CHƯƠNG IV. LÝ THUYẾT TRƯỜNG

Trong vật lý, đặc biệt trong kỹ thuật thường gặp khái niệm trường: Trường nhiệt độ, từ trường, điện trường,.... Khái niệm trường trong toán học là tổng quát hoá các trường hợp cụ thể đó. Miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ xác định một trường vô hướng *u(x,y,z)* nếu tại mọi điểm $M(x,y,z) \in \Omega$ đều xác định đại lượng vô hướng *u(M)*. Chẳng hạn trường nhiệt độ là một trường vô hướng. Vậy đặc trưng của trường vô hướng là một hàm vô hướng. Miền $\Omega \in \mathbb{R}^3$ xác định một trường véctơ $\vec{F}(x,y,z)$ nếu tại mọi điểm $M(x,y,z) \in \Omega$ đều xác định đại lượng véctơ:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z).\vec{i} + Q(x,y,z).\vec{j} + R(x,y,z).\vec{k} = (P,Q,R)$$

Chẳng hạn từ trường là một trường véc tơ. Vậy đặc trưng của trường véctơ là một hàm véctơ. Một trường véctơ xác định khi biết ba thành phần của véctơ đặc trưng cho trường đó: $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, tức là biết ba trường vô hướng. Từ nay về sau ta dùng các ký hiệu: $\vec{r} = (x,y,z)$ thay cho véc tơ $\overrightarrow{OM}$, trong đó *M* có toạ độ *(x,y,z),* $d\vec{r} = (dx,dy,dz)$ $d\vec{S} = (dydz, dzdx, dxdy)$.

4.1. CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

4.1.1. Mặt mức

Cho trường vô hướng u(x,y,z), $(x,y,z) \in \Omega$. Tập các điểm $(x,y,z) \in \Omega$ thoả mãn phương trình: $u(x,y,z) = C$, C là hằng số (4.1)

được gọi là mặt mức của trường vô hướng ứng với giá trị *C*. Rõ ràng các mặt mức khác nhau (các giá trị *C* khác nhau) không giao nhau và miền Ω bị phủ kín các mặt mức. Nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ thì ta có khái niệm đường mức (đường đẳng trị) cho bởi phương trình:

$$u(x,y) = C$$

Chẳng hạn, một điện tích *q* đặt ở gốc toạ độ O gây nên một trường điện thế $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Khi đó mặt mức có phương trình: $\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C$

hay biến đổi trong dạng: $x^2+y^2+z^2 = \frac{q^2}{C^2} = R^2$. Đó là các mặt cầu đồng tâm O.

4.1.2. Gradiên (Gradient)

Cho trường vô hướng $u = u(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \Omega$ và $u(x,y,z)$ khả vi trên Ω. Khi đó Gradient của trường là

$$\text{grad}u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right),\ (x,y,z) \in \Omega \qquad (4.2)$$

(Xem mục 1.2.8, Chương I), Người ta nói rằng một trường vô hướng $u(x,y,z)$ đã sinh ra một trường véctơ, đó là trường $\text{grad}u(x,y,z)$.

Cho các trường vô hướng $u(x,y,z),\ v(x,y,z)$, từ tính chất của phép tính đạo hàm, ta có các tính chất sau đây của Građiên

$\text{grad}(\lambda u) = \lambda \text{grad}u$, λ là hằng số.

$$\begin{aligned} &\text{grad}(u+v) = \text{grad}u + \text{grad}v \\ &\text{grad}(u.v) = v\text{grad}u + u\text{grad}v \end{aligned} \qquad (4.3)$$

$$\text{grad}\frac{u}{v} = \frac{v\text{grad}u - u\text{grad}v}{v^2}, \qquad \text{nếu } v \neq 0$$

$$\text{grad}f(u) = f'(u)\text{grad}u$$

4.2. CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA TRƯỜNG VÉC TƠ

4.2.1. Đường dòng

Cho trường véctơ $\vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z).\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},\ (x,y,z) \in \Omega$. Đường cong $C \subset \Omega$ được gọi là đường dòng của trường véctơ $\vec{F}(M)$ nếu tại mỗi điểm *M* trên đường cong *C*, tiếp tuyến của *C* tại đó có cùng phương với véctơ $\vec{F}(M)$. Chẳng hạn các đường sức trong từ trường hoặc điện trường là các đường dòng.

Nếu đường dòng có phương trình trong dạng tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

thì véc tơ tiếp tuyến của đường dòng tại điểm (x,y,z) là $\vec{r}\,' = (x', y', z')$ $[2]$

Giả sử P, Q, R là các thành phần của trường véc tơ $\vec{F}$ thì hệ thức:

$$\frac{x'(t)}{P(x,y,z)} = \frac{y'(t)}{Q(x,y,z)} = \frac{z'(t)}{R(x,y,z)} \qquad (4.4)$$

mô tả hệ phương trình vi phân của họ đường dòng của trường véctơ $\vec{F}(x,y,z)$.

Chẳng hạn một điện tích *q* đặt tại gốc toạ độ O tạo ra một điện trường $\vec{E}$, theo định luật Culông thì điện trường $\vec{E}$ phụ thuộc vào q và véc tơ bán kính $\vec{r}$, cho bởi công thức:

$$\vec{E} = \frac{q.\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \left(\frac{qx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{qy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{qz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Khi đó hệ phương trình vi phân của họ đường dòng là :

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \text{ hay } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Trong chương V, ta sẽ chỉ ra cách tìm nghiệm của hệ phương trình trên. Kết quả là họ đường sức cho bởi phương trình tham số:

$x = k_1 s,\ y = k_2 s,\ z = k_3 s$, $k_1,\ k_2,\ k_3$ là các hằng số tuỳ ý.

hoặc trong dạng tổng quát $\begin{cases} x = C_1 y \\ y = C_2 z \end{cases}$, $C_1,\ C_2$ là các hằng số tùy ý.

