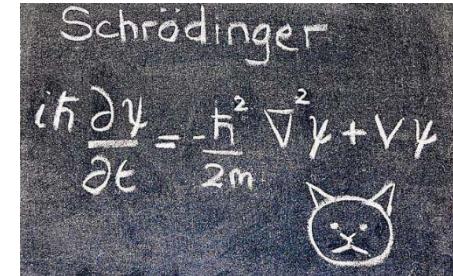
牛顿第二定律



$$F_{合}=ma$$



$$E=mc^2$$



数学来源于生活、并应用于生活！

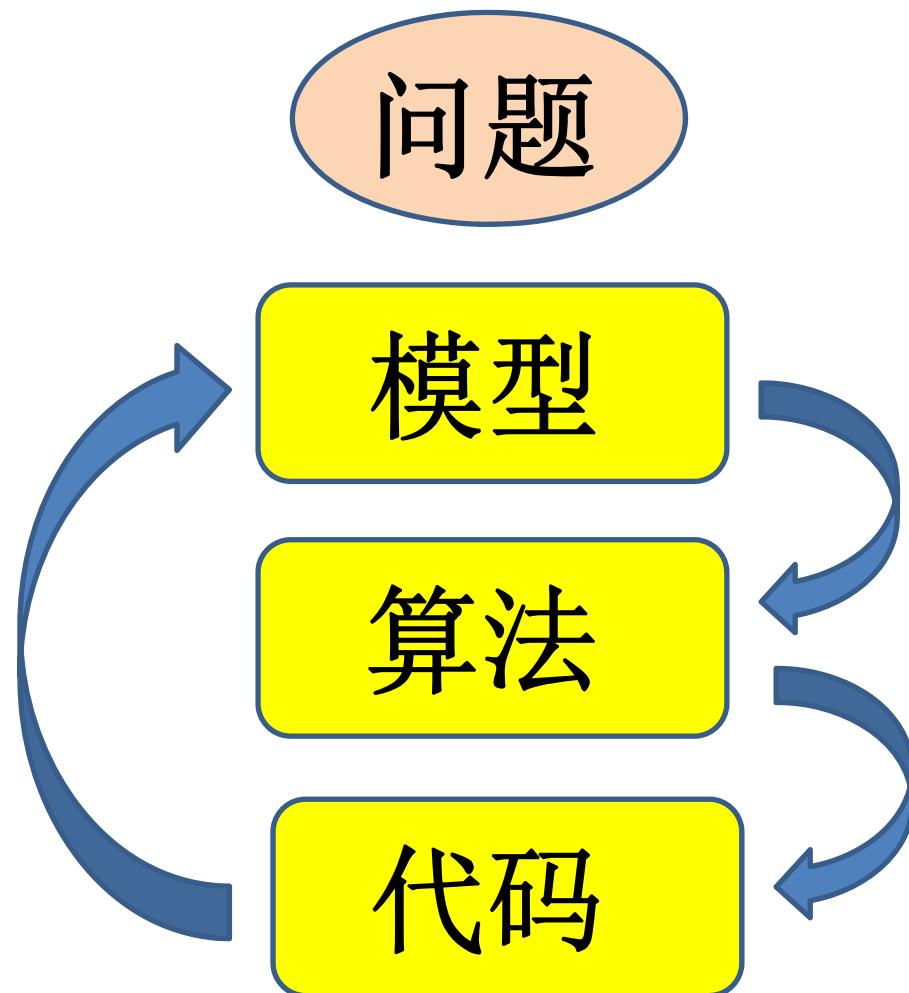
数学不是没有用，而是不够用！

需要培养的基本能力：数学思维和数学建模能力

数学的产生

- 起源于非常实际的目的
 - 结绳计数、土地测量、灌溉系统→**符号**系统
- 逐渐从自然界中抽象出**规律**
 - 年月历法、二十四节气
 - 星象、星体运动
- 再到**逻辑原则**和推理演绎体系：纯粹（理论）数学
 - 欧几里得《几何原本》
 - 总结规律进行抽象：公理体系
- **发现**新定理/命题、提出各种猜想
 - 或能反应和指导真实世界、或无用…

数学的应用：用数学语言进行建模



科学研究的过程

数学语言：抽象的思维

幼儿园：2个苹果+3个苹果=5个苹果



小学： $2+3=5$



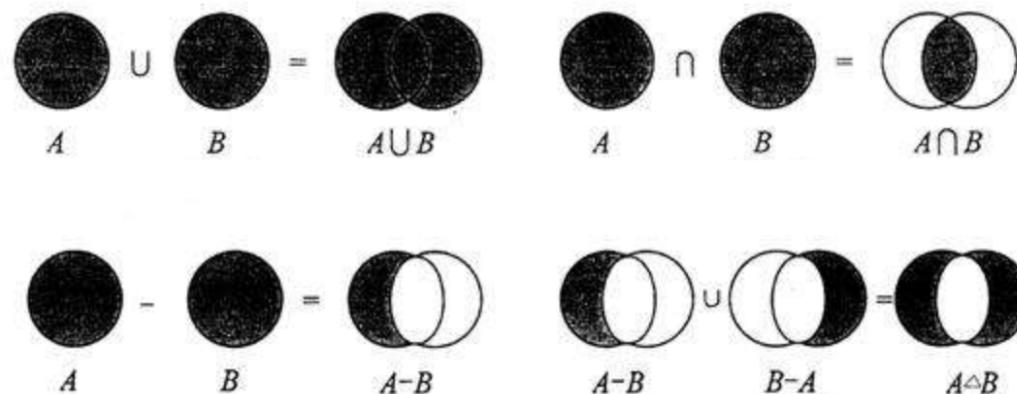
中学： $2x+3x=5x$



大学： $2f'(x) + 3f(x) = 5$

集合

- 集合：一堆具有同样性质的对象（称为元素）
- 基数（个数）：集合中元素的个数
 - 有限集，比如 $A=\{1,2,3,4\}$
 - 无限集
 - 可数集：自然数集 \mathbb{N} 、有理数集 \mathbb{Q}
 - 不可数集：实数集 \mathbb{R} 、无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- 运算：交、并、差

