Lecture 11: 수 I

강의 개요

- 무리수
- 뉴튼 방법 ($\sqrt{(a)}$,1/b)
- 고정밀 곱셈 계산

무리수:

피타고라스는 정사각형의 대각선의 길이와 한 변의 길이의 비율은 정수비로 표현할 수 없다는 것을 발견 했다. 그는 이것을 ‘설명 불가' 라고 칭했다.

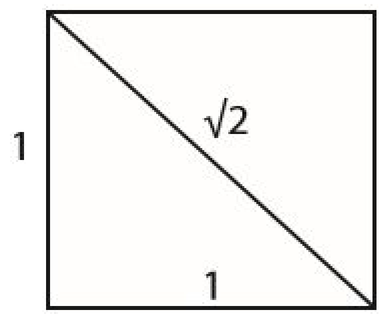

그림 1: 정사각형 변과 대각선의 비율

피타고라스는 “모든 것이 숫자” 라고
생각하며 숫자를 숭배했다.
따라서 그들에게 무리수는 위협이었다.
생각해볼 만한 질문: 무리수에 숨겨진 특정한 패턴이 있을까?

$\sqrt{2}$ =1. 414 213 562 373 095
048 801 688 724 209
698 078 569 671 875

여기에서 특정한 패턴을 찾을 수 있나?

여담

카탈란 수:
<u>올바른</u> 괄호 구조 문자열로 이루어진 집합 P는 아래와 같이 귀납적으로 정의한다.

- $\lambda \in P$ (λ 는 빈 문자열)
- 만약 $\alpha, \beta \in P$이면, $(\alpha)\beta \in P$이다.

빈 문자열이 아닌 모든 올바른 괄호 구조 문자열은 특정한 α, β 쌍을 이용하여 규칙 2로부터 얻을 수 있다.

예를 들어, (()) ()() $(\underbrace{()}_{\alpha})\underbrace{()()}_{\beta}$ 는 을 이용하여 얻을 수 있다.

나열해보기

C_n : n 쌍의 괄호를 가지는 올바른 괄호 구조 문자열의 개수

$C_0 = 1$ 빈 문자열

C_{n+1}? 특정한 규칙2로부터 얻어지는 n+1쌍의 괄호를 가지는 올바른 괄호 구조의 모든 문자열의 개수

한 쌍의 괄호를 가진 문자열은 규칙2로부터 명확하게 얻어진다.

k쌍의 괄호를 가진 문자열은 α로부터 얻어지고, n – k쌍의 괄호를 가진 문자열은 β로부터 얻어진다.

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k} \quad n \geq 0$$

$$C_0 = 1 \quad C_1 = C_0^{\,2} = 1 \quad C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 2 \quad C_3 = \cdots = 5$$

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, 18367353072152, 69533550916004, 263747951750360, 1002242216651368

뉴튼 방법

연속 근사법을 이용하여 $f(x)=0$의 해를 찾는 방법. 예, $f(x) = x^2 - a$

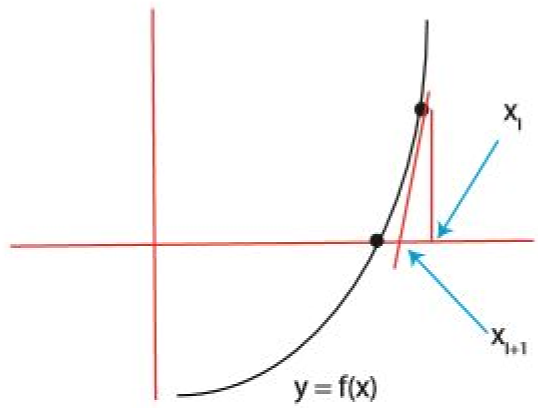

그림 2: 뉴튼 방법

점$(x_i, f(x_i))$에서의 접선은 $y = f(x_i)+\underline{f'(x_i)}\cdot(x-x_i)$ 이고 $f'(x_i)$는 도함수이다. x_{i+1}은 x축과의 교점이 된다.

