CHƯƠNG V. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Cũng như phép tính đạo hàm và vi phân, phương trình vi phân (PTVP) có tầm quan trọng rất lớn và có ứng dụng rộng rãi trong mọi lĩnh vực khoa học kỹ thuật và kinh tế. Cụ thể là nhiều bài toán kinh tế, kỹ thuật điện tử, y học,... đều dẫn đến phương trình vi phân. Trong toán học, phương trình vi phân là một chuyên ngành rất phát triển. Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản về phương trình vi phân thường (gọi vắn tắt là phương trình vi phân). Để học tốt chương này,yêu cầu người học phải nhận dạng đươc từng loại phương trình vi phân, qua đó mới có thể tích phân được (tìm được nghiệm), bởi vì không có một phương pháp chung nào để giải phương trình vi phân. Giải PTVP là một quá trình tính tích phân, vì thế yêu cầu người học phải thông thạo phép tính tích phân và vi phân, đó là nội dung cốt lõi của toán học cao cấp.

Một PTVP là một phương trình có dạng $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ hay $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$ trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm, $y', y'', ..., y^{(n)}$ là các đạo hàm của hàm số phải tìm(trong PTVP nhất thiết phải có mặt ít nhất đạo hàm cấp *k* nào đó của hàm phải tìm). Cấp cao nhất của đạo hàm của hàm số *y* phải tìm có mặt trong PTVP được gọi là cấp của PTVP, chẳng hạn:

$$y' + x = 0 \qquad \text{(PTVP cấp 1)}$$

$$y'' + (y')^2 = 0 \qquad \text{(PTVP cấp 2)}$$

Hàm số $y = y(x)$ là một nghiệm của PTVP nếu như nó thoả mãn phương trình tức là thay nó vào phương trình sẽ nhận được đồng nhất thức. Chẳng hạn với phương trình $y' = x$ ta có nghiệm $y = \frac{x^2}{2}$ và $y = \frac{x^2}{2} + C$ trong đó *C* là hằng số tuỳ ý.

Giải hay tích phân một PTVP là tìm tất cả các nghiệm của nó. Về mặt hình học, mỗi nghiệm của PTVP là một đường cong (đồ thị của nghiệm), vì thế người ta gọi đường cong đó là đường cong tích phân của PTVP.

PTVP được gọi là tuyến tính cấp *n* nếu hàm số *F* là bậc nhất đối với $y, y', ..., y^{(n)}$, tức là phương trình có dạng:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

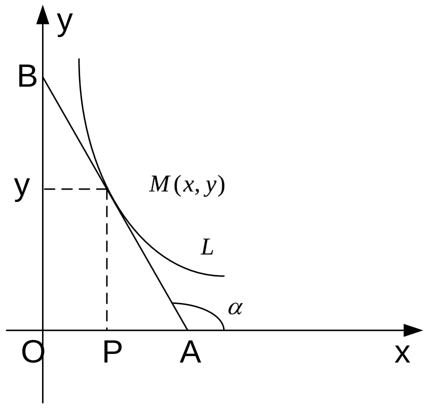
trong đó $a_1(x), ..., a_n(x), f(x)$ là các hàm số cho trước.

Nếu $f(x) \equiv 0$ thì người ta gọi đó là phương trình tuyến tính cấp *n* thuần nhất.

Nếu $f(x) \neq 0$ thì người ta gọi đó là phương trình tuyến tính cấp *n* không thuần nhất.

5.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Trước hết ta xét một bài toán hình học dẫn đến PTVP.Hãy tìm phương trình đường cong L $(y = y(x))$ có tính chất: mỗi đoạn của tiếp tuyến với đường cong *C* nằm giữa hai trục toạ độ đều bị tiếp điểm chia thành hai phần bằng nhau.



H.5.1

Giả sử $M(x,y) \in L$, khi đó hệ số góc tiếp tuyến với đường cong tại *M* là:

$$y'(x) = tg\alpha = -\frac{y}{PA} \text{ (xem H.5.1)}$$

Do *M* là trung điểm của *AB* nên $OP = PA = x$, suy ra $y' = -\frac{y}{x}$.

Như vậy hàm số phải tìm thoả mãn PTVP cấp 1. Sau này chúng ta sẽ có cách giải phương trình trên, nhưng trước hết ta có thể thử lại rằng hàm số $y = \frac{C}{x}$ thoả mãn phương trình với *C* là hằng số tuỳ ý. Tóm lại, họ các đường hyperbol có tính chất đã đặt ra.

Tiếp theo chúng ta xét bài toán " tăng trưởng và tàn lụi ". Nhiều quá trình trong thực tế có chứa các đại lượng tăng hoặc giảm với tốc độ tỉ lệ với độ lớn của nó. Chẳng hạn, khối lượng của một chất phóng xạ giảm tỉ lệ với khối lượng của nó. Theo ý nghĩa của đạo hàm, các quá trình như vậy có mô hình toán học là: $y' = ky$. Ta có thể thử lại rằng hàm số $y = Ce^{kt}$ thoả mãn phương trình với *C* là hằng số tuỳ ý.

Định luật cơ bản trong cơ học cổ điển của Newton, chúng ta đã khá quen thuộc, được mô tả bởi PTVP: $m\overrightarrow{r(t)}'' = \overrightarrow{F}$, ở đây $\overrightarrow{r(t)}$ là véc tơ bán kính của chất điểm chịu tác dụng của lực $\overrightarrow{F}$.

5.1.1. Các khái niệm cơ bản

Dạng tổng quát của PTVP cấp 1:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ hay } \quad F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \qquad (5.1)$$

Nếu từ (5.1) giải ra được *y'* thì ta có PTVP cấp 1 đã giải ra đối với đạo hàm:

$$y' = f(x, y) \qquad (5.2)$$

A. Định lý tồn tại duy nhất nghiệm Cauchy-Peano

Cho phương trình (5.2): $y' = f(x, y)$ và $(x_0, y_0) \in D$

Định lý 5.1: *Nếu f(x,y) liên tục trên miền D trong mặt phẳng Oxy thì tồn tại nghiệm*

$$y = y(x) \text{ trong lân cận } x_0 \text{ thoả mãn } y_0 = y(x_0). \qquad (5.3)$$

Ngoài ra nếu $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *cũng liên tục trên miền D thì nghiệm tìm được là duy nhất.*

Bài toán tìm nghiệm của PTVP thoả mãn điều kiện (5.3) gọi là bài toán Cauchy. Điều kiện (5.3) gọi là điều kiện ban đầu.

B. Nghiệm tổng quát, tích phân tổng quát

Ta gọi nghiệm tổng quát của PTVP cấp 1 là hàm số

$$y = \varphi(x, C) \qquad (5.4)$$

trong đó *C* là hằng số tuỳ ý, thoả mãn các điều kiện sau:

1. Thoả mãn PTVP với mọi hằng số *C*.

2. Có thể tìm một giá trị $C = C_0$ sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y_0 = y(x_0) = \varphi(x_0, C_0),\ (x_0, y_0) \in D.$$

Nghiệm tổng quát cho dưới dạng ẩn:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad (5.5)$$

Hệ thức này gọi là tích phân tổng quát của PTVP cấp 1. Về mặt hình học, nghiệm tổng quát hay tích phân tổng quát xác định một họ đường cong trong mặt phẳng, phụ thuộc vào một tham số, không cắt nhau gọi là các đường cong tích phân của PTVP cấp 1.

C. Nghiệm riêng, tích phân riêng

Hàm số $y = \varphi(x, C_0)$ được gọi là một nghiệm riêng của PTVP, tức là được suy ra từ nghiệm tổng quát (5.4) với hằng số *C* xác định $C = C_0$. Tương tự ta có một tích phân riêng của PTVP

$$\Phi(x, \varphi, C_0) = 0$$

Chú ý:

a. Về mặt hình học, định lí tồn tại và duy nhất nghiệm khẳng định rằng trong một lân cận nào đó của điểm $(x_0, y_0) \in D$ tồn tại duy nhất một đường cong tích phân của phương trình (5.2) đi qua điểm ấy.

b. PTVP còn có các nghiệm khác nữa, không thể nhận được từ nghiệm tổng quát, được gọi chung là nghiệm kỳ dị.

5.1.2. Các PTVP cấp một thường gặp

A. Phương trình với biến số phân li

1. Định nghĩa: Phương trình với biến số phân li (phương trình tách biến) là PTVP có dạng:

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0 \qquad (5.6)$$

Chẳng hạn: $\dfrac{x^2dx}{1+x^2} + \dfrac{ydy}{1+y^2} = 0$ là phương trình với biến số phân li.

2. Phương pháp tích phân

Giả sử phương trình (5.6) có nghiệm $y = y(x)$ khi đó ta nhận được hệ thức:

$$f_1(x)dx = -f_2(y)dy = -f_2(y)y'(x)dx$$

Lấy tích phân hai vế ta có :

$$\int f_1(x)dx = -\int f_2(y)y'dx + C = -\int f_2(y)dy + C$$

Vậy $\displaystyle\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C \qquad (5.7)$

Đó là tích phân tổng quát của (5.6)

Chú ý : Phương trình dạng : $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ có thể đưa về dạng tách biến. Thật vậy, nếu $M_2(x) \neq 0$ và $N_1(y) \neq 0$ thì chia hai về của phương trình cho $M_2(x).N_1(y)$ sẽ được :

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

Đó là phương trình với biến số phân li.

Nếu $M_2(x) = 0$ tại $x = a$ hoặc $N_1(y) = 0$ tại $y = b$ thì bằng cách thay trực tiếp nhận được $x = a$ hoặc $y = b$ là nghiệm.

Ví dụ 5.1 : Tìm tích phân tổng quát của phương trình :

$$x^3(y+1)dx + (x^4-1)(y-2)dy = 0$$

Giải : Với $y + 1 \neq 0$ và $x^4 - 1 \neq 0$ ta có :

$$\frac{x^3}{x^4-1}dx+\frac{y-2}{y+1}dy=0$$

Tích phân tổng quát là :

$$\frac{1}{4}\int\frac{d(x^4-1)}{x^4-1}dx+\int\left(1-\frac{3}{y+1}\right)dy=C$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|+y-3\ln\left|y+1\right|=C$$

Ngoài ra $y+1=0$ hay $y=-1$ và $x^4-1=0$ hay $x=\pm1$ là các nghiệm của PTVP.

Ví dụ 5.2 : Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$y'=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$
$$y(0)=0$$

Giải : $y'=\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$

$\cos y\neq 0$ tức $y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$$\frac{dy}{\cos y}=2\cos xdx$$

$$\int\frac{dy}{\cos y}=2\int\cos xdx+C$$

$$\ln\left|\mathrm{tg}(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})\right|=2\sin x+C$$

Từ điều kiện ban đầu suy ra : $\ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}\right|=C,\Rightarrow C=0$

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy đã cho là $\ln\left|\mathrm{tg}(\dfrac{y}{2}+\dfrac{\pi}{4})\right|=2\sin x$.

B. Phương trình đẳng cấp cấp một

1. Định nghĩa : Phương trình đẳng cấp cấp một là PTVP có dạng

$$y'=f(\frac{y}{x}),\ \text{hay}\ y'=f(t),\ t=\frac{y}{x} \qquad (5.8)$$

Dễ nhận thấy, PTVP (5.8) không thay đổi khi ta thay x bởi kx và y bởi ky .

2. Phương pháp tích phân

Ta đặt $t=\dfrac{y}{x}$, đó là hàm của *x*, suy ra $t'=\dfrac{y'}{x}-\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{y'}{x}-\dfrac{t}{x}$

Thay vào phương trình ta sẽ có phương trình đối với biến mới:

$t+xt'=f(t)$ hay $xt'=f(t)-t$

Nếu $f(t)-t\neq 0$ ta nhận được phương trình dạng (5.6)

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{f(t)-t}$$

Nếu $f(t)-t\equiv 0$ tức là $f(\frac{y}{x})=\frac{y}{x}$. Vậy ta có phương trình tách biến dạng (5.6)

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$. Nghiệm tổng quát sẽ là $y=Cx$

Nếu $f(t)-t=0$ tại $t=t_0$, từ đó có $y=t_0.x$, bằng cách thử trực tiếp ta có nghiệm của PTVP là $y=t_0x$

Ví dụ 5.3 : Giải phương trình

$$2xyy'-y^2+x^2=0$$

Giải : Chia hai vế cho x^2 ta được :

$$2\frac{y}{x}y'-(\frac{y}{x})^2+1=0$$

Đặt $t=\dfrac{y}{x}$, $y=tx\Rightarrow y'=t+xt'$, thay vào phương trình ta sẽ nhận được PTVP đối với biến mới

$$2tt'x+t^2+1=0$$

$$\frac{2tdt}{1+t^2}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{2tdt}{1+t^2}=-\int\frac{dx}{x}+C_1$$

$\ln(1+t^2)=-\ln|x|+C_1$ suy ra $1+t^2=\dfrac{C}{x}$, C tùy ý

Trở về biến cũ ta có : $1+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{C}{x}$

Ta có thể biến đổi trong dạng $\left(x-\frac{C}{2}\right)^2+y^2=\frac{C^2}{4}$

Đó là các đường tròn có tâm nằm trên trục *Ox*.

