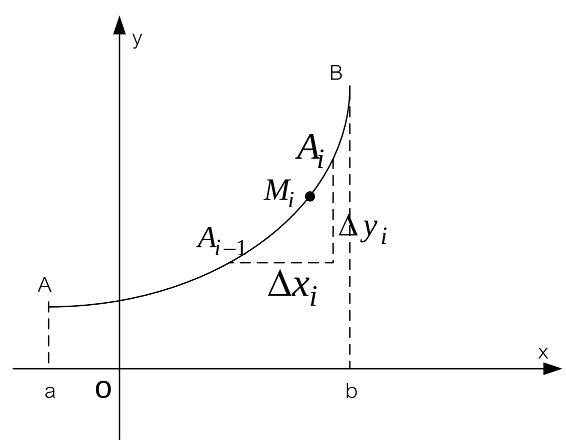
CHƯƠNG III. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

Tích phân đường và tích phân mặt là sự mở rộng của tích phân nhiều lớp trên hai phương diện: lấy tích phân trên các cung cong thay cho trên đoạn thẳng, tích phân trên mặt cong thay cho miền phẳng, đặc biệt để ý đến việc định hướng của đường cong và mặt cong. Chính vì thế ý nghĩa thực tiễn của tích phân đường, tích phân mặt là rất lớn. Hầu hết các bài toán kỹ thuật liên quan đến trường véctơ đều liên quan đến tích phân đường, tích phân mặt: tính công của lực, tính thông lượng của trường. Tính tích phân đường dẫn đến tính tích phân xác định, tính tích phân mặt dẫn đến tính tích phân bội hai, vậy một lần nữa yêu cầu người học phải có kĩ năng tính tích phân xác định.

3.1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT.

3.1.1. Định nghĩa tích phân đường loại một



H.3.1

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên một cung phẳng AB (H.3.1)

1. Chia cung AB làm n cung nhỏ bởi các điểm chia $A_0 \equiv A,\ A_1,...,A_{i-1},\ A_i,...,\ A_n \equiv B$. Ta gọi độ dài cung $A_{i-1}A_i$ là Δs_i, $(i=\overline{1,\ n})$

2. Lấy tuỳ ý n điểm $M_i(x_i,y_i) \in A_{i-1}A_i$, $(i=\overline{1,\ n})$

3. Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$ được gọi là tổng tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ trên cung AB ứng với một phân hoạch và một cách chọn tuỳ ý các điểm $M_i \in A_{i-1}A_i,\ (i = \overline{1,\ n})$. Nếu $n \to \infty$ sao cho $\text{Max}\Delta s_i \to 0,\ I_n$ hội tụ về số I không phụ thuộc cách chia cung AB và cách chọn $M_i \in A_{i-1}A_i,\ (i = \overline{1,\ n})$ thì số I gọi là tích phân đường loại một của *f(x,y)* dọc theo cung AB và ký hiệu $\int_{AB} f(x, y)ds$

Vậy $$I = \lim_{\text{Max}\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \int_{AB} f(x, y)ds \qquad (3.1)$$

Nếu có tích phân (3.1) thì ta nói rằng *f(x,y)* khả tích trên AB.

Trong công thức (3.1), ds ký hiệu độ dài yếu tố của cung AB hay vi phân cung AB.

Mở rộng: Nếu *f(x,y,z)* khả tích trên cung $AB \subset \mathbb{R}^3$ thì tích phân đường loại một của f(x,y,z) trên cung AB ký hiệu là

$$I = \int_{AB} f(x, y, z)ds \qquad (3.2)$$

Chú ý:

a. Từ định nghĩa trên ta thấy chiều đi của cung AB không đóng vai trò gì cả vì I_n không phụ thuộc vào hướng đi của cung AB. Vậy

$$\int_{AB} f(x, y)ds = \int_{BA} f(x, y)ds \qquad (3.3)$$

b. Rõ ràng nếu gọi *l* là độ dài cung AB thì $l = \int_{AB} ds$ (3.4)

c. Nếu một dây vật chất có dạng cung AB và mật độ khối lượng là $\rho(x, y)$ thì khối lượng của dây vật chất đó tính theo công thức: $M = \int_{AB} \rho(x, y)ds$ (3.5)

và tọa độ trọng tâm G của cung cho bởi công thức

$$x_G = \frac{1}{M}\int_{AB} x\rho(x, y)ds,\ y_G = \frac{1}{M}\int_{AB} y\rho(x, y)ds. \qquad (3.6)$$

d. Cung AB được gọi là cung trơn nếu tiếp tuyến của nó biến thiên liên tục. Cung AB được gọi là cung trơn từng khúc nếu có thể chia cung AB thành hữu hạn các cung trơn.

Người ta đã chứng minh được: Nếu cung AB trơn hoặc trơn từng khúc và *f(x,y)* liên tục trên cung AB thì *f(x,y)* khả tích trên cung AB

e. Vì định nghĩa trên tương tự với tích phân xác định, tích phân bội nên tích phần đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định.

3.1.2. Công thức tính tích phân đường loại một

1. Trong hệ tọa độ đề các

Định lý 3.1: *Giả sử cung AB trơn cho bởi phương trình:*

$y = y(x), \quad a \le x \le b$ *và hàm số f(x,y) liên tục trên cung* AB.

Khi đó:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx \tag{3.7}$$

Chứng minh: Thực hiện phép chia cung AB bởi các điểm $A_i(x_i, y_i),\ i=\overline{1,\ n}$ như định nghĩa đã trình bày. Gọi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1} \quad (i=\overline{1,\ n})$ (xem H.3.1). Với $\Delta x_i, \Delta y_i$ khá bé thì:

$$\Delta s_i \approx \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1+(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2}.|\Delta x_i|$$

Theo công thức Lagrange, ta có $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = y'(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i),\ i=\overline{1,\ n}.$

Suy ra $\qquad \Delta s_i \approx \sqrt{1+y'^2(\xi_i)}\,|\Delta x_i|,\ \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$

Sau khi thực hiện phép chia cung AB, ta chọn $M_i(\xi_i, y(\xi_i)) \in A_{i-1}A_i, \quad i=\overline{1,\ n}$

Vậy tổng tích phân tương ứng sẽ là:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, y(\xi_i))\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, y(\xi_i))\sqrt{1+y'^2(\xi_i)}|\Delta x_i|$$

Cho $n \to \infty$ sao cho $\text{Max}\Delta x_i \to 0$ hay $\text{Max}\Delta s_i \to 0$, do sự tồn tại của tích phân đường loại một nên vế trái dần đến $\int\limits_{AB} f(x,y)ds$, còn vế phải chính là tích phân xác định của hàm số $f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}$ trên [a,b], nghĩa là ta nhận được công thức (3.7).

2. Đường cong cho dưới dạng tham số

Nếu cung AB cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_1 \le t \le t_2$$

thì $\quad y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)},\ dx = x'(t)dt,\ \sqrt{1+y'^2(x)} = \dfrac{1}{|x'(t)|}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$

Vì $a \le b$ và $t_1 \le t_2$ nên công thức (3.7) trở thành :

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \qquad (3.8)$$

3. Đường cong trong không gian

Tổng quát, ta có kí hiệu tích phân đường loại 1 khi đường cong $AB \subset \mathbb{R}^3$

$$I = \int\limits_{AB} f(x,y,z)ds \qquad (3.9)$$

Nếu cung $AB \subset \mathbb{R}^3$ cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t) \end{cases}$ và *f(x,y,z)* khả tích trên cung đó thì:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt \qquad (3.10)$$

Nếu một dây vật chất có dạng cung $AB \subset \mathbb{R}^3$ và mật độ khối lượng là $\rho(x,y,z)$ thì khối lượng của dây vật chất đó được tính theo công thức:

$$M = \int\limits_{AB} \rho(x,y,z)ds \qquad (3.11)$$

và tọa độ trọng tâm G của cung được cho bởi công thức

$$x_G = \frac{1}{M}\int_{AB} x\rho(x,y,z)ds,\ \ y_G = \frac{1}{M}\int_{AB} y\rho(x,y,z)ds,\ \ z_G = \frac{1}{M}\int_{AB} z\rho(x,y,z)ds. \qquad (3.12)$$

4. Đường cong trong dạng tọa độ cực

Nếu $r = r(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ là phương trình trong toạ độ cực của cung AB thì trong dạng tham số cung AB được mô tả bởi hệ phương trình

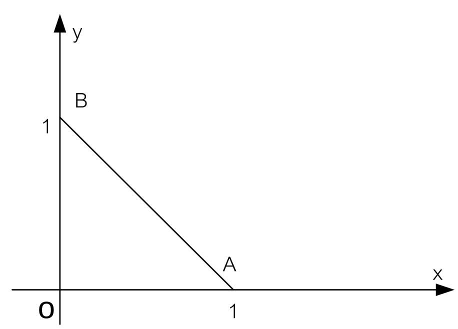
$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \qquad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$$

Khi đó $x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)$. Công thức (3.6) sẽ trở thành

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left[r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right]\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi \qquad (3.13)$$

Ví dụ 3.1: Tính $\int_C (x+y)ds$, C là biên tam giác với các đỉnh O (0,0), A (1,0), B (0,1).

Giải: Đường cong C được cho trên H.3.2



H.3.2

Theo tính chất của tích phân ta có:

$$\int_C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$$

Đoạn OA có phương trình *y = 0,* $0 \le x \le 1$

$$\int_{OA} (x+y)ds = \int_0^1 x\sqrt{1+0}dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Đoạn AB có phương trình: $y = 1 - x, 0 \le x \le 1$

$$\int_{AB} (x+y)ds = \int_0^1 1\sqrt{1+1}dx = \sqrt{2}$$

Đoạn BO có phương trình: $x = 0, 0 \le y \le 1$

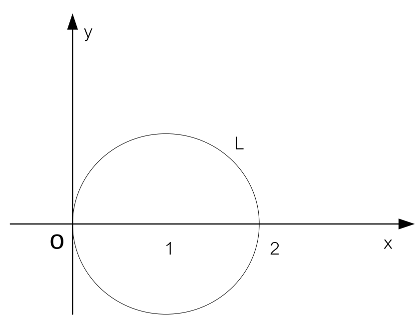
$$\int_{BO} (x+y)ds = \int_0^1 y\sqrt{1+0}dy = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(Sử dụng công thức (3.6) trong đó thay đổi vai trò các biến x và y cho nhau)

Kết quả ta có $\int_C (x+y)ds = 1 + \sqrt{2}$

Ví dụ 3.2: Tính $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}ds$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

Giải: Đường tròn L được cho trên H 3.3.