Đó là họ đường thẳng đi qua gốc toạ độ O, trừ ra điểm O

4.2.2. Thông lượng của trường véctơ

Trong mục 3.6.2 ta đã đưa ra định nghĩa thông lượng của trường véctơ $\vec{F}(x,y,z)$ qua mặt cong định hướng *S* xác định theo công thức (3.39) :

$$\Phi = \iint_S \vec{F}.\vec{n}.dS = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S \vec{F}.d\vec{S} \tag{4.5}$$

trong đó $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véctơ đơn vị của véctơ pháp tuyến của mặt *S* được định hướng, *P, Q, R* là các thành phần của $\vec{F}$

4.2.3. Đive (Divergence, độ phân kỳ)

Ta gọi độ phân kỳ hay gọi tắt là dive của trường véctơ $\vec{F}(x,y,z)$ tại điểm *M(x,y,z)* là đại lượng vô hướng, ký hiệu $\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)$, được xác định theo công thức :

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{4.6}$$

Vậy một trường véctơ $\vec{F}$ đã sinh ra một trường vô hướng $\mathrm{div}\vec{F}$.

Nếu miền $V \subset \Omega$ có biên là *S* thì công thức Gauss –Ostrogradski (3.47) trở thành :

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}.dS = \iiint_V div\vec{F}(x,y,z)dxdydz \tag{4.7}$$

Từ công thức (4.7) ta thấy thông lượng của trường véctơ $\vec{F}$ qua phía ngoài mặt *S* bao miền *V* bằng tổng độ phân kỳ tại tất cả các điểm trong miền *V* của trường véctơ. Theo ý nghĩa cơ học của tích phân bội ba, suy ra $\operatorname{div}\overrightarrow{F}(x,y,z)$ chính là mật độ thông lượng tại điểm *M(x,y,z)* của trường. Từ ý nghĩa vật lý của trường vận tốc ta thấy thông lượng của trường vận tốc qua mặt kín *S* ra phía ngoài là hiệu của lượng vật chất từ trong chảy ra và từ ngoài vào qua *S* (chẳng hạn lượng nước). Nếu thông lượng $\Phi > 0$, từ ý nghĩa vật lý, cũng như từ tính chất của tích phân ta thấy trong miền *V* bao bởi *S* phải có điểm nguồn. Chính vì thế ta gọi *M* là điểm nguồn của trường nếu $\operatorname{div}\overrightarrow{F}(M) > 0$, ngược lại nếu $\operatorname{div}\overrightarrow{F}(M) < 0$ thì *M* là điểm hút.

4.2.4. Hoàn lưu

Cho trường véctơ $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$ và một đường cong L trong trường véctơ. Ta gọi :

$$C = \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} \tag{4.8}$$

là hoàn lưu của trường $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ theo đường cong *L*. Theo ý nghĩa cơ học của tích phân đường loại hai ta thấy : nếu $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ là trường lực thì hoàn lưu của nó theo *L* là công do lực $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ sinh ra khi vật di chuyển dọc theo *L*.

4.2.5. Rôta (Rotation, Véc tơ xoáy)

Cho trường véctơ $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$, véctơ xoáy của trường, ký hiệu là $\operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}}$, được xác định theo công thức :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Vậy một trường véctơ $\overrightarrow{F}$ đã sinh ra một trường véctơ $\operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)$.

Giả sử có mặt cong *S* trong trường được định hướng và biên của nó là đường *L* trơn từng khúc. Khi đó công thức Stokes (3.44) trở thành :

$$\oint_L \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}}.\vec{n}.dS = \iint_S \operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}}.d\vec{S} \tag{4.10}$$

Nghĩa là hoàn lưu của trường véctơ $\overrightarrow{F}$ dọc theo chu tuyến *L* của mặt cong *S* chính bằng thông lượng của véctơ xoáy qua mặt cong *S* của trường.

Từ ý nghĩa cơ học, ta thấy $\int_L \vec{F}.d\vec{r}$ là công của trường lực $\vec{F}(x,y,z)$ khi di chuyển dọc theo *L*. Nếu *L* là đường cong kín thì công sinh ra thường bằng không vì công sản ra trên phần ”thuận chiều ” của đường cong kín *L* cân bằng với công sản ra trên phần ”ngược chiều”, nếu không có ”xoáy” ($\mathrm{rot}\vec{\mathrm{F}} = 0$). Do đó, từ công thức Stokes ta thấy hoàn lưu theo chu tuyến kín *L* đặc trưng cho tính xoáy của trường trên mặt *S* có chu tuyến *L*, nói cách khác là tính chất ”xoáy” của trường theo chu tuyến đó. Do đó, nếu $\mathrm{rot}\vec{\mathrm{F}}(M) \neq 0$ ta nói rằng M là điểm xoáy của trường và $\mathrm{rot}\vec{\mathrm{F}}(M) = 0$ ta nói rằng M là điểm không xoáy.

4.3. MỘT SỐ TRƯỜNG ĐẶC BIỆT

4.3.1. Trường thế

A. Định nghĩa : Trường véctơ $\vec{F}(M)$ được gọi là trường thế nếu tồn tại một trường vô hướng $u(M)$ sao cho :

$$\vec{F}(M) = \mathrm{grad}u(M), \forall M \in V \tag{4.11}$$

Khi đó hàm $u(M)$ được gọi là hàm thế hay hàm thế vị của trường $\vec{F}(M)$, còn $V(M) = -u(M)$ được gọi là thế năng của trường.