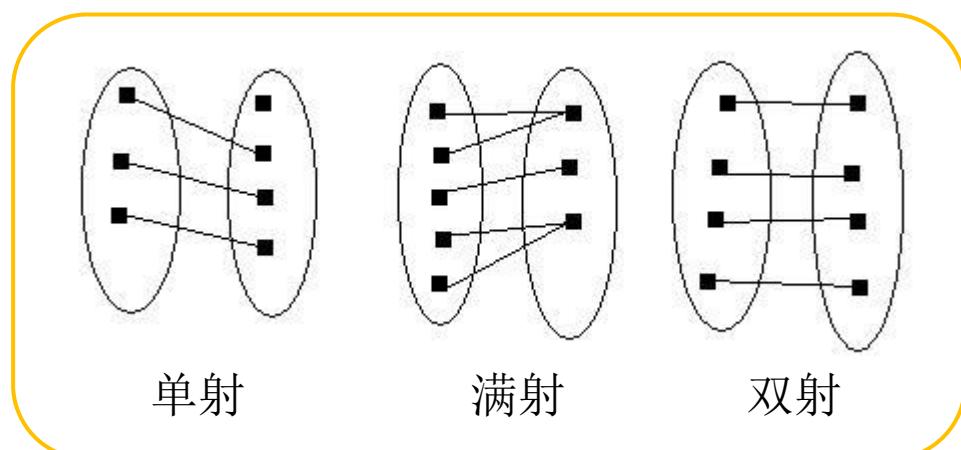
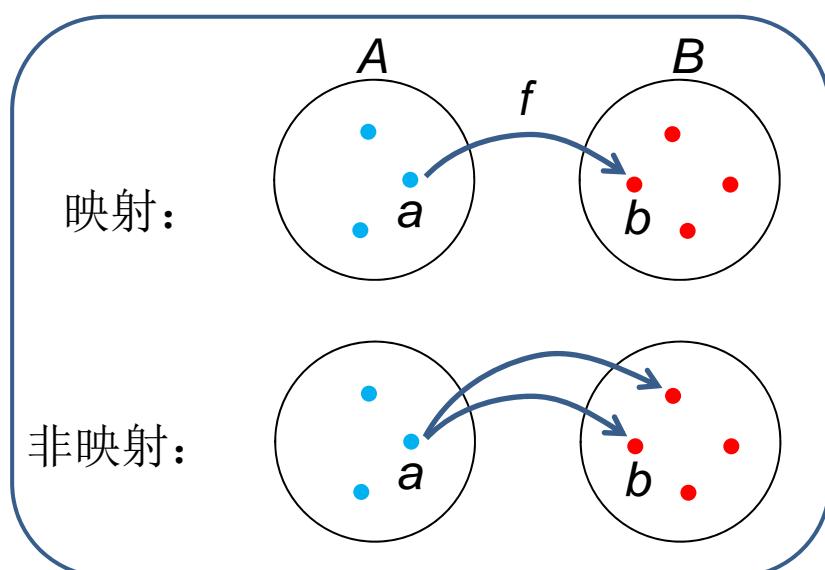


线性空间

- 元素之间有运算：加法、数乘
- 线性结构：对加法和数乘封闭
 - 加法交换律、结合律，数乘分配律，...
- 基/维数： $L = \text{span}\{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \sum_{k=1}^n a_k B_k$
 - 每个元素表达为 n 个实数，即一个向量 (a_1, a_2, \dots, a_n)
- 例子：
 - 欧氏空间：1D实数、2D平面、3D空间、...
 - n 次多项式

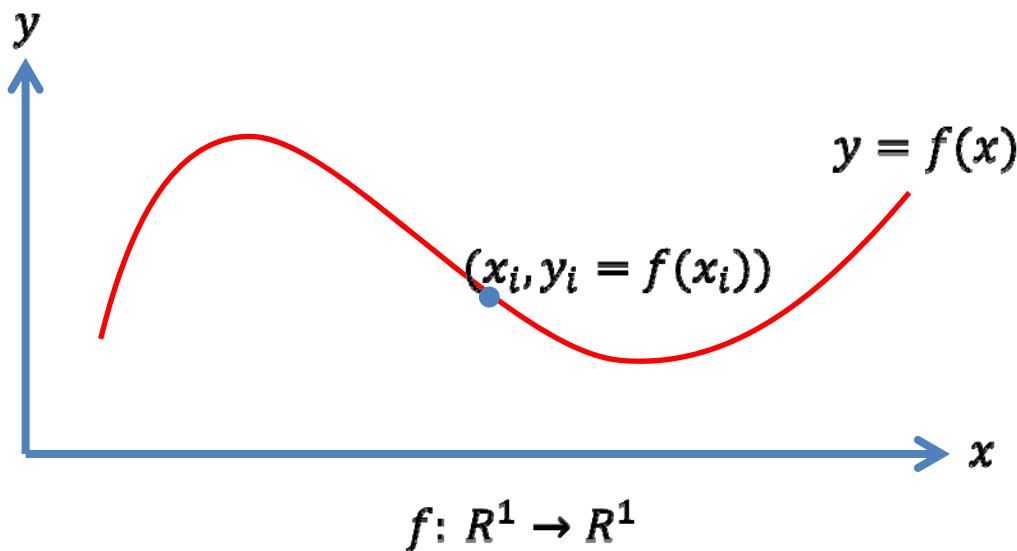
映射 (mapping)

- 两个非空集合 A 和 B 的映射 $f: A \rightarrow B$ ：对 A 中的任何一个元素 a ，有唯一的一个 B 中的元素 b 与之对应，记为 $f(a) = b$
 - b 称为 a 的象， a 称为 b 的原象
 - A 称为定义域， B 称为值域



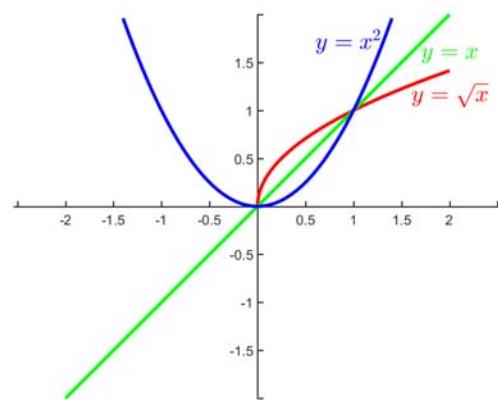
函数 (Function)

- 非空**实数集**之间的映射称为（一元）函数 $y = f(x)$, 或变换
- 函数的图像（函数的可视化）：所有有序对 $(x, f(x))$ 组成的集合

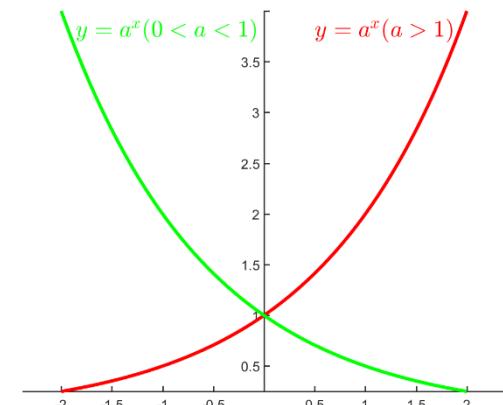


一元函数

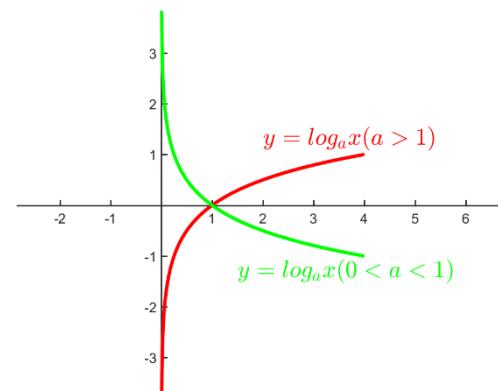
- 有哪些函数?
 - 幂函数
 - 三角函数
 - 对数函数
 - 指数函数
 - 三角函数
 - 反三角函数
 - ...