H.3.3

Trong toạ độ cực phương trình đường L có dạng $r = 2\cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Theo công thức (3.9) ta có:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}d\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = 8\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8$$

Bạn đọc có thể giải ví dụ 3.2 bằng cách viết phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad -\pi \le t \le \pi$

Ví dụ 3.3: Xác định trọng tâm của dây đồng chất cho bởi phương trình

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt,\ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

Giải: Trong trường hợp dây đồng chất, công thức (3.12) trở thành

$$x_G = \frac{1}{l}\int_{AB} xds,\ y_G = \frac{1}{l}\int_{AB} yds,\ z_G = \frac{1}{l}\int_{AB} zds, \quad l \text{ là độ dài của dây.}$$

$$l = \int_0^\pi \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\int_{AB} xds = a\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^\pi \cos tdt = 0,\ \int_{AB} yds = a\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^\pi \sin tdt = 2a\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\int_{AB} zds = b\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^\pi tdt = \frac{\pi^2 b\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

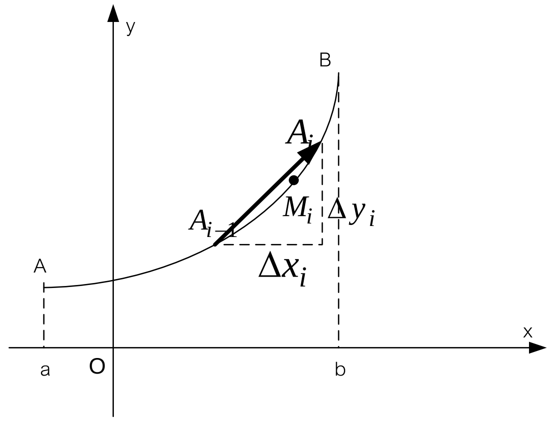
Do vậy $x_G = 0,\ y_G = \dfrac{2a}{\pi},\ z_G = \dfrac{\pi b}{2}.$

3.2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

3.2.1. Bài toán mở đầu: Tính công của lực biến đổi

Bài toán: Một chất điểm M di chuyển dọc theo một cung phẳng AB từ điểm A đến điểm B dưới tác dụng của lực $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} = (P,\ Q),\ M \in AB$. Hãy tính công W của lực sinh ra.trên cung AB.

Cách tính: Chia cung AB làm n cung nhỏ bởi các điểm chia $A_0, A_1, ..., A_n$. Gọi Δs_i là độ dài cung $A_{i-1}A_i$ và các thành phần của véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ là $\Delta x_i,\ \Delta y_i,\ i = \overline{1, n}$ (H 3.4)



H.3.4

Lấy tuỳ ý $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$. Nếu cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ khá nhỏ có thể coi nó xấp xỉ dây cung $A_{i-1}A_i$ và $\vec{F}(M)$ không đổi (cả chiều và độ lớn) trên cung đó. Vì thế có thể coi rằng công của lực sinh ra khi chất điểm di chuyển từ A_{i-1} đến A_i theo cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ sẽ xấp xỉ bằng

$$\vec{F}(M_i).\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$$

Ta suy ra công W của lực sinh ra đi từ A đến B sẽ xấp xỉ là:

$$\mathrm{W} \approx \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

Rõ ràng giới hạn của tổng trên khi $n \to \infty$ sao cho $\mathrm{Max}\Delta s_i \to 0$ chính là công của lực:

$$\mathrm{W} = \lim_{\mathrm{Max}\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

Ý tưởng tính công của lực dẫn đến khái niệm tích phân đường loại hai.

3.2.2. Định nghĩa tích phân đường loại hai

Cho hai hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ xác định trên cung L (hay cung $\overset{\frown}{AB}$)

1. Chia cung L thành n cung nhỏ bởi các điểm chia:

$$A \equiv \mathrm{A}_0,\ A_1, ...,\ A_{i-1},\ A_i, ...,\ A_n \equiv B$$

Gọi toạ độ của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ là $\Delta x_i,\ \Delta y_i$ và độ dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ là $\Delta s_i,\ i = \overline{1,\ n}$.

2. Lấy tuỳ ý n điểm $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i},\ i = \overline{1,\ n}$.

3. Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$ được gọi đó là tổng tích phân đường loại hai của hàm số $P(x,y),\ Q(x,y)$ dọc theo L đi từ A đến B ứng với một phân hoạch của L và một cách chọn $M_i \in A_{i-1}A_i$.

Khi $n \to \infty$ sao cho $\mathrm{Max}\Delta s_i \to 0$ ($\mathrm{Max}\Delta x_i \to 0$ và $\mathrm{Max}\Delta y_i \to 0$) mà I_n hội tụ về số *I* không phụ thuộc cách chia cung *L* và cách chọn tuỳ ý $M_i \in A_{i-1}A_i$ thì số *I* gọi là tích phân đường loại hai của các hàm *P(x,y), Q(x,y)* dọc theo cung *AB* đi từ *A* đến *B* và ký hiệu là $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Như vậy $$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i \qquad (3.14)$$

Chú ý:

a. Khác với tích phân đường loại một, ở tích phân đường loại hai, hướng lấy tích phân của L là quan trọng. Nếu ta dọc theo cung AB đi từ B đến A thì các vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ đổi hướng, tức là các thành phân của vectơ đó là $-\Delta x_i,\ -\Delta y_i, (i = \overline{1,\ n})$. Vậy tổng tích phân sẽ đổi dấu, suy ra:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (3.15)$$

b. Công sinh ra do lực $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ để chất điểm dịch chuyển từ *A* đến *B* theo cung AB sẽ là:

$$\mathrm{W} = \int\limits_{AB} \mathrm{P(x,y)dx} + Q(x,y)dy \qquad (3.16)$$

c. Nếu AB là đường cong trong không gian và có ba hàm số *P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)* xác định trên cung AB thì tích phân đường loại hai của ba hàm số đó cũng được ký hiệu là:

$$\int\limits_{AB} P\left(x,y,z\right)dx + Q(x,y,z)dy + R\left(x,y,z\right)dz \qquad (3.17)$$

d. Cho L là đường cong phẳng (nằm trên mặt phẳng Oxy) và kín. Người ta qui ước gọi hướng dương của đường cong L là hướng sao cho một người đi dọc L theo hướng đó thì thấy miền giới hạn bởi L gần mình nhất ở bên trái. Tích phân lấy theo hướng dương thường ký hiệu là :

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

e. Tương tự tích phân đường loại một, người ta cũng chứng minh về sự tồn tại tích phân đường loại hai: Nếu cung AB trơn hoặc trơn từng khúc và các hàm *P(x,y), Q(x,y)* liên tục trên cung đó thì tồn tại tích phân đường loại hai của hai hàm *P(x,y), Q(x,y)* lấy theo cung AB.

f. Tích phân đường loại hai cũng có các tính chất tương tự như tích phân xác định.

3.2.3. Công thức tính tích phân đường loại hai

1. Đường cong cho dưới dạng tham số

Định lý 3.2: *Giả sử hai hàm số P(x,y), Q(x,y) liên tục trên cung AB trơn cho bởi phương trình tham số:* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ *và điểm A ứng với giá trị tham số $t = t_A$, B ứng với giá trị tham số t_B. Khi đó:*

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt \qquad (3.18)$$

Chứng minh: Ta thực hiện phép chia cung AB như đã trình bày trong phần định nghĩa. Khi đó đoạn $[t_A, t_B]$ tương ứng được chia thành *n* đoạn bởi các số t_i tương ứng với các điểm A_i, $i = \overline{1,n}$ $t_A \equiv t_0$, $t_B \equiv t_n$ và theo định lý Lagrange ta có:

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(t_i^*)\Delta t_i$$
$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(t_i^{**})\Delta t_i$$

trong đó t_i^*, t_i^{**} là điểm nằm trong khoảng (t_{i-1}, t_i), $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Để lập tổng tích phân $\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i$, ta chọn các điểm $M_i(x_i, y_i) \in A_{i-1}A_i$, sao cho $x_i = x(t_i^*)$, $y_i = y(t_i^*)$. Khi đó

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\max|\Delta t_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x(t_i^*), y(t_i^*))x'(t_i^*)\Delta t_i$$

Theo giả thiết hàm $P\big(x(t), y(t)\big)x'(t)$ khả tích nên với cách chọn M_i như trên ta có:

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{t_A}^{t_B} P(x(t),y(t))x'(t)dt \qquad (3.19)$$

Lý luận tương tự ta có: $$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} Q(x(t),y(t))y'(t)dt \qquad (3.20)$$

Vậy cuối cùng ta nhận được công thức (3.18).

Trường hợp đường cong AB trong không gian *Oxyz* cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t \in [t_A, t_B] \\ z = z(t) \end{cases}$$

Các điểm A, B tương ứng với các tham số $t_A,\ t_B$ khi đó chứng minh hoàn toàn tương tự, ta có: :

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{t_A}^{t_B} \Big[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(\ldots)y'(t) + R(\ldots)z'(t) \Big] dt$$

(3.21)

2. Đường cong trong tọa độ đề các

Khi cung AB phẳng cho bởi phương trình dạng tường minh *y = y(x), A, B* có hoành độ tương ứng là *a, b* thì theo công thức (3.18) , coi *x* là tham số, ta nhận được:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) \big] dx \qquad (3.22)$$

hoặc nếu AB cho bởi phương trình *x = x(y) , A, B* có tung độ tương ứng là *c, d* thì

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \big[P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y) \big] dy \qquad (3.23)$$

Khi cung $AB \subset \mathbb{R}^3$, phương trình tổng quát có dạng

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Công thức tính tích phân đường loại hai trở nên phức tạp, bạn đọc có thể xem trong $[1]$.

Chính vì lẽ đó mà phương trình đường cong thường được tham số hóa.

Ví dụ 3.4: Tính công sinh bởi lực $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ sinh ra dọc theo đường ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ theo hướng dương của nó.

Giải: Phương trình tham số của đường ellipse đã cho là:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Ta nhận thấy *t* tăng từ 0 đến 2π ứng với hướng dương của đường ellipse. Do đó công sinh bởi lực $\vec{F}$ dọc theo hướng dương sẽ là:

$$A = \oint_L xdy - ydx = \int_0^{2\pi} (a\cos t.b\cos t + b\sin t.a\sin t)dt$$
$$= ab\int_0^{2\pi} dt = 2\pi ab$$

Ví dụ 3.5: Tính $I = \int_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ trong đó L là cung của parabôn $y = 1 - x^2$ đi từ điểm *A(0,+1)* đến điểm *B(-1,0)*.

Giải: $y = 1 - x^2 \Rightarrow dy = -2xdx$

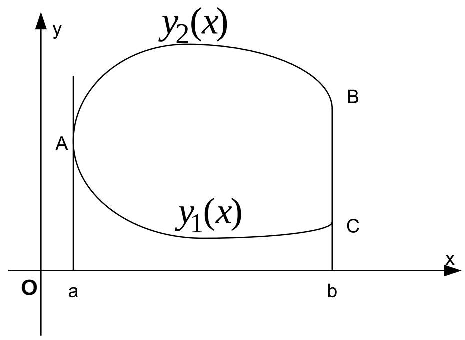
$$I = \int_0^{-1} \left[2x(1-x^2) - x^2 + (x + 1 - 2x^2 + x^4)(-2x)\right]dx$$
$$= \int_0^{-1} (-2x^5 + 2x^3 - 3x^2)dx = \left(-\frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - x^3\right)\Big|_0^{-1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{6}$$

3.3. Công thức Grin (Green)

Giả sử *D* là miền liên thông, bị chặn có biên là *L* gồm một hay nhiều đường cong kín trơn hoặc trơn từng khúc. Sau đây ta sẽ đưa ra công thức liên hệ giữa tích phân đường loại hai dọc theo *L* và tích phân bội hai trên miền *D* có tính chất đã nêu ra.

Định lý 3.3. *Cho các hàm số P(x,y), Q(x,y) liên tục cùng các đạo hàm riêng cấp một trong miền liên thông D có biên là đường L. Khi đó*:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_L Pdx + Qdy \qquad (3.24)$$



H.3.5

Chú ý: Tích phân đường loại hai trong công thức (3.24) được lấy theo hướng, sao cho người quan sát đi theo hướng đó, miền bị chặn D luôn luôn nằm về phía bên tay trái.