Giả sử $\vec{F}(M) = (P,Q,R)$ là trường thế với hàm thế là $u(M)$.

Ta có $P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}$, hay là : $du = Pdx + Qdy + Rdz$

Điều đó chứng tỏ $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của hàm $u(M)$ nào đó.

Để thấy rõ ý nghĩa vật lí của trường thế, ta xét bài toán sau :

Cho chất điểm M có khối lượng m chuyển động theo quĩ đạo L từ A đến B dưới tác dụng của lực $\vec{F}(M)$. Giả sử trường lực $\vec{F}$ là trường thế. Hãy so sánh tổng động năng và thế năng của chất điểm tại A và B.

Trước tiên ta biểu diễn công của lực $\vec{F}$ sinh ra khi chất điểm đi từ A đến B

Giả sử phương trình chuyển động của chất điểm là

$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ t = a,\ t = b$ ứng với A và B.

Theo định luật Newton thứ hai, ta có

$$m\vec{r}\,''(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Vậy công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ khi chất điểm đi từ A đến B là

$$\mathrm{W}=\int_{AB}\vec{F}.d\vec{r}=\int_a^b\vec{F}(\vec{r}(t))\vec{r}\,'(t)dt=m\int_a^b\vec{r}\,''(t)\vec{r}\,'(t)dt=\frac{m}{2}\int_a^b\frac{d}{dt}\left|\vec{r}\,'(t)\right|^2dt$$
$$=\frac{m}{2}\left(\left|\vec{r}\,'(b)\right|^2-\left|\vec{r}\,'(a)\right|^2\right)=\frac{1}{2}m\left|\vec{v}(b)\right|^2-\frac{1}{2}m\left|\vec{v}(a)\right|^2$$

Đại lượng $K(M)=\frac{1}{2}m\left|\vec{v}(t)\right|^2$ được gọi là động năng của chất điểm tại M ứng với thời điểm t. Vậy $\mathrm{W}=K(B)-K(A)$

Vì $\vec{F}$ là trường thế , nên có thế năng $V(M)$ và theo công thức (4.11) thì

$$\vec{F}(M)=-\mathrm{grad}V(M)$$

Do đó ta có

$$\mathrm{W}=\int_{AB}\vec{F}.d\vec{r}=-\int_{AB}\mathrm{grad}V.d\vec{r}=-\int_a^b\left[\frac{\partial V}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial V}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial V}{\partial z}z'(t)\right]dt$$
$$=-\int_a^b\frac{d}{dt}V(x(t),y(t),z(t))dt=-V(\vec{r}(b))+V(\vec{r}(a))=V(A)-V(B)$$

So sánh hai kết quả trên, ta suy ra $K(A)+V(A)=K(B)+V(B),$ nghĩa là tổng của động năng và thế năng của chất điểm được bảo toàn khi chuyển động.

Vì lẽ đó trường thế còn được gọi là trường bảo toàn.

B. Tính chất : Xuất phát từ định lý bốn mệnh đề tương đương (Mục 3.7, Chương III.), suy ra :

1. Để trường $\vec{F}(M)$ là trường thế, điều kiện cần và đủ là trường $\vec{F}(M)$ không xoáy $(\mathrm{rot}\vec{\mathrm{F}}(M)=0,\ \forall M\in V)$.

2. Hoàn lưu của trường $\vec{F}(M)$ theo mọi chu tuyến kín, trơn từng khúc trong V đều bằng 0 $\left(\oint_L\vec{F}.d\vec{r}=0\right)$.

Ví dụ 4.1 : Chứng minh trường véc tơ $\vec{F}=(y^2,2xy+e^{3z},3ye^{3z})$ là một trường thế và hãy tìm thế năng của trường.

Giải : Ta có

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & 2xy+e^{3z} & 3ye^{3z}\end{vmatrix}=\left(3e^{3z}-3e^{3z}\right)\vec{i}+0\vec{j}+\left(2y-2y\right)\vec{k}=0$$

Áp dụng công thức (3.45) với $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, ta nhận được thế năng của trường

$$V = -\int_0^x y^2 dx - \int_0^y e^{3z} dy - \int_0^z 0dz + C = -xy^2 - ye^{3z} + C, \quad C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

Ví dụ 4.2 : Chứng tỏ rằng trường lực hấp dẫn tạo bởi trái đất tác động lên vệ tinh là trường thế và tìm hàm thế của nó.

Giải : Theo định luật Newton, trường lực hấp dẫn được tính theo công thức :

$$\vec{F}(x,y,z) = -\gamma \frac{M.m}{r^3}\vec{r} = -\gamma \frac{M.m}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

trong đó M là khối lượng trái đất, m là khối lượng vệ tinh, γ là hệ số hấp dẫn, (x,y,z) là vị trí của vệ tinh, còn gốc toạ độ coi là vị trí trái đất. Bây giờ ta tính

$$\text{rot}\vec{F} = -\gamma Mm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x}{r^3} & \dfrac{y}{r^3} & \dfrac{z}{r^3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right) = -\frac{3zy}{r^5} - \frac{3yz}{r^5} = 0,\ \forall M \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0,0,0\}$$

Tương tự, ta có $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{x}{r^3}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{z}{r^3}\right) = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{r^3}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{r^3}\right) = 0,\ \forall M \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0,0,0\}$

Vậy $\quad \text{rot}\vec{F} = 0,\ \forall M \neq O(0,0,0)$

Vậy trường lực hấp dẫn là trường thế trừ gốc tọa độ. Hàm thế được tính theo công thức (3.45) :

$$u(M) = \int_{M_0M} \vec{F}\, d\vec{r} + u(M_0) = -\gamma Mm \int_{M_0M} \frac{xdy + ydy + zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \gamma Mm \int_{M_0M} d\left(\frac{1}{r}\right) + u(M_0) = \frac{\gamma Mm}{r} + u(M_0)$$

trong đó các điểm $M_0,\ M$ không trùng gốc toạ độ.