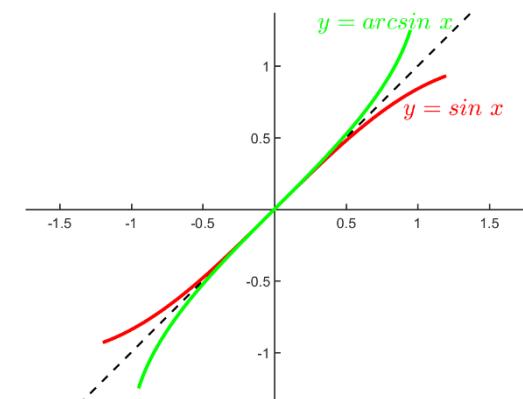
幂函数



指数函数



对数函数



(反)三角函数

函数的集合（函数空间）

- 用若干简单函数（“基函数”）线性组合张成一个函数空间
 - $L = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_n\} = \{\sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \mid a_i \in R\}$
 - 每个函数就表达（对应）为 n 个实数，即系数向量 (a_1, a_2, \dots, a_n)

幂基 $\{x^k, k = 0, 1, \dots, n\}$



$$f(x) = \sum_{k=0}^n w_k x^k$$

多项式函数空间

三角函数基



$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

三角函数空间

空间的完备性：这个函数空间是否可以表示（逼近）任意函数？

赋范空间

- 内积诱导范数、距离
 - $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$
- 度量空间：可度量函数之间的距离
 - Lp 范数
- 赋范空间+完备性=巴拿赫空间
- 内积空间（无限维）+完备性=希尔伯特空间

万能逼近定理： Weierstrass逼近定理

- 定理1：闭区间上的连续函数可用多项式级数一致逼近
- 定理2：闭区间上周期为 2π 的连续函数可用三角函数级数一致逼近

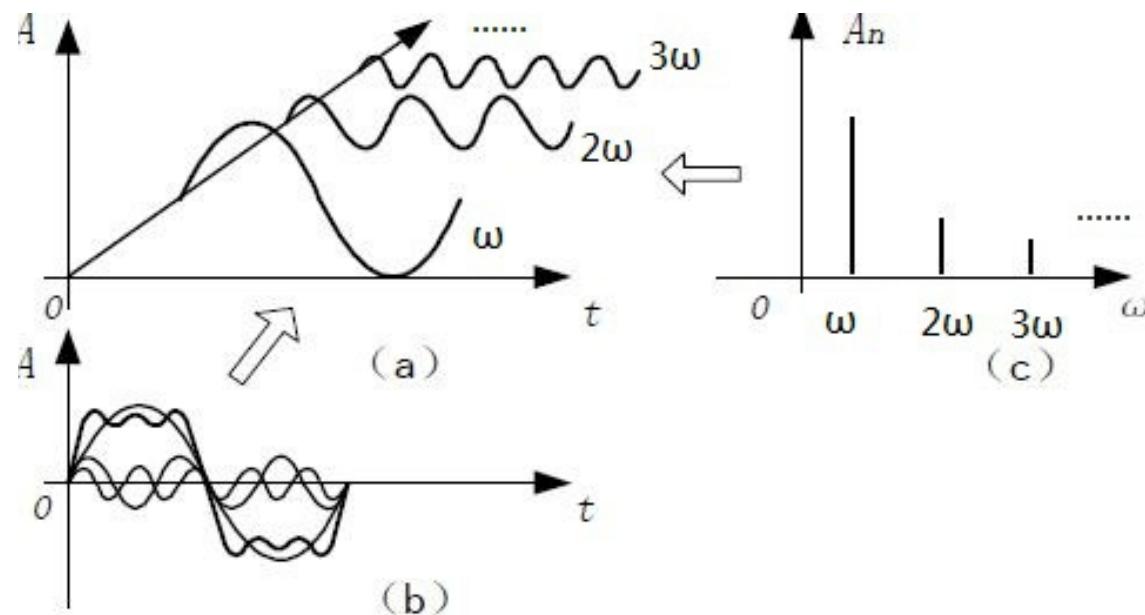
对 $[a, b]$ 上的任意连续函数 g , 及任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必存在 n 次代数多项式 $f(x) = \sum_{k=0}^n w_k x^k$, 使得

$$\min_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

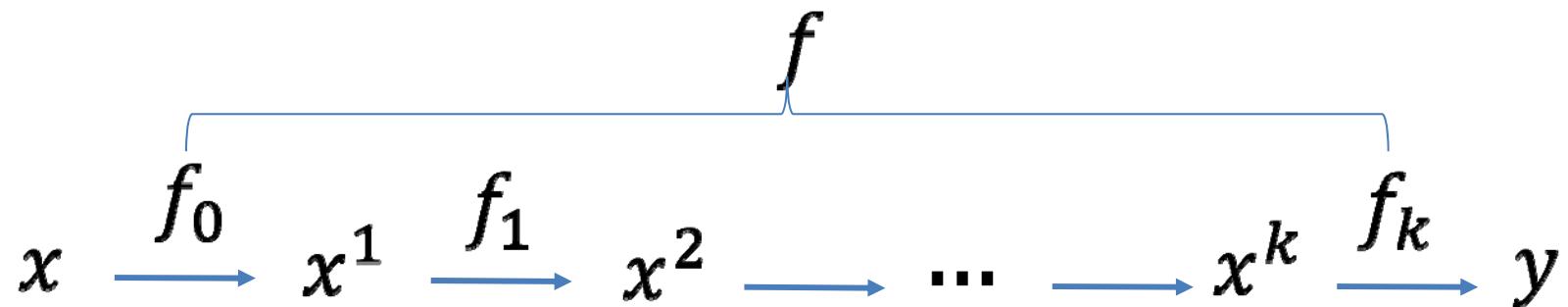
傅里叶级数

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \psi_n)$$



更复杂的函数：函数复合



$$f = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2}, \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$$