Chứng minh:

. * Trước hết xét miền D đơn liên và đơn giản, hiểu theo nghĩa nó được mô tả bởi hệ bất phương trình: (Xem H.3.5)

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

hoặc
$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

trong đó $L = AB \cup BC \cup CA$

AB có phương trình : $y = y_2(x),\ \ a \le x \le b$

BC có phương trình $x = b,\ \ y_1(b) \le y \le y_2(b)$

CA có phương trình $y = y_1(x),\ \ a \le x \le b$

Theo công thức tính tích phân kép ta có:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))dx$$

Theo công thức tính tích phân đường loại hai (3.18) và chú ý a. ta có:

$$\int_a^b P(x,y_2(x))dx = \int_{AB} P(x,y)dx,\ \int_a^b P(x,y_1(x))dx = \int_{AC} P(x,y)dx$$

Ta suy ra

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{AC} P(x,y)dx + \int_{BA} P(x,y)dx$$

Mặt khác $\int_{CB} P(x,y)dx = 0$ vì BC có phương trình $x = b$ nên $dx = 0$. Vậy

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{AC} P(x,y)dx + \int_{CB} P(x,y)dx + \int_{BA} P(x,y)dx = \oint_L P(x,y)dx$$

Tương tự ta có: $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_L Q(x,y)dy$

Cộng các vế tương ứng ta nhận được công thức Green (3.24)

* Xét D là miền đơn liên bất kỳ (H.3.6). Ta luôn có thể phân chia miền *D* thành hữu hạn các miền đơn giản, chẳng hạn có thể chia *D* thành 3 miền có chung biên là đoạn *AB* và *BC*. Theo tính chất của tích phân bội hai và kết quả đã chứng minh phần trên, ta có

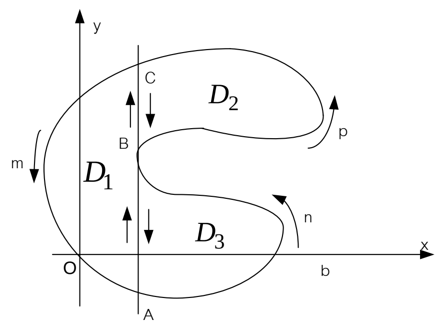
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{AB} Pdx + Qdy + \int_{BC} Pdx + Qdy + \int_{CmA} Pdx + Qdy$$

$$\iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{CB} Pdx + Qdy + \int_{BpC} Pdx + Qdy$$

$$\iint_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{BA} Pdx + Qdy + \int_{AnB} Pdx + Qdy$$

Cộng các vế với các hệ thức trên và để ý đến chú ý a. của tích phân đường loại hai, ta nhận được được công thức Green (3.24).



H.3.6

. * Trường hợp D là miền đa liên, chẳng hạn D là miền nhị liên (H.2.7), biên L gồm hai đường L_1 và L_2 rời nhau. Ta có thể chia miền D thành 4 miền nhỏ. Áp dụng công thức Green cho cả 4 miền và sử dụng chú ý a, ta cũng nhận được công thức (3.24). Trong trường hợp này cần lưu ý: Tích phân dọc theo L_1 có hướng ngược chiều kim đồng hồ, còn tích phân dọc theo L_2 có hướng thuận chiều kim đồng hồ.

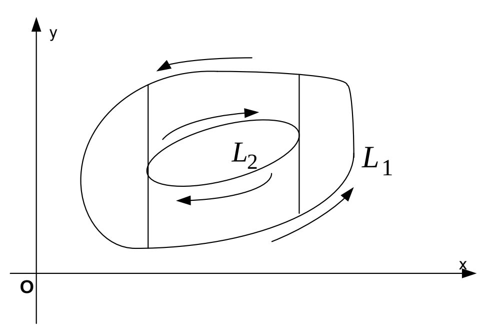
Chú ý: Công thức Green (3.24) cho ta công thức tính diện tích miền phẳng D nhờ vào tích phân đường loại hai như sau:

Đặt trong (3.24) các hàm $P(x,y) = -y$ và $Q(x,y) = x$, tương ứng $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$

hoặc $P(x,y) = -y$ và $Q(x,y) = 0$ hoặc $P(x,y) = 0$ và $Q(x,y) = x$, ta nhận được

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx = -\int_L ydx = \int_L xdy \qquad (3.25)$$

trong đó S là diện tích miền D.



H.3.7

Ví dụ 3.6: Tính diện tích ellipse với các bán trục a ,b.

Giải: Có thể coi ellipse có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ hay trong dạng tham số

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi .$$

Áp dụng (3.21) có $S=\frac{1}{2}\int\limits_{L^+} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(ab\cos^2 t+ab\sin^2 t)dt=\pi ab$

Ví dụ 3.7: Tính $I=\oint\limits_{L^+}(xarctgx+y^2)dx+(x+2xy+y^2e^{-y^3})dy$

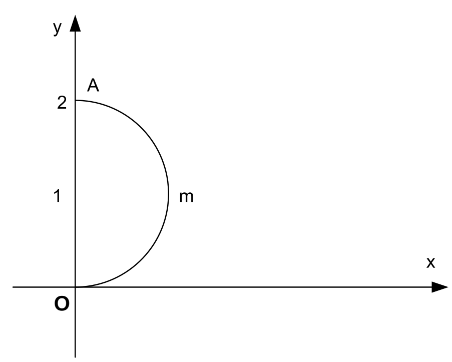
L là biên nửa hình tròn cho bởi hệ bất phương trình $x^2+y^2\le 2y,\ x\ge 0$.

Giải: Đường L cho trên hình H.3.8 đó là biên của nửa hình tròn bán kính là 1. Ta đặt:

$$P=xarctgx+y^2\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=2y$$

$$Q=x+2yx+y^2e^{-y^3}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=2y+1$$

Vậy: $I=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D dxdy=\frac{\pi}{2}$ (nửa diện tích hình tròn bán kính là 1).



H.3.8

Ví dụ 3.8: Tính $J=\int\limits_C(\text{xarctg}x+y^2)dx+(x+2yx+y^2e^{-y^3})dy$ với C là nửa đường tròn bên phải đi

từ gốc toạ độ đến *A(0,2)*: $x^2+y^2=2y,\ \ x\ge 0$.

Giải: Gọi L là đường cong gồm nửa đường tròn C và đoạn OA. Rõ ràng :

$$I=J+\int\limits_{AO}(\text{xarctg}x+y^2)dx+(x+2yx+y^2e^{-y^3})dy$$

trong đó I là tích phân trong ví dụ 3.7.

Đoạn thẳng AO có phương trình $x=0, \quad 0\le y\le 2 \Rightarrow dx=0$.

Áp dụng công thức tính tích phân đường (3.23) ta có:

$$\int\limits_{AO}(xarctgx+y^2)dx+(x+2yx+y^2e^{-y^3})dy=\int\limits_2^0 y^2e^{-y^3}dy=-\frac{1}{3}\int\limits_2^0 e^{-y^3}d(-y^3)$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-y^3}\Big|_2^0=\frac{1}{3}(\frac{1}{e^8}-1)$$

Cuối cùng, ta có $J=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}(1-\frac{1}{e})$

Chú ý: Trong ví dụ 3.8 ta đã thêm một đoạn thẳng thích hợp để áp dụng công thức Green, đương nhiên sau đó phải bớt đi tích phân lấy dọc theo đoạn thẳng đó (hay cộng với tích phân lấy theo hướng ngược lại). Nhiều bài toán phải làm như vậy bởi vì nếu tính trực tiếp sẽ rất khó khăn.

3.4. Định lý bốn mệnh đề tương đương

Xuất phát từ công thức Green (3.24), sau đây ta sẽ nhận được các điều kiện để biểu thức $P(x,y)+Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm *u(x,y)* nào đó, để tích phân đường của một biểu thức không phụ thuộc vào dạng đường cong lấy tích phân. Để có được các luận, miền liên thông D phải là đơn liên (chỉ có duy nhất một đường cong kín).

Định lý 3.4: *Giả sử các hàm P(x,y), Q(x,y) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền đơn liên D. Khi đó bốn mệnh đề sau đây tương đương:*

(1). $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall(x,y)\in D$

(2). $\oint\limits_L Pdx+Qdy=0$*, L là đường cong kín bất kỳ nằm trong miền D.*

(3). $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy$*, trong đó cung* AB *nằm trong miền D, chỉ phụ thuộc vào 2 điểm A,B mà không phụ thuộc dạng cung* AB.

(4). *Biểu thức* $Pdx+Qdy$ *là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó trên miền D.*

Chứng minh: Định lý được chứng minh theo sơ đồ sau: $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$

* Ta chứng minh $(1)\Rightarrow(2)$: Gọi D_1 là miền giới hạn bởi L, $L\subset D$ suy ra $D_1\subset D$. Áp dụng công thức Green (3.24) cho miền D_1 ta có:

$$\oint_{L^+} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy = \iint_{D_1} 0 dxdy = 0$$

Suy ra $\oint_L Pdx + Qdy = 0, \quad \forall L \subset D$

* $(2) \Rightarrow (3)$: Lấy $A \in D,\ B \in D$ và $AmB \subset D,\ AnB \subset D$ (dạng của các cung là tuỳ ý. Xem H.3.9)

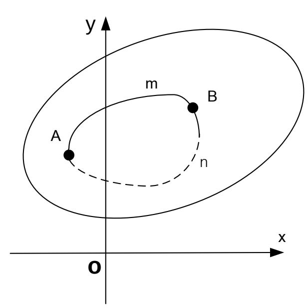
Suy ra đường cong kín $AmBnA \subset D$. Theo (2) ta có: $\oint_{AmBnA} Pdx + Qdy = 0$ hay :

$$\int_{AmB} Pdx + Qdy + \int_{BnA} Pdx + Qdy = 0$$

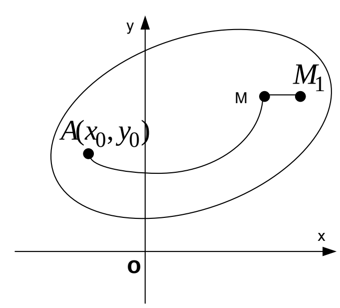
Vậy $\int_{AmB} Pdx + Qdy = \int_{AnB} Pdx + Qdy$

Chứng tỏ các tích phân không phụ thuộc vào dạng cung AB.

* $(3) \Rightarrow (4)$: Ta sẽ xây dựng hàm *u(x,y)* dưới đây sao cho: $du(x, y) = Pdx + Qdy$



H.3.9



H.3.10

Lấy $A(x_0,y_0)$ cố định thuộc D và điểm $M(x,y)$ chạy trong miền D (H.3.10).

Xét hàm số

$$u(x, y) = \int_{AM} Pdx + Qdy + C \text{ với } AM \subset D,\ C \text{ là hằng số tuỳ ý.} \qquad (3.26)$$

Rõ ràng hàm số này phụ thuộc vào điểm *M(x,y)* chứ không phụ thuộc dạng cung AM $u(x_0, y_0) = C$. Ta sẽ chứng minh $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$. Thật vậy, theo định nghĩa đạo hàm riêng tại *(x,y)* ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\int_{AM_1} Pdx + Qdy - \int_{AM} Pdx + Qdy\Big)$$

trong đó M_1 và M cùng có tung độ là y, còn hoành độ của M_1 là $x+h$ với h đủ bé để $M_1 \in D$.