Ví dụ 5.4 : Tích phân phương trình :

$$(y-x+1)dx=(x+y+3)dy$$

Giải :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x-1}{x+y+3}$$

Đây chưa phải là dạng (5.8), tuy nhiên ta có thể đưa được về dạng (5.8) bằng phép đổi biến :

$$\begin{cases} x=u+x_0 \\ y=v+y_0 \end{cases}$$

Thật vậy, với phép đổi biến trên thì $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$ và ta có thể chọn (x_0,y_0) sao cho :

$$\begin{cases} v+y_0-u-x_0-1=v-u \\ u+x_0+v+y_0+3=u+v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0-y_0+1=0 \\ x_0+y_0+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=-1 \end{cases}$$

Khi đó ta có PTVP đối với các biến mới

$$\frac{dv}{du}=\frac{v-u}{v+u}=\frac{\frac{v}{u}-1}{\frac{v}{u}+1}=f\left(\frac{v}{u}\right)$$

Đó là PTVP đẳng cấp cấp một. Ta đặt $t=\frac{v}{u}\Rightarrow\frac{dv}{du}=t+ut'$

$$u\frac{dt}{du}+t=\frac{t-1}{t+1}$$

$$u\frac{dt}{du}=\frac{t-1}{t+1}-t=\frac{-t^2-1}{t+1}$$

$$\frac{(t+1)dt}{t^2+1}=-\frac{du}{u},\int\frac{(t+1)dt}{t^2+1}=-\int\frac{du}{u}+C_1$$

$$\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\text{arctg}t=-\ln|u|+C_1$$

$$\text{arctg}t=\ln\frac{C}{\sqrt{t^2+1}.u}$$

Trở về biến cũ ta sẽ có tích phân tổng quát :

$$\text{arctg}\frac{y+1}{x+2}=\ln\frac{C}{(x+2)\sqrt{1+(\frac{y+1}{x+2})^2}}$$

C. Phương trình tuyến tính cấp một

1. Định nghĩa : PTVP có dạng sau đây được gọi là PTVP tuyến tính cấp 1 :

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{5.9}$$

với $p(x)$, $q(x)$ liên tục trên *(a,b)*. Nói cách khác, PTVP tuyến tính cấp 1 là một PTVP, trong đó hàm số phải tìm và đạo hàm của nó đều ở dạng bậc nhất.

Nếu $q(x)$ không đồng nhất bằng không trên *(a,b)* thì gọi (5.9) là PTVP tuyến tính không thuần nhất.

Nếu $q(x)\equiv 0$ trên *(a,b)* thì gọi nó là PTVP tuyến tính thuần nhất.

2. Phương pháp **tích phân**

Cho phương trình không thuần nhất (5.9). Gọi phương trình vi phân sau đây là PTVP tuyến tính thuần nhất tương ứng với (5.9) :

$$y'+p(x).y=0 \tag{5.10}$$

Trước hết, ta nhận thấy (5.10) là PTVP với biến số phân li. Nghiệm tổng quát của nó có dạng :

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx+C_1$$

$$\mathrm{y}=\mathrm{Ce}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \tag{5.11}$$

Bây giờ ta tìm nghiệm tổng quát của (5.9) bằng phương pháp coi hằng số *C* trong (5.11) là hàm số và gọi đó là phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Cụ thể, sau khi thay vào phương trình (5.9) hàm số

$$y=C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{5.12}$$

ta nhận được PTVP có biến số phân li sau:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1 \tag{5.13}$$

Như vậy tồn tại hàm số *C(x)* phụ thuộc vào một hằng số cộng C_1 tuỳ ý để (5.12) là nghiệm của PTVP (5.9). Chứng tỏ nghiệm tổng quát của (5.9) có dạng :

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{5.14}$$

Nếu trong (5.13) lấy $C_1 = 0$ thì ta được một nghiệm riêng của (5.9). Do đó cũng có thể nói rằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange là phương pháp tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất khi biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng. Dạng nghiệm (5.14) có thể mô tả tổng quát sau đây :

$$y = \overline{y} + y^* \tag{5.15}$$

trong đó $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất tương ứng và y^* là một nghiệm riêng của chính phương trình không thuần nhất.

Dạng (5.15) đúng cho PTVP tuyến tính có cấp bất kỳ nói riêng và đúng cho các hệ có mô hình tuyến tính nói chung.

Ví dụ 5.5 : Tích phân phương trình :

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

Giải : Đặt vào công thức (5.14) trong đó $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x$, ta có :

$$y = Ce^{\int \frac{dx}{x}} + e^{\int \frac{dx}{x}}\int xe^{-\int \frac{dx}{x}}dx$$

Xét với $x > 0$:

$$y = Ce^{\ln x} + e^{\ln x}\int x.e^{-\ln x}dx = Cx + x\int dx = Cx + x^2$$

Xét với $x < 0$

$$y = Ce^{\ln|x|} + e^{\ln|x|}\int x.e^{-\ln|x|}dx = C|x| + |x|\int x.\frac{1}{|x|}dx$$

$$= -Cx - x\int(-1)dx = -Cx + x^2$$

Vì *C* tuỳ ý nên $\forall x \neq 0$, nghiệm tổng quát có thể viết dưới dạng : $y = Cx + x^2$

D. Phương trình Bernoulli

Đây là PTVP không tuyến tính (phi tuyến) tuy nhiên có thể đưa về dạng PTVP tuyến tính bằng cách đổi biến số thích hợp.

1. Định nghĩa : PTVP có dạng sau đây được gọi là phương trình Bernoulli

$$y' + p(x)y = y^{\alpha} q(x) \qquad (5.16)$$

trong đó α là số thực và $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$, các hàm $p(x),\ q(x)$ cho trước, liên tục trên *(a,b)*.

2. Phương pháp tích phân

Chia hai vế của (5.16) cho y^{α} ta sẽ có:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = q(x)$$

Đặt $u(x) = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$ thì $u' = (1-\alpha)\dfrac{y'}{y^{\alpha}}$ (5.17)

Thay vào phương trình trên sẽ nhận được PTVP tuyến tính cấp 1 đối với hàm $u(x)$:

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x) \qquad (5.18)$$

Sau khi tích phân phương trình (5.18), ta trở về biến cũ theo (5.17).

Ví dụ 5.6: Tích phân phương trình:

$$y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$$

Giải: Chia hai vế cho $\sqrt{y}$ sẽ có $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} = e^{\frac{x}{2}}$

Đặt $u = \sqrt{y} \Rightarrow u' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$, phương trình được đưa về dạng: $u' + \dfrac{1}{2}u = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$$u = Ce^{-\int \frac{1}{2}dx} + e^{-\int \frac{1}{2}dx}\int \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}e^{\int \frac{1}{2}dx}dx$$

$$\sqrt{y} = Ce^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}.\frac{1}{2}\int e^{x}dx$$

$$\sqrt{y} = Ce^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$y = C^2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{x} + C$$

Ngoài ra, dễ nhận thấy $y = 0$ cũng là một nghiệm của PTVP đã cho.

E. Phương trình vi phân toàn phần

1. Định nghĩa: Phương trình vi phân dạng:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{5.19}$$

trong đó các hàm số $P(x.y),\ Q(x,y)$ thỏa mãn $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y},\ \forall (x,y) \in D$ (5.20)

được gọi là PTVP toàn phần trên miền D

Điều kiện (5.20) là cần và đủ để vế trái của phương trình (5.19) là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó.(Xem Mục 3.4.Ch.III)

2. Phương pháp tích phân

Điều kiện (5.20) chứng tỏ tồn tại hàm $u(x,y)$ để $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, theo công thức (3.24) thì :

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Như vậy tích phân tổng quát có dạng : $u(x,y) = C$ (5.21)

Ví dụ 5.7 : Giải PTVP

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + y^3)dy = 0$$

Giải : Đặt $P = x^3 + 3xy^2,\ Q = 3x^2y + y^3$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy = \frac{\partial Q}{\partial y},\ \forall (x,y)$$

Vậy phương trình đã cho là PTVP toàn phần.

$$u(x,y) = \int_0^x (x^3 + 3xy^2)dx + \int_0^y y^3 dy$$
$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4$$

Tích phân tổng quát :

$$u(x,y) = C$$

Thay biểu thức của $u(x,y)$ vừa tính được, ta có $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C$

3. Thừa số tích phân

Trong một số trường hợp điều kiện (5.20) không thoả mãn. Khi đó PTVP (5.19) chưa phải là PTVP toàn phần. Nếu tồn tại hàm số $\alpha(x,y)$ để phương trình :

$$\alpha Pdx + \alpha Qdy = 0$$

là PTVP toàn phần, tức là thoả mãn điều kiện :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha P),\ \forall (x,y) \in D \qquad (5.22)$$

thì hàm số $\alpha(x,y)$ được gọi là thừa số tích phân của PTVP.

Ví dụ 5.8 : Cho phương trình :

$$2\sin y^2 dx + xy\cos y^2 dy = 0$$

Chứng minh rằng $\alpha(x,y) = x^3$ là thừa số tích phân của phương trình và hãy giải phương trình vi phân đó.

Giải : Nhân hai vế của phương trình với x^3 ta được :

$$2x^3 \sin y^2 dx + x^4 y\cos y^2 dy = 0$$

Đặt $P = 2x^3\sin y^2,\ Q = x^4 y\cos y^2, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4x^3 y\cos y^2,\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4x^3 y\cos y^2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x},\ \forall (x,y)$

Chứng tỏ $\alpha(x,y) = x^3$ là thừa số tích phân. Theo công thức (3.24)., tích phân tổng quát của PTVP là

$$\text{u(x,y) = C, trong đó } u = \int_0^x 2x^3 \sin y^2 dx = \frac{1}{2}x^4 \sin y^2$$

Ta cũng có thể viết nghiệm tổng quát dưới dạng $x^4\sin y^2 = C$

4. Thừa số tích phân dạng đặc biệt

Trong một số trường hợp đặc biệt ta có thể kết luận về sự tồn tại thừa số tích phân phụ thuộc vào một biến x hoặc y. Thật vậy, giả sử $\alpha = \alpha(x)$ là thừa số tích phân của PTVP không toàn phần (5.19). Khi đó

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(x).Q(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(x).P(x,y)\right] \Rightarrow \alpha\frac{\partial P}{\partial y} = \alpha' Q + \alpha\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Chia hai vế cho αQ và biến đổi ta được :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Chứng tỏ $-\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ chỉ là hàm của x và tích phân sẽ có :

$$\frac{d\alpha}{\alpha}=-\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx$$

$$\alpha(x)=e^{-\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx} \qquad (5.23)$$

Tương tự nếu $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ chỉ là hàm của y thì sẽ tồn tại thừa số tích phân là hàm của một biến y và công thức tìm:

$$\alpha(y)=e^{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy} \qquad (5.24)$$

Ví dụ 5.9 :. Tích phân PTVP :

$$(x^2+y^2)dx+(2xy+xy^2+\frac{x^3}{3})dy=0$$

Giải :

Ta đặt $P=x^2+y^2,\ Q=2xy+xy^2+\frac{x^3}{3}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y+y^2+x^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2y$. Từ đó ta có $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{1}{P}=1$

Suy ra một thừa số tích phân là $\alpha(y)=e^{\int dy}=e^y$

Nhân hai vế của phương trình trên với e^y sẽ có :

$$e^y(x^2+y^2)dx+e^y(2xy+xy^2+\frac{x^3}{3})dy=0$$

Vế trái là vi phân toàn phần của hàm số :

$$u(x,y)=\int_0^x e^y(x^2+y^2)dx+\int_0^y 0dy$$

$$u(x,y)=e^y\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)$$

Vậy tích phân tổng quát của PTVP là : $e^y x\left(\frac{x^2}{3}+y^2\right)=C$, (C là hằng số tuỳ ý)

5.2 KHÁI QUÁT VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

5.2.1. Các khái niệm cơ bản

Dạng tổng quát của PTVP cấp 2:

$$F(x,y,y',y'')=0 \quad \text{hay} \quad F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2})=0 \tag{5.25}$$

Nếu từ (5.25) giải ra được y'' thì ta có PTVP cấp 2 đã giải ra đối với đạo hàm:

$$y''=f(x,y,y') \tag{5.26}$$

A. Định lý tồn tại duy nhất nghiệm Cauchy-Peano

Cho phương trình (5.26): $y''=f(x,y,y')$ và $(x_0,y_0,y_0')\in V$

Định lý 5.2: *Nếu hàm số $f(x,y,y')$ liên tục trên miền V trong không gian Oxyy' thì tồn tại nghiệm $y=y(x)$ trong lân cận x_0 thoả mãn $y_0=y(x_0),\ y_0'=y'(x_0)$* (5.27)

Ngoài ra nếu $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y'),\ \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')$ cũng liên tục trên miền V thì nghiệm tìm được là duy nhất.