问题：如何求满足要求的函数？

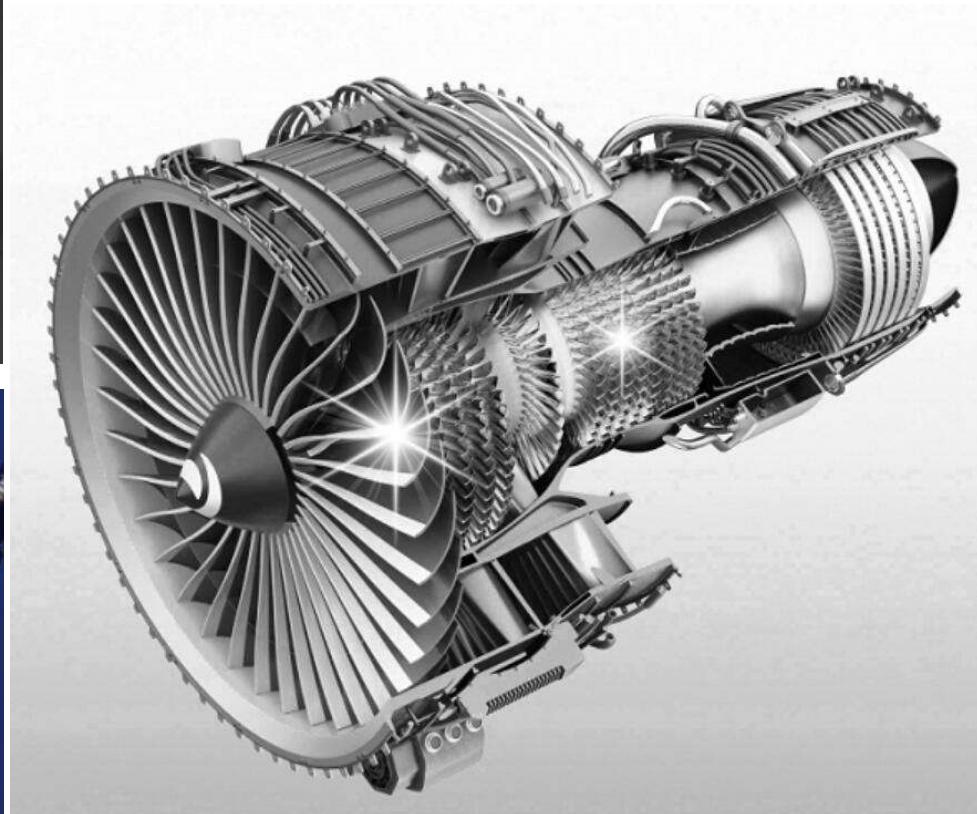
- 大部分的实际应用问题
 - 可建模为：找一个映射/变换/函数
 - 输入不一样、变量不一样、维数不一样
- 如何找函数的三步曲：
 - 到哪找？
 - 确定某个函数集合/空间
 - 找哪个？
 - 度量哪个函数是好的/“最好”的
 - 怎么找？
 - 求解或优化：不同的优化方法与技巧，既要快、又要好...
- 【注】这里先暂时限定为单变量的函数形式

