CHƯƠNG I. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Phép tính vi phân hàm số nhiều biến số là sự mở rộng một cách tự nhiên và cần thiết của phép tính vi phân hàm số một biến số. Các bài toán thực tế thường xuất hiện sự phụ thuộc một biến số vào hai biến số hoặc nhiều hơn, chẳng hạn nhiệt độ T của một chất lỏng biến đổi theo độ sâu z và thời gian t theo công thức $T = e^{-t}z$, nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn phụ thuộc vào điện trở của dây, cường độ của dòng và thời gian dẫn điện theo công thức $Q = 0,24RI^2t$,v.v…Vì vậy, khảo sát hàm số nhiều biến số vừa mang tính tổng quát vừa mang tính thực tiễn. Để học tốt chương này, ngoài việc nắm vững các phép tính đạo hàm của hàm một biến số, người học phải có các kiến thức về hình học không gian (xem $[2]$).

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CHUNG

1.1.1. Không gian n chiều

1. Ta đã biết mỗi điểm trong không gian 3 chiều được đặc trưng hoàn toàn bởi bộ 3 số (x, y, z) được gọi là 3 tọa độ descartes của nó: x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ.

Tổng quát như sau: Mỗi bộ có thứ tự n số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là một điểm n chiều. Kí hiệu $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có nghĩa là điểm n chiều M có các toạ độ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tập các điểm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là không gian Euclide n chiều và kí hiệu là $\mathbb{R}^n$.

2. Cho $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Người ta gọi khoảng cách giữa M và N, được kí hiệu bởi d(M, N) và tính theo công thức:

$$d(M,N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots\ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

Tương tự như trong $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ta nhận được bất đẳng thức tam giác trong $\mathbb{R}^n$. Tức là với 3 điểm A, B, C bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$ ta có:

$$d(A,C) \le d(A,B) + d(B,C)$$

3. Cho $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$. Tập $\Omega_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n : d(M, M_0) < \varepsilon\}$ được gọi là ε - lân cận hoặc lân cận bán kính ε của M_0 hoặc hình cầu mở tâm M_0 bán kính ε (H.1a)

4. Cho $E \subset \mathbb{R}^n$. Điểm $M \in E$ gọi là điểm trong của E nếu có

$$\Omega_\varepsilon(M) \subset E, \ (\exists \varepsilon > 0).$$

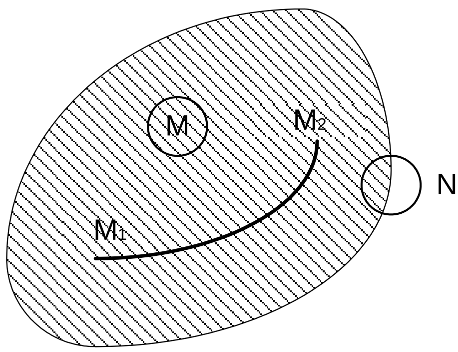
Điểm $N \in \mathbb{R}^n$ gọi là điểm biên của E nếu bất kỳ $\Omega_\varepsilon(M)$ đều chứa những điểm thuộc E và điểm không thuộc E .

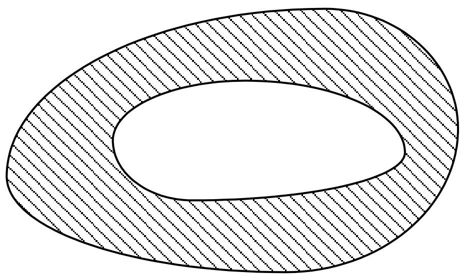
Tập E gọi là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong, gọi là đóng nếu nó chứa mọi điểm biên của nó. Tập các điểm biên của E kí hiệu ∂E . Tập E đóng (bao đóng của E) được kí hiệu là $\overline{E}$ và có $\overline{E} = E \bigcup \partial E$ (H.1a).

5. Tập E gọi là bị chặn hay giới nội nếu như $\exists R > 0: \ E \subset \Omega_R(0)$.

6. Tập E gọi là liên thông nếu mỗi cặp điểm M_1, M_2 trong E đều được nối với nhau bởi một đường cong liên tục nào đó nằm trọn trong E. Tập liên thông E gọi là đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín (một đường cong kín trong $\mathbb{R}^2$; một mặt cong kín trong $\mathbb{R}^3$) (H.1.1a). Tập liên thông E gọi là đa liên nếu nó bị giới hạn bởi từ hai mặt kín trở lên rời nhau từng đôi một (H.1.1b).

7. Một tập mở và liên thông D được gọi là miền liên thông D. Tương ứng ta cũng có miền đơn liên, miền đa liên, miền đóng tùy theo tập đơn liên, tập đa liên, tập đóng.





H.1.1.a **H.1.1.b**

Ví dụ 1.1: Xét tính chất các tập sau trong $\mathbb{R}^2$.

$$A = \{(x, y): \ x^2 + y^2 < 4\}$$

$$B = \{(1,2), \ (-1,0), \ (0,0)\} \text{ và } \mathbb{R}^2.$$

Giải:

A là hình tròn tâm O, bán kính bằng 2; $\partial A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ là đường tròn tâm O bán kính bằng 2; $\overline{A} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$ là hình tròn kể cả biên.

A, 3^2 là các tập liên thông; B là tập không liên thông (gồm 3 điểm rời rạc).

A, B là các tập giới nội; $\mathbb{R}^2$ là tập không giới nội (cả mặt phẳng 0xy).

A là miền đơn liên; $\mathbb{R}^2$ là miền không giới nội

1.1.2. Định nghĩa hàm nhiều biến số

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Ta gọi ánh xạ:

$$f : D \to \mathbb{R}$$

hay là $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \mapsto u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ là một hàm số của n biến số xác định trên D. D được gọi là miền xác định của hàm số f; $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến số độc lập, còn u gọi là biến số phụ thuộc. Với định nghĩa trên, hàm số được cho là một hàm đơn trị. Sau này chúng ta còn gặp các hàm số đa trị, thường được cho dưới dạng ẩn.

1.1.3. Miền xác định của hàm nhiều biến số

Người ta quy ước: Nếu cho hàm số u = f(M) mà không nói gì về miền xác định D của nó thì phải hiểu rằng miền xác định D của hàm số là tập hợp các điểm M sao cho biểu thức f(M) có nghĩa.

Miền xác định của hàm số thường là miền liên thông. Sau đây là một số ví dụ về miền xác định của hàm số 2 biến số, 3 biến số.

Ví dụ 1.2: Tìm miền xác định của các hàm số sau và mô tả hình học các miền đó:

a. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, b. $z = \ln(x + y)$, c. $u = \dfrac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

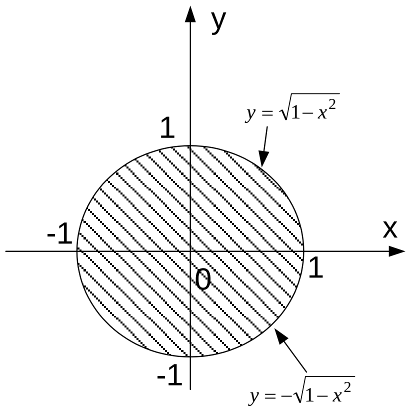
Giải:

a. .Miền xác định là tập các điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $1 - x^2 - y^2 \ge 0$ hay $x^2 + y^2 \le 1$. Đó là hình tròn đóng tâm O bán kính bằng 1 (H.1.2a). Hình tròn đóng này có thể mô tả bởi hệ bất phương trình: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$

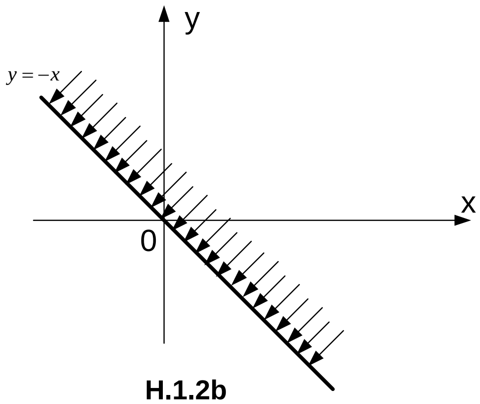
b. Miền xác định là tập các điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thoả mãn: $x + y > 0$ hay $y > -x$. Đó là nửa mặt phẳng có biên là đường $y = -x$ (H.1.2b). Nửa mặt phẳng này được mô tả bởi hệ bất phương trình: $\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -x < y < +\infty \end{cases}$

c. Miền xác định là tập các điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Đó là hình cầu mở tâm O bán kính bằng 3 (H.1.2c). Hình cầu mở này mô tả bởi hệ bất phương trình:

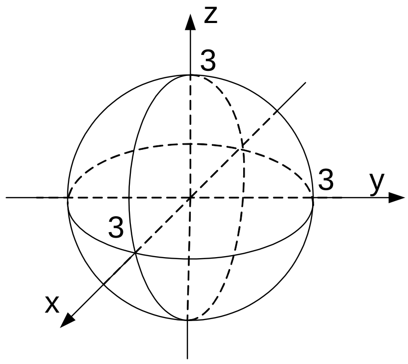
$$\begin{cases} -3 < x < 3 \\ -\sqrt{9 - x^2} \le y \le \sqrt{9 - x^2} \\ -\sqrt{9 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2} \end{cases}$$



H.1.2a



H.1.2b



H.1.2c

1.1.4. Ý nghĩa hình học của hàm hai biến số

Cho hàm 2 biến z = f(x,y) với $(x,y)\in D$. Tập các điểm $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ với z = f(x,y) được gọi là đồ thị của hàm số đã cho. Như vậy đồ thị của hàm 2 biến thường là một mặt cong trong không gian 3 chiều Oxyz. Đồ thị của hàm số mô tả một cách trực quan hàm số, thể hiện được ý nghĩa hình học của hàm số. Dưới đây ta xét các mặt cong đặc biệt và đơn giản, thông dụng trong toán học và ứng dụng.

A. Mặt phẳng:

Mặt phẳng là đồ thị của hàm hai biến tuyến tính, nói cách khác phương trình mặt phẳng có dạng:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ trong đó } A^2+B^2+C^2>0. \tag{1.1}$$

Chẳng hạn $C\neq 0$ có $z=-\dfrac{1}{C}(D+Ax+By)$, hàm số xác định trên $\mathbb{R}^2$. (1.1)’

B. Ellipsoid

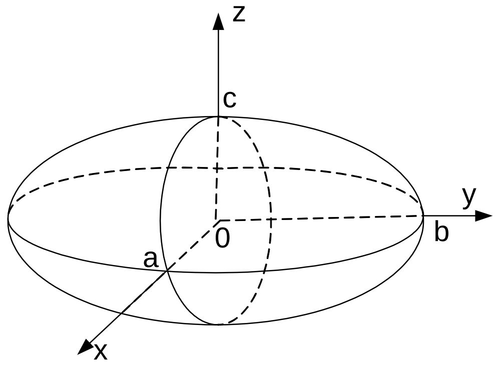
Ellipsoid là mặt cong, phương trình chính tắc của nó có dạng (H.1.3)

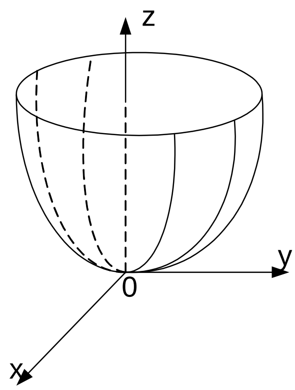
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1.2}$$

Đây là hàm hai biến cho dưới dạng không tường minh (dạng ẩn). Hàm số là đa trị

(miền xác định của hàm ẩn là hình ellipse). Chẳng hạn, coi z là biến phụ thuộc vào x và y thì miền xác định là ellipse có các bán trục a và b: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}\le 1$

Khi a = b = c = R ta có mặt cầu tâm gốc toạ độ và bán kính là R: $x^2+y^2+z^2=R^2$





H.1.3 **H.1.4**

C. Paraboloid elliptic

Phương trình chính tắc của paraboloid elliptic có dạng (H.1.4)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \qquad (1.3)$$

Miền xác định của hàm số trên là 3^2. Khi a = b tức là phương trình có dạng:

$$x^2+y^2=a^2z \qquad (1.3)'$$

Mặt cong có phương trình (1.3)’ được gọi là paraboloid tròn xoay.