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

제곱근

$$f(x) = x^2 - a$$

$$\chi_{i+1} = \chi_i - \frac{({\chi_i}^2 - a)}{2\chi_i} = \frac{\chi_i + \frac{a}{\chi_i}}{2}$$

예시

$$\chi_0 = 1.000000000 \qquad a = 2$$
$$\chi_1 = 1.500000000$$
$$\chi_2 = 1.416666666$$
$$\chi_3 = 1.414215686$$
$$\chi_4 = 1.414213562$$

이차적 수렴은 자릿수의 개수가 두 배로 늘어나는 것을 의미한다. 따라서, 뉴튼 방법을 사용하기 위해서는 고정밀 나눗셈을 계산해야 한다. 제 12강에서 곱셈과 나눗셈에 대한 부분을 배울 것이다.

고정밀도 계산

$\sqrt{2}$ 의 d자릿수 계산 : $\underbrace{1.414213562373}_{\text{d digits}}\cdots$

정수가 필요하기 때문에, 무리수의 정수 $\lfloor 10^d\sqrt{2}\rfloor = \lfloor\sqrt{2\cdot 10^{2d}}\rfloor$ 부분만을 이용 - 이렇게 만들어지는 정수는 뉴튼 방법을 적용할 수 있다.

고정밀도 곱셈

두 개의 n자릿수 숫자를 곱하는 경우 필요하다. (n은 2진수 또는 10진수, r= 2,10)

$0 \le x, y < r^n$

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cdot r^{n/2} + x_0 \qquad x_1 = \text{high half} \\ y &= y_1 \cdot r^{n/2} + y_0 \qquad x_0 = \text{low half} \\ 0 &\le x_0, x_1 < r^{n/2} \\ 0 &\le y_0, y_1 < r^{n/2} \end{aligned}$$

$$z = x \cdot y = x_1 y_1 \cdot r^n + (x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0) r^{n/2} + x_0 \cdot y_0$$

절반 크기를 가지는 숫자들을 4번 곱셈으로 계산 $\Rightarrow$ $\Theta(n^2)$, 제곱 시간 알고리즘이 된다

카라추바 알고리즘

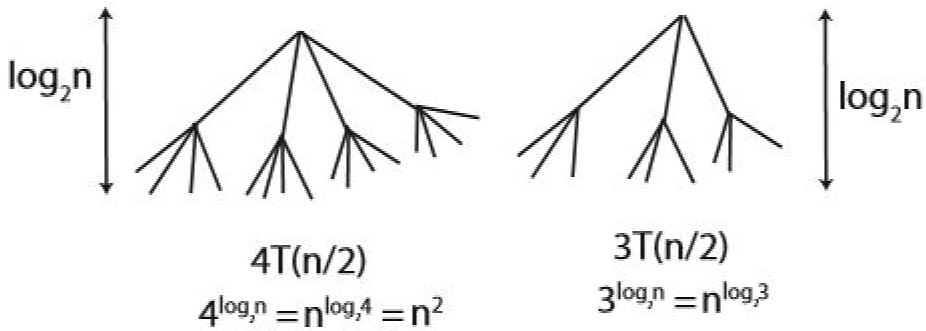

그림 3: 가지치는 인자들

$$
\begin{aligned}
z_0 &= x_0 \cdot y_0 \\
z_2 &= x_1 \cdot y_1 \\
z_1 &= (x_0 + x_1) \cdot (y_0 + y_1) - z_0 - z_2 \\
&= x_0 y_1 + x_1 y_0 \\
z &= z_2 \cdot r^n + z_1 \cdot r^{n/2} + z_0
\end{aligned}
$$

위와 같이 곱셈을 표현하면, 위의 계산에서 총 3번의 곱셈을 수행한다.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \text{time to multiply two } n\text{-digit}\sharp' s \\
&= 3T(n/2) + \theta(n) \\
&= \theta\left(n^{\log_2 3}\right) = \theta\left(n^{1.5849625\cdots}\right)
\end{aligned}
$$

따라서 이 방법은 $\Theta(n^2)$ 보다 짧은 시간에 가능하다. 제 12강에서는 파이썬으로 구현하는 것을 소개할 것이다.