Bài toán tìm nghiệm của PTVP thoả mãn điều kiện (5.27) được gọi là bài toán Cauchy. Điều kiện (5.27) được gọi là điều kiện ban đầu.

B. Nghiệm tổng quát, tích phân tổng quát

Ta gọi nghiệm tổng quát của PTVP cấp 2 là hàm số

$$y=\varphi(x,C_1,C_2) \tag{5.28}$$

trong đó $C_1,\ C_2$ là các hằng số tuỳ ý, thoả mãn các điều kiện sau:

1. Thoả mãn PTVP với mọi các hằng số $C_1,\ C_2$

2. Có thể tìm một giá trị $C_1=C_1^0,\ C_2=C_2^0$ sao cho $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$ thoả mãn điều kiện ban đầu:

$$y_0=y(x_0)=\varphi(x_0,C_1^0,C_2^0),\ y_0'=y'(x_0)=\varphi'(x_0,C_1^0,C_2^0) \quad \text{với } (x_0,y_0,y_0')\in V.$$

Nghiệm tổng quát cho dưới dạng ẩn:

$$\Phi(x,y,C_1,C_2)=0 \tag{5.29}$$

Hệ thức này gọi là tích phân tổng quát của PTVP cấp 2. Về mặt hình học, nghiệm tổng quát hay tích phân tổng quát xác định một họ đường cong trong mặt phẳng, phụ thuộc vào hai tham số, không cắt nhau, được gọi là các đường cong tích phân của PTVP cấp 2.

C. Nghiệm riêng, tích phân riêng

Hàm số $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ gọi là một nghiệm riêng của PTVP, tức là được suy ra từ nghiệm tổng quát (5.28) với hằng số xác định $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0$. Tương tự ta có một tích phân riêng của PTVP

$$\Phi(x, \varphi, C_1^0, C_2^0) = 0$$

Về mặt hình học, định lí tồn tại và duy nhất nghiệm khẳng định rằng trong một lân cận nào đó của điểm $(x_0, y_0) \in D$ tồn tại duy nhất một đường cong tích phân của phương trình (5.26) đi qua điểm ấy có hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm ấy bằng y_0'.

5.2.2. Các PTVP cấp hai giảm cấp được

A. Phương trình khuyết $y,\ y'$

1. Định nghĩa: Phương trình khuyết $y,\ y'$ là PTVP dạng $F(x, y'') = 0$ (5.30)

2. Cách giải: Ta đặt $y' = p(x)$. Vậy phương trình (5.30) được đưa về PTVP cấp một đối với hàm số phải tìm là $p(x)$: $F(x, p') = 0$. Nếu tìm được $p(x)$ ta sẽ nhận được phương trình với biến số phân li để tìm $y = y(x)$. Tuy nhiên, việc tìm $p(x)$ thường phức tap nên thông thường biểu diễn nghiệm dưới dạng tham số: $x = x(t),\ y = y(t)$.

B. Phương trình khuyết y

1. Định nghĩa: Phương trình khuyết y là PTVP dạng $F(x, y', y'') = 0$ (5.31)

2. Cách giải: Ta đặt $y' = p(x)$. Vậy phương trình (5.31) được đưa về PTVP cấp một đối với hàm số phải tìm là $p(x)$: $F(x, p, p') = 0$. Nếu tìm được $p(x)$ ta sẽ nhận được phương trình với biến số phân li để tìm $y = y(x)$.

C. Phương trình khuyết x

1. Định nghĩa: Phương trình khuyết x là PTVP dạng $F(y, y', y'') = 0$ (5.32)

2. Cách giải: Ta đặt $y' = p(y)$. Từ đó suy ra $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}.p$. Vậy phương trình (5.32) được đưa về PTVP cấp một đối với hàm số phải tìm là $p(y)$: $F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$. Nếu tìm được $p(y)$ ta sẽ nhận được phương trình với biến số phân li để tìm $x = x(y)$.

Ví dul 5.10: Giải phương trình $x = y''^2 + y''$.

Giải: Ta đặt $p = y'$. Từ đó nhận được phương trình $x = p'^2 + p'$. Do giải ra đối với p là không đơn giản, nên ta tìm nghiệm của PTVP này trong dạng tham số:

Đặt $p' = t$ thì $x = t^2 + t$. Từ đó ta có

$$dx = (2t+1)dt,\ dp = p'dx = t\left(2t+1\right)dt \Rightarrow p = \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{2}t^2 + C_1$$

Từ $p = y'$ suy ra $dy = pdx \Rightarrow y = \int pdx = \int (\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1)(2t+1)dt + C_2$

$$y = \int (\frac{4}{3}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2C_1 t + C_1)dt + C_2$$

Vậy nghiệm được tìm biểu diễn dưới dạng tham số là

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + C_1 t^2 + C_1 t + C_2. \end{cases}$$

Ví dụ 5.11 : Giải bài toán Cauchy sau

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' = x^4 \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Giải: Đặt $y' = p(x)$, ta nhận được bài toán Cauchy đối với PTVP tuyến tính cấp một

$$\begin{cases} x^2 p' + xp = x^3 \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

Ta nhận được nghiệm $p = \frac{1}{4}(x^3 - \frac{1}{x})$. Tiếp tục ta có được bài toán Cauchy đối với phương trình với biến số phân li

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{4}(x^3 - \frac{1}{x}) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Nghiệm được tìm là $y = \frac{1}{16}(x^4 - 1 - 4\ln|x|).$

Ví dụ 5.12: Giải phương trình $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$

Giải: Ta đặt $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'p$. Phương trình được giảm cấp sẽ là

$$ypp' - p^2 + p^3 = 0$$

* $p = 0$ thỏa mãn phương trình, vậy $y = C$ là một họ nghiệm.

* $p \neq 0$ thì ta nhận được phương trình Bernoulli

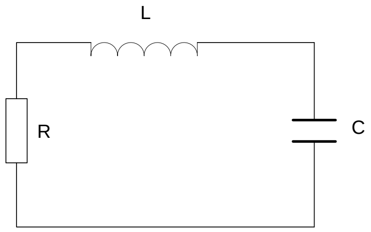
$$p' - \frac{1}{y}p = -\frac{1}{y}p^2$$

Ta đặt $z = \dfrac{1}{p}$, phương trình được đưa về dạng $z' + \dfrac{1}{y} z = \dfrac{1}{y}$

Từ đó có $z = \dfrac{1}{y}(C_1 + y) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{C_1 + y} \Rightarrow x = y + C_1 \ln y + C_2$.

5.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI

Trước hết, ta xét một bài toán dẫn đến PTVP tuyến tính cấp hai. Xét mạch RLC được mô tả trên hình 5.2.



H.5.2

Gọi u(t) là tổng điện áp trên các phần tử của mạch, vậy u(t) = 0. i(t) là cường độ dòng điện trong mạch. Trong kỹ thuật điện tử đã biết hiệu điện thế trên điện trở là Ri(t), trên cuộn tự cảm là $L\dfrac{di}{dt}$ và trên tụ là $\dfrac{1}{C}\left(\int_0^t idt + q_0\right)$ trong đó q_0 là điện lượng ban đầu trên tụ. Vậy ta có mối liên hệ sau :

$$0 = u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt + q_0\right)$$

Lấy đạo hàm 2 vế ta sẽ có :

$$u'(t) = Ri' + Li'' + \frac{i}{C}$$

Vậy ta nhận được phương trình tuyến tính cấp 2 đối với hàm số i :

$$Li'' - Ri' + \frac{i}{C} = 0$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 là phương trình có dạng :

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (5.33)$$

trong đó $a_1(x),\ a_2(x),\ f(x)$ liên tục trên (a,b).

Nếu $f(x)$ không đồng nhất bằng không thì (5.33) gọi là PTVP tuyến tính không thuần nhất.

Nếu $f(x) \equiv 0$ thì (5.33) gọi là PTVP tuyến tính thuần nhất.

Với các giả thiết trên, theo định lí 5.2, PTVP (5.33) luôn tồn tại nghiệm và nghiệm của bài toán Cauchy sau đây là duy nhất.

Tìm nghiệm của PTVP (5.33) thoả mãn:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{5.34}$$

trong đó (x_0, y_0, y'_0) cho trước.

Người ta gọi PTVP

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{5.35}$$

là PTVP tuyến tính thuần nhất tương ứng với PTVP tuyến tính không thuần nhất (5.33).

Mọi hệ tuyến tính đều có tính chất chung nên tương tự như PTVP cấp một, nghiệm của PTVP (5.33) có quan hệ với nghiệm của PTVP (5.35). Vì thế trước hết ta xét PTVP (5.35).

5.3.1 Tính chất nghiệm của PTVP tuyến tính thuần nhất.

Xét PTVP tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{5.36}$$

Định lý 5.3 *: Nếu y_1 và y_2 là nghiệm của PTVP (5.36) thì $C_1y_1 + C_2y_2$ với $C_1,\ C_2$ là các hằng số tuỳ ý, cũng là nghiệm của (5.36).*

Chứng minh : Thật vậy thay $y = C_1y_1 + C_2y_2$ vào PTVP (5.36) ta sẽ nhận thấy chúng thỏa mãn PTVP đó :

$$\begin{aligned} &(C_1y_1 + C_2y_2)'' + a_1(x)(C\ y_1 + C_2y_2)' + a_2(x)(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1\left[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right] + C_2\left[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right] \equiv 0 \end{aligned}$$

Trước hết ta xét khái niệm hai hàm phụ tuyến tính, độc lập tuyến tính. Các khái niệm này cũng tương tự như các khái niệm phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính của một hệ véc tơ trong không gian tuyến tính được trình bày trong Đai số tuyến tính.

Các hàm $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ liên tục trên (a,b) gọi là phụ thuộc tuyến tính trong (a,b) nếu tồn tại hai hằng số α_1, α_2 không đồng thời bằng 0 sao cho :

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) \equiv 0,\ \forall x \in (a,b) \tag{5.37}$$

Ngược lại, tức là (5.37) chỉ xảy ra khi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ thì nói rằng $\varphi_1(x), \ \varphi_2(x)$ là độc lập tuyến tính trên (a,b). Dễ dàng chỉ ra rằng : hai hàm số độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tỷ số của chúng không phải là hằng số

Chẳng hạn : $\varphi_1(x) = 1, \ \varphi_2(x) = x, \ \varphi_3(x) = x^2$

$\varphi_4(x) = \sin x, \ \varphi_5(x) = \cos x, \ \varphi_6(x) = e^x, \ \varphi_7(x) = e^{2x}$ là độc lập tuyến tính từng đôi trên khoảng (a,b) bất kỳ.

Định lý 5.4 : *Nếu các hàm* $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ *phụ thuộc tuyến tính trên (a,b) thì :*

$$W[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ được gọi là định thức Wronski của hai hàm $y_1, \ y_2$

(5.38)

Chứng minh :

Tồn tại α_1, α_2 không đồng thời bằng không để $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) \equiv 0$

Gỉa sử $\alpha_2 \neq 0$, vậy $\varphi_2(x) = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_1(x)$ suy ra :

$$W[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_1(x) \\ \varphi_1' & -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_1'(x) \end{vmatrix} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 \\ \varphi_1' & \varphi_1' \end{vmatrix} \equiv 0$$

Định lý 5.5 : *Nếu các nghiệm y_1, y_2 của PTVP tuyến tính thuần nhất (5.28) là độc lập tuyến tính trên (a,b) thì* $W[y_1, y_2] \neq 0, \forall x \in (a,b)$ (5.39)

Chứng minh :

Gỉa sử phản chứng là $W[y_1(x_0), y_2(x_0)] = 0$ với $a < x_0 < b$. Xét hệ phương trình đại số với các ẩn C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm không tầm thường C_1, C_2 (giả sử $C_2 \neq 0$) vì định thức của hệ bằng không. Mặt khác hàm số $\tilde{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của (5.36) (theo định lý 5,3)

Theo trên thì $\tilde{y}(x_0) = 0, \tilde{y}'(x_0) = 0$. Từ tính duy nhất nghiệm suy ra $\tilde{y} = 0$ trên (a,b) tức là :

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 \equiv 0, \forall x \in (a,b)$$

Mà $C_2 \neq 0$ chứng tỏ y_1, y_2 phụ thuộc tuyến tính, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy định thức Wronski của chúng khác không.