D. Mặt trụ bậc 2

1. Mặt trụ elliptic (H.1.5) có phương trình chính tắc:

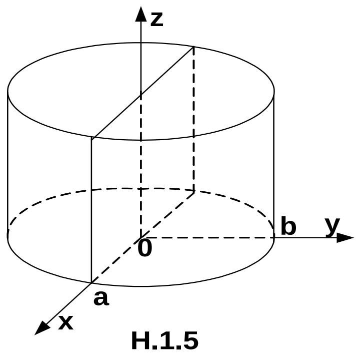
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1.4)$$

2. Mặt trụ hyperbolic (H.1.6) có phương trình chính tắc:

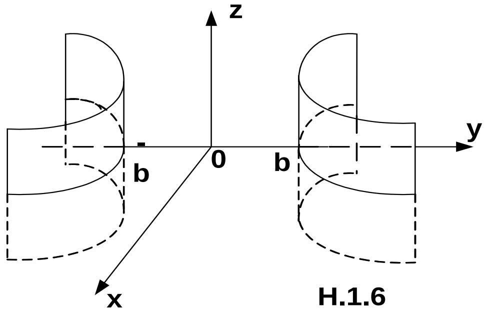
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (1.5)$$

3. Mặt trụ parabolic (H.1.7) có phương trình chính tắc:

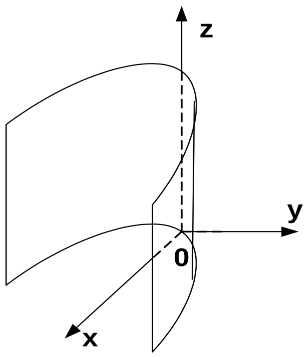
$$y^2=2px \qquad (1.6)$$



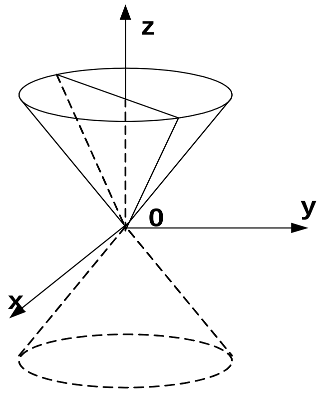
H.1.5



H.1.6



H.1.7



H.1.8

E. Mặt nón bậc 2

Phương trình chính tắc của mặt nón có dạng (H.1.8)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{1.7}$$

1.1.5. Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Khái niệm giới hạn của hàm số nhiều biến số cũng được đưa về khái niệm giới hạn của hàm một biến số. Ở đây một biến số đóng vai trò là khoảng cách d(M_0, M) giữa hai điểm M_0 và M trong không gian 3^{n}. Để đơn giản trong cách viết chúng ta xét trong không gian 2 chiều 3^{2}.

1. Nói rằng dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ dần đến điểm $M_0(x_0, y_0)$, kí hiệu $M_n \to M_0$ khi $n\to\infty$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} d(M_0,M_n)=0 \text{, hay là } \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0\end{cases} \tag{1.8}$$

2. Cho hàm $z=f(x,y)$ xác định ở lân cận $M_0(x_0, y_0)$ có thể trừ tại M_0. Ta nói rằng hàm $f(M)$ có giới hạn là l khi M(x,y) dần đến $M_0(x_0, y_0)$ nếu mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thuộc lân cận $M_0(x_0, y_0)$ dần đến M_0 ta đều có: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=l$

Người ta thường kí hiệu $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = l$ hay $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ (1.9)

Chú ý: Sử dụng ngôn ngữ "$\varepsilon, \ \delta$" ta có định nghĩa như sau: Hàm số f(M) có giới hạn l khi $M \to M_0$ nếu: $(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta > 0):\ 0 < d(M_0, M) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon)$ (1.10)

Chú ý:

a. Trong định nghĩa trên, khi $M \to M_0$ phải hiểu là các tọa độ của M đồng thời dần đến các tọa độ của M_0. Vì vậy người ta còn có tên gọi là giới hạn bội của hàm nhiều biến.

b. Tất cả các khái niệm giới hạn vô hạn, hoặc quá trình $M \to \infty$; các tính chất của hàm có giới hạn; các định lí về giới hạn của tổng, tích, thương đều tương tự như hàm số một biến số.

3. Giới hạn lặp: Cho hàm z = f(x,y) xác định ở lân cận $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ tại M_0.

Ta cố định giá trị $y \neq y_0$ khi đó $f(x,y)$ là hàm một biến số x . Giả sử tồn tại giới hạn đơn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = g(y)$

Nếu tồn tại $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$ thì ta nói rằng l là giới hạn lặp của hàm số theo thứ tự $x \to x_0,\ y \to y_0$ và kí hiệu $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = l$ (1.11)

Sau đây ta đưa ra điều kiện đủ cho sự tồn tại giới hạn lặp.

Định lí 1.1: *Cho hàm z = f(x,y) xác định ở lân cận $M_0(x_0, y_0)$. có thể trừ tại M_0, thỏa mãn các điều kiện:* ***a.*** *Tồn tại giới hạn bội* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ *(hữu hạn hoặc vô cùng)*

b. *Tồn tại giới hạn đơn* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = g(y)$

Khi đó tồn tại giới hạn lặp $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = l$

Ví dụ 1.3: Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Giải : a. Ta có $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0\right| \le |y|,\ d(M,O) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta = \varepsilon\ :\ 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta)\ \ (|y| < \delta\ \ \Rightarrow \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0\right| \le |y| < \delta = \varepsilon)$$

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

b. Cho $M(x,y) \to O(0,0)$ theo đường y = Cx, C = const (hằngsố) thì

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{Cx^2}{(1+C^2)x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{C}{1+C^2}$$

Điều này chứng tỏ dãy giá trị hàm có giới hạn khác nhau phụ thuộc vào C. Vậy hàm không có giới hạn.

c. $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \le \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}.|y| \le |y|$. Tương tự a. suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Ví dụ 1.4: Tìm các giới hạn lặp $(x,y)\to(0,0)$ của các hàm số sau

a. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, b. $f(x,y) = \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$, c. $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}$.

Giải:

a. $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0.$

Tuy nhiên không tồn tại giới hạn bội $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, (Xem ví dụ 1.3.c)

b. $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y+y^2}{y} = -1,$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x^2}{x} = 1,$

Từ định lí 1.1. suy ra không có giới han bội.

c. $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{y} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0..$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}.$ không tồn tại

Tuy nhiên có giới hạn bội bằng 0 vì $\left|x\sin\dfrac{1}{y}\right| \le |x| \to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$

1.1.6. Sự liên tục của hàm số nhiều biến số

A. Định nghĩa

1. Hàm số f(M**1**) xác định trên miền D và $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm số f(M) liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$

2. Hàm số f(M) xác định trên miền D. Nói rằng hàm số liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm $M \in D$.

3. Hàm số f(M) liên tục trên miền đóng $\overline{D}$ nếu nó liên tục trên miền D và liên tục tại mọi điểm $N \in \partial D$ theo nghĩa $\lim\limits_{M \to N} f(M) = f(N),\ M \in D$.

4. Ta đặt $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, gọi đó là số gia toàn phần của hàm số tại (x_0,y_0). Vậy hàm số f(x,y) liên tục tại (x_0, y_0) nếu như $\Delta f(x_0, y_0) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$.

Tương tự như hàm số một biến số, chúng ta cũng có các phép tính: tổng, tích, thương, hợp các hàm số liên tục.

Ví dụ 1.5: Xét sự liên tục của các hàm số sau:

a. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

b. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c. $f(x,y) = \cos\left(x^2 - e^{-2x} + xy\right)$

Giải: a. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ (xem ví dụ 1.3.b),

b. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2$ (xem ví dụ 1.3.a),

c. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2$ vì nó là hợp của hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và trên $\mathbb{R}^2$:

$$\cos u \text{ và } u = x^2 - e^{-2x} + xy.$$

B. Tính chất

Hoàn toàn tương tự như hàm một biến số ta có các tính chất quan trọng sau đây:

Định lý 1.2: (Weierstrass) *Nếu f(x,y) liên tục trong miền đóng $\overline{D}$ giới nội thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất trong miền $\overline{D}$ tức là: $\exists M_1 \in \overline{D}, \exists M_2 \in \overline{D}$ để có bất đẳng thức kép:*

$$f(M_1) \le f(M) \le f(M_2), \quad \forall M \in \overline{D}$$

Định lý 1.3: (Bolzano - Cauchy) *Nếu f(x,y) liên tục trong miền liên thông và với bất kì $M_1 \in D$, $M_2 \in D$ thì nó đạt mọi giá trị trung gian giữa $f\left(M_1\right)$ và $f\left(M_2\right)$.*

Nói riêng nếu $f\left(M_1\right).\ f\left(M_2\right) < 0$ thì phương trình $f\left(M\right) = 0$ luôn có nghiệm trong D

1.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1.2.1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số u = f(x,y) xác định trong miền D và $M_0(x_0, y_0) \in D$. Thay y = y_0 vào hàm số đã cho sẽ nhận được hàm số một biến số u = f(x, y_0). Nếu hàm số này có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của f(x, y) đối với x tại $M_0(x_0, y_0)$ và kí hiệu như sau:

$$u'_x(x_0, y_0),\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x},\ f'_x(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Đặt $\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ và gọi đó là số gia riêng của hàm f(x, y) theo biến x tại (x_0, y_0), vậy ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad (1.12)$$

Tương tự ta có định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số đối với y tại $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} \qquad (1.12)'$$

và có các ký hiệu:

$$u'_y(x_0, y_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),\ \frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial y},\ f'_y(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Chú ý:

a. Có thể chuyển toàn bộ các phép tính đạo hàm của hàm một biến số: cộng, trừ, nhân, chia, sang phép tính đạo hàm riêng.

b. Sự tồn tại các đạo hàm riêng chưa đảm bảo tính liên tục của hàm số. Thật vậy ta xét hàm số sau đây:

$$f\left(x, y\right) = \begin{cases} 0 & \text{khi } xy = 0 \\ 1 & \text{khi } xy \ne 0 \end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(\Delta x, 0\right) - f\left(0, 0\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0 = f'_x\left(0, 0\right),\quad f'_y\left(0, 0\right) = 0$.