Theo (3) có thể lấy AM_1 gồm cung AM và đoạn thẳng nằm ngang MM_1. Vậy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{MM_1} Pdx + Qdy$$

Vì đoạn MM_1 vuông góc với trục Oy và hướng đi từ *M(x,y)* đến $M_1(x+h,y)$, suy ra dy = 0

Vậy $$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(x, y)dx$$

Theo định lý về giá trị trung bình của tích phân xác định thì:

$$\int_x^{x+h} P(x, y)dx = P(x^*, y)h$$

trong đó $x^* = x + \theta.h,\ 0 < \theta < 1$, từ đó ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h\to 0} P(x^*, y)$$

Do tính liên tục của hàm *P(x,y)* vậy $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$.

Tương tự ta chứng minh được $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Vậy tồn tại hàm *u(x,y)* cho bởi (3.26) để có

du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy

* (4) $\Rightarrow$ (1) : $\exists u(x, y)$ để $du = Pdx + Qdy$ hay $\frac{\partial u}{\partial x} = P,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Suy ra:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Do các đạo hàm riêng của *P, Q* liên tục trên miền *D* nên các đạo hàm hỗn hợp $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ và $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ cũng liên tục trên *D*. Theo định lý Schwars, ta có $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ hay là:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D$$

Hệ quả 1*: Nếu* $du(x,y) = Pdx + Qdy$ *trong miền D thì* :

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = u(B) - u(A) \tag{3.27}$$

Chứng minh: Từ giả thiết ta có $\displaystyle\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} du(x,y)$

Giả sử AB cho bởi phương trình *y = y(x)* và *A*(x_A,y_A) , *B*(x_B,y_B), $y_A = y(x_A)$, $y_B = y(x_B)$.

Ta chuyển tích phân đường về tích phân xác định theo công thức (3.18), sẽ có:

$$\int_{AB} du(x,y) = \int_{x_A}^{x_B} du(x,y(x)) = u(x,y(x))\Big|_{x_A}^{x_B} = u(B) - u(A)$$

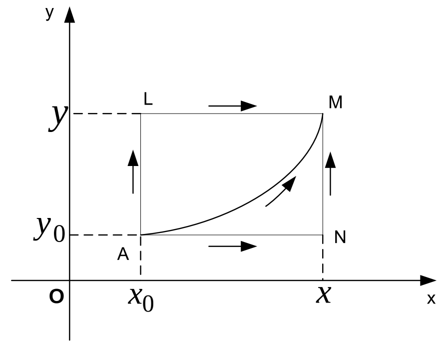
Hệ quả 2: *Nếu* $Pdx + Qdy$ *là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) trên toàn mặt phẳng* $\mathbb{R}^2$ *thì hàm u(x,y) cho bởi công thức:*

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C \tag{3.28}$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C \tag{3.29}$$

trong đó $A(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$



H.3.11

Chứng minh: Lập hàm số *u(x,y)* theo công thức (3.26). Vì tích phân đường trong trường hợp này không phụ thuộc dạng $\overset{\frown}{AM}$ nên ta chọn $\overset{\frown}{AM}$ là đường gấp khúc *ANM* hoặc *ALM* , (H.3.11)

Đoạn *AL* song song với trục *Oy* nên dọc theo nó *d x = 0*.

Đoạn *LM* song song với trục *Ox* nên dọc theo nó *d y = 0*.

$$u(x,y)=\int_{AM} Pdx+Qdy+C=\int_{AL} Pdx+Qdy+\int_{LM} Pdx+Qdy+C$$
$$=\int_{AL} Q(x,y)dy+\int_{LM} P(x,y)dy+C$$

Áp dụng công thức (3.22) ta có:

$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+C$$

Tương tự, lấy tích phân theo đường ANM ta sẽ nhận được công thức (3.29)

Chú ý:

a. Các hàm *u(x,y)* nếu tồn tại sẽ sai khác nhau hằng số cộng C.

b. Thông thường lấy $(x_0,y_0)=(0,0)$ thì tính tích phân (3.28) hoặc (3.29) sẽ đơn giản hơn.

Ví dụ 3.9: Chứng minh rằng biểu thức:

$$(x^2-2xy^2+3)dx+(y^2-2x^2y+3)dy$$

là vi phân toàn phần của hàm *u(x,y)* trên 3^2 và hãy tìm hàm đó.

Giải: Ta đặt:

$$P(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 3 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -4xy$$

$$Q(x,y) = y^2 - 2x^2y + 3 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -4xy = \frac{\partial P}{\partial y},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Vậy tồn tại hàm số *u(x,y)* để *du = Pdx + Qdy*. Theo công thức (3.28), ta có:

$$u(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy + C$$

$$= \int_0^x (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + \int_0^y (y^2 + 3)dy + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - x^2y^2 + 3(x+y) + C$$

Ví dụ 3.10: Tính $I = \int\limits_{AB} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, $A(1,1)$, $B(2,4)$

a. Cung AB cho bởi phương trình: $y = x^2$, $1 \le x \le 2$,

b. Cung AB bất kỳ tạo với đoạn *AB* thành đường cong kín không bao gốc toạ độ.

c. Cung AB bất kỳ tạo với đoạn *AB* thành đường cong kín bao gốc toạ độ.

Giải: Ta đặt

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

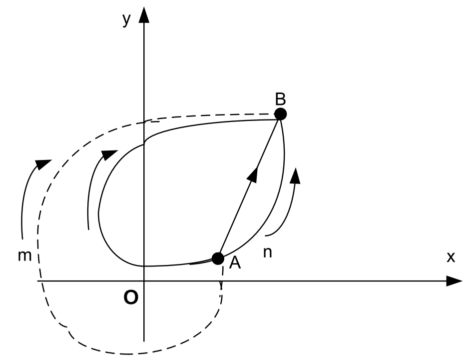
$$Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

a. $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$, (cung AnB)

$$I = \int_1^2 \frac{2x^2 - x^2}{x^2 + x^4}dx = \int_1^2 \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arctg}x\Big|_1^2 = \text{arctg}2 - \frac{\pi}{4}$$

b. Vì các hàm P, Q thoả mãn định lí 4 mệnh đề tương đương trên bất kì một miền đơn liên không chứa gốc toạ độ, do đó tích phân đã cho không phụ thuộc vào dạng đường cong AB, sao cho đường cong đó tạo với đoạn *AB* một đường cong kín không bao gốc toạ độ (H.3.12). Vậy

$$I = \text{arctg}2 - \frac{\pi}{4}$$



H.3.12

c. Khi cung AB tạo với đoạn AB một đường cong kín bao gốc tọa độ thì không thể áp dụng định lý 4 mệnh đề tương đương được nữa do P,Q không liên tục trong miền đơn liên chứa gốc toạ độ. Trước hết, từ công thức Grin suy ra: Tích phân không phụ thuộc dạng cung AB, miễn là cung đó tạo với đoạn AB thành đường cong kín bao gốc toạ độ. Bây giờ ta vẽ đường tròn C tâm gốc toạ độ, bán kính đủ bé r. Xét miền nhị liên D có biên là C và đường cong kín. Theo công thức Green ta có:

$$0 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{AnB} Pdx + Qdy + \int_{BmA} Pdx + Qdy + \oint_{C^-} Pdx + Qdy$$

Suy ra:

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy = \text{arctg}2 - \frac{\pi}{4} - \int_{AmB} Pdx + Qdy$$

trong đó đường tròn C cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}{r^2} d\varphi = 2\pi$$

Vậy $\quad I = \int_{AmB} Pdx + Qdy = \text{arctg}2 - \frac{9\pi}{4}$

3.5. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

3.5.1. Định nghĩa tích phân mặt loại một

Cho hàm số $f(M) = f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong *S*.

1. Chia mặt cong *S* thành *n* mảnh không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của mảnh thứ *i* là $\Delta S_i,\ i = \overline{1,\ n}$ và ký hiệu đường kính của mảnh thứ *i* là $d_i,\ i = \overline{1,\ n}$.

2. Lấy tuỳ ý n điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i,\ i = \overline{1,\ n}$.

3. Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, được gọi là tổng tích phân mặt loại một ứng với một cách chia mặt cong *S* và một cách chọn $M_i \in \Delta S_i,\ i = \overline{1,\ n}$.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\mathrm{Max} d_i \to 0$ mà I_n hội tụ về số *I* không phụ thuộc cách chia mặt cong *S* và cách lấy điểm $M_i \in \Delta S_i,\ i = \overline{1,\ n}$ thì số *I* gọi là tích phân mặt loại một của *f(M)* trên mặt cong *S* và được ký hiệu là $\iint_S f(x, y, z)dS$.

Như vậy $$\iint_S f(x, y, z)dS = \lim_{\mathrm{Max} d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i \qquad (3.30)$$

Chú ý:

a. Từ định nghĩa ta nhận được công thức tính diện tích mặt cong *S* nhờ vào tích phân mặt loại một: $$S = \iint_S dS \qquad (3.31)$$

b. Nếu *S* là mặt cong vật chất có hàm mật độ khối lượng là $\rho(x, y, z)$ thì khối lượng của mặt cong vật chất đó sẽ là:

$$M = \iint_S \rho(x, y, z)dS \qquad (3.32)$$

Từ đó ta có công thức xác định trọng tâm của mặt cong

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_S x\rho(M)dS,\ y_G = \frac{1}{M}\iint_S y\rho(M)dS,\ z_G = \frac{1}{M}\iint_S z\rho(M)dS \qquad (3.33)$$

c. Người ta đã chứng minh được rằng: Nếu mặt cong *S* trơn (mặt cong *S* có pháp tuyến biến thiên liên tục) hoặc là trơn từng mảnh (chia *S* thành hữu hạn các mặt cong trơn) và hàm số $f(x, y, z)$ liên tục hoặc liên tục từng mảnh trên mặt cong *S* thì tồn tại tích phân mặt loại một của hàm số đó trên *S*.

d. Tương tự, tích phân mặt loại một có các tính chất giống như tích phân kép.