4.3.2. Trường ống

A. Định nghĩa : Trường véctơ $\vec{F}(M)$ được gọi là trường ống nếu $div\vec{F}(M) = 0,\ \forall M \in V$

hay : $$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0 \qquad (4.12)$$

Ta gọi ống dòng của trường véctơ là phần không gian trong V tạo bởi các đường dòng tựa trên biên của một mặt cong S nào đó trong trường. Bản thân mặt S cũng như các thiết diện ngang của ống gọi là thiết diện của ống dòng.

B. Tính chất : Từ công thức Gauss – Ostrogradski ta suy ra các tính chất sau đây của một trường ống :

1 Thông lượng của trường ống qua mặt cong kín S bất kỳ trong trường đều bằng không. Thật vậy, $\Phi=\iint_S \vec{F}.d\vec{S}=\iiint_\Omega div\vec{F}dxdydz=0$.

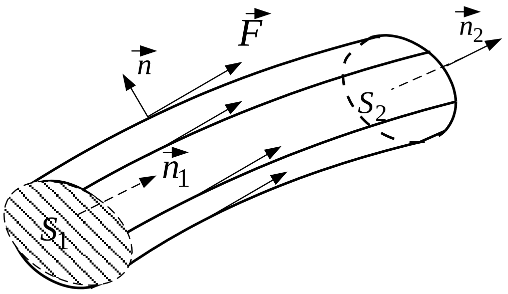
2. Nếu V là đơn liên thì thông lượng của trường ống qua mặt S có biên L trong trường chỉ phụ thuộc vào biên L mà không phụ thuộc vào mặt S. Thật vậy, giả sử S_1 và S_2 là hai mặt cùng căng bởi biên L. Gọi Ω là miền giới hạn bởi hai mặt này thì :

$$0=\iiint_\Omega div\vec{F}dxdydz=\iint_{S_1}\vec{F}.d\vec{S}-\iint_{S_2}\vec{F}.d\vec{S}$$

Suy ra $\iint_{S_1}\vec{F}d\vec{S}=\iint_{S_2}\vec{F}d\vec{S}$

3. Thông lượng qua mọi thiết diện của một ống dòng trong trường ống đều bằng nhau.

Thật vậy, giả sử S_1 và S_2 là hai thiết diện của ống dòng (H.4.1). Gọi S_{xq} là mặt xung quanh của ống dòng giữa S_1 và S_2 và Ω là vật thể giới hạn bởi S_{xq},S_1,S_2.



H.4.1

Theo 1. ta có : $0=\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}.dS+\iint_{S_2}\vec{F}.\vec{n}.dS+\iint_{S_{xq}}\vec{F}.\vec{n}.dS$

ở đây $\vec{n}$ được định hướng ra phía ngoài của Ω.

Theo định nghĩa của đường dòng, trên biên S_{xq} thì $\vec{F}.\vec{n}=0$. Mặt khác, trên biên S_1 thì $\overrightarrow{n_1}$ ngược hướng với $\vec{n}$, tức là $\vec{F}.\vec{n}=-\vec{F}.\overrightarrow{n_1}$.

Còn trên biên S_2 thì $\overrightarrow{n_2}$ cùng hướng với $\vec{n}$.

Từ đó ta suy ra : $0=-\iint_{S_1}\vec{F}.\overrightarrow{n_1}dS+\iint_{S_2}\vec{F}.\overrightarrow{n_2}dS$ hay là $\iint_{S_1}\vec{F}d\vec{S}=\iint_{S_2}\vec{F}d\vec{S}$

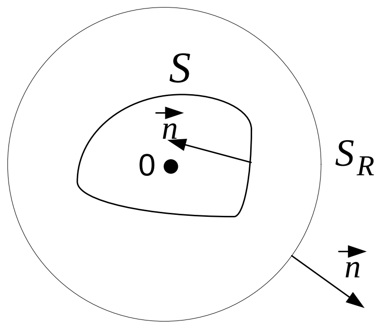
Dễ dàng kiểm tra thấy được trường hấp dẫn (ví dụ 4.2) hay điện trường (ví dụ 3.16. Chương III) đều là các trường ống và trường thế trừ gốc toạ độ. Do đó thông lượng qua mọi mặt cong kín không bao gốc toạ độ đều bằng 0.

Ví dụ 4.3 : Tìm thông lượng của điện trường sinh ra bởi điện tích *q* đặt ở gốc toạ độ qua phía ngoài mặt cong kín *S* bất kỳ bao gốc toạ độ.

Giải : Từ ví dụ 3.16, Chương III ta có điện trường được tính theo công thức. (Xem H.4.2)

$$\vec{E} = q.\frac{\vec{r}}{r^3}$$

và thông lượng qua mặt cầu bán kính *R* là $4.\pi.q$ nghĩa là không phụ thuộc bán kính *R*.