Tuy nhiên hàm số không liên tục tại $(0,0)$ vì $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=1\to 1$ khi $n\to\infty,\ \forall n\in Đ^*$ đồng thời $f\left(\frac{1}{n},0\right)=0\to 0$ khi $n\to\infty, \forall n\in Đ^*$.

Ví dụ 1.6: Tính đạo hàm riêng tương ứng của các hàm số sau:

a. $u=x^3y,\quad u'_x(1,2),\quad u'_y(1,1)$,

b. $u=x^y\,(x>0),\quad u'_x(x,y),\quad u'_y(x,y)$,

c. $u=x^2z\operatorname{arctg}\frac{y}{z},\quad u'_x(x,y,z),\quad u'_y(x,y,z),\quad u'_z(x,y,z)$.

Giải:

a. $u'_x(x,y)=3x^2y\Rightarrow u'_x(1,2)=6$,

$u'_y(x,y)=x^3\Rightarrow u'_y(1,1)=1$.

b. $u'_x=yx^{y-1},\quad u'_y=x^y\ln x$.

c. $u'_x(x,y,z)=2xz\operatorname{arctg}\frac{y}{z}$,

$$u'_y(x,y,z)=x^2z\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{x^2z^2}{y^2+z^2},$$

$$u'_z(x,y,z)=x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{z}-x^2z\frac{y}{z^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}=x^2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{z}-\frac{yz}{y^2+z^2}\right).$$

1.2.2. Vi phân toàn phần

A. Định nghĩa

1. Cho hàm số u = f(x, y) xác định trong miền D chứa (x_0, y_0). Nếu số gia toàn phần của hàm số tại (x_0, y_0) có dạng:

$$\Delta f(x_0,y_0)=A.\Delta x+B.\Delta y+\alpha.\Delta x+\beta.\Delta y \quad (1.13)$$

trong đó A, B là những số chỉ phụ thuộc vào (x_0, y_0), còn α,β dần đến 0 khi $M\to M_0$ tức là khi $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ thì nói rằng hàm số f(x, y) khả vi tại M_0, còn biểu thức $A.\Delta x+B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số tại M_0 và kí hiệu là $df(x_0, y_0)$, hay $du(x_0, y_0)$.

Như vậy $$df(x_0,y_0)=A.\Delta x+B.\Delta y \quad (1.14)$$

2. Hàm số u = f(x, y) được gọi là khả vi trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền D.

B. Điều kiện cần của hàm số khả vi

Định lý 1.4: *Nếu f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì liên tục tại đó.*

Từ (1.13) suy ra $\Delta f(x_0, y_0) \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Vậy hàm số liên tục tại (x_0, y_0)

Định lý 1.5: *Nếu f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì hàm số có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) và*

$$A = f_x'(x_0, y_0), B = f_y'(x_0, y_0).$$

Chứng minh:

Từ (1.13) ta suy ra:

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \alpha, \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = B + \beta$$

Vậy $f_x'(x_0, y_0) = A, \quad f_y'(x_0, y_0) = B$. Công thức (1.14) trở thành

$$\mathrm{d}u(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y \qquad (1.14)'$$

Ví dụ 1.7: Chứng minh rằng hàm số $z = \sqrt[3]{xy}$ có các đạo hàm riêng tại $(0,0)$ nhưng không khả vi tại đó.

Giải: Ta có $z_x'(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$, tương tự $z_y'(0,0) = 0$

Giả sử hàm số khả vi tại $(0,0)$ khi đó số gia của hàm tại đó có dạng

$$\Delta z = 0.\Delta x + 0.\Delta y + 0\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) \text{ suy ra } \sqrt[3]{\Delta x \Delta y} = 0\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Ta xét tỉ số $\frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$. Khi $\Delta x = \Delta y \to 0$ thì tỉ số này dần đến vô cùng, như vậy mâu thuẫn. Chứng tỏ hàm số không khả vi tại $(0,0)$.

Từ định lí 1.5 và ví dụ 1.7 ta thấy rằng sự tồn tại các đạo hàm riêng chỉ là điều kiện cần của hàm khả vi chứ không phải là điều kiện đủ, tính chất này khác hẳn hàm một biến số.

C. Điều kiện đủ của hàm số khả vi

Định lý 1.6: *Nếu hàm số u = f(x, y) có các đạo hàm riêng* $f_x'(x, y), f_y'(x, y)$ *liên tục tại $M_0(x_0,y_0)$ thì f(x, y) khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$.*

Chứng minh:

Ta có $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$= \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)\right] + \left[f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)\right]$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn (công thức Lagrange) cho hàm một biến số $f(x, y_0 + \Delta y)$ tại lân cận x_0 và $f(x_0, y)$ ở lân cận y_0 ta sẽ nhận được:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x$$

$$f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

trong đó $0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1$

Cũng theo giả thiết $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$ liên tục tại (x_0, y_0) nên:

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)$$

$$f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y)$$

trong đó $\alpha \to 0, \beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Từ đó ta nhận được:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

Điều đó chứng tỏ hàm số khả vi tại (x_0, y_0).

Nếu ta xét các hàm số $f(x, y) = x$ và $g(x, y) = y$ trong 3^2 thì rõ ràng:

$df(x, y) = dx = 1.\Delta x, \quad dg(x, y) = dy = 1.\Delta y$

Vậy vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) có thể viết dưới dạng:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f'_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y \qquad (1.14)'$$

D. Ý nghĩa của vi phân toàn phần

Cho hàm số $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) , tức là :

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

Vì rằng $\left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \le |\alpha| + |\beta| \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Suy ra $df(x_0, y_0)$ khác số gia toàn phần $\Delta f(x_0, y_0)$ một vô cùng bé có bậc cao hơn vô cùng bé $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Vậy với $|\Delta x|,\ |\Delta y|$ khá bé ta sẽ nhận được :

$$\Delta f \approx df \qquad (1.15)$$

Công thức (1.15) thường được sử dụng để tính gần đúng giá trị của hàm số.

Chú ý: Tính chất khả vi của tổng, tích, thương hai hàm nhiều biến hoàn toàn giống như tính chất khả vi của các phép tính tương ứng cho hàm một biến số.

Ví dụ 1.8: Thực hiện phép tính vi phân các hàm số:

a. Cho f(x,y) = x cos xy, tính $\mathrm{d}f\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ biết Δx = 0,01 , Δy = 0,02.

b. Cho f(x,y) = $(x-y)e^{xy^2}$. Tính df(x,y).

Giải:

a. $f'_x(x,y) = \cos xy - xy\sin xy$, $f'_x\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

$f'_y(x,y) = -x^2\sin xy$, $f'_y\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\mathrm{d}f\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).0,01 - \frac{\sqrt{2}}{2}.0,02 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right).0,01$$

b. $f'_x(x,y) = e^{xy^2} + y^2(x-y)e^{xy^2}$

$f'_y(x,y) = -e^{xy^2} + 2yx(x-y)e^{xy^2}$

$$\mathrm{d}f(x,y) = e^{xy^2}\left\{\left[1+y^2(x-y)\right]\mathrm{d}x + \left[2xy(x-y)-1\right]\mathrm{d}y\right\}$$

Ví dụ 1.9:

a. Tính gần đúng $\operatorname{arctg}\frac{1,05}{0,97}$?

b. Một hình trụ bằng kim loại có chiều cao h = 20 cm và bán kính đáy r = 4 cm. Khi nóng lên h và r nở thêm các đoạn Δh = Δr = 0,1 cm. Hãy tính gần đúng thể tích hình trụ khi nóng lên.

Giải:

a. Ta biểu diễn $\operatorname{arctg}\frac{1,05}{0,97} = \operatorname{arctg}\frac{1+0,05}{1-0,03}$ và xét hàm số $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

Rõ ràng $\operatorname{arctg}\frac{1,05}{0,97} = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$,

trong đó $x_0 = y_0 = 1$, Δx = 0,05 và Δy= - 0,03.

Ta áp dụng công thức xấp xỉ (1.15) sẽ có:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) = f(1,1) + f'_x(1,1).0,05 + f'_y(1,1).(-0,03)$$

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{y}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{y}{y^2+x^2}\,,\quad f'_y(x,y)=-\frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}=-\frac{x}{y^2+x^2}$$

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx arctg\frac{1}{1}+\frac{1}{2}.0{,}05+\frac{1}{2}.0{,}03=\frac{\pi}{4}+0{,}04=0{,}785+0{,}04=0{,}825$$

b. Ta có $V=\pi r^2 h,\ V'_r=2\pi rh,\ V'_h=\pi r^2$

Áp dụng công thức (1.15) ta có:

$$V(r+\Delta r,h+\Delta h)\approx \pi r^2 h+2\pi rh\Delta r+\pi r^2\Delta h\approx \pi.4^2.20+2\pi.4.20.0{,}1+\pi.4^2.0{,}1\approx \pi.337{,}6\,cm^3$$

Chứng tỏ sai số tuyệt đối của thể tích không quá $0{,}3\pi\ cm^3$ và sai số tương đối không quá $\frac{0{,}3\pi}{337\pi}\approx\frac{1}{100}$.

1.2.3. Đạo hàm riêng cấp cao

Đạo hàm riêng cấp hai của một hàm số là đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một của nó. Vậy hàm hai biến f(x,y) có 4 đạo hàm riêng cấp hai sau đây:

$$f''_{x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad f''_{y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

hay $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có các định nghĩa đạo hàm riêng cấp cao hơn hai của hàm có số đối số nhiều hơn hai.

Ví dụ 1.10: Tính các đạo hàm riêng $f^{(3)}_{x^2y},\ f^{(3)}_{xyx},\ f^{(3)}_{xyz}$. biết $f(x,y,z)=e^{x-2y+4z}$

Giải: $f'_x=e^{x-2y+4z},\ f''_{x^2}=e^{x-2y+4z},\ f^{(3)}_{x^2y}=-2e^{x-2y+4z}.$

$f''_{xy}=-2e^{x-2y+4z},\ f^{(3)}_{xyx}=-2e^{x-2y+4z},\ f^{(3)}_{xyz}=-8e^{x-2y+4z}.$

Nhận xét: Trong ví dụ trên có $f^{(3)}_{x^2y}=f^{(3)}_{xyx}$

Định lý 1.7: (Schwarz) *Nếu f(x,y) có các đạo hàm riêng hỗn hợp f''_{xy} và f''_{yx} liên tục tại $M_0(x_0,y_0)$ thì các đạo hàm hỗn hợp bằng nhau tại M_0*

$$f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0). \tag{1.16}$$

Định lý Schwars cho ta điều kiện đủ để đạo hàm riêng theo các biến không phụ thuộc vào thứ tự lấy theo các biến. Định lý 1.7 cũng được mở rộng cho trường hợp đạo hàm riêng cấp cao hơn và hàm với số biến nhiều hơn hai.