3.5.2. Công thức tính tích phân mặt loại một

Định lý 3.5*: Giả sử hàm số f(x,y,z) liên tục trên mặt cong S trơn cho bởi phương trình*

$z = z(x,y), (x,y) \in D$. *Khi đó:*

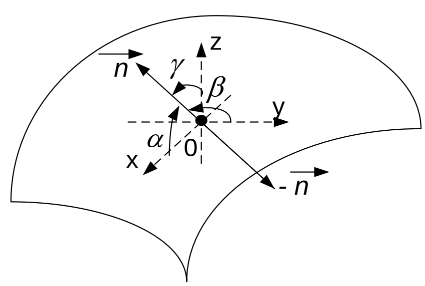
$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z'^2_x(x,y) + z'^2_y(x,y)}dxdy \qquad (3.34)$$

Chứng minh: Trước hết, ta thừa nhận các kết quả sau:

Nếu mặt cong *S* cho bởi phương trình $F(x,y,z) = 0$ thì các côsin chỉ phương của véctơ pháp tuyến tại *M(x,y,z)* được tính theo công thức:

$$\cos\alpha = \pm\frac{F'_x}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},\ \cos\beta = \pm\frac{F'_y}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{F'_z}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} \qquad (3.35)$$

Trong công thức (3.35), α, β, γ là góc lập bởi véctơ pháp tuyến của mặt cong *S* tại *M(x,y,z)* với các trục toạ độ *Ox, Oy, Oz* (H.3.13)



H.3.13

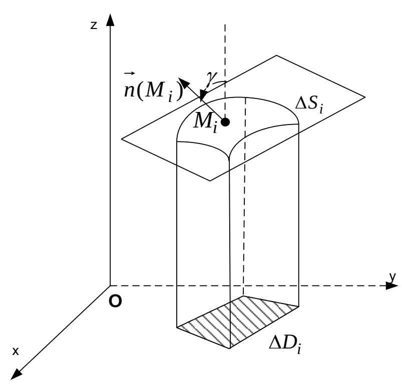
Do đó nếu mặt cong *S* cho bởi phương trình $z = z(x,y),\ (x,y) \in D$ thì các côsin chỉ phương của véctơ pháp tuyến sẽ là:

$$\cos\alpha = \pm\frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},\ \cos\beta = \pm\frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},\ \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} \qquad (3.36)$$

Khi véctơ pháp tuyến $\vec{n}$ xác định thì góc α, β, γ xác định và như vậy trong các công thức trên chỉ có dấu + hoặc dấu - . Bây giờ ta chia *S* thành *n* mảnh nhỏ $\Delta S_i,\ i = \overline{1, n}$, tương ứng nhận được *n* hình chiếu các mảnh đó trên mặt phẳng *Oxy* là $\Delta D_i,\ i=\overline{1,\ n}$. Nghĩa là ta đã gián tiếp chia miền *D* là hình chiếu của mặt cong *S* trên mặt *Oxy*, làm *n* phần ΔD_i (H.3.14).

Lấy tuỳ ý $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$ và dựng tiết diện $T_i(M_i)$ của mặt *S* tại M_i (mặt phẳng vuông góc với pháp tuyến $\vec{n}$ tại M_i hay là mặt phẳng tiếp xúc với mặt *S* tại M_i).

Gọi ΔT_i là mảnh của tiếp diện có hình chiếu trên *Oxy* trùng với mảnh ΔD_i. Với đường kính của ΔS_i khá nhỏ thì diện tích mảnh ΔT_i xấp xỉ diện tích mảnh ΔS_i và rõ ràng $\Delta S_i \approx \dfrac{\Delta D_i}{|\cos\gamma_i|}$, theo công thức (3.36) ta nhận được:



H.3.14

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}.\Delta D_i$$

Vế phải chính là tổng tích phân kép lấy trên miền *D* của hàm số:

$$f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}$$

Vậy công thức tính tích phân mặt loại một khi mặt cong *S* cho dưới dạng hiện $z = z(x, y),\ (x, y) \in D$ được cho bởi công thức (3.34).

Chú ý:

a. Nếu mặt cong *S* cho bởi phương trình $y = y(z, x)$ hoặc $x = x(y, z)$ thì ta phải chiếu *S* lên mặt phẳng *Ozx* hoặc *Oyz* để tìm miền tính tích phân kép tương ứng.

b. Nếu mặt cong kín, ta phải chia thành hữu hạn các phần thoả mãn định lý trên, sau đó áp dụng công thức (3.34).

Ví dụ 3.11 : Tính diện tích phần phía trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ nằm trong hình trụ

$$x^2 + y^2 \le 2ay,\ a > 0.$$

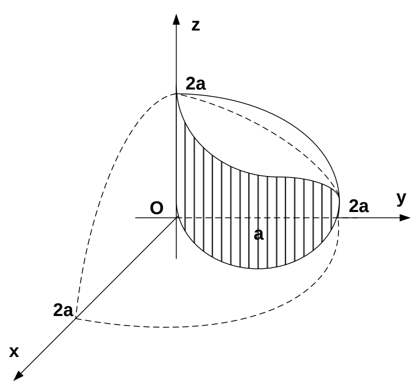
Giải : Xem H.3.15 Do tính đối xứng, ta chỉ cần tính diện tích một phần hai của phần mặt cầu trên.. Phần mặt cầu trên có phương trình : $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$.

Hình chiếu trên mặt phẳng *Oxy* là nửa hình tròn *D* có bất phương trình :

$$x^2 + (y-a)^2 \le a^2,\ x \ge 0$$

Vậy $S = \iint\limits_S dS = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy$

$$z'^2_x = \frac{x^2}{4a^2 - x^2 - y^2},\ z'^2_y = \frac{y^2}{4a^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow S = 2\iint\limits_D \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}dxdy$$



H.3.15

Chuyển sang toạ độ cực ta được :

$$S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{4a^2 - r^2}} = -2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} \frac{d(-r^2)}{\sqrt{4a^2 - r^2}}$$

$$= -4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4a^2 - r^2}\Big|_0^{2a\sin\varphi} d\varphi = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a - 2a\cos\varphi)d\varphi$$

$$= 8a^2\left(\frac{\pi}{2} - \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 8a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

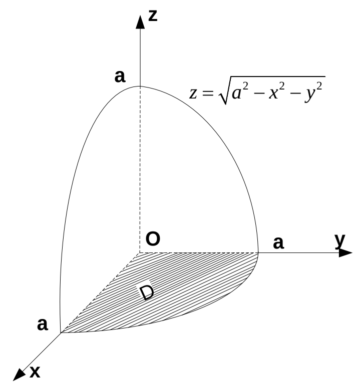
Ví dụ 3.12 : Tìm tọa độ trọng tâm của phần mặt cầu tâm O, bán kính bằng a, nằm ở góc phần tám thứ nhất có khối lượng riêng $\rho(M) = z$.

Giải : Xem hình 3.16. Phương trình của phần mặt cầu :

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ (x, y) \in D,\ D = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$$

Từ đó ta có $z'_x = -\dfrac{x}{z},\ z'_y = -\dfrac{y}{z} \Rightarrow \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \dfrac{a}{z}$

Theo công thức (3.32) và (3,34), ta tính được khối lượng của phần mặt cầu



H.3.16

Theo công thức (3.32) và (3,34), ta tính được khối lượng của phần mặt cầu

$$M = \iint_S z dS = a\iint_D dxdy = \frac{\pi a^3}{4}$$

Theo công thức (3.33), tọa độ trọng tâm của phần mặt cầu sẽ là:

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_S xz dS = \frac{a}{M}\iint_D x dxdy = \frac{a}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{4a}{3},$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_S yz dS = \frac{a}{M}\iint_D y dxdy = \frac{a}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{4a}{3\pi},$$

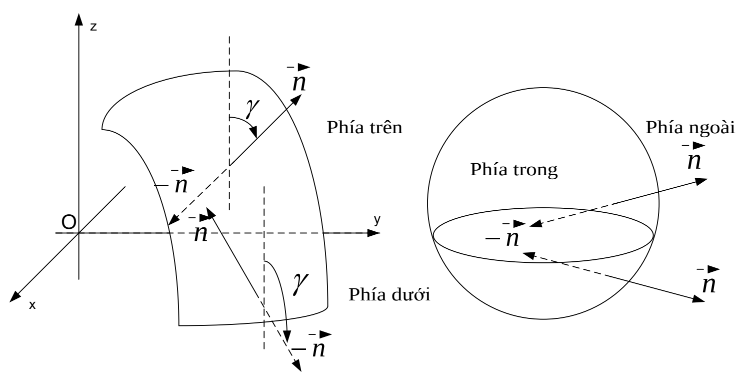
$$z_G = \frac{1}{M}\iint_S z^2 dS = \frac{a}{M}\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy = \frac{a}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{2a}{3\pi}.$$

3.6. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

3.6.1. Mặt định hướng

Mặt cong *S* trơn gọi là định hướng được nếu véctơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}(M)$ hoàn toàn xác định tại mọi $M \in S$ (có thể trừ biên của *S*) và biến đổi liên tục khi *M* chạy trên *S*. Tập hợp $\vec{n}(M),\ \forall M \in S$ của mặt cong có định hướng xác định một phía của mặt cong. Vì rằng $-\vec{n}(M)$ cũng là véctơ pháp tuyến nên mặt định hướng luôn có hai phía.

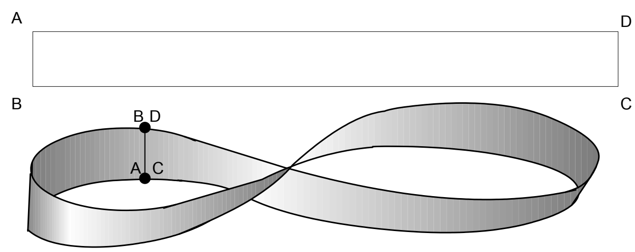
Khi mặt cong *S* không kín định hướng được, người ta thường dùng từ phía trên và phía dưới để chỉ hướng đã xác định bởi $\vec{n}(M)$. Phía trên của mặt *S* là phía mà $\vec{n}(M)$ lập với trục *Oz* góc nhọn, còn phía dưới là phía mà $\vec{n}(M)$ lập với trục *Oz* góc tù.



H.3.17

Khi mặt cong *S* kín định hướng được, người ta dùng từ phía trong và phía ngoài để mô tả hướng đã xác định. Phía ngoài là phía mà $\vec{n}(M)$ hướng ra phía ngoài vật thể *V* bao quanh bởi mặt cong *S*, phía trong là phía ngược lại. (H.3.17).

Có mặt cong không định hướng được, chẳng hạn mặt cong sau đây gọi là lá Mobius được tạo như sau : Lấy hình chữ nhật *ABCD* vặn cong để hai đầu gắn nhau sao cho *A* trùng với *C* và *B* trùng với *D* (H.3.18). Xác định một véctơ $\vec{n}(M)$ tại *M* nào đó của lá Mobius và cho *M* di chuyển theo lá không cắt biên một vòng về lại điểm ban đầu thì $\vec{n}(M)$ đối hướng. Chứng tỏ $\vec{n}(M)$ không biến thiên liên tục. Lá Mobius là ví dụ điển hình cho mặt một phía.



H.3.18

3.6.2. Định nghĩa tích phân mặt loại hai

Cho mặt cong *S* đã định hướng theo phía trên hoặc phía dưới. Tức là véctơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$ lập với trục *Oz* một góc nhọn (hoặc góc tù) và hàm *R(x,y,z)* xác định trên *S*.

1. Chia mặt cong *S* thành *n* mảnh không dẫm lên nhau $\Delta S_i,\ i=\overline{1,\ n}$. Ký hiệu đường kính của mảnh thứ *i* là $d_i,\ i=\overline{1,\ n}$. Gọi ΔD_i là hình chiếu của ΔS_i lên mặt phẳng toạ độ *Oxy* kèm theo dấu xác định theo quy tắc : *S* định hướng theo phía trên thì ΔD_i có dấu dương, còn *S* định hướng theo phía dưới thì ΔD_i có dấu âm, $i=\overline{1,\ n}$.

2. Lấy tuỳ ý n điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)\in\Delta S_i,\ i=\overline{1,\ n}$

3. Lập tổng $I_n=\sum\limits_{i=1}^{n}R(x_i, y_i, z_i)\Delta D_i$. I_n được gọi là tổng tích phân mặt loại hai của hàm $R(x, y, z)$ lấy trên mặt cong *S* đã định hướng ứng với một cách chia và một cách chọn $M_i\in\Delta S_i,\ i=\overline{1,\ n}$.