Định lý 5.6 : *Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (5.36) thì nghiệm tổng quát của PTVP (5.36) có dạng :*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{5.40}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý

Chứng minh :

Trước hết ta thấy (5.40) là nghiệm của (5.36) (theo định lý 5.3) và phụ thuộc vào hai hằng số C_1, C_2 tuỳ ý.

Ngoài ra với điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$, $y_1'(x_0) = y_0'$ thì ta sẽ tìm được C_1, C_2 duy nhất.

Thật vậy từ hệ phương trình :

$$\begin{cases} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases} \text{ ta có } \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Chứng tỏ nghiệm (C_1, C_2) tồn tại duy nhất.

Định lý 5.7 : *Nếu biết $y_1 \neq 0$ là nghiệm của (5.36) thì có thể tìm được nghiệm y_2 của (5.36) độc lập tuyến tính với y_1 có trong dạng :*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)dx} dx \tag{5.41}$$

Chú ý : Trong tích phân trên hằng số cộng của tích phân bất định luôn lấy bằng 0.

Chứng minh :

Trước hết ta có thể tìm nghiệm y_2 trong dạng $y_2(x) = y_1(x)u(x)$

Đặt nghiệm này vào (5.36) ta sẽ nhận được PTVP đối với hàm u(x)

$$y_1''u + 2y_1'u' + y_1 u'' + a_1(x)\left[y_1'u + y_1 u'\right] + a_2 y_1 u = 0$$

$$u(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + y_1 \left\{ u'' + \left[\frac{2y'}{y_1} + a_1(x) \right] u' \right\} = 0$$

Ta chọn u khác hằng số thoả mãn phương trình :

$$u'' + \left[\frac{2y'}{y_1} + a_1(x)\right]u' = 0$$

Ta đặt $v = u'$ có $v' + \left[\frac{2y'}{y_1} + a_1(x)\right]v = 0$

Đây là PTVP tuyến tính cấp 1, do đó :

$$v = Ce^{-\int\left[\frac{2y'}{y_1}+a_1(x)\right]dx} = Ce^{-2\int\frac{y'}{y_1}dx}.e^{-\int a_1(x)dx}$$

$$= Ce^{-2\ln y_1}.e^{-\int a_1(x)dx} = C\frac{1}{y_1^2}.e^{-\int a_1(x)dx}$$

Để có thể chọn u, ta có thể lấy $C = 1$. Khi đó ta nhận được

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)}.e^{-\int a_1(x)dx}dx$$

Vì $u'(x) = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx} \neq 0$ nên u(x) không phải là hằng số, chứng tỏ y_1, y_2 độc lập tuyến tính.

Ví dụ 5.13 : Tìm nghiệm tổng quát của phương trình :

$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = \frac{\sin x}{x}$

Giải : Tìm y_2 độc lập tuyến tính với y_1 trong dạng (5.41)

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2.e^{-\int\frac{2}{x}dx}}{\sin^2 x}dx = \frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2.e^{-2\ln x}}{\sin^2 x}dx$$

$$= \frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{x}(-\cot gx) = -\frac{\cos x}{x}$$

Vậy ta có nghiệm tổng quát :

$$y = \frac{1}{x}\left(C_1\sin x + C_2\cos x\right)$$

Ví dụ 5.14 : Giải phương trình

$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $y = x^\alpha$, $\alpha \in 3$.

Giải : Trước hết ta tìm α

Đặt $y_1 = x^\alpha$ vào phương trình, ta sẽ có :

$$x^2(\ln x - 1)\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - \alpha x^\alpha + x^\alpha = 0, \forall x \in (a,b)$$

$$\alpha(\ln x - 1)(\alpha - 1) - \alpha + 1 = 0,\ \forall x \in (a,b)$$

suy ra $\begin{cases} \alpha(\alpha - 1) = 0 \\ -\alpha + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow y_1 = x$

Ta tìm y_2 trong dạng (5.41)

$$y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{xdx}{x^2(\ln x - 1)}}}{x^2} dx$$

$$= x\int \frac{e^{\int \frac{d\ln x}{\ln x - 1}}}{x^2} dx = x\int \frac{e^{\ln(\ln x - 1)}}{x^2} dx$$

$$= x\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = x\left[-\frac{1}{x}(\ln x - 1) + \int \frac{dx}{x^2}\right] = -\ln x$$

Vậy nghiệm tổng quát là $y = C_1 x + C_2 \ln x$

Chú ý : Để biết được một nghiệm không tầm thường của PTVP tuyến tính thuần nhất là rất khó khăn. Vì thế trong quá trình tích phân ta phải xem xét dạng phương trình để suy đoán được nghiệm hoặc tìm nghiệm theo sự gợi ý của bài toán.

5.3.2 Tính chất nghiệm của PTVP tuyến tính không thuần nhất

Xét PTVP (5.33) và PTVP thuần nhất tương ứng(5.35).

Định lý 5.8 : *Nghiệm tổng quát của PTVP (5.33) bằng tổng nghiệm tổng quát của PTVP (5.35) cộng với một nghiệm riêng bất kỳ của chính phương trình (5.33)*

$$y = \overline{y} + y^* \qquad (5.42)$$

Ở đây người ta dùng ký hiệu :

$\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của PTVP (5.35)

y^* là nghiệm riêng của PTVP (5.33)

Chứng minh : Ta thay $y = \overline{y} + y^*$ vào (5.33) sẽ có:

$$\overline{y}'' + y^{*''} + a_1(x)(\overline{y}' + y^{*'}) + a_2(x)(\overline{y} + y^*) = f(x)$$
$$\overline{\mathbf{y}}'' + a_1(x)\overline{y}' + a_2(x)\overline{y} + y^{*''} + a_1(x)y^{*'} + a_2(x)y = f(x)$$
$$0 + f(x) = f(x)$$

Đồng nhất trên chứng tỏ $y = \overline{y} + y^*$ là nghiệm của (5.33). Nó phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý C_1, C_2 (có trong $\overline{y}$) và với điều kiện đầu thì sẽ tìm được C_1, C_2 duy nhất như ta đã chứng minh ở định lý 5.6

Định lý 5.9: (Nguyên lý chồng chất nghiệm):

Nếu y_1^*, y_2^* lần lượt là các nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = f_1(x)$$
$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = f_2(x)$$

thì $y^* = y_1^* + y_2^*$ là nghiệm riêng của phương trình (5.33) với vế phải

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

Định lý này cũng được chứng minh tương tự như trên bằng cách thay $y^* = y_1^* + y_2^*$ vào PTVP (5.33) và sẽ nhận được đồng nhất thức.

Ý nghĩa của nguyên lý là ở chỗ: vế phải *f(x)* có thể phân tích thành tổng hữu hạn các hàm số, ứng với mỗi hàm số thành phần, nghiệm riêng thành phần có thể tìm được dễ dàng hơn và như vậy ta sẽ tìm được nghiệm riêng y^* của PTVP.

Định lý 5.10: *Nếu biết hai nghiệm riêng của PTVP (5.33) $y_1^*,\ y_2^*$ thì hàm số $y = y_1^* - y_2^*$ là một nghiệm của PTVP (5.35)*

Ta chứng minh định lý này bằng cách thay $y = y_1^* - y_2^*$ vào phương trình (5.35). Sau khi để ý đến $y_1^*,\ y_2^*$ là các nghiệm riêng của (5.33), ta sẽ nhận được đồng nhất thức.

Định lý 5.11: *Nếu biết hai nghiệm riêng $y_1,\ y_2$ độc lập tuyến tính của (5.35) thì một nghiệm riêng của (5.33) có thể tìm được bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Nghiệm đó có dạng:*

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{5.43}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} &C_1' y_1 + C_2' y = 0 \\ &C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{aligned} \tag{5.44}$$

Chứng minh: Giả sử biết hai nghiệm độc lập tuyến tính của PTVP (5.35) là $y_1,\ y_2$. Khi đó nghiệm tổng quát của (5.35) là:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Nội dung của phương pháp biến thiên hằng số Lagrange được mô tả dưới đây:

Ta coi $y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ là nghiệm riêng của (5.33), với sự tồn tại của $C_1(x),\ C_2(x)$.

Thật vậy $y^{*'} = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'$

Trước hết ta đặt điều kiện:

$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$, nghĩa là $y^{*'} = C_1y_1' + C_2y_2'$ **(*)**

Bây giờ thay y^* vào (5.33) ta sẽ nhận được:

$$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Để y^* là nghiệm thì phải có:

$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$ **(**)**

Các điều kiện (*) và (**) chính là hệ phương trình đại số tuyến tính đối với $C_1',\ C_2'$:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Từ hệ phương trình này ta giải ra $C_1',\ C_2'$ do $\mathbf{W}[\mathbf{y_1}, y_2] \neq 0$.Từ đó đó ta tìm được các hàm số $C_1(x),\ C_2(x)$.

Ví dụ 5.15: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = \frac{1}{x^2+1}$$

Giải: Phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 0$$

Dễ nhận thấy phương trình thuần nhất này có một nghiệm là $y_1 = 1$

Nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính được tìm theo công thức (5.41) sẽ là:

$$y_2 = \int e^{\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx$$

Nghiệm riêng của PTVP đã cho được tìm trong dạng:

$$y^* = C_1(x) + C_2(x)arctgx$$

trong đó:

$$\begin{cases} C_1' + C_2' arctgx = 0 \\ C_1'.0 + C_2'.\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta có nghiệm:

$$C_2' = 1 \Rightarrow C_2 = x$$

$$C_1' = -arctgx \Rightarrow C_1 = -\int arctgxdx = -x.arctgx + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP là:

$$y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 + C_2 arctgx$$

5.4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI CÓ HỆ SỐ HẰNG SỐ

5.4.1. Các dạng nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

Cho phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (5.45)$$

trong đó $a_1,\ a_2$ là các hằng số thực.

Ta tìm nghiệm riêng của (5.45) dưới dạng

$$y = e^{kx},\ k = \text{const}$$

Vậy k thỏa mãn điều kiện:

$$y' = k.e^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx},\ e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0 \ \Rightarrow\ k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (5.46)$$

Phương trình (5.46) được gọi là phương trình đặc trưng của (5.45). Từ nghiệm của phương trình này, chúng ta có thể biết được dạng nghiệm của chính PTVP (5.45).

1. Nếu (5.46) cho 2 nghiệm thực khác nhau $k_1,\ k_2$ thì 2 nghiệm riêng của (5.45) là

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}.$$

Chúng độc lập tuyến tính vì $\dfrac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x}$ không phải là hằng số.

Vậy nghiệm tổng quát của (5.45) sẽ là:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad (5.47)$$

2. Nếu (5.46) cho 2 nghiệm thực trùng nhau và bằng k thì (5.45) có một nghiệm riêng, $y_1 = e^{kx}$. Nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 tìm được theo công thức (5.41)

$$y_2 = uy_1 \text{ và } e^{kx}u'' + e^{kx}(a_1 + 2k)u' = 0$$

Vì k là nghiệm kép của (5.45) do đó $a_1 + 2k = 0$. Suy ra:

$$u'' = 0,\ u = Ax + B, \text{ ta lấy } u = x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (5.45) :

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx} \tag{5.48}$$

3. Nếu (5.45) cho hai nghiệm phức $k = \alpha \pm i\beta$ thì hai nghiệm riêng của (5.45) dưới dạng phức sẽ là:

$$y_1 = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$y_2 = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Áp dụng nguyên lý chồng chất và do $a_1,\ a_2$ là các số thực vậy các phần thực và phần ảo của $y_1,\ y_2$ cũng là nghiệm của (5.45).

Chúng ta lấy ra hai nghiệm của (5.45): $e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$. Các hàm số này là các hàm độc lập tuyến tính.