【例子】逆向工程：求船型曲线

- 已知：某条船的侧面投影曲线图
 - 求：该投影轮廓线的表达函数？
 - 方法：
 - 从投影曲线上描（采样）一系列点
 - 找一个函数拟合这些采样点

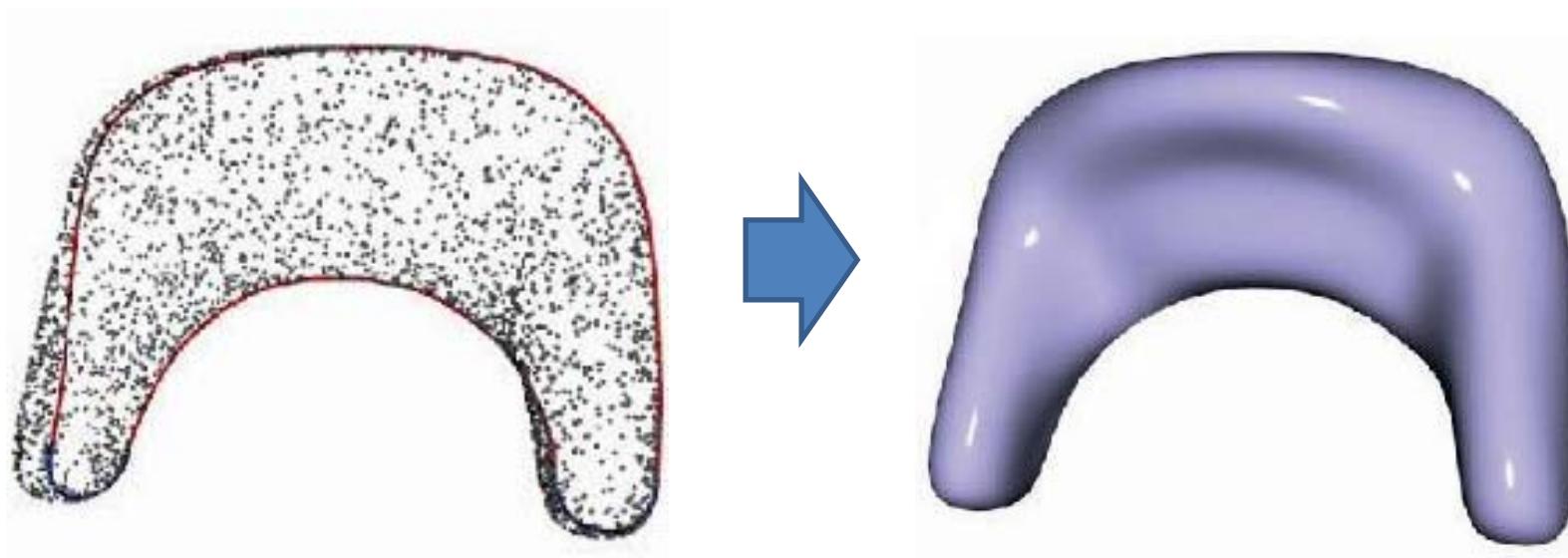


工业产品



曲线/曲面拟合问题

- 输入：一些型值（采样）点集
- 输出：一条拟合这些点集的曲线/曲面



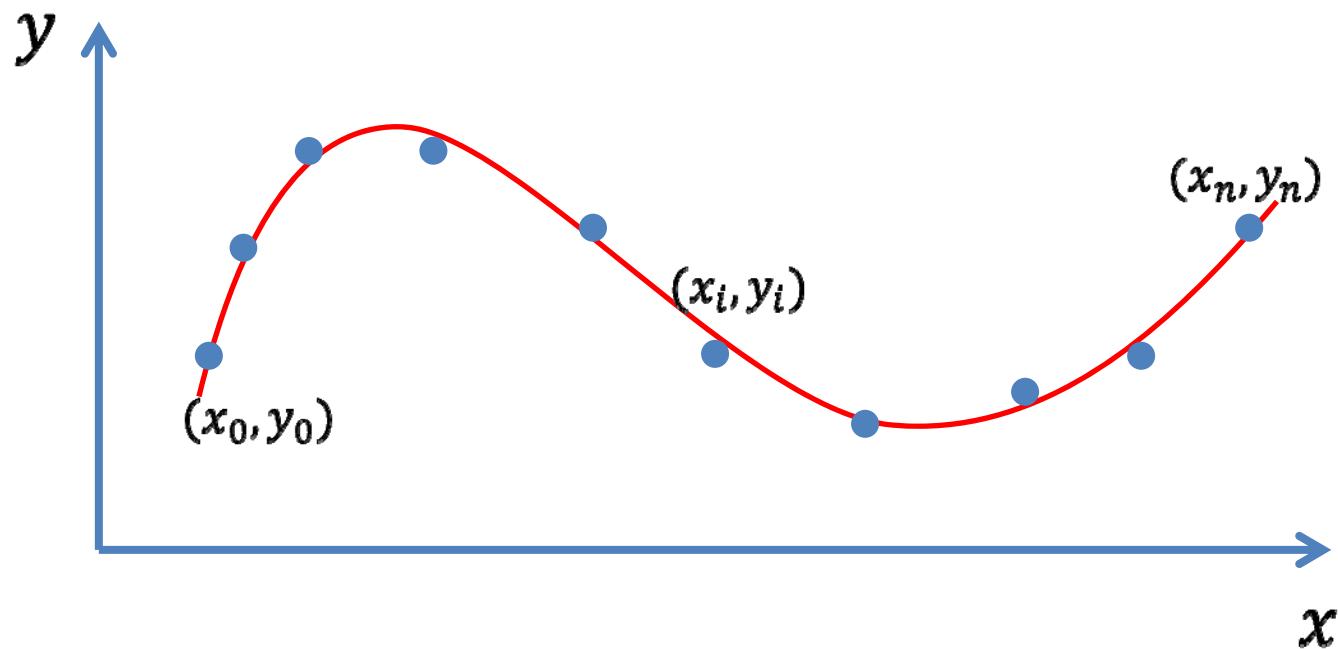
采样点云

光滑曲面

数据拟合

拟合(Fitting)问题

- 输入：一些观察的数据点
- 输出：反映这些数据规律的函数 $y = f(x)$



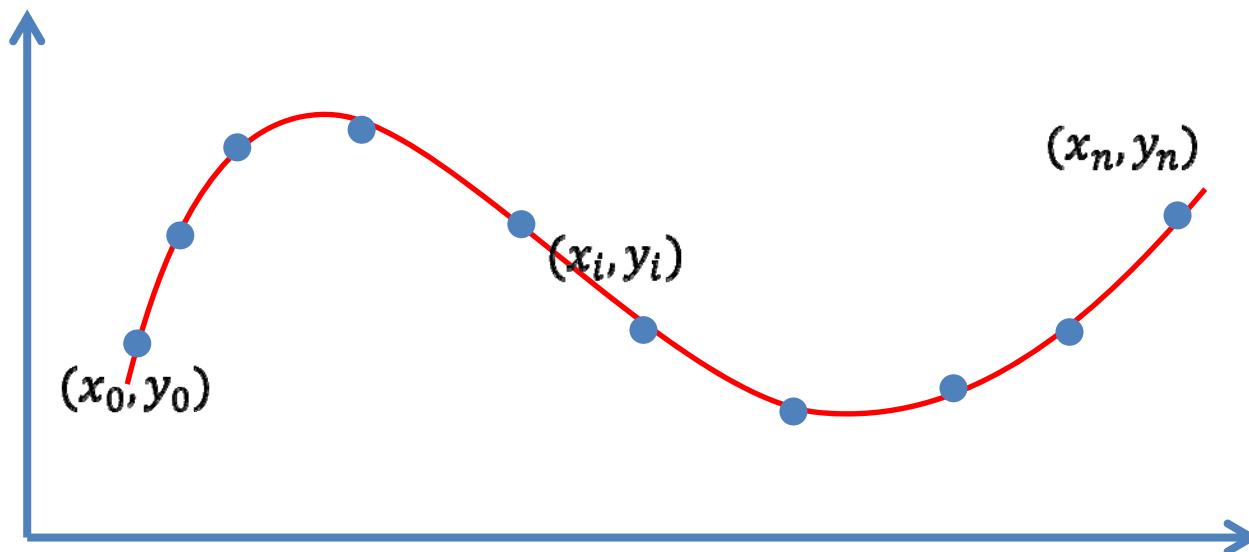
$$x \in R^1, y \in R^1$$

1. 到哪找？

- 选择一个函数空间
 - 线性函数空间 $A = \text{span}\{B_0(x), \dots, B_n(x)\}$
 - 多项式函数 $\text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
 - RBF函数
 - 三角函数
- 函数表达为
 - $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k B_k(x)$
 - 求 $n + 1$ 个系数 (a_0, \dots, a_n) 待定系数

2. 找哪个？

- 目标1：函数经过每个数据点（**插值**）
 - $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$



3. 怎么找？

- 目标1：每个数据点都要插值（零误差）
 - $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$
- 联立，求解线性方程组：
 - $\sum_{k=0}^n a_k B_k(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$
 - 求解 $(n + 1) \times (n + 1)$ 线性方程组
 - n 次 Langrange 插值多项式
 - 病态问题：系数矩阵条件数高时，求解不稳定

Lagrange插值函数

- 插值 $n+1$ 个点、次数不超过 n 的多项式是存在而且是唯一的
 - ($n+1$ 个变量, $n+1$ 个方程)