Nếu khi $n\to\infty$ sao cho $\text{Max}d_i\to 0$ mà I_n hội tụ về số I không phụ thuộc cách chia *S* và cách chọn $M_i\in\Delta S_i$ thì số *I* gọi là tích phân mặt loại hai của biểu thức $R(x, y, z)dxdy$ trên mặt cong *S* đã định hướng và ký hiệu :

$$I=\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy \tag{3.37}$$

Tương tự, nếu chiếu lên các mặt phẳng *Oyz* và *Ozx* và thêm các hàm *P(x,y,z), Q(x,y,z)* xác định trên *S* thì ta gọi :

$$I=\iint\limits_S P(x, y, z)dydz+Q(x, y, z)dzdx+R(x, y, z)dxdy \tag{3.38}$$

là tích phân mặt loại hai của các hàm *P, Q, R*, chính xác hơn là của biểu thức

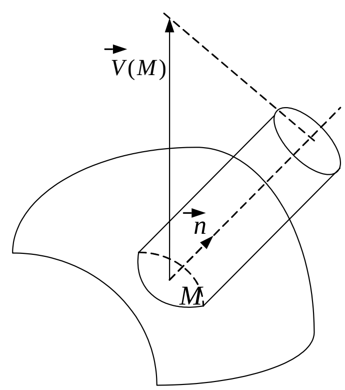
$Pdydx + Qdzdx + Rdxdy$ lấy trên mặt cong S đã được định hướng.

Chú ý :

a. Theo định nghĩa, nếu đổi hướng (phía ngược lại của S) thì tích phân mặt loại hai sẽ đổi dấu.

b. Công thức (3.38) mô tả thông lượng của trường véctơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ qua mặt cong S đã định hướng

$$\Phi = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{3.39}$$



.

H.3.19

Để thấy rõ ý nghĩa thực tế của tích phân mặt loại hai và từ "thông lượng" ta xét bài toán sau đây : Giả sử có một dòng chất lỏng chảy trong miền $V \subset \mathbb{R}^3$ và trong miền V có một mặt cong S định hướng với véctơ pháp tuyến $\vec{n}(M),\ M \in S$. Giả sử tốc độ của dòng chất lỏng là $\vec{v}(M)$ (H.3.19). Hãy tính lượng chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian.

Trước hết ta tính trong một thời gian, lượng chất lỏng chảy qua yếu tố diện tích dS của mặt cong S. Vì mảnh dS là rất bé nên có thể coi véctơ $\vec{n}(M)$ và véctơ vận tốc $\vec{v}(M)$ là véctơ hằng tại mọi điểm $M \in dS$. Vậy lượng chất lỏng chảy qua dS sẽ là (cột chất lỏng) $d\phi = \vec{v}.\vec{n}.dS$.

Gọi các thành phần của $\vec{v}$ là $v_x\ v_y,\ v_z$, còn các thành phần của $\vec{n}$ là $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ thì :

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S (v_x \cos\alpha + v_y \cos\beta + v_z \cos\gamma)dS \\ &= \iint_S v_x dydz + v_y dzdx + v_z dxdy\end{aligned} \tag{3.40}$$

đó chính là tích phân mặt loại hai của các hàm v_x, v_y, v_z trên mặt cong *S* đã định hướng.

Công thức (3.40) đã mô tả mối liên hệ giữa tích phân mặt loại một và loại hai.

Trong trường hợp tổng quát khi có trường véctơ $\overrightarrow{F}(P, Q, R)$ thì thông lượng của nó qua mặt cong *S* định hướng cho bởi công thức (3.39).

c. Người ta cũng chứng minh rằng, nếu mặt *S* định hướng được, trơn hoặc trơn từng mảnh và các hàm *P, Q, R* liên tục trên *S* thì tích phân mặt loại hai (3.38) tồn tại.

d. Tích phân mặt loại hai cũng có các tính chất như tích phân đường loại hai.

3.6.3. Công thức tính tích phân mặt loại hai

Định lý 3.6 : *Giả sử R(x,y,z) liên tục trên mặt cong định hướng S trơn cho bởi phương trình* $z = z(x, y),\ (x, y) \in D$.

Khi đó $$\iint_S R(x,y,z)dzdy = \iint_D R(x,y,z(x,y))dxdy \qquad (3.41)$$

nếu tích phân mặt loại hai được lấy theo phía trên của mặt S.

$$\iint_S R(x,y,z)dzdy = -\iint_D R(x,y,z(x,y))dxdy \qquad (3.41)'$$

nếu tích phân mặt loại hai được lấy theo phía dưới của mặt S.

Chứng minh : Từ công thức (3.40) và (3.34) ta có

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma.dS = \iint_S R(x,y,z(x,y))\cos\gamma\frac{dxdy}{|\cos\gamma|} \quad \text{nếu } \cos\gamma \neq 0$$

$$\iint_S R(x,y,z) = 0 \text{ nếu } \cos\gamma = 0.$$

Vậy khi lấy tích phân mặt loại hai theo phía trên của mặt *S* tức là $\cos\gamma \geq 0$ thì $\cos\gamma = |\cos\gamma|$, ta nhận được :

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_D R(x,y,z(x,y))dxdy$$

Lấy theo phía dưới của mặt *S* tức là $\cos\gamma \leq 0$ thì $\cos\gamma = -|\cos\gamma|$. Ta có

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = -\iint_D R(x,y,z(x,y))dxdy$$

Tương tự :

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \begin{cases} \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz & \text{khi } \cos\alpha \geq 0 \\ -\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz & \text{khi } \cos\alpha \leq 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

trong đó D_{yz} là hình chiếu của S lên mặt Oyz và mặt S có phương trình :

$$x = x(y,z),\ (y,z) \in D_{yz}$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \begin{cases} \iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx & \text{khi } \cos\beta \geq 0 \\ -\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx & \text{khi } \cos\beta \leq 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

trong đó D_{zx} là hình chiếu của S lên mặt Ozx và mặt S có phương trình :

$$y = y(z,x),\ (z,x) \in D_{zx}.$$

Chú ý : Khi lấy tích phân mặt loại hai, phải đặc biệt lưu ý đến việc định hướng của mặt S, tức là hướng của $\vec{n}(M)$. Tuỳ theo $\vec{n}(M)$ lập với các trục toạ độ góc nhọn hay tù mà xác định dấu cộng hay trừ trong các công thức (3.41), (3.42), (3.43).

Ví dụ 3.13 : Tìm thông lượng của trường véctơ $\vec{F} = (z, 0, x^2)$ qua phía trên của mặt cong

$$z = x^2 + y^2,\ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1.$$

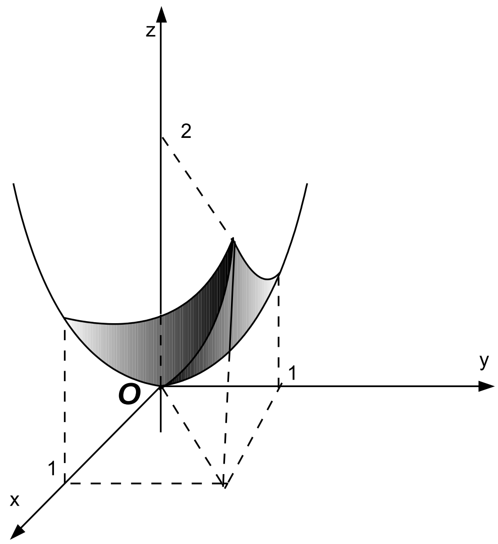
Giải : Mặt cong $z = x^2 + y^2$ là paraboloid tròn xoay. H.3.20 mô tả phần mặt cong nằm ở góc phần tám thứ nhất. Thông lượng được tính theo công công thức (3.39) là

$$\Phi = \iint_S zdydz + x^2 dxdy$$

Mặt cong S được định hướng lên trên nên $\cos\gamma \geq 0,\ \cos\alpha = \dfrac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$. Do mặt cong S đối xứng qua các mặt toạ độ Oyz, Ozx nên $\iint_S zdydz = 0$. Vậy

$$\Phi = \iint_S x^2 dxdy = 4\iint_D x^2 dxdy$$. trong đó D là hình vuông $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Vậy $\quad \Phi = 4\iint\limits_D x^2dxdy = 4\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^1 dy = \dfrac{4}{3}$.



H.3.20

Ví dụ 3.14 : Tính $I = \iint\limits_S zdxdy$ với S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

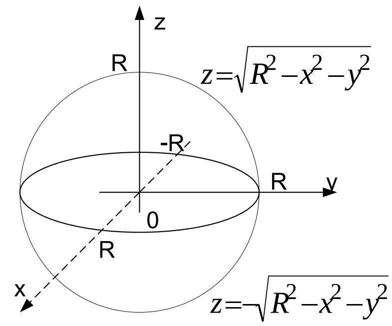
Giải : Mặt cầu cho bởi H.3.21.

Chia mặt cầu thành nửa trên S_+ và nửa dưới S_- có phương trình lần lượt là :

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ và } z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Chiếu các nửa mặt cầu lên *Oxy* ta được hình tròn :

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$



H.3.21

$$I=\iint_{S_+} zdxdy+\iint_{S_-} zdxdy$$

Đó là tích phân lấy theo phía trên của S_+ và tích phân lấy theo phía dưới của S .

Từ công thức (3.41) ta có :

$$\iint_{S_+} zdxdy=\iint_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\iint_{S_-} zdxdy=-\iint_{D}\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)dxdy$$

Vậy $\quad I=2\iint_{S}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$.

Chuyển sang toạ độ cực ta nhận được :

$$I=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}.r.dr=2\pi\left(-\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3$$

3.7. CÔNG THỨC STOKES

Dưới đây ta sẽ có công thức mở rộng công thức Green, đó là mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai trong không gian với tích phân mặt loại hai.

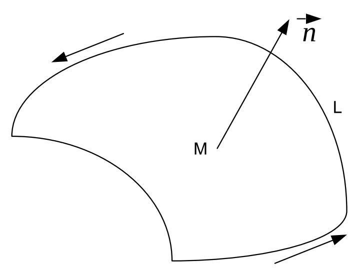
Định lý 3.7 (Stokes) *: Giả sử mặt cong S định hướng được, trơn từng mảnh có biên là đường L trơn từng khúc. Nếu các hàm số P, Q, R liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên mặt cong S thì* :

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \quad (3.44)$$

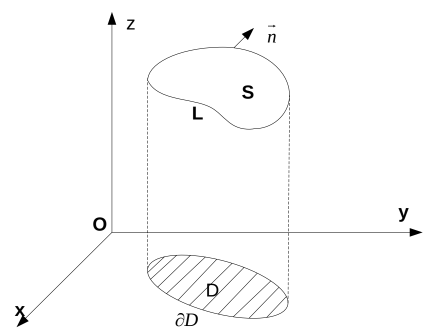
trong đó tích phân đường ở vế trái lấy theo hướng dương của L. Hướng dương của L được quy ước như sau : Đi theo hướng đó thì mặt cong *S* ở phía tay trái và mặt cong *S* được định hướng bởi véctơ pháp tuyến $\vec{n}$ hướng từ chân lên đầu (H.3.22).

Công thức (3.44) được gọi là công thức Stokes.

Chứng minh: Ta chứng minh công thức Stokes trong trường hợp mặt cong S có phương trình trong dạng $z = z(x, y),\ (x, y) \in D$ và $z(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong D. Ta gọi biên của mặt cong S là L, biên của miền phẳng D là ∂D (H.3.23).