H.4.2

Giả sử *S* là mặt cong kín nào đó bao gốc toạ độ. Ta gọi S_R là mặt cầu tâm ở gốc toạ độ và bán kính *R* đủ lớn sao cho S_R bao cả *S* (H.4.2) đồng thời gọi Ω miền giới hạn bởi *S* và S_R. Khi đó :

$$\iiint_{S\cup S_R} \vec{E}.\vec{n}.dS = \iiint_{\Omega} div\vec{E}dxdydz = 0$$

Suy ra $\iint_{S_R} \vec{E}.\vec{n}.dS = -\iint_{S} \vec{E}.\vec{n}.dS$, trong đó véctơ $\vec{n}$ của *S* hướng vào gốc toạ độ. Vậy thông lượng qua phía ngoài mặt cong *S* chính bằng thông lượng qua phía ngoài mặt cầu S_R và bằng $4.\pi.q$

4.3.3. Trường điều hoà

A. Định nghĩa : Trường véctơ $\vec{F}(M)$ được gọi là trường điều hoà nếu nó vừa là trường ống vừa là trường thế, tức là :

$$\begin{cases} rot\vec{\mathrm{F}} = 0 \\ div\vec{F} = 0 \end{cases} \qquad (4.13)$$

B. Tính chất : Hàm thế $u(M)$ của trường điều hoà $\vec{F}(M)$ là hàm điều hoà, nói cách khác hàm thế $u(M)$ thoả mãn phương trình :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.14)$$

Phương trình (4.14) được gọi là phương trình Laplace

Người ta thường dùng kí hiệu Δ, được gọi là toán tử Laplace. Kí hiệu Δu, được hiểu là toán tử Laplace tác dụng vào hàm u và được xác định như sau :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Thật vậy, $\vec{F}(M)$ là trường thế nên hàm thế u thoả mãn $\frac{\partial u}{\partial x} = P,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial u}{\partial z} = R$.

Mặt khác $\vec{F}(M)$ là trường ống nên $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

Do đó $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Theo định nghĩa thì trường hấp dẫn và điện trường là các trường điều hoà trong miền V không chứa gốc toạ độ. Hàm thế của trường đó có dạng $\frac{C_1}{r} + C_2$. Trong đó C_1, C_2 là các hằng số. Các ví dụ sau sẽ chỉ ra các hàm điều hòa tổng quát hơn.

Ví dụ 4.4 : Chứng minh hàm số

$$u(M) = \frac{C_1}{r} + C_2, r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},\ C_1,\ C_2 \text{ là các hằng số tuỳ ý}$$

là hàm điều hoà trong mọi miền V không chứa điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Giải : Ta chứng minh hàm $u(M)$ thoả mãn phương trình Laplace (4.14).

Thật vậy $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{C_1 r'_x}{r^2} = -C_1 \frac{x-x_0}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -C_1 \frac{r^2 - 3(x-x_0)^2}{r^5}$$

Tương tự :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -C_1 \frac{r^2 - 3(y-y_0)^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -C_1 \frac{r^2 - 3(z-z_0)^2}{r^5}$$

Do đó : $$\Delta u = -C_1 \frac{3r^2 - 3\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]}{r^5} = 0$$

Tương tự kiểm tra thấy rằng hàm $u(x,y)=\ln\frac{1}{r}, r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ là hàm điều hoà trong mọi miền phẳng D không chứa điểm $M_0(x_0,y_0)$, tức là hàm u đã cho thoả mãn phương trình Laplace trong mặt phẳng :

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

4.3.4, Toán tử Hamilton

Dưới đây ta giới thiệu một toán tử, dùng nó có thể mô tả thuận tiện các đặc trưng của trường vô hướng và trường véc tơ

A. Định nghĩa

Toán tử Hamilton (hay nabla), kí hiệu là $\vec{\nabla}$ được gọi là một véc tơ tượng trưng có các thành phần $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, tức là $\vec{\nabla}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (4.15)

B. Các công thức biểu diễn

Trong trường vô hướng $u(M)$**:** Ta thực hiện phép nhân $\vec{\nabla}$ với lượng vô hướng

$$\vec{\nabla}.u(x,y,z)=(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z})u=\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}=\text{grad}u \qquad (4.16)$$

Trong trường véc tơ $\vec{F}(M)=(P,Q,R)$**:** Ta thực hiện phép nhân vô hướng và có hướng

$$\vec{\nabla}.\vec{F}(x,y,z)=(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z})(\vec{i}P+\vec{j}Q+\vec{k}R)$$
$$=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\text{div}\vec{F}(M) \qquad (4.17)$$

$$\left[\vec{\nabla},\vec{F}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\text{rot}\vec{F}(M) \qquad (4.18)$$

$$\vec{\nabla}^2=\vec{\nabla}.\vec{\nabla}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta \qquad (4.19)$$

Từ các phép toán trên ta suy ra:

$\text{div}(\text{grad}u)=\vec{\nabla}.\vec{\nabla}.u=\vec{\nabla}^2u=\Delta u$

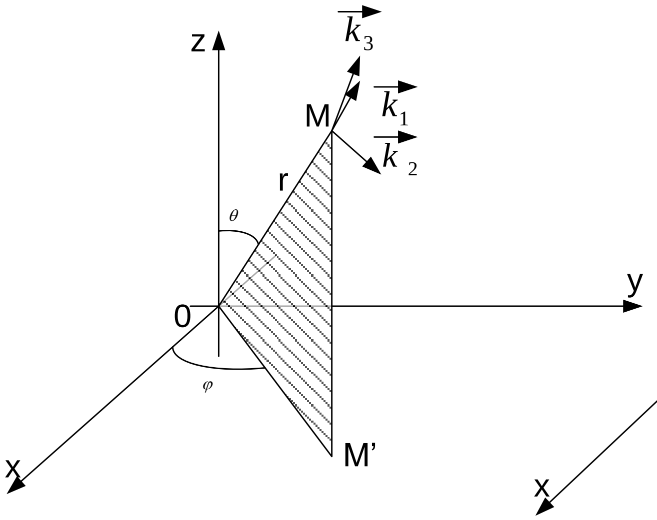
$\text{rot}(\text{grad}u)=\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}.u\right]=0$. Tích hữu hướng hai véc tơ đồng phương luôn luôn bằng không.