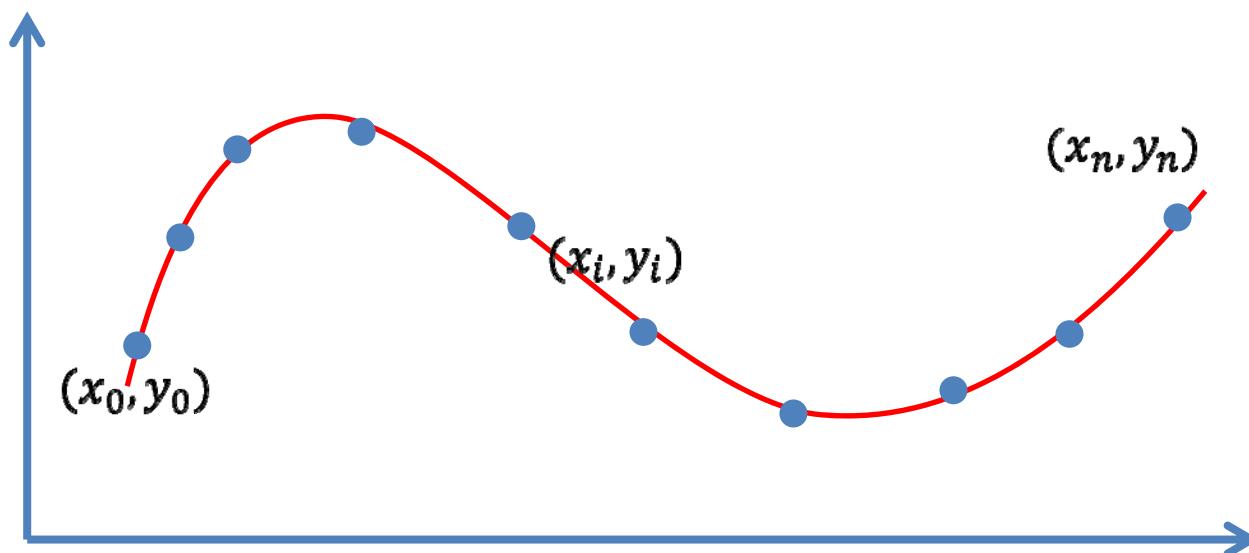
$$p_k(x) = \prod_{i \in B_k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

插值函数的**自由度** = 未知量个数 – 已知量个数

2-2. 找哪个？

- 目标2：函数尽量靠近数据点（逼近）

$$-\min \sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i))^2$$

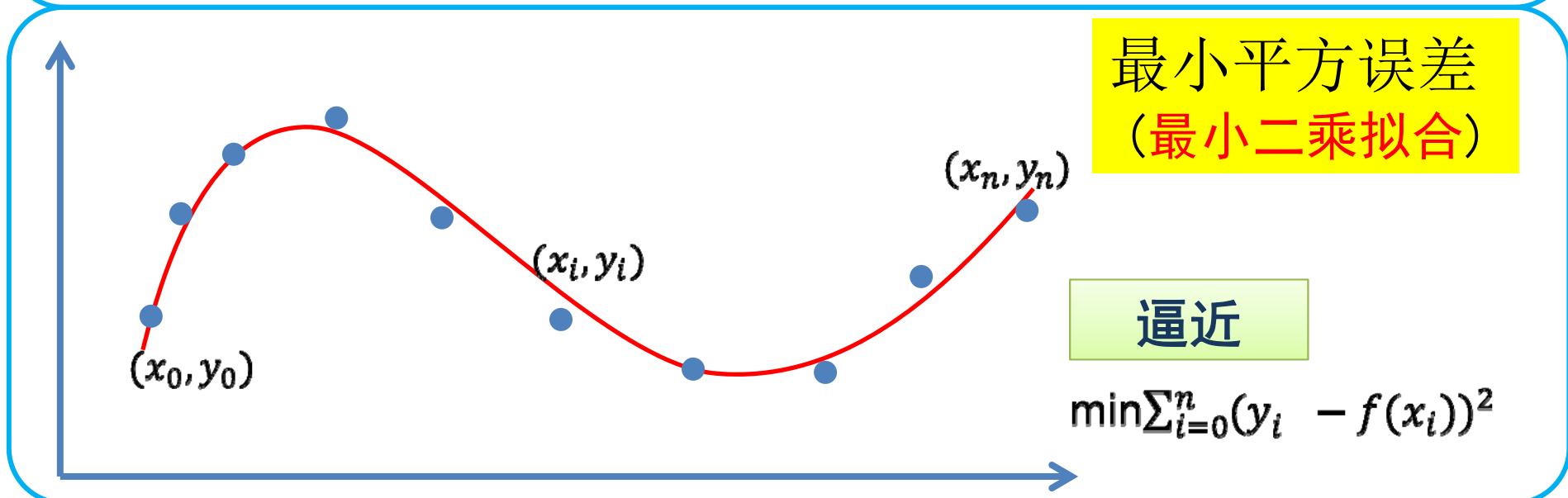
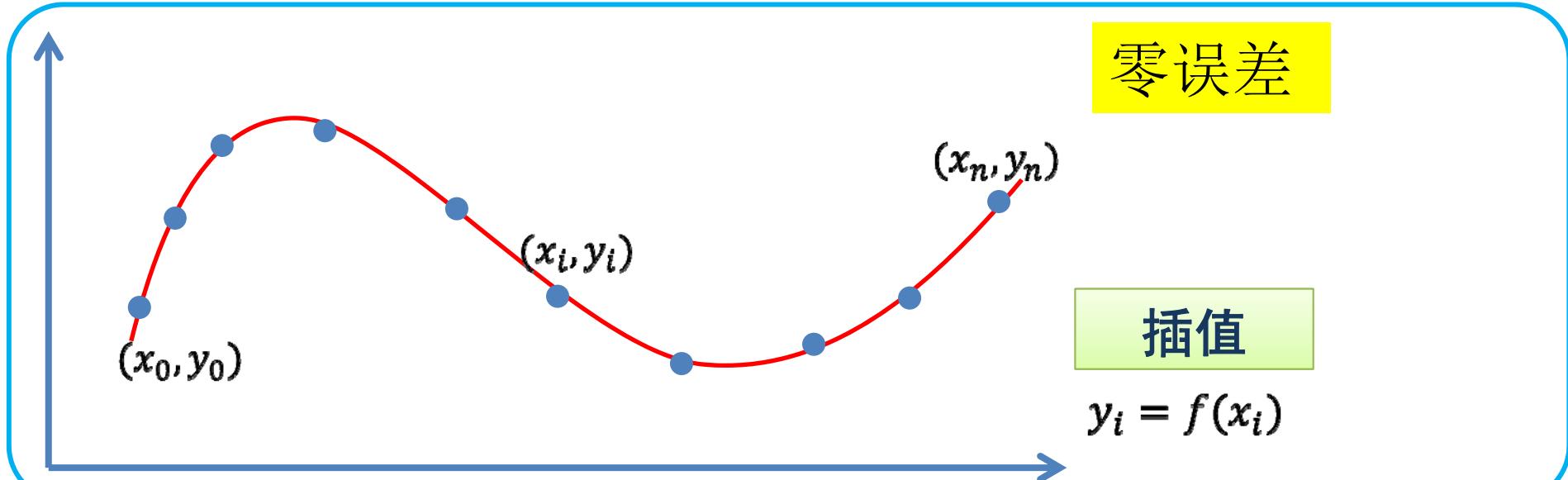