H.3.22



H.3.23

Giả sử ∂D có phương trình: $x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2.$

Khi đó phương trình tham số của đường cong L là

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z\big(x(t), y(t)\big),\ t_1 \le t \le t_2.$$

Sau đây ta sẽ chứng minh vế trái bằng vế phải

Ta đặt

$$I = \int_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz$$

Theo công thức tính tích phân đường trong không gian (3.21), ta có

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left[Px'(t) + Qy'(t) + R\left(\frac{\partial z}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} y'(t) \right) \right] dt$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x} \right) x'(t) + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y} \right) y'(t) \right] dt$$

Trở về tích phân lấy trên đường cong phẳng

$$I=\oint\limits_{\partial D}\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$

Áp dụng công thức Green (3.24), ta được

$$I=\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]dxdy$$

Biểu thức dưới dấu tích phân kép được rút gọn là

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)&=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\&-\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)\\&=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}-\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}\end{aligned}$$

Theo công thức (3.36), các côsin chỉ phương của véc tơ pháp tuyến của mặt cong S là

$$\cos\alpha=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},\ \cos\beta=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

Mặt khác ta có

$$dxdy=dS\cos\gamma\ \Rightarrow\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{dS}{dxdy}\ \Rightarrow-\frac{\partial z}{\partial x}dxdy=\cos\alpha dS,\ -\frac{\partial z}{\partial y}dxdy=\cos\beta dS.$$

Vậy $I=\iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$

Từ công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại một và loại hai (3.40) ta có

$$I=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Chú ý:

a. Công thức Green là trường hợp riêng của công thức Stokes.

Ta thay $z=0,\ R(x,y,z)=0$ vào (3.44) nhận được công thức (3.24)).

b. Tính tích phân đường loại hai khi $L \subset \mathbb{R}^3$ thường rất khó khăn (ta mới chỉ đưa ra công thức tính khi *L* cho bởi phương trình tham số, xem công thức (3.21)). Do đó công thức Stokes tỏ ra rất hiệu lực khi mà *L* là biên của các mặt cong nào đó mà tích phân mặt loại hai trên nó có thể tính dễ dàng.

c. Xuất phát từ công thức Stokes, ta nhận được định lý bốn mệnh đề tương đương xét trong không gian $\mathbb{R}^3$ tương tự như định lý 3.4.

Định lý 3.8: *Giả sử các hàm $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên miền đơn liên V. Khi đó bốn mệnh đề sau đây là tương đương*

(1). $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z},\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y},\ \forall (x,y,z) \in V$

(2). $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$*, L là đường cong kín bất kỳ nằm trong miền V.*

(3). $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$*, trong đó $AB \subset V$, chỉ phụ thuộc vào hai điểm A,B mà không phụ thuộc dạng cung AB.*

(4). *Biểu thức $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của hàm u(x,y,z) nào đó trên miền V. Trường hợp miền V là không gian thì hàm u(x,y,z) có thể tính theo công thức :*

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_o,y,z)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz + C \qquad (3.45)$$

trong đó $(x_0,y_0,z_0) \in V,\ (x,y,z) \in V,\ C$ là hằng số tuỳ ý và:

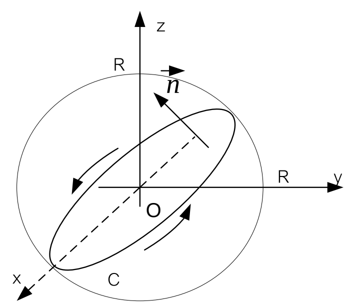
$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(A) - u(B),\ AB \subset V \qquad (3.46)$$

Ví dụ 3.15: Tính $I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz$, với *C* là đường tròn, giao của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ và mặt phẳng $x + y + z = 0$ và hướng của *C* là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn về phía $z > 0$.

Giải : Mặt phẳng $x + y + z = 0$ đi qua tâm mặt cầu. Vậy giao tuyến là đường tròn lớn . Xem hình H.3.22. Lấy hình tròn là mặt cong *S* có biên là *C*. Các côsin chỉ phương của $\vec{n}$ định hướng theo hướng của *C* là $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Xem công thức (3.30)).

Ta đặt $P = y,\ Q = z,\ R = x$ Áp dụng công thức Stokes và công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại hai và loại một theo công thức (3.40), ta có :

$$I = -\iint_S dydz + dzdx + dxdy = -\sqrt{3}\iint_S dS = -\pi\sqrt{3}R^2$$



H.3.24

3.8. CÔNG THỨC GAUS - OSTROGRADSKI

Dưới đây ta có công thức liên hệ giữa tích phân bội ba và tích phân mặt loại hai, gọi đó là công thức Gauss – Ostrogradski.

Định lý 3.9 (Gauss – Ostrogradski) : *Giả sử V là miền giới nội trong* 3^3 *có biên là mặt S trơn từng mảnh. Nếu các hàm số P, Q, R liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền V thì :*

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \qquad (3.47)$$

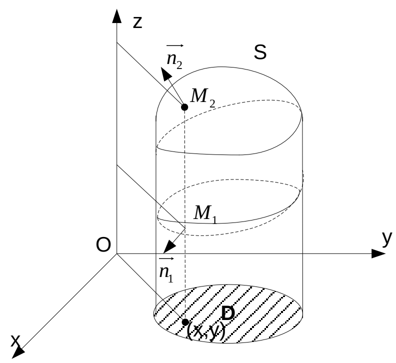
trong đó mặt lấy tích phân được định hướng ra phía ngoài miền V.

Chứng minh: Xem H.3.25. Ta sẽ chứng minh vế phải của công thức (3.47) bằng vế trái của nó

Giả sử mỗi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt biên S của miền V không quá hai điểm (trừ ra phần biên song song với trục tọa độ). Ta gọi D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy, $z = z_1(x,y),\ z = z_2(x,y)$ tương ứng là phương trình của phần trên S_2 và phần dưới S_1 của biên S bao miền V. Các phần mặt cong được định hướng bởi véc tơ pháp $\overrightarrow{n_2},\ \overrightarrow{n_1}$

Ta xét

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dxdy$$
$$= \iint_D R(x,y,z_2)dxdy - \iint_D R(x,y,z_1)dxdy$$



H.3.25

Theo công thức (3.41), ta có

$$\iint_D R(x,y,z_2)dxdy = \iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy\,, \quad S_2 \text{ được định hướng lên trên ,}$$

$$-\iint_D R(x,y,z_1)dxdy = \iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy\,, \quad S_1 \text{ được định hướng xuống dưới.}$$

Vậy

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_S R(x,y,z)dxdy, \text{ S được định hướng ra phía ngoài.}$$

Tương tự, ta cũng nhận được

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_S Q(x,y,z)dzdx, \quad \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_S P(x,y,z)dydz$$

Cộng tương ứng ba vế với nhau, ta được công thức Ostrogradski.

Chú ý :

a. Nếu trong công thức (3.47) đặt $P = x,\ Q = y,\ R = z$ thì ta nhận được công thức tính thể tích vật thể V nhờ vào tích phân mặt loại hai :

$$V = \frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy \qquad (3.48)$$

trong đó S được định hướng ra phía ngoài miền V.

b. Có thể coi rằng công thức Gauss – Ostrogradski là mở rộng công thức Green từ không gian hai chiều ra ba chiều. Đôi khi tính tích phân trên mặt S không kín, ta có thể thêm mặt cong nào đó để áp dụng công thức Gauss –Ostrogradski.

Ví dụ 3.16 : Tính thông lượng của trường điện từ $\vec{F} = \dfrac{q.\vec{r}}{r^3}$ trong đó q là điện tích đặt tại gốc toạ độ, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ qua phía ngoài mặt cầu :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Giải : Đặt $P = q\dfrac{x}{r^3},\ Q = q\dfrac{y}{r^3},\ R = q\dfrac{z}{r^3},\ \forall(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

Vì thế ta không thể áp dụng công thức Gauss – Ostrogradski trong hình cầu

Ta có $$\Phi = q\iint_S \frac{1}{r^3}(xdydz + ydzdx + zdxdy).$$

Do mặt cầu đối xứng qua gốc toạ độ và biểu thức dưới dấu tích phân đối xứng đối với x, x, y, z suy ra

$$\Phi = 24q\iint_S \frac{z}{r^3}dxdy,$$

trong đó S là phần mặt cầu góc phần tám thứ nhất định hướng lên trên.

$$\Phi = 24q\iint_{D_1} \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R^3}dxdy$$

D_1 là phần tư hình tròn tâm O, bán kính R. Chuyển sang toạ độ cực ta có :

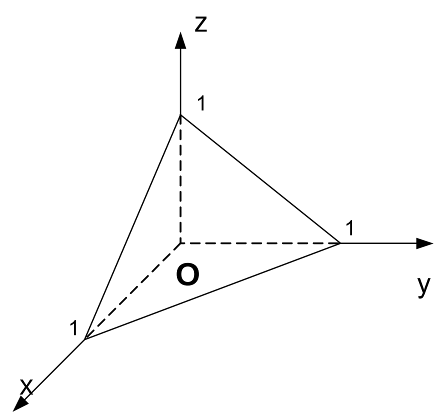
$$\Phi = 24\frac{q}{R^3}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\,rdr = 24\frac{\pi q}{2R^3}\left(-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^R = 4\pi q$$

Ví dụ 3.17 : Tính $I = \iint_S xzdydz + yxdzdx + zydxdy$ lấy theo phía ngoài của S là biên của hình chóp $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 1$

Giải : Hình chóp V cho trên hình H.3.26

Áp dụng công thức (3.48) ta có : $I = \iiint\limits_V (z + x + y)dxdydz$

Chiếu V lên mặt phẳng Oxy được tam giác : $\begin{cases} x + y \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$



H.3.26

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z)dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2}(x + y + z)\Big|_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2}\left[1 - (x + y)^2\right]dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1 - x)dx - \frac{1}{3}\int_0^1 (x + y)^3\Big|_0^{1-x} dx\right) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}x^4\Big|_0^1$$

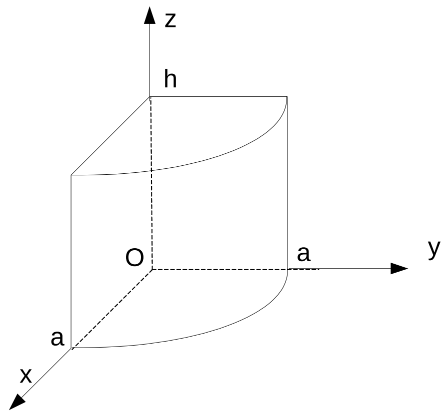
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$$

Ví dụ 3.18: Tính thông lượng của trường véc tơ $\vec{F}(x^3, y^3, z^3)$ qua phía ngoài phần mặt trụ

$$x^2 + y^2 = R^2, x \ge 0,\ y \ge 0,$$

giới hạn bởi các mặt phẳng: $z = 0,\ z = h.$

Giải: Xem H.3.27.