Chứng minh: Ta lấy t, s đủ bé và lập các hàm số sau đây trong lân cận M_0:

$$g(x,y) = f(x+t,y) - f(x,y)$$

$$h(x,y) = f(x,y+s) - f(x,y)$$

Rõ ràng $g(x_0,y_0+s) - g(x_0,y_0) = h(x_0+t,y_0) - h(x_0,y_0)$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $g(x_0, y)$ tại y_0 nhận được:

$$g(x_0,y_0+s) - g(x_0,y_0) = s.g'_y(x_0,y_0+\theta_1 s)$$

$$= s\left[f'_y(x_0+t,y_0+\theta_1 s) - f'_y(x_0,y_0+\theta_1 s) \right]$$

Tiếp tục áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f'_y(x,y_0+\theta_1 s)$ tại x_0 ta nhận được:

$$g(x_0,y_0+s) - g(x_0,y_0) = stf''_{yx}(x_0+\theta_2 t, y_0+\theta_1 s)$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có:

$$h(x_0+t,y_0) - h(x_0,y_0) = stf''_{xy}(x_0+\gamma_1 t, y_0+\gamma_2 s)$$

Cho $t,s \to 0$, do tính liên tục ta nhận được $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$

Chú ý: Định lý trên cũng mở rộng cho các đạo hàm cấp cao hơn và hàm nhiều biến hơn.

1.2.4. Vi phân cấp cao

Ta nhận thấy $\mathrm{d}f(x,y) = f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$ cũng là một hàm số của x, y nên có thể xét vi phân của nó. Nếu $\mathrm{d}f(x,y)$ khả vi thì vi phân của nó được gọi là vi phân cấp hai của hàm số, được kí hiệu là $\mathrm{d}^2 f(x,y) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(x,y))$ và nói rằng f(x, y) khả vi đến cấp 2 tại (x, y).

Tổng quát vi phân cấp n, nếu có sẽ kí hiệu: $\mathrm{d}^n f(x,y) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f(x,y))$ (1.17)

Công thức vi phân cấp 2 như sau:

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

Giả sử các đạo hàm riêng hỗn hợp liên tục, theo định lý Schwarz ta có:

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 \quad (1.18)$$

Người ta dùng kí hiệu luỹ thừa tượng trưng để viết gọn vi phân cấp 1 như sau:

$$\mathrm{d}f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right) f(x,y)$$

Tổng quát vi phân cấp n là $\quad \mathrm{d}^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f(x,y) \qquad (1.19)$

Với hàm m biến số ta có kí hiệu vi phân cấp n

$$\mathrm{d}^n f(x_1,\ldots,x_m) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m\right)^n f(x_1,\ldots.x_m) \qquad (1.19)'$$

1.2.5. Đạo hàm riêng của hàm số hợp

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ và các ánh xạ $\varphi : D \to \mathbb{R}^m$

$$f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$$

Ánh xạ tích $f.\varphi : D \to \mathbb{R}$ cụ thể là $u = f(\varphi(M)),\ M \in D,\ \varphi(M) \subset \mathbb{R}^m$ gọi là hàm số hợp. Để cho đơn giản, sau đây ta xét n = 2, m = 2.

Định lý 1.8*: Cho u = f(x,y) với x = x(s, t); y = y(s, t) thoả mãn:*

a. *Các biến trung gian x(s, t), y(s, t) có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (a, b).*

b. *f(x, y) khả vi tại điểm* $(p,q) = (x(a,b), y(a,b))$.

Khi đó hàm hợp u = u(s, t) có đạo hàm riêng cấp 1 tại (a, b) tính theo công thức:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad (1.20)$$

Chứng minh: Ta lập hàm số

$$\alpha(h,k) = \begin{cases} 0 \quad \text{khi } (h,k) = (0,0) \\ \dfrac{f(p+h,q+k) - f(p,q) - f'_x(p,q)h - f'_y(p,q)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \text{khi}(h,k) \neq (0,0) \end{cases}$$

Vì $f(x,y)$ khả vi tại (p,q) nên $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h,k) = 0$

Từ định nghĩa hàm $\alpha(h,k)$ ta có

$$f(p+h,q+k) - f(p,q) = f'_x(p,q)h + f'_y(p,q)k + \sqrt{h^2+k^2}\,\alpha(h,k)$$

Bây giờ ta đi tính $\dfrac{\partial u(a,b)}{\partial s}$.

Cho a một số gia Δa, ta chọn $h = x(a+\Delta a, b) - x(a,b)$, $\mathrm{k} = y(a+\Delta a, b) - y(a,b)$

Xét tỉ số $\dfrac{u(a+\Delta a,b)-u(a,b)}{\Delta a} = \dfrac{f(p+h,q+k)-f(p,q)}{\Delta a}$

$$= f'_x(p,q)\frac{h}{\Delta a} + f'_y(p,q)\frac{k}{\Delta a} + \sqrt{\frac{h^2}{\Delta a^2}+\frac{k^2}{\Delta a^2}}\,\alpha(h,k)$$

Khi $\Delta a \to 0$ thì vế trái dần tới $\dfrac{\partial u(a,b)}{\partial s}$. Ở vế phải, các thừa số

$$\frac{h}{\Delta a} \to \frac{\partial x(a,b)}{\partial s},\ \frac{k}{\Delta a} \to \frac{\partial y(a,b)}{\partial s},\ \alpha(h,k) \to 0$$

Từ đó ta có $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$

Tương tự, ta chứng minh $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

Công thức (1.20) có thể viết dưới dạng ma trận hàng:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \qquad (1.20)'$$

trong đó $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận Jacobi của x, y đối với t, s; còn định thức của ma trận này được gọi là định thức Jacobi của x, y đối với t, s hay Jacobian của x, y đối với t, s và ký hiệu:

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \qquad (1.21)$$

Ví dụ 1.11: Tính các đạo hàm riêng

$$u = e^x \ln y, \quad x = st, \quad y = s^2 - t^2$$

Giải:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = e^x \ln y.\,t + e^x.\frac{1}{y}.2s = e^{st}\left[t\ln(s^2-t^2) + \frac{2s}{s^2-t^2}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^x \ln y.s + e^x.\frac{1}{y}.(-2t) = e^{st}\left[s\ln(s^2 - t^2) - \frac{2t}{s^2 - t^2} \right]$$

Ví dụ 1.12: Cho $u = \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chứng minh $\Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0$.

Giải:

Nhận xét: hàm số $u = \frac{1}{r}$ đối xứng với x, y, z. Do đó ta chỉ cần tính u''_{x^2}, sau đó thay x bởi y và z.

$$u'_x = u'.r'_x = -\frac{1}{r^2}.\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

$$u''_{x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3x.\frac{1}{r^4}.\frac{x}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

Suy ra $$\Delta u = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

Chú ý: Nếu u = f(x, y), y = y(x) khi đó u là hàm số hợp của một biến x. Do vậy người ta đưa ra khái niệm đạo hàm toàn phần và công thức tính sẽ là:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.y' \qquad (1.22)$$

1.2.6. Vi phân của hàm hợp

Xét hàm hợp u = f(x, y), x = x(s, t), y = y(s, t).

Nếu hàm hợp có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ liên tục thì nó khả vi và ta có:

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Bây giờ ta biểu diễn du qua biến trung gian x, y theo công thức (1.6) có:

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \right)\mathrm{d}s + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t \right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t \right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Như vậy dạng của công thức vi phân cấp 1 không đổi dù x, y là các biến độc lập hay là hàm của các biến s, t. Tính chất này gọi là tính chất bất biến dạng của vi phân cấp 1.

Chú ý: Cũng như hàm một biến số, vi phân cấp cao của hàm nhiều biến không có tính bất biến dạng.

1.2.7. Đạo hàm của hàm số ẩn

A. Hàm ẩn một biến

Cho một hệ thức giữa hai biến, x, y dạng: F(x, y) = 0 (1.23)

trong đó F(x, y) là hàm hai biến xác định trong miền mở D chứa (x_0, y_0) và

$F(x_0, y_0) = 0$. Giả sử rằng $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\exists\, y(x)$ sao cho $(x, y) \in D$ và F(x, y) = 0. Hàm số y = y(x) gọi là hàm ẩn của x xác định bởi phương trình (1.9).

Định lý 1.9: *Cho phương trình hàm ẩn (1.23) với F(x, y) thoả mãn các điều kiện:*

1. *F liên tục trong lân cận $\Omega_\delta(M_0)$ và $F(M_0) = 0$.*
2. *Các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ liên tục trong lân cận $\Omega_\delta(M_0)$ và*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Khi đó phương trình (1.23) xác định một hàm ẩn y(x) khả vi liên tục trong khoảng

$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ *và ta có:* $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \qquad (1.24)$$

Chú ý: Để nhận được công thức (1.24) chúng ta chỉ việc lấy vi phân 2 vế của (1.23) trong đó có y = y(x) và áp dụng tính bất biến của dạng vi phân cấp 1.

Thật vậy dF(x, y) = 0 hay $F'_x dx + F'_y dy = 0$ hay $F'_x + F'_y.y' = 0$. Từ đó suy ra (1.24).

Ví dụ 1.13: Tính $y'(1)$ biết phương trình hàm ẩn: $xy - e^x \sin y = \pi$

Giải:

Lấy đạo hàm toàn phân (hay ta có thể lấy vi phân) và coi y là hàm của x hai vế của phương trình đã cho có:

$$y + xy' - e^x \sin y - e^x \cos y.y' = 0$$

Thay $x = 1$ vào phương trình hàm ẩn, nhận được: $y(1) - \pi = \sin y(1)$. Dùng phương pháp đồ thị giải phương trình này, nhận được nghiệm $y(1) = \pi$

Vậy $$\pi + y'(1) - e\sin\pi - e\cos\pi.y'(1) = 0$$

$$y'(1) = -\frac{\pi}{1+e}$$

Ví dụ 1.14**:** Tính y', y'' biết $x - y + \text{arctg} y = 0$

Giải:

Ta coi y = y(x), lấy đạo hàm toàn phần hai vế sẽ có

$$1 - y' + \frac{y'}{1+y^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2} \quad \Rightarrow y^2 y' = 1 + y^2$$

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế theo x, ta có

$$2yy'^2 + y^2 y'' = 2yy' \Rightarrow y'' = \frac{2y'(1-y')}{y} \quad \Rightarrow y'' = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$$

B. Hàm ẩn hai biến

Định lý 1.10: *Cho phương trình hàm ẩn F(x, y, z) = 0 với F(x, y, z) thoả mãn các điều kiện:*

1. *F(x, y, z) liên tục trong hình cầu mở* $\Omega_\delta(M_0)$ *và* $F(M_0) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$

2. *Các đạo hàm riêng* F'_x, F'_y, F'_z *liên tục trong hình cầu* $\Omega_\delta(M_0)$ *và* $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Khi đó phương trình hàm ẩn xác định một hàm ẩn z = z (x, y) có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận $\Omega_\varepsilon(x_0, y_0)$ *và xác định theo công thức:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \tag{1.25}$$

Tương tự như định lý 1.9. ta không chứng minh định lý này.

Cũng như trong trường hợp hàm ẩn một biến, để tính các đạo hàm riêng cũng như vi phân của hàm ẩn ta lấy vi phân toàn phần hai vế của phương trình hàm ẩn sau đó đi tìm $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, dz$.