Vậy nghiệm tổng quát của (5.45) trong trường hợp này có dạng:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \tag{5.49}$$

Ví dụ 5.16: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + 5y' + 6y = 0$

Giải: Phương trình đặc trưng của nó: $k^2 + 5k + 6 = 0$ cho nghiệm $k_1 = -3, k_2 = -2$. Vậy nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

Ví dụ 5.17: Tìm nghiệm của phương trình $y'' - 2y' + y = 0$

Giải: Phương trình đặc trưng của nó $k^2 - 2k + 1 = 0$ có nghiệm $k_1 = k_2 = 1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y = e^x(C_1 + C_2 x)$$

Ví dụ 5.18: Tìm nghiệm của bài toán Côsi:

$$y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$$

Giải: Phương trình đặc trưng của nó:

$$k^2 + 2k + 2 = 0,\ k = -1 \pm i$$

Do đó nghiệm tổng quát được biểu diễn trong dạng:

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$$
$$y' = e^{-x}\left((C_2 - C_1)\cos x - (C_2 + C_1)\sin x\right)$$
$$y(0) = 1 = C_1$$
$$y'(0) = 1 = C_2 - C_1 \Rightarrow C_2 = 2$$

$$y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$$

5.4.2. Phương pháp tìm nghiệm riêng của PTVP tuyến tính không thuần nhất

Cho phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (5.50)$$

trong đó $a_1,\ a_2$ là các hằng số thực.

Nhờ vào phương pháp biến thiên hằng số Lagrange và các dạng nghiệm của phương trình thuần nhất ta có thể tìm được nghiệm tổng quát của (5.50) với *f(x)* là hàm liên tục bất kỳ.

Ví dụ 5.19: Tích phân PTVP $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

Giải: PTVP thuần nhất tương ứng của PTVP đã cho:

$$y'' - y = 0$$

Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

Nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất tương ứng có dạng

$$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$

Bây giờ tìm nghiệm riêng của PTVP đã cho bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange:

$$y^* = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^x$$

trong đó
$$\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' e^x = 0 \\ -C_1' e^{-x} + C_2' e^x = \dfrac{e^x}{1 + e^x} \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$C_2' = \frac{1}{2}\frac{1}{e^x + 1},\ C_1' = -\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{1 + e^x}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{e^x + 1},\ C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}dx}{e^x + 1},$$

Ta đặt $e^x + 1 = t$, $dx = \dfrac{dt}{t - 1}$,

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t} = -\frac{1}{2}\ln(e^x+1) + \frac{1}{2}x$$
$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t}dt$$
$$= -\frac{e^x+1}{2} + \frac{1}{2}\ln(e^x+1)$$

Vậy nghiệm tổng quát:

$$y = \frac{e^{-x}}{2}\left[\ln(e^x+1) - e^x + C_1\right] + \frac{e^x}{2}\left[x - \ln(e^x+1) + C_2\right]$$

Dưới đây chúng ta xét các dạng đặc biệt của *f(x)* và ứng với nó, nghiệm riêng của (5.42) tìm được không cần phải dùng đến các phép tính tích phân.

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)$

trong đó $\alpha,\ A_1 \in 3,\ (i = \overline{0,\ n}),\ A_n \neq 0$

1. Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng với (5.50) :

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \tag{5.51}$$

thì một nghiệm riêng của (5.50) được tìm dưới dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}Q_n(n) = e^{\alpha x}(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + ... + B_0) \qquad (5,52)$$

trong đó *n+1* hệ số B_i chưa biết. Ta thay y^* vào (5.50) thì:

$$Q_n'' + (2\alpha + a_1)Q_n' + (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)Q_n = P_n$$

Ta đồng nhất các hệ số của lũy thừa cùng bậc của *x* ta sẽ có hệ *(n+1)* phương trình tuyến tính với với *(n+1)* ẩn số B_i ($i = \overline{0,\ n}$). Phương pháp tìm các hệ số của Q_n như trên được gọi là phương pháp hệ số bất định ứng với hệ hàm số độc lập tuyến tính: $1,\ x,\ x^2, ...,\ x^n$.

2. Nếu α là nghiệm đơn của (5.51) thì một nghiệm riêng của (5.50) được tìm dưới dạng:

$$y^* = xe^{\alpha x}Q_n(x) = xe^{\alpha x}(B_n x^n + ... + B_0) \tag{5.53}$$

3. Nếu α là nghiệm kép của (5.51) thì một nghiệm riêng của (5.50) được tìm dưới dạng:

$$y^* = x^2 e^{\alpha x}Q_n(x) = x^2 e^{\alpha x}(B_n x^n + ... + B_0) \tag{5.54}$$

Ví dụ 5.20: Tích phân phương trình $y''+2y'+y=x,\ (=e^{0.x}P_1(x))$

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng với PTVP đã cho:

$k^2+2k+1=0$ có nghiệm kép $k=-1$

$y^*=B_1x+B_0,\ y^{*'}=B_1,\ y^{*''}=0$

$2B_1+B_1x+B_0=x$

$$\begin{cases} B_1=1 \\ 2B_1+B_0=0 \end{cases} \Rightarrow B_0=-2B_1=-2$$

$y^*=x-2$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là $y=e^{-x}(C_1+C_2x)+x-2$

Ví dụ 5.21: Tích phân PTVP: $y''+2y'-3y=e^x x\ (=e^{1.x}P_1(x))$

Giải: Phương trình đặc trưng của PTVP thuần nhất tương ứng với PTVP đã cho:

$k^2+2k-3=0$ có nghiệm $k = 1, k = -3$

$y^*=x.e^x(B_1x+B_0)=e^x(B_1x^2+B_0x)$

$y^{*'}=e^x(B_1x^2+(B_0+2B_1)x+B_0)$

$y^{*''}=e^x(B_1x^2+(B_0+4B_1)x+2B_0+2B_1)$

Thay vào phương trình sẽ có:

$8B_1x+2B_1+4B_0=x$

$$\begin{cases} 8B_1=1 \\ 2B_1+4B_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1=\dfrac{1}{8} \\ B_0=-\dfrac{1}{2}B_1=-\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

$$y^*=xe^x\frac{1}{8}(x-\frac{1}{2})$$

Vậy nghiệm tổng quát là $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}+\dfrac{xe^x}{16}(2x-1)$

Ví dụ 5.22: Tìm nghiệm của bài toán Côsi:

$y''-4y'+4y=e^{2x}(x+1),\ y(0)=y'(0)=1.$

Giải: Giải phương trình đặc trưng $k^2-4k+4=0$ của phương trình thuần nhất tương ứng, ta có nghiệm $k_1=k_2=2$

Trước hết ta tìm một nghiệm riêng:

$$y^* = x^2 e^{2x}(B_1 x + B_0) = e^{2x}(B_1 x^3 + B_0 x^2)$$
$$y^{*'} = e^{2x}\left[2B_1 x^3 + (2B_0 + 3B_1)x^2 + 2B_0 x\right]$$
$$y^{*''} = e^{2x}\left(4B_1 x^3 + (4B_0 + 12B_1)x^2 + (8B_0 + 6B_1)x + 2B_0\right)$$

$$6B_1 x + 2B_0 = x + 1$$

$$\begin{cases} 6B_1 = 1 \\ 2B_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow B_1 = \frac{1}{6}, B_0 = \frac{1}{2}$$

Nghiệm tổng quát là

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{6}x^2 e^{2x}(x+3)$$
$$y' = e^{2x}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x) + \frac{1}{6}e^{2x}(2x^3 + 9x^2 + 6x)$$

Từ điều kiện ban đầu, ta đi tìm các hằng số C_1, C_2

$$y(0) = C_1 = 1$$
$$y'(0) = 2C_1 + C_2 = 1$$
$$C_1 = 1, C_2 = -1$$
$$y = e^{2x}(1-x) + \frac{1}{6}x^2 e^{2x}(x+3)$$

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

trong đó $\alpha, \beta \in 3$, $P_n(x), Q_n(x)$ lần lượt là các đa thức bậc *n, m* cho trước với các hệ số thực.

1. Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của (5.51) thì một nghiệm riêng của (5.50) được tìm dưới dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right] \tag{5.55}$$

trong đó $R_l(x), S_l(x)$ là các đa thức bậc $l = \max(n,m)$ có các hệ số được tìm bằng phương pháp hệ số bất định ứng với các hệ hàm độc lập tuyến tính: $1, x, x^2, ..., x^n;\ \sin\beta x,\ \cos\beta x$

2. Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của (5.51) thì một nghiệm riêng của (5.50) được tìm nghiệm trong dạng:

$$y^* = e^{\alpha x} x\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right] \tag{5.56}$$

Ví dụ 5.23: Tìm nghiệm tổng quát của PTVP

$$y'' + y' = x\cos x$$

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng là $k^2 + k = 0$.

Giải phương trình này ta nhận được nghiệm: $k = 0,\ k = -1$

Ta nhận thấy $\pm i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng. Vậy

$$y^* = (A_1x + A_0)\cos x + (B_1x + B_0)\sin x$$
$$y^{*'} = (B_1x + A_1 + B_0)\cos x + (-A_1x + B_1 - A_0)\sin x$$
$$y^{*''} = (-A_1x + 2B_1 - A_0)\cos x + (-B_1x - 2A_1 - B_0)\sin x$$

Thế vào PTVP, ta có

$$\left((B_1 - A_1)x + A_1 + 2B_1 + B_0 - A_0\right)\cos x + \left(-(A_1 + B_1)x + B_1 - 2A_1 - A_0 - B_0\right)\sin x = x\cos x$$

$$B_1 - A_1 = 1,\ A_1 + 2B_1 + B_0 - A_0 = 0$$
$$B_1 + A_1 = 0,\ -2A_1 + B_1 - B_0 - A_0 = 0$$
$$B_1 = \frac{1}{2},\ A_1 = -\frac{1}{2},\ A_0 = 1,\ B_0 = \frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm tổng quát là: $y = C_1 + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}(x-2)\cos x + \frac{1}{2}(x+1)\sin x$

Ví dụ 5.24: Tìm một nghiệm riêng của phương trình:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(1 + \sin x)$$

Giải: Dựa vào nguyên lý chồng chất nghiệm, ta tìm các nghiệm riêng của các phương trình sau:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x$$
$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}$$

Sau khi giải phương trình đặc trưng tương ứng $k^2 + 2k + 2 = 0$ ta có nghiệm $k = -1 \pm i$

$$y_1^* = xe^{-x}(A_0\cos x + B_0\sin x)$$
$$y_1^{*'} = e^{-x}\left((B_0x - A_0x + A_0)\cos x + (B_0 - B_0x - A_0x)\sin x\right)$$
$$y_1^{*''} = e^{-x}\left((2B_0 - 2A_0 - 2B_0x)\cos x + (-2B_0 - 2A_0 + 2A_0x)\sin x\right)$$

$$2B_0\cos x - 2A_0\sin x = \sin x$$

$$B_0 = 0,\ A_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_1^* = -\frac{xe^{-x}}{2}\cos x$$

$$y_2^* = C_0 e^{-x},\ y_2^{*'} = -C_0 e^{-x},\ y_2^{*''} = C_0 e^{-x}$$

$$C_0 = 1 \Rightarrow y_2^* = e^{-x}$$

Nghiệm riêng cần tìm là $y^* = y_1^* + y_2^* = e^{-x}(1 - \frac{x}{2}\cos x)$

Các phương pháp trình bày ở trên sẽ được áp dụng cho phương trình vi phân tuyến tính cấp cao có hệ số hằng số. Để minh họa, ta xét bài toán Côsi sau:

Ví dụ 5.25: Giải PTVP:

$$y''' - 2y'' + 2y' - y = x^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = y''(0) = -1$$

Giải: Phương trình đặc trưng của PTVP thuần nhất tương ứng:

$$k^3 - 2k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$(k-1)(k^2 - k + 1) = 0,\ k_1 = 1,\ k_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$\overline{y} = C_1 e^x + e^{\frac{1}{2}x}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ C_1, C_2, C_3 là các hằng số tùy ý.