H.3.27

Ta có thể sử dụng công thức Ostrogradski để giải bài toán bằng cách xét vật thể V giới hạn bởi phần mặt trụ đã cho và các mặt phẳng : $z=0,\ z=h,\ x=0,\ y=0$

Gọi thông lượng cần tìm của trường véc tơ là Φ và thông lượng qua các phần mặt phẳng $z=0,\ z=h,\ x=0,\ y=0$ tương ứng là $\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4$, ta có

$$\Phi+\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4=3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

Dễ dàng chỉ ra

$$\Phi_1=\Phi_3=\Phi_4=0,\ \Phi_2=\iint\limits_D h^3dxdy,\ D=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$$

$\Phi_2=h^3\dfrac{\pi R^2}{4}$ vì miền D là một phần tư hình tròn bán kính bằng R

Ta tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ. Miền V cho bởi hệ bất phương trình

$$V:\ \begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le r\le R \\ 0\le z\le h \end{cases}$$

Do đó $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^R rdr\int\limits_0^h (r^2+z^2)dz=h\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^R (r^2+\dfrac{h^2}{3})rdr$

$$= \frac{\pi h R^4}{8} + \frac{\pi h^3 R^2}{12}$$

Vậy $\quad \Phi = 3(\frac{\pi h R^4}{8} + \frac{\pi h^3 R^2}{12}) - \Phi_2 = \frac{3\pi h R^4}{8}$

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG III

- **Cách tính tích phân đường loại một**

1. Giả sử cung AB trơn cho bởi phương trình: $y = y(x),\ a \le x \le b$ và hàm số *f(x,y)* liên tục trên cung AB. Khi đó:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

2. Nếu cung phẳng AB cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t_1 \le t \le t_2$$

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

3. Nếu cung không phẳng AB cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ t_1 \le t \le t_2$$

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

- **Cách tính tích phân đường loại hai**

1. Giả sử hai hàm số *P(x,y), Q(x,y)* liên tục trên cung phẳng AB trơn cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Điểm *A* ứng với giá trị tham số $t = t_A$, *B* ứng với giá trị tham số t_B.

Khi đó: $\displaystyle\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{t_A}^{t_B}[P(x(t),y(t))x'(t)+P(x(t),y(t))y'(t)]dt$

2. Giả sử hai hàm số *P(x,y), Q(x,y)* liên tục trên cung phẳng AB trơn cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$. Điểm *A* ứng với giá trị tham số $t=t_A$, *B* ứng với giá trị tham số t_B.

Khi:đó

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_{t_A}^{t_B}[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(....)y'(t)+R(...)z'(t)]dt$$

3 .Khi cung AB phẳng cho bởi phương trình dạng tường minh *y = y(x), A, B* có hoành độ tương ứng là *a, b*, ta nhận được:

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\left[P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)\right]dx$$

- . **Công thức Green :** Cho các hàm số *P(x,y), Q(x,y)* liên tục cùng các đạo hàm riêng cấp một trong miền *D* có biên là đường *L*. Khi đó:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{L^+} Pdx+Qdy$$

- **Bốn mệnh đề sau đây tương đương trong không gian** 3^2

(1). $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\quad \forall(x,y)\in D$

(2). $\displaystyle\oint_L Pdx+Qdy=0$, *L* là đường cong kín bất kỳ nằm trong miền *D*.

(3). $\displaystyle\int_{AB} Pdx+Qdy$, trong đó cung AB nằm trong miền *D*, chỉ phụ thuộc vào 2 điểm *A, B* mà không phụ thuộc dạng cung AB.

(4). Biểu thức $Pdx+Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm *u(x,y)* nào đó trên miền *D*.

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C \quad \text{trong đó } A(x_0,y_0)\in D,\ M(x,y)\in D$$

- **Công thức tính tích phân mặt loại một:** Cho hàm số *f(x,y,z)* liên tục trên mặt cong *S* trơn

  cho bởi phương trình $z=z(x,y),\ (x,y)\in D$. Khi đó:

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}dxdy$$

- **Công thức tính tích phân mặt loại hai :** Hàm số *R(x,y,z)* liên tục trên mặt cong định hướng *S*

  trơn cho bởi phương trình $z=z(x,y),(x,y)\in D$. Khi đó

$$\iint_S R(x,y,z)dzdy=\pm\iint_D R(x,y,z(x,y))dxdy$$

  Dấu + khi lấy tích phân mặt loại hai theo phía trên của mặt *S*.

  Dấu – khi lấy tích phân mặt loại hai theo phía dưới của *S*.

- **Công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại một và tích phân mặt loại hai :**

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

- **Công thức Stokes**

$$\int_{L^+}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

- **Bốn mệnh đề tương đương trong không gian** 3^3

(1). $\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z},\ \dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},\ \forall(x,y,z)\in V$

(2). $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0$, L là đường cong kín bất kỳ nằm trong miền *V*.

(3). $\int_{AB}Pdx+Qdy+Rdz$, trong đó $AB\subset V$, chỉ phụ thuộc vào hai điểm *A* ,*B* mà không phụ thuộc dạng cung AB

(4) Biểu thức $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của hàm *u(x,y,z)* nào đó trên

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_o,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz + C$$

trong đó $(x_0, y_0, z_0) \in V,\ (x,y,z) \in V,\ C$ là hằng số tuỳ ý

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(A) - u(B)$$

- **Công thức Ostrogradski**

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

Công thức tính thể tích $V = \frac{1}{3} \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$

trong đó *S* được định hướng ra phía ngoài miền *V*.

BÀI TẬP CHƯƠNG III.

3.1. Tính các tích phân đường loại 1 sau:

a. $\int_L xyds$, L là biên hình chữ nhật ABCD với A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(0,2),

b. $\int_L xyzds$, L cho bởi phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \\ z = \dfrac{\sqrt{8}t^3}{3} \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.

3.2. Tính khối lượng của dây vật chất có phương trình $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0 \le x \le a$

với khối lượng riêng $\rho(x, y) = \dfrac{1}{y}$.

3.3. Tính các tích phân đường loại 2 sau:

a. $\int_{ABC} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, ABC là đường gấp khúc với A(0,0), B(2,2), C(4,0),

b. $\int_L ydx - (y + x^2)dy$, L là cung parabol $y = 2x - x^2$ nằm ở phía trên trục 0x theo chiều kim đồng hồ.

3.4. Tính $\int_L (xy-1)dx + x^2 ydy$ từ A(1,0) đến B(0,2) theo:

a. đường $2x + y = 2$,

b. đường $4x + y^2 = 4$,

c. đường $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.

3.5. Tính $\oint_L xdy$ và $\oint_L ydx$ theo chiều dương với L là:

a. đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$,

b. biên của nửa hình tròn $x^2 + y^2 \le a^2$, $y > 0$,

c. tam giác có ba đỉnh O(0,0), A(a,0) và B(0,b).

3.6. Tính $\oint_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$ với L là biên của tam giác OAB theo chiều dương, biết O(0,0), A(1,0), B(0,1).

a. bằng cách tính trực tiếp,

b. dùng công thức Green.

3.7. Tính $\oint_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$ với L là đường $x^2+y^2=R^2$ (theo chiều dương) bằng hai cách:

a. trực tiếp,

b. dùng công thức Green.

3.8. Tính các tích phân đường sau theo chiều dương:

a. $\oint_L xy\left[\left(y+\frac{x}{2}\right)dy-\left(x+\frac{y}{2}\right)dx\right]$, L là biên của tam giác ABC, A(-1,0), B(1,-2), C(1,2).

b. $\oint_L x^3\left(y+\frac{x}{4}\right)dy-y^3\left(x+\frac{y}{4}\right)dx$, L là đường $x^2+y^2=2x$.

3.9. Tích phân đường sau đây có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không? Tính tích phân theo AB tương ứng:

a. $\int_{AB}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ với $A(1,\pi), B(2,\pi)$, AB không cắt trục Oy.

b. $\int_{AB}\frac{x^2+y^2}{xy}\left(\frac{3x^2-y^2}{x}dx+\frac{3y^2-x^2}{y}dy\right)$ với $A(1,1), B\left(\frac{\pi}{2},2\right)$

AB có phương trình $\begin{cases}x=t+\cos^2 t\\ y=1+\sin^2 t\end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ và không cắt các trục toạ độ.

3.10. Chứng minh rằng các biểu thức $Pdx+Qdy$ sau đây là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó. Tìm hàm số u?

a. $(x^2-2xy^2+3)dx+(y^2-2x^2y+3)dy$,

b. $\left[e^{x+y}+\cos(x-y)\right]dx+\left[e^{x+y}-\cos(x-y)+2\right]dy$,

c. $e^x\left[e^y(x-y+2)+y\right]dx+e^x\left[e^y(x-y)+1\right]dy$,

d. $\dfrac{xdx}{x^2+y^2}+\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}ydy$.

3.11. Tính $\dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_L\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ với:

a. L là đường $x^2+y^2=a^2$ (theo chiều ngược kim đồng hồ)

b. L là biên hình vuông với đỉnh (-1,-1), (-1,1), (1,1), (1,-1) (theo chiều thuận kim đồng hồ).

3.12. Tìm m, a, b để các biểu thức sau là vi phân toàn phần của hàm số u nào đó và tìm hàm số đó

a. $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^m}$,

b. $\dfrac{\left(ax^2+2xy+y^2\right)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$.

3.13. Tính $\oint\limits_L\dfrac{xdx+ydy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$, L có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

3.14. Tính $\iint\limits_S(x^2+y^2)dS$ nếu:

a. S là mặt nón $z^2=x^2+y^2,\ 0\le z\le 1$,

b. S là mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$.

3.15. Tính các tích phân mặt loại một sau:

a. $\iint\limits_S\left(z+2x+\dfrac{4y}{3}\right)dS$, S là phần của mặt phẳng $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

b. $\iint\limits_S\left(yz+zx+xy\right)dS$, S là phần của mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong hình trụ

$$x^2+y^2\le 2ax,\ a>0$$

c. $\iint_S xdS$, S là phần của mặt trụ parabolic $z = \frac{x^2}{2}$ nằm trong góc phần tám thứ nhất của hình trụ $x^2 + y^2 \le 1$.

3.16. Tính khối lượng của mặt cong cho bởi phương trình $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right),\ 0 \le z \le 1$, biết khối lượng riêng $\rho\left(x, y, z\right) = z$.

3.17. Tính các tích phân mặt loại hai sau:

a. $\iint_S xyzdxdy$, lấy theo phía ngoài của S, trong đó S là mặt cầu xác định bởi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

b. $\iint_S xdydz + dxdz + xz^2dxdy$, lấy theo phía ngoài của S, trong đó S là phần mặt cầu xác định bởi phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$$

c. $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$, lấy theo phía ngoài của S, trong đó S là mặt ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

d. $\iint_S x^2y^2zdxdy$, lấy theo phía trên của S, trong đó S là nửa mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \le 0.$$

3.18. Tính các tích phân đường sau theo hướng ngược kim đồng hồ nhìn từ phía $z > 0$:

a. $\oint_L x^2y^3dx + dy + zdz$, L là đường tròn $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$,

b. $\oint_L y^3dx + z^3dy + x^3dz$, L là đường tròn $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

3.19. Tính các tích phân mặt theo phía ngoài của vật thể bao bởi mặt cong S.

a. $\iint\limits_S xzdydz + yxdxdz + zydxdy$, S là biên của hình chóp

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1,$$

b. $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

c. $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, S là biên của hình lập phương

$$0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ 0 \leq z \leq a..$$

3.20. Tính $\oint\limits_L 2xy^2zdx + 2x^2yzdy + (x^2y^2 - 2z)dz$, L có phương trình

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t \\ z = \dfrac{1}{2}\sin t \end{cases}$$

, hướng theo chiều tăng của t.