흥미로운 기하학 문제

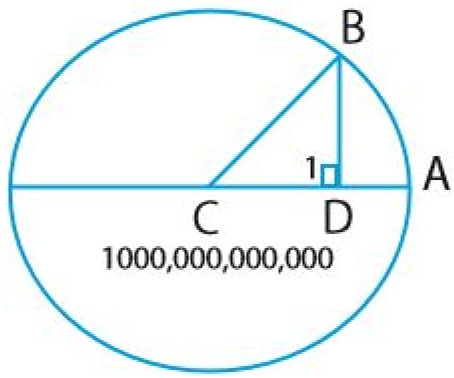

그림 4: 기하학 문제.

BD= 1이라고 할 때, AD의 길이는?

$$AD = AC - CD = 500,000,000,000 - \sqrt{\underbrace{500,000,000,000^2 - 1}_{a}}$$

여기서 AD의 길이를 수백만 자리까지 계산해보도록 한다. (이것은 제12강에서 배우게 될 고정밀도 나눗셈을 수행한다는 가정하에 계산한다.) 뉴튼 방법을 이용하여 수백 자리의 정밀도까지 계산할 경우, 카탈란 수가 나오는 것을 볼 수 있다.

아래에서 직접 해볼 수 있다. :

http://people.csail.mit.edu/devadas/numerics_demo/chord.html

추가 설명

이 부분은 강의에서 설명하지 않았고, 시험에도 나오지 않는다. 실함수 Q의 멱급수에 대해서 알아보겠습니다.

$$Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \quad (1)$$

일반적인 선형대수를 이용하면, 아래와 같은 식을 얻을 수 있다. :

$$1 + xQ(x)^2 = 1 + c_0^2 x + (c_0 c_1 + c_1 c_0) x^2 + (c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0) x^3 + \dots \quad (2)$$

$$Q(x) = 1 + xQ(x)^2 \quad (3)$$

위의 등식이 성립하기 위해서는 Q(x)의 멱급수는 $1+xQ(x^2)$의 멱급수와 완전히 같아야 한다. 따라서 각 멱급수의 모든 상수가 동일할 때 성립한다. 따라서, 아래와 경우에 이 등식이 성립한다. :

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 && (4)\\ c_1 &= c_0^2 && (5)\\ c_2 &= c_0c_1 + c_1c_0 && (6)\\ c_3 &= c_0c_2 + c_1c_1 + c_2c_0 && (7)\\ & \text{etc.} && (8) \end{aligned}$$

따라서 함수 Q의 모든 계수는 카탈란 수가 된다는 것을 알 수 있다.

2차 방정식을 이용해서 함수 Q를 계산하면 아래와 같다. :

$$Q(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \tag{9}$$

두 가지 해 중 음의 제곱근을 가지는 해를 이용하면 아래를 얻을 수 있다. :

$$\begin{aligned} 10^{-12} \cdot Q(10^{-24}) &= 10^{-12} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 10^{-24}}}{2 \cdot 10^{-24}} && (10)\\ &= 500000000000 - \sqrt{500000000000^2 - 1} && (11) \end{aligned}$$

함수 Q의 멱급수에 대입하면 아래와 같다. :

$$10^{-12} \cdot Q(10^{-24}) = c_0 10^{-12} + c_1 10^{-36} + c_2 10^{-60} + c_3 10^{-84} + \dots \tag{12}$$

따라서, 위에서 보았듯이 500000000000 - $\sqrt{500000000000^2 - 1}$ 매 24번째 자릿수마다 카탈란 수가 나오게 된다.