강의 17: 최단 경로 찾기 III: 벨만-포드

강의 목차

- 복습: 표기법
- 일반적 최단 경로 알고리즘
- 벨만-포드 알고리즘
    - 분석
    - 정확성

복습:

$$\begin{aligned} \text{path } p &= \ < v_0, v_1, \ \ldots, \ v_k > \\ & \quad (v_1, v_{i+1}) \ \in E \quad 0 \leq i < k \\ w(p) &= \sum_{i-0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) \end{aligned}$$

정점 u에서 v까지의 최단 경로의 가중치를 $\delta(u,v)$로 둔다. 정점 u에서 정점 v가 도달 불가능하면 $\delta(u,v)$의 값은 무한대(∞)이다. 정점 u와 v사이에 음의 순환이 있으면 최단 경로는 정의되지 않는다.

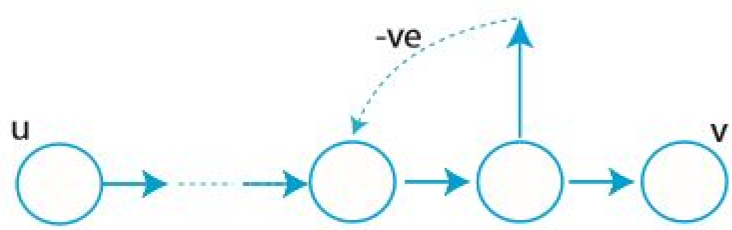

그림 1: 음의 순환.

일반적 최단 경로 알고리즘

Initialize: for $v \in V$: $d[v] \leftarrow \infty$

$\Pi[v] \leftarrow$ NIL

$d[S] \leftarrow 0$

Main: repeat

select edge (u, v) [somehow]

"Relax" edge (u, v)

if $d[v] > d[u] + w(u, v)$:

$d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

$\pi[v] \leftarrow u$

until you can't relax any more edges or you're tired or . . .

복잡도:

종료: 음의 순환이 존재하면 알고리즘은 계속해서 간선을 완화한다.

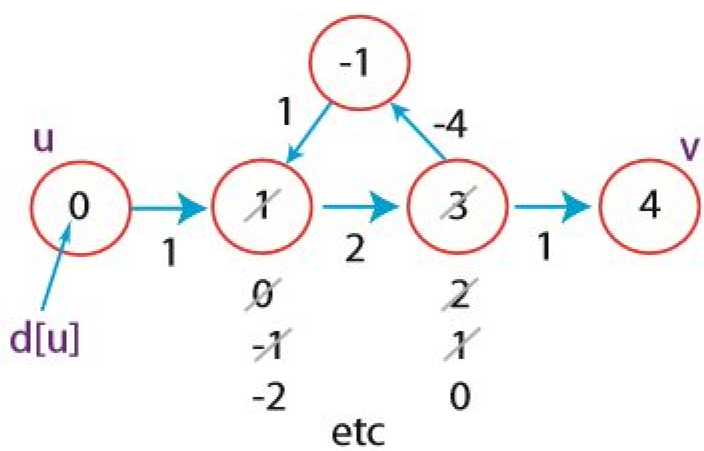

그림 2: 음의 순환으로 인해 알고리즘이 종료되지 않는 경우

간선의 선택에 따라 복잡도가 지수 시간이 될 수 있다.