Ví dụ 1.15: Cho xyz = x + y + z. Coi z là hàm số ẩn, hãy tính z'_x, z'_y, dz

Giải:

Ta lấy vi phân toàn phần hai vế của phương trình hàm ẩn sẽ có:

d(xyz) = d(x + y + z)

yz dx + zx dy + xy dz = dx + dy + dz

(xy – 1) dz = (1 - yz) dx + (1 - zx) dy

$$dz = -\frac{1}{xy-1}\left[(yz-1)dx + (zx-1)dy\right]$$

$$\Rightarrow z'_x = -\frac{yz-1}{yx-1}, \quad z'_y = -\frac{xz-1}{xy-1}$$

Ví dụ 1.16: Cho $e^z = x + y + z$. Hãy tìm $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Giải: Lấy vi phân hai vế của phương trình hàm ẩn, ta có

$$e^z dz = dx + dy + dz \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^z - 1}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^z - 1}$$

Tiếp tục ta lấy đạo hàm riêng theo biến y và x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-e^z}{(e^z-1)^2}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-e^z}{(e^z-1)^3} = \frac{x+y+z}{(1-x-y-z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-e^z}{(e^z-1)^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-e^z}{(e^z-1)^3} = \frac{x+y+z}{(1-x-y-z)^3}.$$

C. Hệ hàm ẩn

Giả sử ta có hệ 2 phương trình của 4 biến:

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v) = 0 \\ F_2(x,y,u,v) = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

Trong trường hợp đặc biệt ta có thể giải từ hệ trên ra 2 ẩn số u, v phụ thuộc vào 2 biến còn lại

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{1.27}$$

Hệ hàm (1.27) được gọi là hệ các hàm ẩn xác định từ hệ các phương trình hàm (1.26).

Tuy nhiên việc giải hiện được ra (1.27) thường rất khó khăn, dưới đây ta sẽ đưa ra điều kiện tồn tại các hàm ẩn và công thức tính các đạo hàm riêng của chúng.

Trước hết, ta có ma trận Jacobi của hệ 2 hàm F_1, F_2 đối với 2 biến x, y và định thức Jacobi của hệ 2 hàm F_1, F_2 đối với 2 biến x, y (Xem công thức (1.20)')

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Định lý 1.11: *Cho hệ phương trình hàm ẩn (1.26) với* $F_1(x,y,u,v), F_2(x,y,u,v)$ *thoả mãn các điều kiện:*

1. $F_1(x,y,u,v), F_2(x,y,u,v)$ *liên tục trong hình cầu mở* $\Omega_\delta(M_0)$ *của không gian 4 chiều và* $F_1(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0, F_2(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$

2. *Các đạo hàm riêng của* $F_1(x, y, u, v),\ F_2(x, y, u, v)$ *liên tục theo tất cả các biến trong hình cầu* $\Omega_\delta(M_0)$ *và* $\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} \neq 0$

Khi đó hệ phương trình hàm ẩn (1.26) xác định hệ hàm ẩn $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ *có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận* $\Omega_\varepsilon(M_0)$ *và xác định theo công thức:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, v)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, u)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, u)}}{\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} \qquad (1.28)$$

Ví dụ 1.17: Cho các hàm ẩn $u(x, y),\ v(x, y)$ xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = x \\ u - yv = 0 \end{cases}$$

Hãy tính vi phân toàn phần $\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v$?

Giải: Lần lượt lấy vi phân hai vế các phương trình của hệ, ta nhận được:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u + \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u - y\mathrm{d}v - v\mathrm{d}y = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{y\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y}{1 + y} \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y}{1 + y} \end{cases}$$

Ví dụ 1.18: Tính các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}$ biết hệ phương trình hàm ẩn

$$\begin{cases} u^2 + ux - uv + y^2 = 0 \\ uv + v^2 - xy = 0 \end{cases}$$

Giải: Lần lượt lấy vi phân hai vế các phương trình của hệ, ta có:

$$\begin{cases} 2udu + udx + xdu - udv - vdu + 2ydy = 0 \\ udv + vdu + 2vdv - xdy - ydx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2u + x - v)du - udv = -udx - 2ydy \\ vdu + (u + 2v)dv = ydx + xdy \end{cases}$$

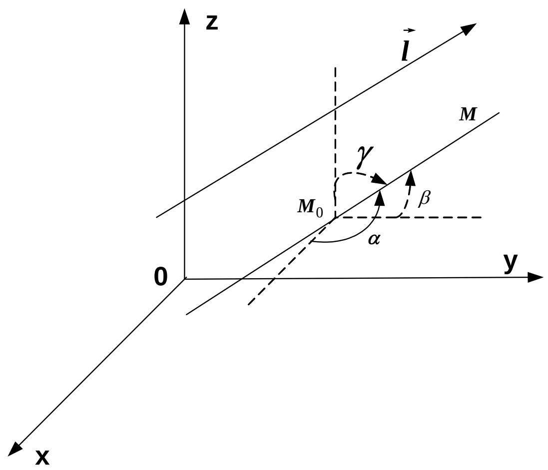
Theo qui tắc Cramer ta được

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{(x+2u-v)(u+2v)+uv}\left[u(y-u-2v)\mathrm{d}x + (xu-2yu-4yv)\mathrm{d}y\right] \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+2u-v)(u+2v)+uv}\left[(xy+2yu-yv+uv)\mathrm{d}x + (x^2+2xu-2xv+2yv)\mathrm{d}y\right] \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u(y-u-2v)}{(x+2u-v)(u+2v)+uv} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{(xy+2yu-yv+uv)}{(x+2u-v)(u+2v)+uv} \end{cases}$$

1.2.8. Đạo hàm theo hướng. Građiên (Gradient)



H.1.9

A. Định nghĩa:

Cho hàm số u(x, y, z) xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$ và $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$, một hướng được đặc trưng bởi véc tơ $\vec{\ell}$ có véc tơ đơn vị $\overrightarrow{\ell_0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Lấy $M \in D$ sao cho $\overrightarrow{M_0M} = \rho\overrightarrow{\ell_0}$, lập tỉ số $\dfrac{\Delta u}{\rho} = \dfrac{u(M)-u(M_0)}{\rho}$

Nếu tỉ số trên có giới hạn hữu hạn khi $\rho \to 0$ thì giới hạn ấy được gọi là đạo hàm của hàm u(M) theo hướng $\vec{\ell}$ tại M_0 và được kí hiệu là $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell_0}}(M_0)$. Vậy

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) \tag{1.29}$$

Các toạ độ của véc tơ đơn vị của $\vec{\ell}$: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ được gọi là các côsin chỉ phương của $\vec{\ell}$. Như vậy $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (H.1.9)

Chú ý:

a. Cũng giống như ý nghĩa của đạo hàm, có thể coi rằng đạo hàm theo hướng $\vec{\ell}$ biểu thị tốc độ biến thiên của hàm u(M) theo hướng $\vec{\ell}$.

b. Nếu $\vec{\ell}$ có hướng của trục Ox thì $\overrightarrow{\ell_0}(1,0,0)$ là véc tơ đơn vị của nó. Giả sử $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x_0+\rho, y_0, z_0)$ khi đó:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell_0}}(M_0) = \lim_{\rho\to 0}\frac{u(x_0+\rho, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$$

Chứng tỏ các đạo hàm riêng u'_x, u'_y, u'_z tương ứng là các đạo hàm của hàm u theo hướng của các trục Ox, Oy, Oz.

B. Công thức tính

Định lý 1.12: *Nếu hàm số u(x, y, z) khả vi tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và $\vec{\ell}$ bất kỳ có các côsin chỉ phương $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ thì:*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma \tag{1.30}$$

Chứng minh:

Theo ý nghĩa của hàm khả vi ta có:

$$\Delta u = u(M) - u(M_0) = u'_x(M_0)\Delta x + u'_y(M_0)\Delta y + u'_z(M_0)\Delta z + o(\rho)$$

trong đó $o(\rho)$ là VCB bậc cao hơn ρ khi $\rho \to 0$.

Mặt khác $\Delta x = \rho\cos\alpha, \Delta y = \rho\cos\beta, \Delta z = \rho\cos\gamma$ nên suy ra:

$$\frac{\Delta u}{\rho} = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma + \frac{o(\rho)}{\rho}$$

Chuyển qua giới hạn khi $\rho \to 0$ ta sẽ nhận được công thức (1.30)

C. Građiên

Cho $u(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D \subset 3^3$

Người ta gọi véc tơ $(u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0))$ là građiên của hàm $u(x, y, z)$ tại M_0 và được kí hiệu là grad $u(M_0)$

$$\text{grad}\, u(M_0) = (u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0))$$

$$= u'_x(M_0)\vec{i} + u'_y(M_0)\vec{j} + u'_z(M_0)\vec{k} \qquad (1.31)$$

trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz.

D. Liên hệ giữa gradiên và đạo hàm theo hướng.

Định lý 1.13: *Nếu u(M) khả vi tại M_0 thì tại đó có*:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}} = ch_{\vec{\ell}}\ \text{grad}u(M_0) \qquad (1.32)$$

Chứng minh:

Ta có $\overrightarrow{\ell_0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ nên (1.30) có thể viết như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = \text{grad}u(M_0).\overrightarrow{\ell_0} = \left|\overrightarrow{\ell_0}\right|\left|\text{grad}u(M_0)\right|\cos\theta$$

trong đó θ là góc giữa hai véc tơ $\vec{\ell}$ và gradu(M_0). Vì $\left|\text{grad}u(M_0)\right|\cos\theta = ch_{\vec{\ell}}\ \text{grad}u(M_0)$

và $\left|\overrightarrow{\ell_0}\right| = 1$ Vậy ta nhận được công thức (1.32)

Chú ý: Từ (1.32) suy ra $\text{Max}\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0)\right| = \left|\text{grad}u(M_0)\right|$ khi $\left|\cos\theta\right| = 1$, tức là $\vec{\ell}$ cùng phương với grad u(M_0), chứng tỏ grad u(M_0) cho ta biết phương, theo phương đó tốc độ biến thiên của u tại M_0 có giá trị tuyệt đối cực đại.

Ví dụ 1.19: Cho $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$, $M(1,0,-3)$, $\vec{l}(2,1,-2)$. Tính grad u(M) và $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M)$.