$\text{div}(\text{rot}\vec{F})=\vec{\nabla}.\left[\vec{\nabla},\vec{F}\right]=0$. Tích hỗn tạp trong đó có hai véc tơ đồng phương luôn luôn bằng không.

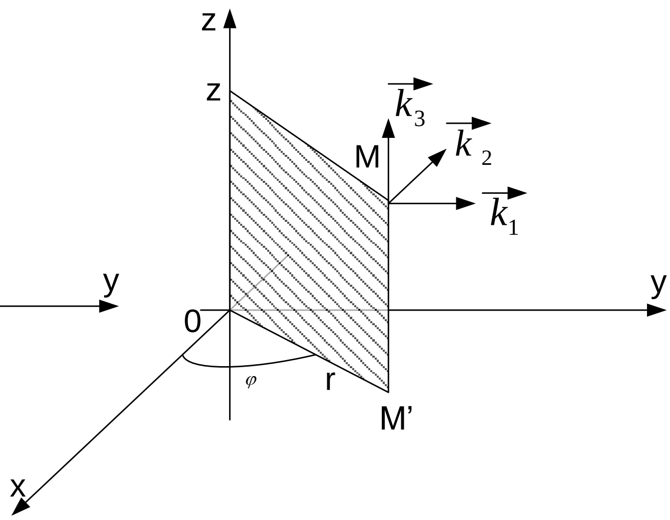
4.4. HỆ TỌA ĐỘ CONG TRỰC GIAO

4.4.1. Định nghĩa hệ tọa độ cong trực giao

Mỗi một điểm M trong không gian thực được xác định bởi một bộ 3 số sắp thứ tự (u_1,u_2,u_3) và ngược lại ,đồng thời kí hiệu M(u_1,u_2,u_3). Các số u_1, u_2, u_3 gọi chung là toạ độ cong của điểm M. Các mặt cong lần lượt có phương trình: $u_1 = u_{10}$, $u_2 = u_{20}$, $u_3 = u_{30}$, (u_{10}, u_{20}, u_{30} là các hằng số) gọi là các mặt toạ độ trong hệ toạ độ cong. Giao của các mặt toạ độ gọi là các đường toạ độ. Nếu các đường toạ độ trực giao từng đôi thì hệ toạ độ cong được gọi là hệ toạ độ cong trực giao.Như vậy hệ toạ độ đề các, hệ toạ độ trụ (xem mục 2.5.2.), hệ toạ độ cầu (xem mục 2.5.3.) là các hệ toạ độ trực giao (H.4.3, H 4.4).



H.4.3



H.4.4

4.4.2. Liên hệ giữa tọa độ đề các và tọa độ cong trực giao

Mối liên hệ giữa các tọa độ được cho bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x(u_1, u_2, u_3) \\ y = y(u_1, u_2, u_3) \\ z = z(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \tag{4.20}$$

Các đường tọa độ l_1, l_2, l_3 cho bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = u_{i0} \\ u_j(x, y, z) = u_{j0} \end{cases}, \ (i, j = 1,\ 2,\ 3) \text{ và } i \neq j \tag{4.21}$$

Các véctơ đơn vị của các đường tọa độ tại điểm M là $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}_3$ (H.4.3, H.4.4), chúng thoả mãn: $\vec{k}_i \vec{k}_j = 0$, khi $i \neq j$.

Đặt $h_i = \dfrac{1}{\sqrt{(\frac{\partial u_i}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u_i}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u_i}{\partial z})^2}}$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Người ta đã chứng minh được những công thức sau đây, nó cho mối liên hệ giữa toạ độ đề các và toạ độ cong.

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (dx, dy, dz) = (h_1 du_1, h_2 du_2, h_3 du_3) \\ d\vec{S} &= (dx, dy, dz) = (h_2 h_3 du_2 du_3, h_3 h_1 du_3 du_1, h_1 h_2 du_1 du_2) \\ dV &= dxdydz = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Trong toạ độ cầu (r, φ, θ) ta có: $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$.

Trong toạ độ trụ (r,φ,z) ta có: $h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=1$.

4.4.3.Các đặc trưng của trường trong hệ toạ độ cong trực giao

A. GradU$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$

Công thức tổng quát: $\operatorname{grad}U=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial U}{\partial u_1}\vec{k}_1+\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial U}{\partial u_2}\vec{k}_2+\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial U}{\partial u_3}\vec{k}_3$.

Trong toạ độ cầu:

Cho trường vô hướng $U(r,\varphi,\theta)$. Khi đó $\operatorname{grad}U=\dfrac{\partial U}{\partial r}\vec{k}_1+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\vec{k}_2+\dfrac{1}{r\sin\varphi}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{k}_3$. (4.23)

Trong toạ độ trụ:

Cho trường vô hướng $U(r,\varphi,z)$. Khi đó $\operatorname{grad}U=\dfrac{\partial U}{\partial r}\vec{k}_1+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{k}_2+\dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}_3$. (4.24)

B. Div$\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$

Công thức tổng quát: $\operatorname{div}\vec{F}=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3)+\dfrac{\partial}{\partial u_2}(F_2h_3h_1)+\dfrac{\partial}{\partial u_3}(F_3h_1h_2)\right]$

Trong toạ độ cầu (r,φ,θ): Cho trường véc tơ $\vec{F}=(F_r,F_\theta,F_\varphi)$. Ta sẽ có:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_rr^2\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta r\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi r)\right]\qquad(4.25)$$