Một nghiệm riêng của PTVP đã cho được tìm dưới dạng:

$$y^* = A_2x^2 + A_1x + A_0$$

$$y^{*'} = 2A_2x + A_1$$

$$y^{*''} = 2A_2$$

$$y^{*'''} = 0,\ -A_2x^2 + (4A_2 - A_1)x + 2A_1 - A_0 - 4A_2 = x^2$$

$$A_2 = -1$$

$$4A_2 - A_1 = 0,\ A_1 = -4$$

$$2A_1 - A_0 - 4A_2 = 0,\ A_0 = -4$$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là

$$y = C_1e^x + e^{\frac{1}{2}x}(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^2 - 4x - 4$$

$$y' = C_1e^x + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left((C_2 + C_3\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 - C_2\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - 2x - 4$$

$$y'' = C_1e^x + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left((C_3\sqrt{3} - C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - (C_2\sqrt{3} + C_3)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - 2$$

Từ điều kiện ban đầu ta suy ra: $\begin{cases} C_1 + C_2 - 4 = 0 \\ C_1 + \frac{1}{2}(C_2 + C_3\sqrt{3}) - 4 = -1 \\ C_1 + \frac{1}{2}(C_3\sqrt{3} - C_2) - 2 = -1 \end{cases}$

$$C_1 = C_2 = 2,\ C_3 = 0$$

Vậy nghiệm của bài toán Côsi đã cho là: $y = 2e^x + 2e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - x^2 - 4x - 4$

Chú ý :

a. Thực hiện các phép đổi biến thích hợp, một số PTVP tuyến tính cấp hai được đưa về dạng tuyến tính có hệ số không đổi. Một trong số đó là PTVP dạng

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0 \qquad (5.57)$$

trong đó a_1, a_2 là các hằng số thực, được gọi là phương trình Ơle (Euler).

Thật vậy, ta thực hiện phép đổi biến số

$$|x| = e^t \Leftrightarrow t = \ln|x|$$

Với phép đổi biến này thì $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{1}{x},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}.\frac{1}{x}) = (\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})\frac{1}{x^2}$

Ta thay vào PTVP (5.57), sẽ nhận được

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{dt} + a_2 = 0 \qquad (5.58)$$

Đây là một phương trình tuyến tính có hệ số không đổi

Ví dụ 5.26: Tìm nghiệm tổng quát của PTVP

$$x^2y'' + 4xy' - 4y = x^2\ln x$$

Giải: Ta đổi biến $x = e^t \Rightarrow x^2 = e^{2t},\ \ln x = t$. Phương trình được đưa về dạng

$$y''+3y'-4y=te^{2t}$$

Nghiệm tổng quát của PTVP mới : $y=C_1e^t+C_2e^{-4t}+\dfrac{1}{36}e^{2t}(6t-7)$. Từ đó ta suy ra nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là : $y=C_1x+C_2\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{36}x^2(6\ln x-7)$.

b. Trong một số trường hợp người ta có thể sử dụng chuỗi hàm, thông thường là chuỗi lũy thừa để giải PTVP. Một lớp các phương trình được tìm nghiệm dưới dạng chuỗi lũy thừa, là phương trình Bessel

$$y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{\alpha^2}{x^2})y=0, \qquad (\alpha \text{ là hằng số}) \qquad (5.59)$$

Phương trình (5.59) được xem xét kĩ trong Giáo trình TOÁN CHUYÊN NGÀNH $[9]$ vì ý nghĩa thực tiễn của nó. Dưới đây ta xét một ví dụ về bài toán tìm nghiệm trong dạng chuỗi lũy thừa của Một PTVP.

Ví dụ 5.27: Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa của phương trình

$$xy''+2y'+xy=0$$

Giải: Ta đặt nghiệm của PTVP trong dạng

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$$
$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}+...$$
$$y''=2a_2+2.3a_3x+3.4a_4x^2+...+(n-1)na_nx^{n-2}+...$$

Thay vào PTVP đã cho, rút gọn các số hạng đồng dạng, ta nhận được

$$2a_1+(a_0+6a_2)x+(a_1+12a_3)x^2+...+\left[a_{n-2}+n(n+1)a_n\right]x^{n-1}+...=0$$

Từ đó suy ra

$$a_1=0,\ a_3=0,...,\ a_{2k+1}=0,\ k\in Đ^*$$
$$a_2=-\frac{a_0}{2.3},\ a_4=\frac{a_0}{2.3.4.5},...,\ a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{(2k+1)!},\ k\in Đ^*$$

Do đó

$$y=a_0\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}+...\right)$$

trong đó a_0 là hằng số tùy ý. Dễ thấy chuỗi trong dấu ngoặc hội tụ với mọi x.

Từ công thức $\sin x = \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ và tính khả vi của hàm số $\dfrac{\sin x}{x}$, ta nhận được một nghiệm riêng của phương trình đã cho

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

5.5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

5.5.1. Các khái niệm cơ bản

1. Hệ phương trình vi phân cấp 1 có dạng

$$\begin{cases} y_1^{/} = f_1\left(x, y_1, ..., y_n\right) \\ y_2^{/} = f_2\left(x, y_1, ..., y_n\right) \\ .... \\ y_n^{/} = f_n\left(x, y_1, ..., y_n\right) \end{cases} \tag{5.60}$$

trong đó x là biến độc lập, $(y_1, ..., y_n)$ là véc tơ hàm phải tìm được gọi là hệ PTVP cấp 1 chính tắc

2. Nghiệm của hệ (5.60) là véc tơ hàm $(y_1, ..., y_n)$, sao cho thay nó vào hệ ta nhận được đồng nhất thức

3. Nghiệm tổng quát của hệ (5.60) là véc tơ hàm $(y_1, ..., y_n)$, trong đó các thành phần của véc tơ phụ thuộc vào x và n hằng số tùy ý $K_1,\ K_2, ...,\ K_n$ có tính chất:

a. là nghiệm của hệ PTVP với các hằng số tùy ý $K_1,\ K_2, ...,\ K_n$.

b. bất kì một nghiệm nào của hệ cũng được suy ra từ véc tơ hàm đó với n hằng số $K_1 = K_{10},\ K_2 = K_{20}, ...,\ K_n = K_{n0}$. Nghiệm này được gọi là nghiệm riêng của hệ PTVP

4. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm: Nếu véc tơ hàm $(f_1, ..., f_n)$ liên tục trong miền $V \subset 3^{n+1}$ chứa điểm $M_0\left(x_0, y_{10}, ..., y_{n0}\right)$ thì hệ (5.49) có nghiệm $(y_1, ..., y_n)$ trong lân cận điểm $M_0\left(x_0, y_{10}, ..., y_{n0}\right)$ và thỏa mãn điều kiện: $y_i\left(x_0\right) = y_{i0},\ i = 1, 2, ..., n$. Nếu thêm điều kiện: các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j},\ i,\ j = 1, ..., n$ liên tục trong miền $V \subset 3^{n+1}$ thì nghiệm $(y_1, ..., y_n)$ trong lân cận điểm $M_0\left(x_0, y_{10}, ..., y_{n0}\right)$ thỏa mãn điều kiện: $y_i\left(x_0\right) = y_{i0},\ i = 1, 2, ..., n$ là duy nhất.

5.5.2. Phương pháp tích phân

1. Phương pháp khử

Bằng cách lấy đạo hàm $n-1$ lần hai vế của một trong các phương trình của hệ (5.60) và dùng các phép thế thích hợp ta có thể nhận được một PTVP cấp n đối với một hàm số y_m nào đó. Sau khi giải PTVP này, ta nhận được nghiệm tổng quát của nó:

$$y_m = y_m\left(x, K_1, ..., K_n\right)$$

Tiếp tục thế hàm số này vào các PTVP còn lại, ta sẽ nhận được nghiệm tổng quát của hệ PTVP đã cho.

Ví dụ 5.28: Tìm nghiệm tổng quát của hệ PTVP $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases}$

Giải: Sau khi lấy đạo hàm PTVP thứ nhất hai lần, PTVP thứ hai, thứ ba một lần, ta nhận được

$$x''' = y'' + z'' = 2x' + y' + z' = 2x' + x'' \Rightarrow x''' - x'' - 2x' = 0$$

Phương trình đặc trưng của nó: $k^3 - k^2 - 2k = 0$. Giải phương tình này ta nhận được nghiệm: $k = 0,\ k = -1,\ k = 2$

Vậy $x = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}$

Từ PTVP thứ nhất của hệ ta rút ra $z = x' - y$, thay vào PTVP thứ hai ta có:

$$y' + y = C_1 + 3C_3 e^{2t}$$

Đây là PTVP tuyến tính cấp một không thuần nhất. Nghiệm tổng quát của nó là:

$$y = C_1 + C_4 e^{-t} + C_3 e^{2t}$$

Từ PTVP thứ hai của hệ ta rút ra $z = y' - x = -C_1 - \left(C_2 + C_4\right)e^{-t} + C_3 e^{2t}$,

Ta thay x, y, z vào PTVP thứ ba của hệ

$\left(C_2 + C_4\right)e^{-t} + 2C_3 e^{2t} = 2C_1 + \left(C_2 + C_4\right)e^{-t} + 2C_3 e^{2t}$. Chứng tỏ $C_1 = 0,\ C_2,\ C_3$ tùy ý

Ta có thể kí hiệu các hằng số tùy ý như sau: $C_2 = K_1,\ C_4 = K_2,\ C_3 = K_3$ và viết nghiệm tổng quát trong dạng $\begin{cases} x = K_1 e^{-t} + K_3 e^{2t} \\ y = K_2 e^{-t} + K_3 e^{2t} \\ z = -\left(K_1 + K_2\right)e^{-t} + K_3 e^{2t} \end{cases}$

Ví dụ 5.29: Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2e^{2t} \end{cases}$$

Giải: Sau khi lấy đạo hàm hai vế phương trình thứ nhất, ta nhận được

$$x'' = y' + 2e^{2t}$$

Để ý đến phương trình thứ hai của hệ, ta nhận được PTVP tuyến tính cấp hai đối với hàm số $x(t)$: $x'' + x = 4e^{2t}$

Nghiệm được tìm dễ dàng và có dạng: $x = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{4}{5}e^{2t}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $y = x' - e^{2t} = -C_1\sin t + C_2\cos t + \frac{3}{5}e^{2t}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + \dfrac{4}{5}e^{2t} \\ x = -C_1\sin t + C_2 cost + \dfrac{3}{5}e^{2t} \end{cases}$$

2. Phương pháp tổ hợp các tích phân

Người ta có thể tổ hợp các PTVP trong hệ (5.60) để nhận được các PTVP mới. Tích phân các PTVP mới này sẽ nhận được hàm số mô tả quan hệ giữa các biến, người ta gọi đó là các tích phân đầu. Nếu tìm được n tích phân đầu độc lập thì bài toán coi như được giải quyết, bởi vì vấn đề còn lại chỉ là giải một hệ phương trình đại số.

Ví dụ 5.30: Tìm phương trình họ đường dòng của trường điện từ $\vec{F} = \frac{q}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Giải: Theo công thức (4.4), ta có hệ phương trình của họ đường dòng

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x} \end{cases}$$

Dễ dàng ta nhận được hai tích phân đầu của hệ

$$y = C_1x,\ z = C_2x$$

Vậy họ đường dòng là các đường thẳng, là giao của họ hai mặt phẳng

$$\begin{cases} y = C_1x \\ z = C_2x \end{cases}$$

trong đó $C_1,\ C_2$ là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 5.31: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x' = \dfrac{y}{x+y} \\ y' = \dfrac{x}{x+y} \end{cases}$

Giải: Cộng các vế với vế của hai phương trình ta sẽ có: $d\left(x+y\right) = dt \Rightarrow x+y = t+C_1$

Chia các vế với vế của hai phương trình ta sẽ có:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} \Rightarrow xdx - ydy = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = C_2$$

Ta có hệ phương trình đại số $\begin{cases} x+y = t+C_1 \\ x^2 - y^2 = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = t+C_1 \\ x-y = \dfrac{C_2}{t+C_1} \end{cases}$

Sau khi giải hệ phương trình này, chúng ta nhận được nghiệm tổng quát của hệ PTVP

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(t+C_1\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{C_2}{t+C_1} \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t+C_1\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{C_2}{t+C_1} \end{cases}$$

Ví dụ 5.32: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x' = x^2 - xy \\ y' = xy - y^2 \end{cases}$

Giải: Chia hai phương trình vế với vế, ta được

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \ \Rightarrow\ x = C_1y\,.$$

Trừ hai phương trình vế với vế, ta được

$$d(x-y) = (x-y)^2\,dt$$

Từ đây ta tìm được tích phân đầu thứ hai

$$-\frac{1}{x-y} = t + C_2\,.$$

Từ hai tích phân đầu, ta có nghiệm tổng quát

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{(1-C_1)(t+C_2)} \\ y = \dfrac{1}{(1-C_1)(t+C_2)} \end{cases}$$

5.6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP MỘT THUẦN NHẤT CÓ HỆ SỐ HẰNG SỐ

5.6.1. Định nghĩa

Hệ PTVP cấp 1 dạng
$$\begin{cases} y_1^{/} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i} y_i \\ y_2^{/} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i} y_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{/} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni} y_i \end{cases} \qquad (5.61)$$

trong đó $a_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., n$ là các hằng số thực được gọi là hệ PTVP tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số dạng chính tắc.