3-2. 怎么找？

- 目标2：函数尽量靠近数据点（逼近）
 - $\min \sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i))^2$
- 对各系数求导，得法方程（线性方程组）
 - $AX = b$
- 问题：
 - 点多，系数少？
 - 点少，系数多？

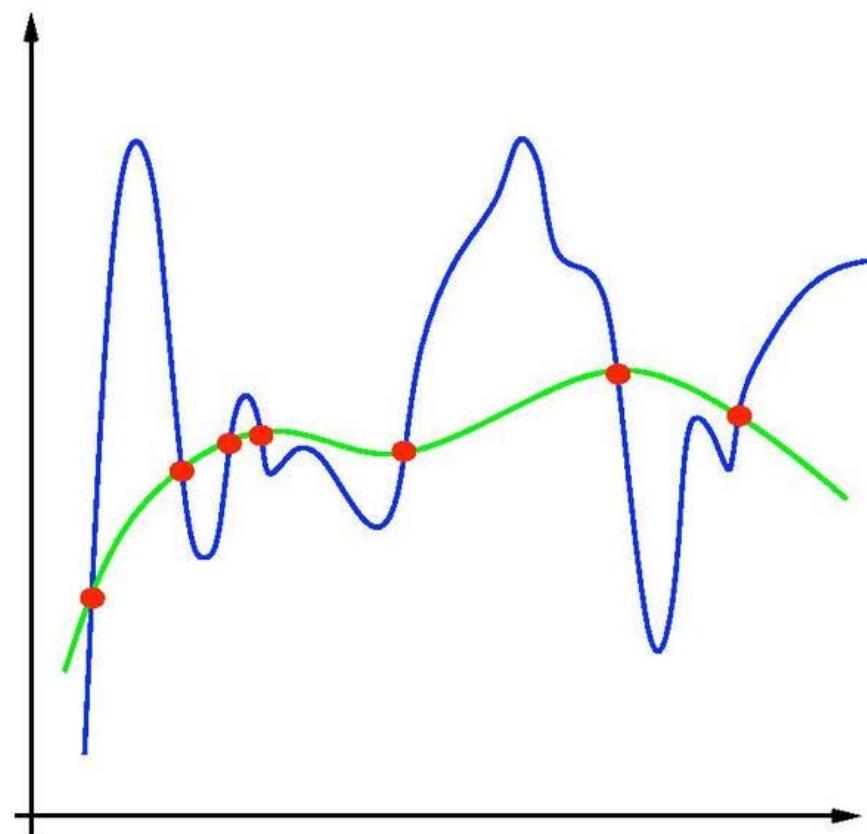
最小二乘法

Recap: 拟合--插值或逼近



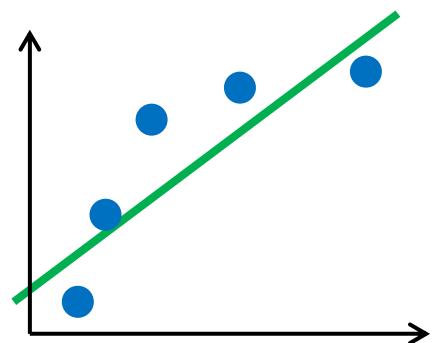
Overfitting (过拟合)

- 误差为0，但是拟合的函数并无使用价值！



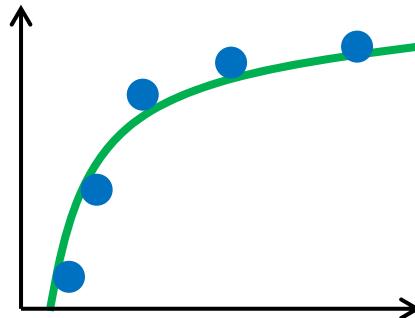
欠拟合或过拟合

- 如何选择合适的基函数？



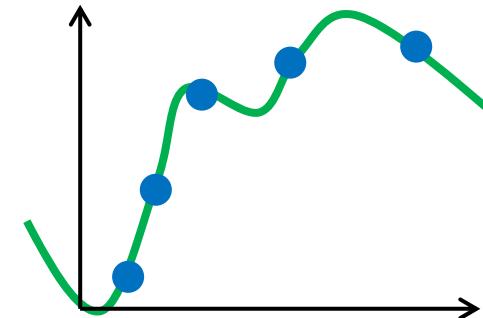
$$w_0 + w_1x$$

High bias
(underfitting)



$$w_0 + w_1x + w_2x^2$$

“Just right”



$$w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + \dots$$

High variance
(overfitting)

- 需要根据不同的应用与需求，不断尝试
(不断“调参”)

避免过拟合的常用方法

- 数据去噪
 - 剔除训练样本中噪声
- 数据增广
 - 增加样本数，或者增加样本的代表性和多样性
- 模型简化
 - 预测模型过于复杂，拟合了训练样本中的噪声
 - 选用更简单的模型，或者对模型进行裁剪
- 正则约束
 - 适当的正则项，比如方差正则项、稀疏正则项

$$y = \sum_{i=0}^n w_i B_i(x)$$

岭回归正则项

- 选择一个函数空间

- 基函数的线性表达 $W = (w_0, w_1, \dots, w_n)$

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^n w_i B_i(x)$$

- 最小二乘拟合

$$\min_W \|Y - XW\|^2$$

- Ridge regression (岭回归)