Trong toạ độ trụ (r,φ,z): Cho trường véc tơ $\vec{F}=(F_r,F_\varphi,F_z)$. Ta sẽ có:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_rr)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(F_zr)\right]\qquad(4.26)$$

C. Rot$\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$

Công thức tổng quát:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vec{k}_1}{h_2h_3} & \dfrac{\vec{k}_2}{h_3h_1} & \dfrac{\vec{k}_3}{h_1h_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix}\qquad(4.27)$$

Trong toạ độ cầu (r,φ,θ): Cho trường véc tơ $\vec{F}=(F_r,F_\theta,F_\varphi)$. Khi đó ta sẽ có:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\frac{\vec{k}_1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi r\ \sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\theta r)\right]+\frac{\vec{k}_2}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_r)-\frac{\partial}{\partial r}(F_\varphi r\sin\theta)\right]+$$
$$+\frac{\vec{k}_3}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_\theta r)-\frac{\partial}{\partial\theta}(F_r)\right]\qquad(4.28)$$

Trong toạ độ trụ (r,φ,z): Cho trường véc tơ $\vec{F}=(F_r,F_\varphi,F_z)$. Khi đó ta sẽ có:

$$\text{rot}\,\vec{F}=\frac{\vec{k}_1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_z)-\frac{\partial}{\partial z}(F_\varphi r)\right]+\vec{k}_2\left[\frac{\partial}{\partial z}(F_r)-\frac{\partial}{\partial r}(F_z)\right]+\frac{\vec{k}_3}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_\varphi r)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_r)\right] \quad (4.29)$$

D. Biểu diễn ΔU

Công thức tổng quát: $\Delta U=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u_1})+\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial u_2})+\frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial u_3})\right]$

Trong toạ độ cầu: Nếu $U(r,\varphi,\theta)$ là trường vô hướng thì

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2} \quad (4.30)$$

Trong toạ độ trụ: Nếu $U(r,\varphi,z)$ là trường vô hướng thì

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}. \quad (4.31)$$

Ví dụ 4.5: Cho hàm số $U=r(\cos\theta+\sin\theta)$, trong đó r là khoảng cách từ gốc toạ độ O đến điểm M, còn θ là góc giữa $\overrightarrow{OM}$ và trục Oz.

a. Tính gradU

b. Xác định véctơ đơn vị $\overrightarrow{n_0}$ của mặt phẳng $U=Const$ tại điểm có $\theta=\frac{\pi}{3}$

Giải: Theo giả thiết, hàm số U có các đối số là các toạ độ cầu.

a. Thay U vào công thức (4.21), ta nhận được

$$\text{grad}U=(\cos\theta+\sin\theta)\vec{k}_1+(\cos\theta-\sin\theta)\vec{k}_2$$

b. Ta có $\vec{n}_0$// gradU. Từ biểu thức của grad$U$ ta suy ra $|\text{grad}U|=\sqrt{2}$

. Thay $\theta=\frac{\pi}{3}$ vào biểu thức của grad$U$ ta có:

$$\vec{n}_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left|(1+\sqrt{3})\vec{k}_1+(1-\sqrt{3})\vec{k}_2\right|$$

Ví dụ 4.6: Tìm hằng số k để trường véctơ cho trong hệ toạ độ cầu $\vec{F}=r^k\,\vec{r}$ có thông lượng bảo toàn (trường ống).

Giải: Ta biểu diễn $\vec{F}=r^k\,\vec{r}=(r^{k+1},0,0)$, theo công thức (4.23) sẽ nhận được:

$$\text{div}\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^{k+3}\sin\theta)\right]=(k+3)r^k=0,\ \text{suy ra}\ \ k=-3$$

Ví dụ 4.7: Chứng minh trường véctơ cho trong hệ toạ độ cầu $\vec{F}=r^k\,\vec{r}$ là trường thế với mọi k.

Giải: Ta biểu diễn: $\vec{F}=r^k\,\vec{r}=(r^{k+1},0,0)$. Theo công thức (4.26) ta sẽ tính được

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\vec{k}_2}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^{k+1})\right] - \frac{\vec{k}_3}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r^{k+1})\right] = 0 \text{ với mọi k.}$$

Vậy trường véctơ đã cho là trường thế.

Ví dụ 4.8: Biết $\Delta u = 0$ và $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})$. Tìm dạng tổng quát của hàm u

Giải : Rõ ràng hàm u được cho trong toạ độ trụ. Theo công thức (4.29), ta có

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0$$

Ta suy ra $r\dfrac{du}{dr} = C_1 \Rightarrow du = C_1\dfrac{dr}{r} \Rightarrow u = C_1 \ln r + C_2.$

(C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý)

Ví dụ 4.9: Biết $\Delta u = 0$ và $u = u(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Tìm dạng tổng quát của hàm u

Giải**:** Rõ ràng hàm u được cho trong toạ độ cầu. Theo công thức (4.31), ta có

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0$$

Vậy $r^2\dfrac{du}{dr} = C_1 \Rightarrow du = C_1\dfrac{dr}{r^2} \Rightarrow u = -C_1\dfrac{1}{r} + C_2.$

(C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý)

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG IV

- Phương trình mặt đẳng trị : $u(x, y, z) = C$, C là hằng số

- Građiên tại điểm (x,y,z) : $\operatorname{grad}u(x, y, z) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$, $(x, y, z) \in \Omega$

- Phương trình đường dòng :

$$\frac{x'(t)}{P(x, y, z)} = \frac{y'(t)}{Q(x, y, z)} = \frac{z'(t)}{R(x, y, z)}$$