5.6.2. Phương pháp tìm nghiệm

Chúng ta tìm nghiệm không tầm thường của hệ PTVP (5.50) trong dạng:

$$\left(\alpha_1 e^{\lambda x}, \alpha_2 e^{\lambda x}, ..., \alpha_n e^{\lambda x}\right),\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 0 \qquad (5.62)$$

Sau khi thay (5.62) vào (5.61) chúng ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất có $n+1$ ẩn số: $\lambda,\ \alpha_1, ...,\ \alpha_n$

$$\begin{cases} \left(a_{11}-\lambda\right)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (5.63)$$

trong đó

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.64)$$

Phương trình (5.64) được gọi là phương trình đặc trưng của hệ PTVP (5.61), còn nghiệm λ được gọi là số đặc trưng của PTVP đó. Ta cần nhớ rằng: phương trình bậc n với hệ số thực luôn có đúng n nghiệm trong đó một nghiệm bội k sẽ được tính là k nghiệm và nếu có nghiệm phức thì cũng có nghiệm phức liên hợp với nó (Xem Ch.1, Giải tích 1)

Nguyên tắc chung là: Trước tiên, ta tìm số đặc trưng từ phương trình đặc trưng (5.64), sau đó ta thay vào hệ phương trình đại số tuyến tính (5.63) để tìm nghiệm không tầm thường $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Mục đích cuối cùng là đi tìm n nghiệm riêng độc lập tuyến tính của hệ (5.61) và nghiệm tổng quát của hệ PTVP sẽ là tổ hợp tuyến tính qua n nghiệm riêng độc lập tuyến tính đó. Tuy nhiên ta có thể dùng phương pháp hệ số bất định để tìm nghiệm tổng quát của hệ PTVP (5.61) như sau:

1. Nếu phương trình (5.64) có n nghiệm thực khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ thì nghiệm tổng quát của hệ PTVP (5.61) được tìm trong dạng:

$$\begin{cases} y_1 = A_{11}e^{\lambda_1 x} + A_{12}e^{\lambda_2 x} + ... + A_{1n}e^{\lambda_n x} \\ y_2 = A_{21}e^{\lambda_1 x} + A_{22}e^{\lambda_2 x} + ... + A_{2n}e^{\lambda_n x} \\ .... \\ y_n = A_{n1}e^{\lambda_1 x} + A_{n2}e^{\lambda_2 x} + ... + A_{nn}e^{\lambda_n x} \end{cases} \qquad (5.65)$$

trong đó n^2 hệ số bất định $A_{ij}, i, j = 1, 2, ..., n$ sẽ được xác định bằng cách thay (5.65) vào hệ PTVP (5.61) và như vậy các hệ số bất định $A_{ij}, i, j = 1, 2, ..., n$ phụ thuộc vào n hằng số tùy ý $K_1, K_2, ..., K_n$.

2. Nếu phương trình (5.64) có nghiệm thực λ_k nào đó bội l thì l số hạng trong dạng (5.65) sẽ được thay bằng tổng

$$\left(A_{ik}^{(0)} + A_{ik}^{(1)}x + ... + A_{ik}^{(l-1)}x^{l-1}\right)e^{\lambda_k x}, \ i = 1, ..., n \qquad (5.66)$$

Các hệ số bất định $A_{ik}^{(m)}, i = 1, 2, ..., n; m = 0, 1, 2, ..., l-1.$ phụ thuộc vào n hằng số tùy ý $K_1, K_2, ..., K_n$.

3. Nếu phương trình (5.64) có nghiệm phức đơn $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ nào đó thì tổng hai số hạng trong dạng (5.65) sẽ được thay bằng tổng

$$\left(A_{ik}\cos\beta_k x + B_{ik}\sin\beta_k x\right)e^{\lambda_k x}, \ i = 1, ..., n \qquad (5.67)$$

Các hệ số bất định $A_{ik}, B_{ik}, i = 1, 2, ..., n.$ phụ thuộc vào n hằng số tùy ý $K_1, K_2, ..., K_n$.

4. Nếu phương trình (5.64) có nghiệm phức $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ nào đó bội l thì tổng $2l$ số hạng trong dạng (5.65) sẽ được thay bằng tổng

$$e^{\alpha_k x}\left[\left(A_{ik}^{(0)} + A_{ik}^{(1)}x + ... + A_{ik}^{(l-1)}x^{l-1}\right)\cos\beta_k x + \left(B_{ik}^{(0)} + B_{ik}^{(1)}x + ... + B_{ik}^{(l-1)}x^{l-1}\right)\sin\beta_k x\right], \ i = 1, ..., n$$

(5.68)

Các hệ số bất định $A_{ik}^{(m)},\ B_{ik}^{(m)},\ i=1,\ 2,...,\ n,\ m=0,\ 1,...,\ l-1.$ phụ thuộc vào n hằng số tùy ý $K_1,\ K_2,...,\ K_n$.

Ví dụ 5.33: Tìm nghiệm của bài toán Cauchy $\begin{cases} x' = 3x+y \\ y' = -x+5y \\ x(0)=0,\ y(0)=1 \end{cases}$

Giải: Trước tiên ta tìm nghiệm tổng quát của hệ PTVP, sau đó ta xác định các hằng số trong nghiệm tổng quát từ điều kiện ban đầu.

Phương trình đặc trưng của hệ: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

Phương trình đặc trưng có nghiệm bội hai $\lambda = 4$

Theo công thức (5.55), nghiệm tổng quát của hệ PTVP được viết trong dạng

$$\begin{cases} x = (A_1 + B_1 t)e^{4t},\ x' = (B_1 + 4A_1 + 4B_1 t)e^{4t} \\ y = (A_2 + B_2 t)e^{4t},\ y' = (B_2 + 4A_2 + 4B_2 t)e^{4t} \end{cases}$$

Thay vào hệ PTVP ta có:

$$\begin{cases} B_1 + 4A_1 + 4B_1 t = 3A_1 + A_2 + (3B_1 + B_2)t \\ B_2 + 4A_2 + 4B_2 t = -A_1 + 5A_2 + (-B_1 + 5B_2)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 + 4A_1 = 3A_1 + A_2,\ B_2 + 4A_2 = -A_1 + 5A_2 \\ 4B_1 = (3B_1 + B_2),\ 4B_2 = (-B_1 + 5B_2) \end{cases}$$

$$B_1 = B_2 = K_1,\ A_1 = K_2,\ A_2 = K_1 + K_2$$

$$\begin{cases} x = (K_2 + K_1 t)e^{4t},\ \ x(0) = K_2 = 0 \\ y = (K_1 + K_2 + K_1 t)e^{4t},\ \ y(0) = K_1 + K_2 = 1 \Rightarrow K_1 = 1 \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán Cauchy của PTVP đã cho có dạng $\begin{cases} x = te^{4t} \\ y = (1+t)e^{4t} \end{cases}$

Ví dụ 5.34: Tìm nghiệm tổng quát của hệ PTVP $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{cases}$

Giải: Phương trình đặc trưng của hệ: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ hay $\lambda^3 + 3\lambda = 0$

Nghiệm của phương trình đặc trưng là $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \pm i\sqrt{3}$

Theo các công thức (5.65) và (5.67), nghiệm tổng quát được tìm trong dạng

$$\begin{cases} x = A_1 + B_1\cos\sqrt{3}t + C_1 \sin\sqrt{3}t \\ y = A_2 + B_2\cos\sqrt{3}t + C_2 \sin\sqrt{3}t \\ z = A_3 + B_3\cos\sqrt{3}t + C_3 \sin\sqrt{3}t \end{cases}$$

Ta thay nghiệm vào hệ PTVP đã cho, dùng phương pháp đồng nhất hệ số dẫn đến hệ 9 phương trình đối với các hằng số bất định:

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = 0, A_2 - A_3 = 0, A_3 - A_1 = 0 \\ B_1 - B_2 = \sqrt{3}C_3, B_2 - B_3 = \sqrt{3}C_1, B_3 - B_1 = \sqrt{3}C_2 \\ C_2 - C_1 = \sqrt{3}B_3, C_1 - C_3 = \sqrt{3}B_2, C_3 - C_2 = \sqrt{3}B_1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta nhận được:

$A_1 = A_2 = A_3 = K_1,\ K_1$ là hằng số tùy ý , $B_1 = K_2,\ B_2 = K_3,\ K_2, K_3$ là hằng số tùy ý

$$B_3 = -(K_2 + K_3),\ C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2K_3 + K_2),\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(2K_2 + K_3),\ C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(K_2 - K_3)$$

Cuối cùng ta có nghiệm tổng quát của hệ PTVP là

$$\begin{cases} x = K_1 + K_2\cos\sqrt{3}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}(K_2 + 2K_3)\sin\sqrt{3}t \\ y = K_1 + K_3\cos\sqrt{3}t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}(K_3 + 2K_2)\sin\sqrt{3}t \\ z = K_1 - (K_2 + K_3)\cos\sqrt{3}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}(K_2 - K_3)\sin\sqrt{3}t \end{cases}$$

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG V

- **Phương trình có biến số phân ly.** Dạng phương trình: $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$

  Tích phân tổng quát: $\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C$

- **Phương trình đẳng cấp cấp một.** Dạng phương trình: $y' = f(\frac{y}{x})$, hay $y' = f(t),\ t = \frac{y}{x}$

Phương pháp tích phân: Coi t là hàm số của x, thay vào phương trình sẽ nhận được PTVP dạng biến số phân ly $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}$

- **Phương trình tuyến tính cấp một.** Dạng phương trình: $y' + p(x)y = q(x)$

Nghiệm tổng quát:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

- **Phương trình Bernoulli**. Dạng phương trình: $y' + p(x)y = y^{\alpha} q(x)$

Phương pháp tích phân: Đặt $u(x) = \frac{1}{y^{\alpha - 1}}$,

Thay vào phương trình trên sẽ nhận được PTVP tuyến tính cấp 1 đối với hàm $u(x)$:

$$u' + (1-\alpha) p(x) u = (1-\alpha) q(x)$$

- **Phương trình vi phân toàn phần**. Dạng phương trình: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

trong đó $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y) \in D$

Tích phân tổng quát: $\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$

hoặc: $\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$

- **Các PTVP cấp hai giảm cấp được**

A. Phương trình khuyết $y,\ y'$

Dạng phương trình: $F(x, y'') = 0$

Cách giải: Ta đặt $y' = p(x)$. hàm số phải tìm là $p(x)$: $F(x, p') = 0$. Nếu tìm được $p(x)$ ta sẽ nhận được phương trình với biến số phân li để tìm $y = y(x)$. Tuy nhiên, việc tìm $p(x)$ thường phức tap nên thông thường biểu diễn nghiệm dưới dạng tham số: $x = x(t),\ y = y(t)$.

B. Phương trình khuyết y

Dạng Phương trình: $F(x, y', y'') = 0$

Cách giải: Ta đặt $y' = p(x)$. Vậy phương trình đã cho được đưa về PTVP cấp một đối với hàm số phải tìm là $p(x)$: $F(x, p, p') = 0$. Nếu tìm được $p(x)$ ta sẽ nhận được phương trình với biến số phân li để tìm $y = y(x)$.

C. Phương trình khuyết x

Dạng phương trình : $F(y, y', y'') = 0$

Cách giải: Ta đặt $y' = p(y)$. Từ đó suy ra $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}.p$.

Vậy phương trình được đưa về PTVP cấp 1 đối với hàm số $p(y)$: $F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$. Nếu tìm được $p(y)$ ta sẽ nhận được phương trình với biến số phân li để tìm $x = x(y)$.