Giải:

$$u'_x = 3x^2 + 3yz,\ u'_y = 3y^2 + 3zx,\ u'_z = 3z^2 + 3xy$$

Vậy grad u (1, 2, -3) = (3 – 18, 12 – 9, 27 + 6) = (-15, 3, 33) = 3(-5, 1, 11)

$$\vec{\ell}\,(2, 1, -2) \Rightarrow \overrightarrow{\ell_0} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(1,2,-3) = 3\left(-5.\frac{2}{3} + 1.\frac{1}{3} - 11.\frac{2}{3}\right) = -31$$

1.3. CÔNG THỨC TAYLOR

Ta nhớ lại công thức Taylor của hàm một biến số $f(x)$ tại lân cận $x = a$ có dạng

$$f(x) = \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!}\text{d}^k f(a) + \frac{1}{(n+1)!}\text{d}^{n+1} f(a + \theta\Delta x),\ 0 < \theta < 1$$

Đối với hàm hai biến số ta có kết quả tương tự như sau:

Định lí 1.14: *Giả sử hàm hai biến $f(x,y)$ khả vi đến cấp $n+1$ tại lân cận điểm (a,b) khi đó ta có công thức Taylor với phần dư Lagrange*

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x^{/}(a,b)\Delta x+f_y^{/}(a,b)\Delta y+\frac{1}{2!}\left[f_{x^2}^{//}(a,b)\Delta x^2+2f_{xy}^{//}(a,b)\Delta x\Delta y+f_{y^2}^{//}(a,b)\Delta y^2\right]+...$$
$$+\frac{1}{n!}\left[f_{x^n}^{(n)}(a,b)\Delta x^n+C_n^1 f_{x^{n-1}y}^{(n)}(a,b)\Delta x^{n-1}\Delta y+...+C_n^n f_{y^n}^{(n)}(a,b)\Delta y^n\right]$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[\begin{array}{l} f_{x^{n+1}}^{(n+1)}(a+\theta\Delta x,b+\theta\Delta y)\Delta x^{n+1}+ \\ C_{n+1}^1 f_{x^n y}^{(n+1)}(a+\theta\Delta x,b+\theta\Delta y)\Delta x^{n-1}\Delta y+...+C_{n+1}^{n+1} f_{y^{n+1}}^{(n+1)}(a+\theta\Delta x,b+\theta\Delta y)\Delta y^{n+1}\end{array}\right] \quad (1.33)$$

Công thức Taylor tại lân cận điểm $(0,0)$ được gọi là công thức M'claurin của hàm số

Ví dụ 1.20: Viết công thức M'claurin của hàm số $f(x,y)=x+y+e^y\cos x$ cấp $n=1$

Giải:

$$f(0,0)=1,\ f_x^{/}(x,y)=1-e^y\sin x\Rightarrow f_x^{/}(0,0)=1$$
$$f_y^{/}(x,y)=1+e^y\cos x\Rightarrow f_y^{/}(0,0)=2$$
$$f_{x^2}^{//}(x,y)=-e^y\cos x,\ f_{xy}^{//}(x,y)=-e^y\sin x,\ f_{y^2}^{//}(x,y)=e^y\cos x,$$

Vậy $f(x,y)=1+(x+2y)+\frac{1}{2!}e^{\theta y}\left[-x^2\cos\theta x-2xy\sin\theta x+y^2\cos\theta x\right],\theta\in(0,1)$

1.4. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1.4.1. Cực trị

A. Định nghĩa và điều kiện cần của cực trị

Điểm $M_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ gọi là điểm cực đại (địa phương) của hàm f(M) nếu có lân cận đủ bé của M_0 để trong lân cận đó (trừ M_0) xảy ra bất đẳng thức $f(M) < f(M_0)$

Tương tự ta có khái niệm điểm cực tiểu (địa phương) của hàm số f(M).

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong các trường hợp trên gọi chung là điểm cực trị.

Tương tự như định lý Fermat đối với hàm một biến số, ta có điều kiện cần của cực trị dưới đây.

Định lý 1.15**:** *Nếu f(x, y) đạt cực trị tại M_0 và có các đạo hàm riêng tại đó thì các đạo hàm riêng bằng 0.*

Chứng minh: Giả sử f(x, y) đạt cực trị tại (x_0, y_0). Theo định nghĩa, suy ra hàm một biến $f(x,y_0)$ đạt cực trị tại x_0, $f(x_0, y)$ đạt cực trị tại y_0. Theo định lý Fermat ta có:

$$\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}=0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=0$$

$$\left.\frac{df(x_0,y)}{dy}\right|_{y=y_0}=0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=0$$

Chú ý: Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng không gọi là điểm dừng của hàm số. Như vậy điểm dừng chưa chắc là điểm cực trị. Chẳng hạn u = xy có điểm dừng là (0 0) nhưng trong bất kỳ lân cận nào của gốc toạ độ (0, 0) tồn tại các điểm (x_1,y_1) và (x_2,y_2) để

$$f(x_1,y_1)>f(0,0) \text{ và } f(x_2,y_2)<f(0,0) \text{ (lấy } x_1>0,\ y_1>0,\ x_2<0,\ y_2>0 \text{).}$$

B. Điều kiện đủ của cực trị

Trong thực tế thường gặp hàm hai biến f(x, y) và để tìm cực trị của nó, người ta thường sử dụng định lí sau đây, coi như là điều kiện đủ để hàm đạt cực trị.

Định lý 1.16: *Giả sử f(x, y) có đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại lân cận điểm dừng (x_0, y_0) đồng thời đặt:*

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\ C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \text{ và } \Delta=B^2-AC \qquad (1.34)$$

Nếu $\Delta > 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại (x_0, y_0).

Nếu $\Delta = 0$ thì chưa kết luận gì được về (x_0, y_0).

Nếu $\Delta < 0$ thì hàm số đạt cực trị tại (x_0, y_0).

Cụ thể đạt cực đại nếu A < 0, đạt cực tiểu nếu A > 0.

Người ta gọi Δ là biệt số của hàm f(x, y) tại điểm dừng.

Chứng minh: Với giả thiết, theo công thức Taylor (1.33) ta có

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}d^2f\left(x_0+\theta h,y_0+\theta k\right),\ 0<\theta<1.$$

Do các đạo hàm riêng cấp hai liên tục nên

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=A+\alpha\left(h,k\right),\ \alpha\left(h,k\right)\to 0 \text{ khi } (h,k)\to(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=B+\beta\left(h,k\right),\ \beta\left(h,k\right)\to 0 \text{ khi } (h,k)\to(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=C+\gamma\left(h,k\right),\ \gamma\left(h,k\right)\to 0 \text{ khi } (h,k)\to(0,0)$$

Vậy $\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\right) + r(h,k),\ r(h,k) = 0(h^2 + k^2).$

Do đó với $h,\ k$ khá bé thì $\Delta f(x_0, y_0)$ cùng dấu với dấu của dạng toàn phương của $h,\ k$

$$\frac{1}{2}\left(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\right)$$

Nếu $\Delta = B^2 - AC < 0$ thì A xác định dấu đồng thời dạng toàn phương xác định dấu, cùng dấu với dấu của A. Điều này chứng tỏ: Nếu $\Delta < 0$ thì hàm số đạt cực trị tại (x_0, y_0) và đạt cực đại nếu $A < 0$, đạt cực tiểu nếu $A > 0$.

Nếu $\Delta = B^2 - AC > 0$ thì dạng toàn phương đổi dấu. Điều này chứng tỏ: Nếu $\Delta > 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại (x_0, y_0) .

Nếu $\Delta = B^2 - AC = 0$ thì dấu của $\Delta f(x_0, y_0)$ phụ thuộc vào dấu của $r(h,k)$. Việc xét dấu của $r(h,k)$ là tương đối phức tạp. Vì thế ta chỉ minh họa cho trường hợp này qua hai ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1.21: Xét cực trị của hàm số

$$z = x^4 + y^4$$

Giải: Nhận xét: Hàm số z khả vi mọi cấp trên 3^2, ta có thể áp dụng định lý 1.16.

* Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 = 0 \\ z'_y = 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

* Tính biệt số Δ tại điểm dừng

$$A = z''_{x^2} = 12x^2,\ B = z''_{xy} = 0,\ C = z''_{y^2} = 12y^2$$
$$\Delta = -144x^2y^2$$
$$\Delta(0,0) = 0$$

* Ta nhận thấy: $z(0,0) = 0,\ z = x^4 + y^4 > 0,\ \forall (x,y) \neq (0,0)$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $(0,0)$ và $z_{\min} = z(0,0) = 0$

Ví dụ 1.22: Xét cực trị của hàm số

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

Giải:

Nhận xét: Hàm số z khả vi mọi cấp trên 3^2, ta có thể áp dụng định lý 1.16.

* Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ z'_y = 4y^3 - 2y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 \\ 2x^3 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Nhận được ba điểm dừng:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

* Tính biệt số Δ tại điểm dừng

$A = z''_{x^2} = 12x^2 - 2,\ B = -2,\ C = 12y^2 - 2$

$\Delta = 4 - 4(6x^2 - 1)\left(6y^2 - 1\right)$

$\Delta(0,0) = 0$, Δ (1, 1) = Δ(-1, -1) = -96 < 0 và A (1, 1) = A(-1, -1) = 10 > 0

* Ta nhận thấy z(0,0) = 0.

Với x = y = $\frac{1}{n}$ thì $z\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) < 0$ với n > 1

Với x = $\frac{1}{n}$, y = - $\frac{1}{n}$ thì $z\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} > 0$

Như vậy trong bất kỳ lân cận nào của gốc toạ độ ta luôn tìm được các điểm (tìm được n) để hàm đổi dấu, chứng tỏ hàm không đạt cực trị tại (0, 0)

Vậy hàm đạt cực tiểu tại (1,1) và (-1, -1) và $z_{\min} = z(-1,-1) = z(1,1) = -2$

1.4.2. Cực trị có điều kiện

A. Định nghĩa và điều kiện cần

Điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gọi là điểm cực đại của hàm số f(x, y) với ràng buộc (hoặc có điều kiện) $\varphi(x, y) = 0$ nếu thoả mãn $\varphi(M_0) = 0$ đồng thời tồn tại lân cận đủ bé của M_0 trên đường cong ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$, có bất đẳng thức $f(M) < f(M_0)$

Tương tự ta có khái niệm điểm cực tiểu của hàm số với ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$

Để đơn giản, bài toán tìm cực trị của hàm hai biến với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ được kí hiệu như sau:

$$\begin{cases} \text{ext } f(x, y) & (1.35) \\ \varphi(x, y) = 0 & (1.36) \end{cases}$$

trong đó ext là viết tắt của từ extremum nghĩa là cực trị.

Định lý 1.17 : *Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số f(x,y) với điều kiện (1.36) và thoả mãn:*

1. *Các hàm f(x, y) và $\varphi(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ của đường cong ràng buộc (1.36)*

2. *$M_0(x_0, y_0)$ không phải là điểm dừng của hàm $\varphi(x,y)$.*

Khi đó tồn tại số thực λ_0 thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases} \tag{1.37}$$

Chú ý:

a. Nếu từ ràng buộc $\varphi(x,y)$ ta giải ra được một biến, chẳng hạn $y=y(x)$, rồi thay vào hàm mục tiêu đã cho : $f\left(x,y(x)\right)$ thì ta sẽ có bài toán tìm cực trị tự do của hàm một biến. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, việc đưa về bài toán cực trị tự do với số biến ít hơn là rất khó khăn.

b. Hàm số $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ được gọi là hàm Lagrange và λ được gọi là nhân tử Lagrange. Như vậy với điều kiện cho phép ta sẽ đi tìm điểm dừng (x_0, y_0, λ_0) của hàm Lagrange (do điều kiện tiên quyết $\varphi(x_0,y_0)=L'_\lambda(x_0,y_0,\lambda_0)=0$), tiếp theo xem xét một số các điều kiện của bài toán (1.35), (1.36) để có kết luận chính xác xem điểm (x_0, y_0) có phải là điểm cực trị có điều kiện hay không.

c. Định lí 1,17 có thể được mở rộng cho trường hợp hàm n biến và m ràng buộc. Sau đây ta phát biểu cho trường hợp hàm 3 biến và có 2 ràng buộc.