- Thông lượng của trường véc tơ $\vec{F}(P, Q, R)$ qua mặt cong S

$$\Phi = \iint_S \vec{F}.\vec{n}.dS = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S \vec{F}.d\vec{S}$$

- Độ phân kỳ của trường véc tơ $\vec{F}(P, Q, R)$ tại điểm (x,y,z)

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

- Hoàn lưu của trường véc tơ $\vec{F}(P,Q,R)$ dọc theo đường cong L

$$C=\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_L \vec{F}.d\vec{r}$$

- Rôta của trường véc tơ $\vec{F}(P,Q,R)$ tại điểm (x,y,z) xác định như sau

$$\operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

- Trường thế : $\vec{F}(M)$ được gọi là trường thế nếu :

$$\exists u(M):\ \vec{F}(M)=\operatorname{grad}u(M),\ \forall M\in V \text{ hay } \operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}}(M)=0,\ \forall M\in V.$$

- Trường ống : $\vec{F}(M)$ được gọi là trường ống nếu

$$\operatorname{div}\vec{F}(M)=0,\ \forall M\in V$$

Nghĩa là $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0,\ \forall(x,y,z)\in V$

- Trường điều hoà : $\vec{F}(M)$ được gọi là trường điều hoà nếu $\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}}=0\\ \operatorname{div}\vec{F}=0\end{cases}$

- Phương trình Laplace : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

Nghiệm của phương trình Laplace được gọi là hàm điều hoà.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.1. Chứng minh các công thức

a. $\operatorname{div}(u\vec{F}) = \operatorname{grad}u.\vec{F} + u\operatorname{div}\vec{F}$ **,**

b. $\operatorname{div}\left[\vec{G},\vec{F}\right] = \vec{F}\operatorname{rot}\vec{G} - \vec{G}\operatorname{rot}\vec{F}$ **,**

c. $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = \left[\operatorname{grad}u, \vec{F}\right] + u\operatorname{rot}\vec{F}$ **.**

4.2. Cho $u = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$. Tính góc giữa các gradu tại điểm (1,1) và (3,4).

4.3. Cho $u = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$. Xác định điểm tại đó $\operatorname{grad}u = \left(1, -\dfrac{16}{9}\right)$.

4.4. Tìm thông lượng của các trường véc tơ sau:

a. $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ qua phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ hướng ra ngoài.

b. $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ qua mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x$ hướng ra ngoài.

c. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua mặt $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z \ge 0$ hướng lên trên.

d. $\vec{F} = \dfrac{1}{x}\vec{i} + \dfrac{1}{y}\vec{j} + \dfrac{1}{z}\vec{k}$ qua mặt cầu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ hướng ra ngoài.

e. $\vec{F} = xy\vec{i} + (y^2 + e^x z)\vec{j} + \cos xy\vec{k}$ qua biên S hướng ra ngoài của vật thể V giới hạn bởi các mặt cong: $y = 0,\ z = 0,\ y + z = 2,\ z = 1 - x^2$.

4.5. Tính lưu số của trường $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ dọc theo cung tròn nhỏ nhất của đường tròn lớn của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ nối các điểm M(3,4,0) và N(0,0,5).

4.6. Tính lưu số của trường véc tơ $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$,

trong đó L có phương trình $x = \sin t,\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\ z = \dfrac{1}{2}\cos t$ hướng theo chiều tăng của t.

4.7. Chứng minh rằng các trường vectơ sau đây là những trường thế, tìm hàm thế vị của chúng.

a. $\vec{F} = e^{-x}\left[\dfrac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right]\vec{i} + \dfrac{e^{-x}}{x+y}\vec{j}$ **,**

b. $\vec{F} = yz(2x+y+z)\vec{i} + zx(2y+z+x)\vec{j} + xy(2z+x+y)\vec{k}$ **,**

c. $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ **.**

4.8. Cho u và v là các hàm điều hoà. Chứng minh trường véc tơ $u\operatorname{grad}v - v\operatorname{grad}u$ là trường ống.

4.9. Tìm hàm số khả vi $f(r),\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(f(r)\overrightarrow{OM}\right)=0,\ \forall M \in 3^3 \\ f(1)=1. \end{cases}$$

4.10. Cho hàm véc tơ $\vec{F}=xf(r)\vec{i}+yf(r)\vec{j}+2zf(r)\vec{k},\ r=\sqrt{x^2+y^2}$. Hãy tìm hàm số $f(r)$ để tồn tại một véc tơ $\vec{G}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{F}}=\operatorname{rot}\vec{G} \\ f(1)=1. \end{cases}$$

4.11. Tìm hàm $f(x,z)$ sao cho trường véc tơ

$$\vec{F}=\left(3x^2+7y-6xy-3z^2,\ f(x,z),6z(y-x)\right)$$

là trường thế và hãy tìm hàm thế $U(x,y,z)$ của trường đó.

4.12. Cho hai hàm số $f_1,\ f_2$ khả vi liên tục đến cấp hai trong miền liên thông V có biên là mặt cong S. Chứng minh

$$\iiint\limits_V (f_1.\nabla^2 f_2 - f_2.\nabla^2 f_1)dV = \iint\limits_S (f_1\frac{\partial f_2}{\partial \vec{n}} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial \vec{n}})dS$$

trong đó $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt cong S hướng ra phía ngoài.

4.13. Cho trường véc tơ $\vec{F}(P,Q,R)$, với $P,\ Q.\ R$ khả vi liên tục . Chứng minh:

$\operatorname{div}\vec{\mathrm{F}}=0$ là điều kiện cần và đủ để tồn tại trường véc tơ $\vec{G}$ thỏa mãn: $\vec{\mathrm{F}}=\operatorname{rot}\vec{\mathrm{G}}.$