$$\min_W \|Y - XW\|^2 + \mu \|W\|_2^2$$

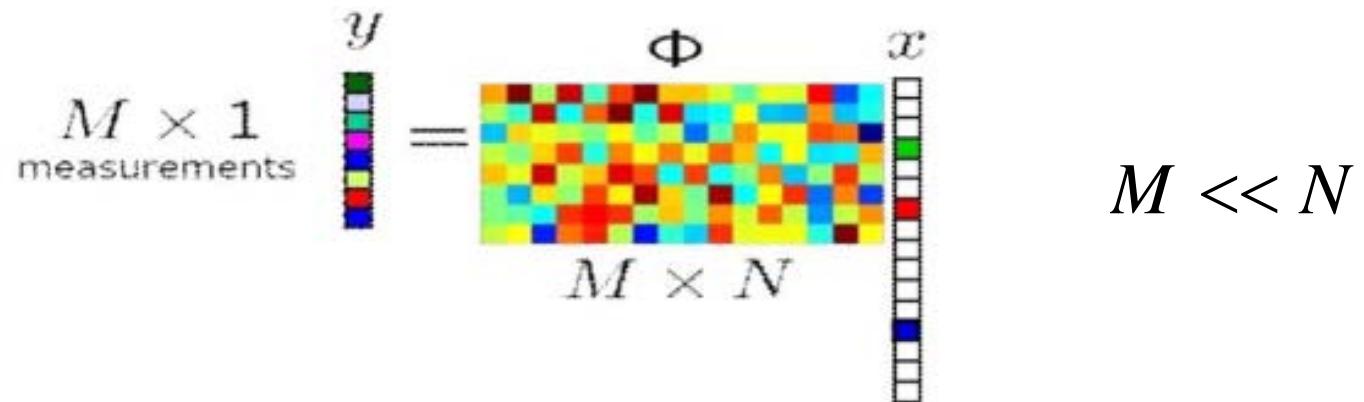
稀疏学习：稀疏正则化

- 冗余基函数（过完备）
- 通过优化来选择合适的基函数
 - 系数向量的 L_0 模（非0元素个数）尽量小
 - 挑选（“学习”）出合适的基函数

$$\min_{\alpha} \|Y - XW\|^2 + \mu \|W\|_0$$

$$\min_{\alpha} \|Y - XW\|^2, \quad \text{s.t. } \|W\|_0 \leq \beta$$

从另一角度：压缩感知



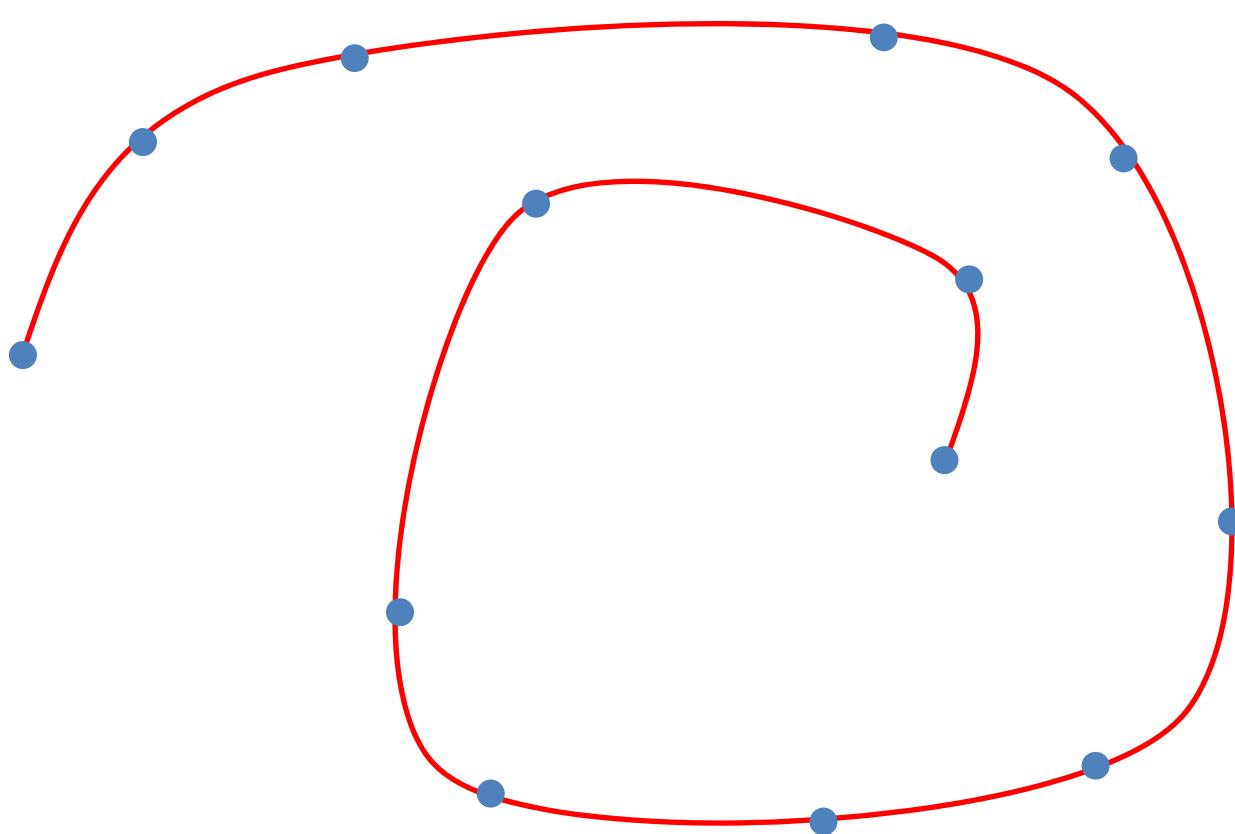
- 已知 y 和 Φ ，有无穷多解 x
- 对于**稀疏**信号 x ，可通过优化能完全**重建** x
 - 在一定条件下 (on Φ) [Candes and Tao 2005]

L_0 优化

$$\min \|x\|_0$$

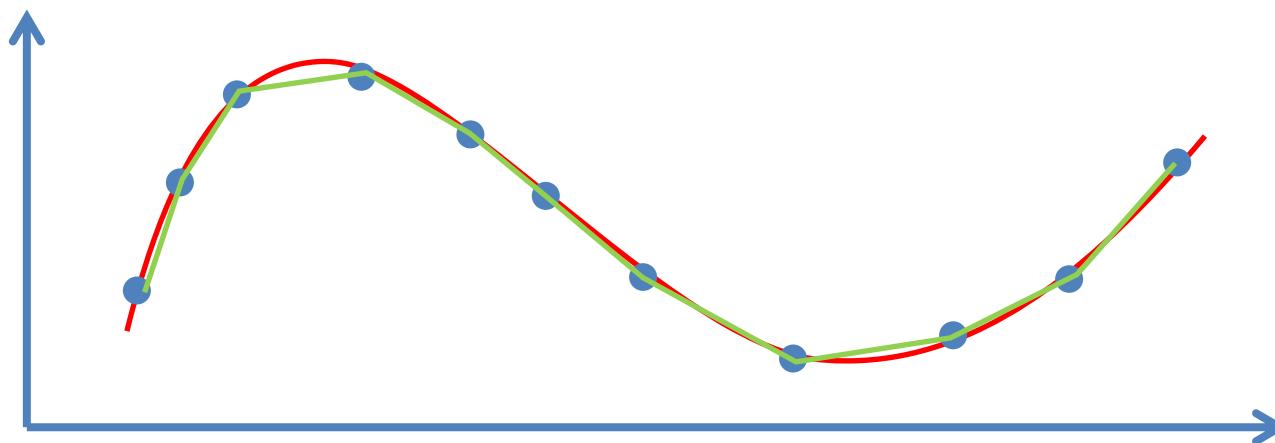
$$\text{s.t. } \Phi x = y$$

思考：非函数型的曲线拟合？



作业1：函数拟合

- 作业发布见课程主页
- 函数曲线的绘制
 - 以曲化直：沿x方向采样点，依次连接线段



- Deadline: 2020 年 10 月 17 日晚



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

谢谢！