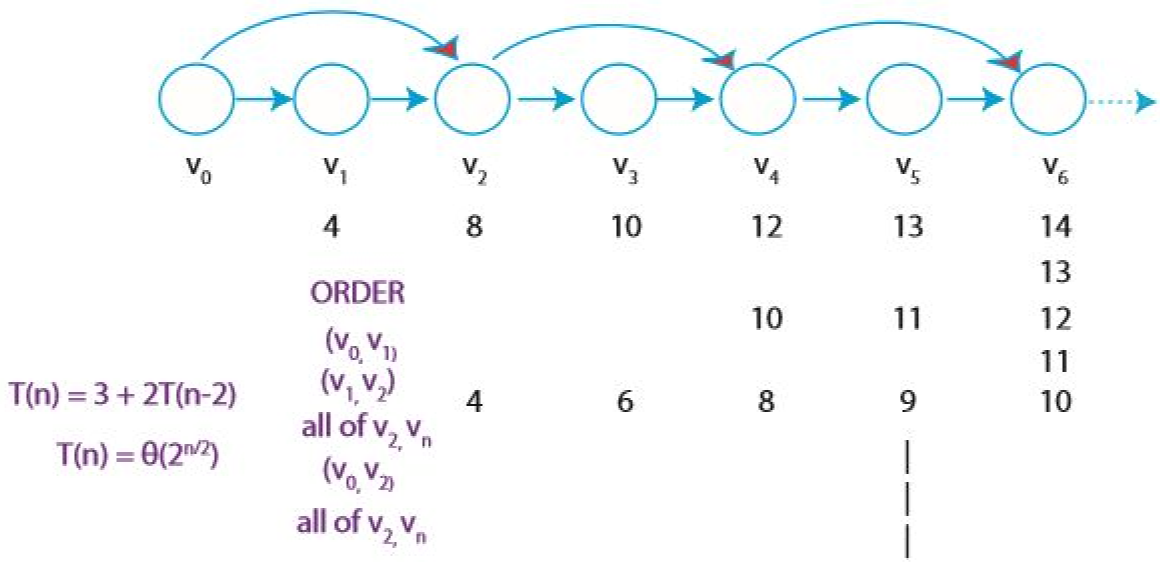

그림 3: 알고리즘이 지수 시간이 걸리는 경우의 그래프. $v0$ 에서 $v1$로의 진출 간선의 가중치가 4, $v2$에서 $v3$로의 진출 간선의 가중치가 2, $v4$에서 $v5$로의 진출 간선의 가중치가1이다.

5-분 6.006 강의

졸업하고 5년이 지나도 강의 6.006에서 배운 것 중 그림 4 는 기억하시길 바랍니다!

Bellman-Ford(G,W,s)

```
Initialize ()
for i = 1 to |V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ E:
        Relax(u, v)
for each edge (u, v) ∈ E
    do if d[v] > d[u] + w(u, v)
        then report a negative-weight cycle exists
```

음의 순환이 없다면 알고리즘의 마지막엔 $d[v] = \delta(s,v)$이다.

정리:

그래프 $G = (V,E)$가 음의 순환을 가지고 있지 않으면 벨만 포드 알고리즘의 종료 후 모든 그래프의 정점 $v \in V$에 대해 $d[v] = \delta(s,v)$ 이다.

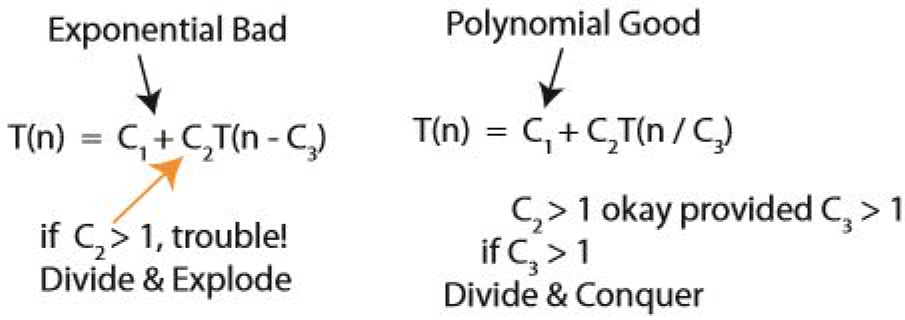

그림 4: 지수 시간 vs. 다항 시간.

증명:

$v \in V$를 그래프 내 임의의 정점이라고 둔다. 정점 $v_0 = s$에서 $v_k = v$ 까지의 경로 $p = < v_0, v_1, ..., v_k >$ 를 최소 개수의 간선을 가진 최단 경로라고 둔다.음의 순환이 없으면 경로 p는 단순 경로이다. p가 단순 경로이면 $k \leq |V| - 1$ 이다.

그림 6를 참고하세요. 알고리즘의 시작에서 $d[v_0] = 0 = \delta(s, v_0)$ 이고 음의 순환이 없으므로 이 값은 변하지 않습니다.
모든 간선 E에 대해 첫 번째 완화 과정을 거치면, d[v1]의 값은 다음과 같이 갱신됩니다. $d[v_1] = \delta(s, v_1)$. 첫 번째 계산을 통해 간선 (v_0, v_1)이 완화되고 이 최단 경로보다 더 짧은 경로를 찾을 수 없기 때문입니다. (강의 16에서 배운 최적 부분 구조에 대한 보조 정리를 이용하고 있습니다.)

간선 E에 대해 두 번째 완화 과정을 거치면, $d[v_2] = \delta(s, v_2)$입니다. 두 번째 완화 과정에서 간선 (v_1, v_2)가 완화되기 때문입니다..

모든 간선 E에 대해 i번 완화 가정을 가지면, $d[v_i] = \delta(s, v_i)$로 값이 갱신됩니다..