Xét bài toán

$$\begin{cases} \text{ext}\, f(x,y,z) & (1.38) \\ \varphi_1(x,y,z)=0 & (1.39) \\ \varphi_2(x,y,z)=0 & (1.40) \end{cases}$$

Định lý 1.18 : *Giả sử $M_0(x_0,y_0,z_0)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số $f(x,y,z)$ với điều kiện (1.39), (1.40) và thoả mãn:*

1. *Các hàm $f(x,y,z)$, $\varphi_1(x,y,z)$, $\varphi_2(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong lân cận của $M_0(x_0,y_0,z_0)$ của các mặt cong ràng buộc (1.39), (1.40)*

2. *Các định thức Jacobi $\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}$, $\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(y,z)}$, $\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(z,x)}$ không đồng thời bằng 0* *tại* $M_0(x_0, y_0, z_0)$

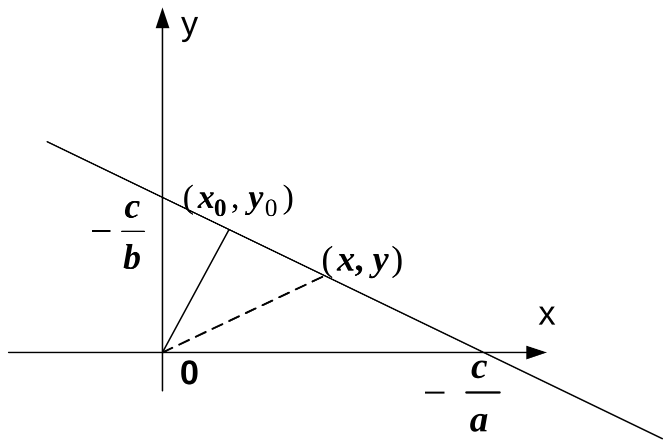
Khi đó tồn tại các số thực $\lambda_0,\ \mu_0$ *thoả mãn hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+\lambda_0\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+\mu_0\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+\lambda_0\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+\mu_0\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)+\lambda_0\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)+\mu_0\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases} \qquad (1.41)$$

Ví dụ 1.23: Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với ràng buộc

$$ax + by + c = 0,\quad c \neq 0,\quad a^2 + b^2 > 0.$$

Giải: Về hình học, đây là bài toán tìm cực trị của bình phương khoảng cách từ gốc toạ độ đến các điểm trên đường thẳng (H.1.10). Vậy bài toán có duy nhất cực tiểu đó là chân đường vuông góc hạ từ O tới đường thẳng.



H.1.10 .

* Ta lập hàm Lagrange: $L = x^2 + y^2 + \lambda(ax + by + c)$

* Tìm điểm dừng của L: $\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda a = 0 \\ L'_y = 2y + \lambda b = 0 \\ L'_\lambda = ax + by + c = 0 \end{cases}$

Ta thay $x = -\dfrac{\lambda a}{2},\ y = -\dfrac{\lambda b}{2}$ vào phương trình cuối của hệ sẽ nhận được:

$$-\frac{\lambda}{2}(a^2+b^2) = -c,\ \ \lambda = \frac{2c}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{ac}{a^2+b^2},\ \ y = -\frac{bc}{a^2+b^2}$$

* Điểm dừng duy nhất M0 $\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}, -\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$ là điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu bằng $\frac{c^2}{a^2+b^2}$.

Ví dụ 1.24: Giải bài toán

$$\begin{cases} \text{ext } xy, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Giải: * Ta lập hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda\left[(x-1)^2 + y^2 - 1\right]$

* Tìm điểm dừng của hàm Lagrange

$$\begin{cases} L_x^{'} = y + 2\lambda(x-1) = 0 \\ L_y^{'} = x + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda^{'} = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Nếu $y = 0$, phương trình thứ hai cho $x = 0,$ suy ra phương trình thứ nhất cho $\lambda = 0$. Vậy ta có điểm dừng $M_0(0,0)$

Nếu $y \neq 0$, phương trình thứ hai cho $\lambda = -\frac{x}{2y},$ thay vào phương trình thứ nhất ta được $y^2 = x(x-1)$. Tiếp tục thay vào phương trình thứ ba , ta có $2x^2 - 3x = 0$.

Vậy ta có các điểm dừng $M_1(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),\ M_2(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ứng với các giá trị $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Nhận xét: Ràng buộc của bài toán là đường tròn có tâm $C(1,0)$, bán kính bằng 1. Hàm mục tiêu $z = xy$ khả vi tại mọi điểm, dương tại nửa trên đường tròn, âm tại nửa dưới đường tròn và bằng không tai $M_0(0,0)$.

Vậy hàm đạt cực đại tại $M_1(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, giá trị cực đại cũng là GTLN, đạt cực tiểu tại $M_1(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, giá trị cực tiểu cũng là GTNN,

$$z_{\text{Max}} = z(M_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4},\quad z_{\text{Min}} = z(M_2) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Hàm số không đạt cực trị tại $M_0(0,0)$. Bài toán trên có thể được đưa về bài toán tìm cực trị không ràng buộc của hàm một biến, tuy nhiên tính toán sẽ phức tạp hơn.

Ví dụ 1.25: Giải bài toán

$$\begin{cases} \operatorname{ext} z = \sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}, \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = a, \\ x_1 > 0,\ x_2 > 0, ..., x_n > 0,\ a > 0. \end{cases}$$

Giải: * Ta lập hàm Lagrange $L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = \sqrt[n]{x_1.x_2...x_n} + \lambda\left[x_1 + x_2 + ... + x_n - a\right]$

* Tìm điểm dừng của hàm Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{x_1.x_2....x_n}}{n.x_1.x_2...x_n} x_2...x_n + \lambda = \dfrac{z}{nx_1} + \lambda = 0, \\ \dfrac{z}{nx_2} + \lambda = 0, \\ .... \\ \dfrac{z}{nx_n} + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = a. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được duy nhất điểm dừng $M(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, ..., \frac{a}{n}) \in \mathbb{R}^n$. Hàm mục tiêu z khả vi trên mặt phẳng $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$ trong không gian n chiều. Vậy hàm số đạt cực trị tại $M(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, ..., \frac{a}{n})$. Theo ý nghĩa của bài toán, $M(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, ..., \frac{a}{n})$ phải là điểm cực đại

$$z_{\text{Max}} = z\left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, ..., \frac{a}{n}\right) = \frac{a}{n}$$

Từ đây, ta nhận được bất đẳng thức Cauchy:

$$\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},\ x_k > 0,\ k = 1, 2, ..., n.$$

B. Điều kiện đủ

Định lý 1.19: *Giả sử f(x, y) và $\varphi(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục ở lân cận (x_0,y_0) và (x_0, y_0, λ_0)) là điểm dừng của hàm Lagrange. Khi đó:*

***1.** Nếu* $\mathrm{d}^2L(x_0, y_0, \lambda_0) = L''_{x^2}(x_0, y_0, \lambda_0)\mathrm{d}x^2 + 2L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + L''_{y^2}(x_0, y_0, \lambda_0)\mathrm{d}y^2$

xác định dấu đối với dx, dy trong miền thoả mãn ràng buộc:

$$\mathrm{d}\varphi(x_0, y_0) = \varphi'_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + \varphi'_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \ne 0$$

thì f(x,y) đạt cực trị có ràng buộc tại (x_0, y_0).

Đạt cực đại nếu $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ *và đạt cực tiểu nếu* $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$.

***2.** Nếu* $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0)$ *không xác định dấu trong miền nói trên thì hàm không đạt cực trị ràng buộc tại (x_0, y_0).*

Ví dụ 1.26: Giải bài toán $\begin{cases} \text{ext}(x+y+z), \\ xyz = 1, \\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0. \end{cases}$

Giải:

* Hàm Lagrange: L(x,y,z, λ) = x + y + z + λ(xyz - 1)

* Tìm điểm dừng của hàm Lagrange

$$\begin{cases} L'_x = 1 + \lambda yz = 0 \\ L'_y = 1 + \lambda zx = 0 \\ L'_z = 1 + \lambda xy = 0 \\ L'_\lambda = xyz - 1 = 0 \end{cases}$$

Nhân 2 vế của phương trình thứ nhất với x và để ý đến phương trình thứ tư sẽ nhận được $\lambda = -1$ và x = y = z = 1

* Xét dấu của $d^2L(1,1,1,-1)$ với dx, dy, dz thoả mãn $d(xyz)\big|_{x=y=z=1} = 0$ và $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$

Ta có $L''_{x^2} = 0 = L''_{y^2} = L''_{z^2}$, $L''_{xy} = -z$, $L''_{yz} = -x$, $L''_{zx} = -y$

Suy ra $d^2L(1,1,1,-1) = -2(dxdy + dydz + dzdx)$

Mặt khác $d(xyz)\big|_{(1,1,1)} = (yzdx + zxdy + xydz)\big|_{(1,1,1)} = dx + dy + dz = 0$

Từ đó dz = - dx – dy . Thay dz vào biểu thức trên, sẽ có

$$d^2L(1,1,1,-1) = -2(dxdy - (dx+dy)^2) = (dx+dy)^2 + dx^2 + dy^2 > 0$$

khi $dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0$

Vậy hàm số đạt cực tiểu có ràng buộc tại (1,1,1) và Min (x + y + z) = 3

1.4.3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trong miền đóng

Tương tự như hàm số một biến số, hàm nhiều biến có thể đạt được GTLN, GTNN trên miền đóng tại các điểm trên biên, hoặc tại điểm trong mà tại đó hàm số không có các đạo hàm riêng, hoặc tại điểm trong mà tại đó hàm số có các đạo hàm riêng. Nếu GTLN, GTBN đạt được tại điểm trong thì điểm đó phải là điểm cực trị địa phương, trong trường hợp thứ ba đó chính là điểm dừng. Vậy để tìm GTLN, GTNN của hàm trên miền đóng, ta chỉ cần so sánh giá trị của hàm tại ba loại điểm: điểm dừng, điểm tại đó hàm không có đạo hàm riêng (hai loại này gọi chung là điểm tới hạn) và các điểm biên.