- **Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất:**

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (*)$$

Tính chất nghiệm**:** **1**. Nếu y_1 và y_2 là nghiệm của PTVP (*) thì $C_1y_1 + C_2y_2$ với C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý, cũng là nghiệm của (*)

2. Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (*) thì nghiệm tổng quát của nó có dạng : $y = C_1y_1 + C_2y_2$

(C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý)

3. Nếu biết $y_1 \neq 0$ là nghiệm của (*) thì có thể tìm được nghiệm y_2 của nó độc lập tuyến tính với y_1 trong dạng :

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)dx} dx$$

Chú ý : Trong tích phân trên hằng số cộng của tích phân bất định luôn lấy bằng 0

- **Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất**

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (**)$$

Tính chất nghiệm : **1.** Nghiệm tổng quát của PTVP (**) bằng tổng nghiệm tổng quát của PTVP (*) cộng với một nghiệm riêng bất kỳ của chính phương trình (**)

$$y = \overline{y} + y^*$$

Ở đây người ta dùng ký hiệu :

$\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của PTVP (*)

y^* là nghiệm riêng của PTVP (**)

2. (Nguyên lý chồng chất nghiệm): Nếu $y_1^*,\ y_2^*$ lần lượt là các nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = f_1(x)$$
$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = f_2(x)$$

thì $y^* = y_1^* + y_2^*$ là nghiệm riêng của phương trình (**) với vế phải $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

3. Nếu biết hai nghiệm riêng $y_1,\ y_2$ độc lập tuyến tính của (*) thì một nghiệm riêng của (**) có thể tìm được bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Nghiệm đó có dạng:

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

trong đó: $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$

4. Nếu biết hai nghiệm riêng của PTVP (**): $y_1^*,\ y_2^*$ thì hàm số $y = y_1^* - y_2^*$ là một nghiệm của PTVP (*)

- **Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số không đổi**

$y''+a_1y'+a_2y = 0$ (1) $a_1,\ a_2$ là các hằng số thực

$k^2 + a_1k + a_2 = 0$ (2) gọi là phương trình đặc trưng của (1)

Dạng nghiệm tổng quát:

Nếu (2) có 2 nghiệm thực khác nhau k_1, k_2 thì nghiệm tổng quát của (1) sẽ là:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

Nếu (2) có 2 nghiệm thực trùng nhau và bằng k thì nghiệm tổng quát của (1) sẽ là

$$y = (C_1 + C_2x)e^{kx}$$

Nếu (2) có 2 nghiệm phức $k = \alpha \pm i\beta$ thì nghiệm tổng quát của (1) sẽ là

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

- **Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất có hệ số không đổi**

$y''+a_1y'+a_2y = f(x)$, (3) a_{1},a_2 là các hằng số thực

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x) = e^{\alpha x}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)$

trong đó $\alpha,\ A_i \in 3$, $i = \overline{0,\ n},\ A_n \neq 0.$

Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng với (3) thì một nghiệm riêng của (3) tìm dưới dạng

$$y^* = e^{\alpha x}Q_n(n) = e^{\alpha x}(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + ... + B_0).$$

Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng với (3) thì một nghiệm riêng của (3) tìm dưới dạng

$$y^* = xe^{\alpha x}Q_n(n) = xe^{\alpha x}(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + ... + B_0).$$

Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng với (3) thì một nghiệm riêng của (3) tìm dưới dạng

$$y^* = x^2e^{\alpha x}Q_n(n) = x^2e^{\alpha x}(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + ... + B_0).$$

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

trong đó $\alpha,\ \beta \in R,\ P_n(x),\ Q_n(x)$ lần lượt là các đa thức bậc *n, m* cho trước với các hệ số thực.

Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của (2) thì một nghiệm riêng của (3) được tìm dưới dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$$

trong đó $R_l(x),\ S_l(x)$ là các đa thức bậc $l = \mathrm{Max}(n,m)$ có các hệ số được tìm bằng phương pháp hệ số bất định với các hệ hàm: $1,\ x,\ x^2,...;\ \sin\beta x,\ \cos\beta x$

Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của (2) thì nghiệm riêng được tìm trong dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}x\left[R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right]$$

- **Hê phương trình vi phân cấp một tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số**

$$\begin{cases} y_1' = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}y_i \\ y_2' = \sum_{i=1}^{n} a_{2i}y_i \\ .... \\ y_n' = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}y_i \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$

1. Nếu phương trình (*) có n nghiệm thực khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ thì nghiệm tổng quát của hệ PTVP được tìm trong dạng:

$$\begin{cases} y_1 = A_{11}e^{\lambda_1 x} + A_{12}e^{\lambda_2 x} + ... + A_{1n}e^{\lambda_n x} \\ y_2 = A_{21}e^{\lambda_1 x} + A_{22}e^{\lambda_2 x} + ... + A_{2n}e^{\lambda_n x} \\ .... \\ y_n = A_{n1}e^{\lambda_1 x} + A_{n2}e^{\lambda_2 x} + ... + A_{nn}e^{\lambda_n x} \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó n^2 hệ số bất định $A_{\text{ij}}, i, j = 1, 2, ..., n$ phụ thuộc vào n hằng số tùy ý $K_1, K_2, ..., K_n$.

2. Nếu phương trình (*) có nghiệm thực λ_k nào đó bội l thì l số hạng trong dạng (1)sẽ được thay bằng tổng

$$\left(A_{ik}^{(0)} + A_{ik}^{(1)}x + ... + A_{ik}^{(l-1)}x^{l-1}\right)e^{\lambda_k x},\ i = 1, ..., n$$

Các hệ số bất định $A_{ik}^{(m)},\ i = 1, 2, ..., n;\ m = 0, 1, 2, ..., l-1.$ phụ thuộc vào n hằng số tùy ý $K_1, K_2, ..., K_n$.

3. Nếu phương trình (*) có nghiệm phức đơn $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ nào đó thì tổng hai số hạng trong dạng (1) sẽ được thay bằng tổng

$$\left(A_{ik}\cos\beta_{\text{k}}x + B_{ik}\sin\beta_{\text{k}}x\right)e^{\lambda_k x},\ i = 1, ..., n$$

Các hệ số bất định $A_{ik}, B_{ik}, i = 1, 2, ..., n.$ phụ thuộc vào n hằng số tùy ý $K_1, K_2, ..., K_n$.

4. Nếu phương trình (*) có nghiệm phức $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ nào đó bội l thì tổng $2l$ số hạng trong dạng (1) sẽ được thay bằng tổng

$$e^{\alpha_k x}\left[\left(A_{ik}^{(0)} + A_{ik}^{(1)}x + ... + A_{ik}^{(l-1)}x^{l-1}\right)\cos\beta_{\text{k}}x + \left(B_{ik}^{(0)} + B_{ik}^{(1)}x + ... + B_{ik}^{(l-1)}x^{l-1}\right)\sin\beta_k x\right],\ i = 1, ..., n$$

Các hệ số bất định $A_{ik}^{(m)}, B_{ik}^{(m)}, i = 1, 2, ..., n, m = 0, 1, ..., l-1.$ phụ thuộc vào n hằng số tùy ý $K_1, K_2, ..., K_n$.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

5.1. Giải các phương trình:

a. $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$,

b. $y' = x^2 e^x$,

c. $y'\cos x = \dfrac{y}{\ln y}$,

d. $\dfrac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$,

e. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$,

f. $y' = \cos(x-y)$.

5.2. Giải các bài toán Cauchy:

a. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+z)} = 0,\ y(1) = 1,$

b. $(1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx,\ y(0) = 0,$

c. $\sin x dy - y\ln y dx = 0,\ y(0) = 1,$

d. $(x^2+1)y' = y^2 + 4,\ y(1) = 2.$

5.3. Giải các phương trình:

a. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$,

b. $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$,

c. $x\cos\dfrac{y}{x}\left(ydx + xdy\right) = y\sin\dfrac{y}{x}\left(xdy - ydx\right)$,

d. $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$.

5.4. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

a. $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$,

b. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$,

c. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$,

d. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$.

5.5. Giải các bài toán Cauchy:

a. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ y(0) = \dfrac{1}{2},$

b. $(1+x^2)y' + xy = 1,\ y(0) = 0.$

5.6. Chứng minh hàm số $y = x\int_1^x e^{t^2}dt$ là một nghiệm của phương trình $xy' - y = x^2 e^{x^2}$. Hãy tìm nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện y(1) = 1.

5.7. Giải các phương trình:

a. $y'+xy = x^3y^3$,

b. $\dfrac{dy}{dx}(x^2y^3+xy)=1$,

c. $(y\ln x-2)ydx = xdy$,

d. $ydx+(x+x^2y)dy=0$.

5.8. Giải các phương trình vi phân toàn phần:

a. $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right]dx+\left[\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$,

b. $\dfrac{xdx+(2x+y)dy}{(x+y)^2}=0$,

c. $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)dy=0$,

d. $3x^2(1+\ln y)dx-\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy=0$.

5.9. Giải các phương trình sau đây bằng cách tìm thừa số tích phân α

a. $(2y+xy)dx+2xdy=0,\ \alpha(x)$,

b. $\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0,\ \alpha(x)$,

c. $y(1+xy)dx-xdy=0,\ \alpha(y)$,

d. $xdy+ydx-xy^2\ln xdx=0,\ \alpha(xy)$.

5.10. Giải các phương trình vi phân cấp hai có dạng khuyết

a. $xy''-y'=x^2e^x$,

b. $y''^2+y'^2=a^2$,

c. $y''-\dfrac{y'}{x-1}-x(x-1)=0,\ y(2)=1,\ y'(2)=-1.$

d. $y''+2y'(1-2y)=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=\dfrac{1}{2}.$

5.11. Giải các phương trình vi phân sau:

a. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $y_1=x^{\alpha}, \alpha\in 3$

b. $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$, biết nó có một nghiệm riêng dạng $y_1=e^{\alpha x}, \alpha\in 3$

c. $(x^2-1)y''-6y=0$, biết rằng nó có một nghiệm riêng *$y_1(x)$* có dạng đa thức,

d. $(2x-x^2)y''+2(x-1)y'-2y=-2$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng $y_1=1,\ y_2=x$.

5.12. Giải các phương trình sau khi biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng.

a. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3,\ y_1 = x,$

b. $y'' + \dfrac{x}{1-x}y' - \dfrac{1}{1-x}y = x-1,\ y_1 = e^x,$

c. $y'' + \dfrac{1}{x^2\ln x}y = e^x\left(\dfrac{2}{x} + \ln x\right),\ y_1 = \ln x.$

d. $x(x+1)y''(2+x)y' - y = x + \dfrac{1}{x},\ y_1$ có dạng đa thức.

5.13. Giải các phương trình:

a. $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$,

b. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$,

c. $y'' + y = tgx$,

d. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

5.14. Giải các phương trình:

a. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$,

b. $y'' - 3y' = 2 - 6x$,

c. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$,

d. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$,

e. $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}$,

f. $y'' + y = x^2\cos^2 x$.

5.15. Giải các bài toán Cauchy

. **a.** $y'' + y = \cos^3 x,\ y(0) = y'(0) = 0$,

b. $y'' - 2y' + 2y = 5\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

5.16. Giải bài toán Cauchy $x^2y'' + xy' - 4y = x^2\ln x,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$

5.17. Giải các phương trình sau tương ứng với phép đổi biến

a. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x,\ t = e^x,$

b. $(x^2+1)y'' + 2xy' + \dfrac{4y}{x^2+1} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2},\ \mathrm{tg}t = x,\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2},$

c. $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0,\ \mathrm{sh}t = x,$

d. $x^2y''-2xy'+(2-x^2)y=0,\ z=\dfrac{y}{x},$

e. $x^2y''+4xy'+(2+x^2)y=\dfrac{1}{\cos x},\ y=\dfrac{u}{x^2}.$

5.18. Giải các hệ phương trình vi phân sau: (Đối số là x)

a. $\begin{cases} y' = 4y-2z \\ z' = y+z \end{cases},$ **b.** $\begin{cases} y' = 3y-2z \\ z' = 2y-z \end{cases}.$

5.19. Giải các hệ phương trình vi phân sau: (Đối số là x)

a. $\begin{cases} y' = y+8z+e^x \\ z' = 2y+z+e^{-3x} \end{cases},$ **b.** $\begin{cases} y' = y+z-3 \\ z' = -2y+3z+1 \end{cases},\ y(0)=1,\ z(0)=0.,$

5.20. Giải các hệ phương trình vi phân sau: (Đối số là x)

a. $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{y}{2} \end{cases},$ **b.** $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{yz} \\ z' = \dfrac{x}{y^2} \end{cases}.,$

5.21. Giải các hệ phương trình vi phân sau:

a. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{3t}-y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2e^{3t}-x, \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x+y+\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2\sin t-x, \end{cases}$

5.22. Giải các bài toán Cauchy sau:

a. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x+y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x+2y+z \\ \dfrac{dz}{dt} = x+z \\ x(0)=y(0)=0,\ z(0)=2. \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2} \\ x(0)=y(0)=z(0)=1. \end{cases}$