$k \leq |V| - 1$ 번째 완화 과정을 E의 각 간선에 대해 실행하면, $d[v_k] = d[v] = \delta(s,v)$의 결과를 얻을 수 있습니다.

따름 정리

$|V| - 1$ 의 완화 과정 이후에도 d[v]의 값이 수렴하지 않으면 s로 부터 도달할 수 있는 음의 순환이 존재한다.

증명:

$|V| - 1$번 완화 과정을 거친 후에도 완화될 수 있는 간선을 찾을 수 있다면 현 최단 경로가 단순 경로가 아니고 같은 정점을 중복 방문한다는 것을 의미한다. 순환을 포함한 이 경로가 단순 경로보다 가중치가 작으므로 이 순환은 음의 가중치를 가진다.

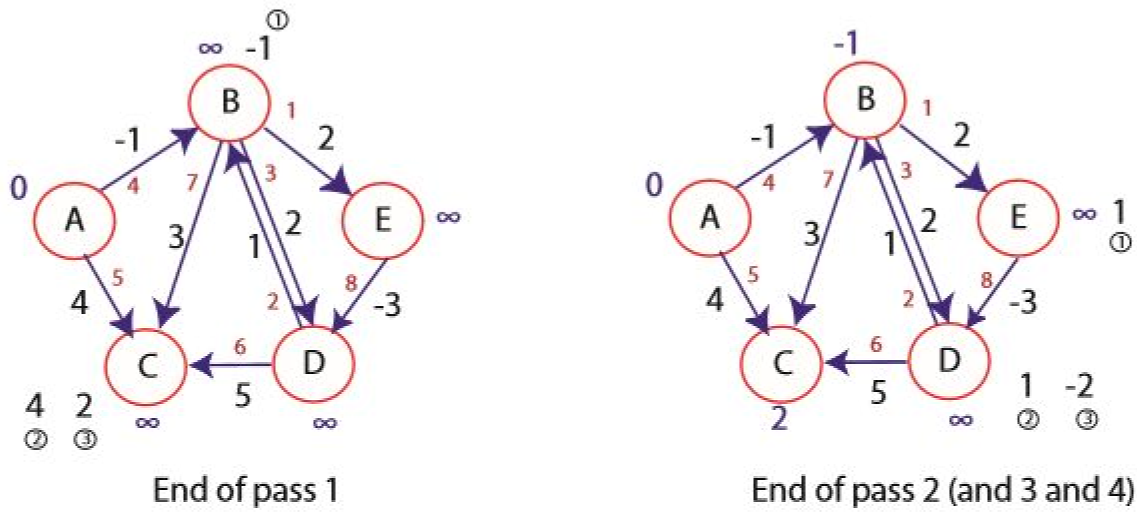

그림 5: 원 안의 숫자는 δ 값이 계산되는 순서를 의미한다.

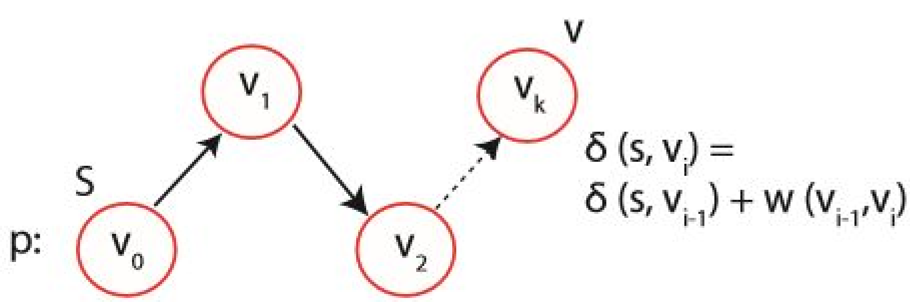

그림 6: 증명을 위한 참고 도표

최장 단순 경로와 최단 단순 경로

양의 가중치를 가지는 그래프에서 최장 단순 경로를 찾는 문제는 NP-hard 문제이다. 즉, 알려진 다항시간 알고리즘이 존재하지 않는다. 각 간선의 가중치를 음수화하고 벨만-포드 알고리즘을 이용해 최단 경로를 계산한다고 생각해보자. 벨만 포드 알고리즘은 음의 순환이 시작점에서 도달 가능하면 바로 종료해버리기 때문에 실질적으로 기존 그래프의 최장 경로를 계산하지 못한다.

유사하게 음의 순환을 가지고 있는 그래프가 있고, 정점 s에서 v까지의 최장 단순 경로를 계산하고 싶다면 벨만-포드 알고리즘을 사용할 수 없다. 최단 단순 경로를 구하는 문제 역시 NP-hard 이다.