Ví dụ 1.27: Tìm GTLN, GTBN của hàm số $z=\cos x+\cos y-\cos(x+y)$ trong tam giác đóng giới hạn bởi trục $Ox,\ Oy$ và đường thẳng $x+y=2\pi$

Giải: * Tìm các điểm dừng trong miền mở: $\left\{(x,y):\ x>0,\ y>0,\ x+y<2\pi\right\}$

$$\begin{cases} z'_x=-\sin x+\sin(x+y)=0 \\ z'_y=-\sin y+\sin(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$$

* Trên biên $y=0,\ 0\le x\le 2\pi$ thì $z=1$

* Trên biên $x=0,\ 0\le y\le 2\pi$ thì $z=1$

* Trên biên $x+y=2\pi,\ 0\le x\le 2\pi$ thì $z=\cos x+\cos(2\pi-x)-1=2\cos x-1$

$z'=-2\sin x=0\Leftrightarrow x=\pi$ và điểm biên: $x=0, x=2\pi$

$$\text{Max}\left\{1,\ z\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),\ z(\pi,\pi),\ z(o,2\pi),\ z(2\pi,o)\right\}=\frac{3}{2}$$

$$\text{Min}\left\{1,\ z\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),\ z(\pi,\pi),\ z(o,2\pi),\ z(2\pi,o)\right\}=-3$$

Vậy GTLN bằng $\frac{3}{2}$, GTNN bằng -3

Ví dụ 1.28: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z=a^2x^2+b^2y^2-(ax^2+by^2)^2,\ a>b>0$ thỏa mãn điều kiện: $x^2+y^2=1$

Giải: * Lập hàm Lagrange $L(x,y,\lambda)=z+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$

* Tìm các điểm dừng $\begin{cases} 2a^2x-4ax\left(ax^2+by^2\right)+2\lambda x=0 \\ 2b^2y-4by\left(ax^2+by^2\right)+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$

$$(x,y)=(0,\pm1),(\pm1,0),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{Max}\left\{ z(0,\pm1),\ z(\pm1,0),\ z\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}=\frac{1}{4}(a-b)^2$$

$$\text{Min}\left\{ z(0,\pm1),\ z(\pm1,0),\ z\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}=0$$

Vậy GTLN bằng $\frac{1}{4}(a-b)^2$, GTNN bằng 0

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG 1

- **Giới hạn :** Kí hiệu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=l$ hay $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l.$

  $$d(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

  $$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0:\ 0<d(M_0,M)<\delta\Rightarrow\left|f(M)-l\right|<\varepsilon)$$

- **Sự liên tục của hàm số:** Hàm số f(M) xác định trên miền D và $M_0\in D$. Ta nói rằng hàm số f(M) liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$

- **Đạo hàm riêng:** Đặt $\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ gọi đó là số gia riêng của hàm f(x, y) theo biến x tại (x_0, y_0) và ta có:

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}\text{, hoặc kí hiệu } f'_x(x_0,y_0),\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

  Tương tự ta có định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số đối với y tại $M_0(x_0, y_0)$ và ký hiệu:

  $$u'_y(x_0,y_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0),\ \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y},\ f'_y(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

  Có thể chuyển toàn bộ các phép tính đạo hàm của hàm một biến số: cộng, trừ, nhân, chia, … sang phép tính đạo hàm riêng.

- **Vi phân toàn phần của hàm số f(x, y) tại (x_0, y_0) :**

  $$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$$

$\Delta f \approx df$. Suy ra $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)$

- **Đạo hàm riêng cấp cao**

$$f''_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- **Công thức Schwarz :** $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$.

- **Vi phân cấp cao**

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

Người ta dùng kí hiệu luỹ thừa tượng trưng để viết gọn như sau:

$$\mathrm{d}f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right) f(x,y),\quad \mathrm{d}^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f(x,y),$$

- Đạo hàm của hàm số hợp

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

- **Đạo hàm của hàm ẩn** **1.** Hàm ẩn 1 biến: $F(x,y) = 0,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$,

2, Hàm ẩn 2 biến $F(x,y,z) = 0,\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$

3. Hệ hàm ẩn

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v) = 0 \\ F_2(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,v)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(x,u)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,u)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}}$$

- **Đạo hàm theo hướng.** Nếu hàm số u(x, y, z) khả vi tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và $\vec{\ell}$ bất kỳ có các côsin chỉ phương $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ thì:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

- **Građiên:** grad $u(M_0) = (u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0)) = u'_x(M_0)\vec{i} + u'_y(M_0)\vec{j} + u'_z(M_0)\vec{k}$

  trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz.

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{\ell}} = ch_{\vec{\ell}} \text{ grad} u(M_0)$$

- **Cực trị:** Giải hệ $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$ để tìm điểm dừng (x_0, y_0)

$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ .Gọi $\Delta = B^2 - AC$

Nếu $\Delta > 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại (x_0, y_0)

Nếu $\Delta = 0$ thì chưa kết luận gì được về (x_0, y_0)

Nếu $\Delta < 0$ thì hàm số đạt cực trị tại (x_0, y_0)

Cụ thể: đạt cực đại nếu A < 0, đạt cực tiểu nếu A > 0

- **Điều kiện cần của cực trị có điều kiện.** Phương pháp nhân tử Lagrange

Xét bài toán

$$\begin{cases} \text{ext } f(x,y), \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Tìm (x_0, y_0, λ_0) thoả mãn hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x(x\ ,y\ ) + \lambda\varphi'_x(x\ ,y\ ) = 0 \\ f'_y(x\ ,y\ ) + \lambda\varphi'_y(x\ ,y\ ) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

Xét bài toán

$$\begin{cases} \text{ext } f(x,y,z) \\ \varphi_1(x,y,z) = 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Tìm $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\lambda\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y,z)+\mu\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\lambda\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y,z)+\mu\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)+\lambda\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x,y,z)+\mu\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ \varphi_1(x,y,z)=0 \\ \varphi_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

- **Điều kiện đủ**

Giả sử f(x, y) và $\varphi(x,y)$ *có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục ở lân cận* (x_0,y_0) *và* (x_0,y_0,λ_0) *là điểm dừng của hàm Lagrange. Khi đó:*

1. *Nếu* $\mathrm{d}^2L(x_0,y_0,\lambda_0)=L''_{x^2}(x_0,y_0,\lambda_0)\mathrm{d}x^2+2L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+L''_{y^2}(x_0,y_0,\lambda_0)\mathrm{d}y^2$ *xác định dấu đối với dx, dy trong miền thoả mãn ràng buộc:*

$$\mathrm{d}\varphi(x_0,y_0)=\varphi'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+\varphi'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y=0,\ \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\neq 0$$

thì f(x,y) đạt cực trị có ràng buộc tại (x_0, y_0).

Đạt cực đại nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)>0$ *và đạt cực tiểu nếu* $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)<0$.

2. *Nếu* $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ *không xác định dấu trong miền nói trên thì hàm không đạt cực trị ràng buộc tại* (x_0, y_0).

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a. $z = \ln xy$, **b.** $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,

c. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$, **d.** $z = \dfrac{1}{y - x^2}$.

1.2. Tìm các giới hạn kép sau:

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2 + y^2}$, **b.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2x^2}{x^2 + y^4}$, **c.** $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{y^2 + x^2}{x^4 + y^2}$,

d. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x}$, **e.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln\left(x + e^y\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, **f.** $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(x^2 + y^2\right)e^{-(x+y)}$.

1.3. Tìm $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x, y)$ và $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$

a. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4},\ a = \infty,\ b = \infty,$ **b.** $f(x, y) = \dfrac{x^y}{x^y + 1},\ a = \infty,\ b = 0^+,$

c. $f(x, y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x + y},\ a = \infty,\ b = +\infty,$ **d.** $f(x, y) = \dfrac{1}{xy} tg\dfrac{xy}{xy + 1},\ a = 0,\ b = +\infty.$

1.4. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

liên tục theo từng biến tại $(0,0)$ (khi cố định biến kia) nhưng không liên tục theo tập hợp các biến

1.5. Tính đạo hàm riêng các hàm số sau:

a. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, **b.** $z = y^2 \sin\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$,

c. $z = x^{y^3}, x > 0$, **d.** $z = \mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$.

1.6. Chứng minh các hệ thức sau đây với các điều kiện tương ứng

a. $xz'_x + yz'_y = 2$, với $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$,

b. $yz'_x + xz'_y = 0$, với $z = f(x^2 - y^2)$, f(t) khả vi.

1.7. Tính đạo hàm của các hàm số hợp sau:

a. $z = e^{u^2 - 2v^2}$, $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$, ,

b. $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

1.8. Tính vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a. $z = \ln tg\dfrac{y}{x}$, **b.** $z = e^x(\cos y + x\sin y)$,

c. $u = x^{y^2 z}$, **d.** $z = \text{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$.

1.9. Tính gần đúng các số sau đây :

a. $A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$, **b.** $B = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$.

1.10. Cho $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định từ phương trình

$z = xe^{\frac{z}{y}}$. Hãy tính gần đúng $f(0,02; 0,99)$.

1.11. Cho hàm số $u = \dfrac{x+z}{y+z}$. Tính các đạo hàm riêng u_x', u_y' biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định từ phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

1.12. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình tương ứng

a. $x^3y - y^3x = a^2$, $a = \text{const}$, tính y' ?

b. $\text{arctg}\dfrac{\text{x+y}}{\text{a}} = \dfrac{y}{a}$, $a = \text{const}$, tính y' ?

c. $x + y + z = e^z$, tính z_x', z_y' ?

d. $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, tính z_x', z_y' ?

1.13. Chứng minh các hệ thức sau đây, với các điều kiện tương ứng

a. $z''_{x^2} z''_{y^2} = (z''_{xy})^2$, với $z = xf(\dfrac{x}{y})$, f(t) khả vi liên tục đến cấp hai,

b. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, với $u = \ln\dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

c.. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, với $u = \ln r^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

d. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, với $u = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.14. Tính vi phân cấp hai của các hàm số

a. $z = xy^2 - x^2y$, **b.** $z = \ln(x - y)$, **c.** $z = \dfrac{1}{2(x^2 + y^2)}$.

1.15. Cho $u = xy^2z^3$, $M_0(1, 2, -1)$, $M_1(0, 4, -3)$. Tính $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial \overline{M_0M_1}}$.

1.16. Cho $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, $\vec{r} = (x, y, z)$, . Tính $\dfrac{\partial u(M\ )}{\partial \vec{r}}$, $\vec{r}$ gọi là véc tơ bán kính.

Khi nào $\dfrac{\partial u(M\ )}{\partial \vec{r}} = |\text{grad}u|$.

1.17. Cho $u=\dfrac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Khi nào $\dfrac{\partial u(M\ )}{\partial \vec{l}}=0$.

1.18. Tìm cực trị của các hàm số

a. $z=e^x(x+y)(x-y+4)$,

b. $z=x^3+y^3-3xy$,.

c. $z=(2ax-x^2)(2by-y^2),\ ab\neq 0$,

d. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$,

e. $z=x^3+y^3-x-y$,

f. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$,

g. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, với x > 0, y > 0 ,

h. $z=x^3+y^3-x^2y$.

1.19. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến mặt phẳng *x + 2y + 3z = 3.*

1.20. Cho ellipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, tìm các điểm trên đó có khoảng cách gần nhất đến đường thẳng 3x – 4y = 0.

1.21. Tìm a, b, c sao cho thể tích $V=\dfrac{4}{3}\pi abc$ của ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$ đi qua điểm (1,2,1) là nhỏ nhất có thể có được.

1.22. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x,y,z)=4-z$ trên ellipse là giao của mặt trụ $x^2+y^2=8$ và mặt phẳng $x+y+z=1$.

1.23. Tìm thể tích lớn nhất có thể có của hình hộp chữ nhật có các mặt song song với các mặt tọa độ, một đỉnh ở gốc tọa độ và đỉnh đối qua đường chéo của nó nằm trên mặt phẳng $4x+2y+z=2$.

1.24. Phân tích số dương a thành tích của bốn số dương có tổng bé nhất.

1.25. Hình hộp nào nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất ?

1.23. Tìm hình hộp chữ nhật với thể tích V cho trước có diện tích toàn phần bé nhất.

1.27. Tìm GTLN, GTBN của các hàm số sau:

a. $z=x^2+2xy-4x+8y$ trong miền $\{(x,y):\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2\}$,

b. $z=(a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+c^2-\left[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c^2\right]^2$,
trong miền $\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1,\ a>b>c>0\}$,

c. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ trong miền $\left\{(x,y):\ 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2},\ 0\leq y\leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$,

d. $z=e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2)$ trong miền tròn: $x^2+y^2\leq 1$.