CHƯƠNG II. TÍCH PHÂN BỘI

Ta đã biết, ứng dụng của tích phân xác định, từ hình học, đến các bài toán cơ học, đặc biệt trong kỹ thuật điện tử là rất đa dạng. Tuy nhiên các đại lượng đề cập đến chỉ phụ thuộc vào một biến số, đó là sự hạn chế đáng kể. Sự mở rộng tự nhiên của hàm một biến kéo theo sự mở rộng của tích phân đơn (tích phân xác định) đã làm tăng khả năng ứng dụng, chẳng hạn tính khối lượng của vật thể hai chiều, ba chiều, từ đó có thể xác định được trọng tâm, các mô men quán tính của vật thể, v.v...Chương này cho chúng ta phương pháp tính tích phân bội hai, bội ba và trên nguyên tắc có thể mở rộng cho tích phân bội n (n lớp). Các khái niệm về tích phân bội cũng giống như tích phân xác định, đều dựa trên sơ đồ vi phân (tính yếu tố vi phân rồi lấy tổng). Sự tồn tại, cũng như tính chất của tích phân bội giống như tích phân xác định. Chính vì thế, để học tốt chương này, chúng ta cần nắm vững các phương pháp tính tích phân xác định và các kiến thức cơ bản của hình học giải tích

2.1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

2.1.1. Tích phân xác định phụ thuộc tham số

A. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$, ($a<b,\ c<d$) đồng thời khả tích theo x trên $[a,b]$ với mọi $y\in[c,d]$. Tích phân dạng

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx \tag{2.1}$$

được gọi là tích phân phụ thuộc tham số y.

B. Tính chất

Định lí 2.1: *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c,d]$.*

Chứng minh: Trước tiên ta chứng minh $I(y)$ là hàm số liên tục trên khoảng (c,d)

Lấy $y\in(c,d),\ h\in\mathbb{R}^*$ sao cho $y+h\in(c,d)$. Xét số gia của hàm số tại y

$$I\left(y+h\right)-I\left(h\right)=\int_a^b\left[f(x,y+h)-f(x,y)\right]dx \quad .$$

Ta có $\quad \left|I(y+h)-I(y)\right|\le\int_a^b\left|f(x,y+h)-f(x,y)\right|dx$

Hàm số $f\left(x,y\right)$ liên tục trên hình chữ nhật $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$ nên $f\left(x,y\right)$ liên tục trên $\left[c,d\right]$, nghĩa là

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\eta(\varepsilon)>0)\ (\left|h\right|<\eta\ \Rightarrow\ \left|f(x,y+h)-f(x,y)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a},\ \forall x\in\left[a,b\right]).$$

Với $\left|h\right|<\eta\ \Rightarrow\ \left|I(y+h)-I(y)\right|<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon$. Vậy $I(y)$ liên tục trên khoảng $\left(c,d\right)$

Dễ dàng chứng minh hàm số liên tục bên phải tại c và liên tục bên trái tại d. Từ đó suy ra hàm số liên tục trên đoạn $\left[c,d\right]$.

Định lí 2.2: *Nếu hàm số $f(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện:*

1. *Liên tục theo x trên $\left[a,b\right]$ với mọi y cố định trên $\left[c,d\right]$.*

2. *Tồn tại đạo hàm riêng $f_y^/(x,y)$ liên tục trên $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$.*

Khi đó $$I^/\left(y\right)=\int_a^b f_y^/\left(x,y\right)dx \tag{2.2}$$

Chứng minh: Theo giả thiết a. với h đủ bé, ta nhận được:

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h}=\int_a^b\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx$$

Theo giả thiết b. và sử dụng công thức số gia hữu hạn, ta co

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h}=\int_a^b\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx=\int_a^b f_y^/(x,y+\theta h)dx$$

trong đó $0<\theta<1$. Do tính liên tục của $f_y^/(x,y)$ nên với h đủ bé sẽ có

$f_y^/(x,y+\theta h)=f_y^/(x,y)+\alpha(h)$, trong đó $\alpha(h)$ là VCB khi $h\to 0$

Từ đó suy ra $\quad \dfrac{I(y+h)-I(y)}{h}=\int_a^b f_y^/(x,y)dx+\alpha(h)\int_a^b dx=\int_a^b f_y^/(x,y)dx+\alpha(h)\left(b-a\right)$

Qua giới hạn khi $h \to 0$, ta nhận được $\quad I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$

Công thức (2.2) cho ta phép lấy đạo hàm dưới dấu tích phân.

Định lí 2.3: *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ thì*

$$\int_c^\eta \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^\eta f(x,y)dy \right\} dx \qquad (2.3)$$

trong đó $\eta \in [c,d]$

Chứng minh: Ta đặt: $I(\eta) = \int_a^b f(x,\eta)dx,\ \Phi(x,\eta) = \int_c^\eta f(x,y)dy,\ \eta \in [\mathrm{c,d}]$. Theo định lí 2.1 ta nhận được $I(\eta)$ liên tục trên $[c,d]$ và từ tính chất của tích phân theo cận trên suy ra $\Phi(x,\eta)$ khả vi theo η trên $[c,d]$. Công thức (2.3) bây giờ sẽ là:

$$\int_c^\eta I(y)dy = \int_a^b \Phi(x,\eta)dx$$

Theo tính chất của tích phân theo cận trên và định lí 2.2 suy ra cả hai vế của hệ thức trên đều khả vi theo η. Lấy đạo hàm theo η cả hai vế ta nhận được đồng nhất thức

$$I(\eta) = \int_a^b \Phi'_\eta(x,\eta)dx = \int_a^b f(x,\eta)dx = I(\eta)$$

Chứng tỏ hai vế của hệ thức (2.3) khác nhau một hằng số cộng C, tuy nhiên đặt $\eta = 0$ vào hai vế của hệ thức này ta sẽ nhận được $C = 0$. Vậy công thức (2.3) được chứng minh.

Công thức tính tích phân lặp (2.3) được kí hiệu gọn hơn trong dạng

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x,y)dy \qquad (2.3)^*$$

Đặc biệt với $\eta = d$ ta có

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \qquad (2.3)^{**}$$

Công thức (2.3) được gọi là công thức thay đổi thứ tự lấy tích phân. Trong mục 2.3.1 ta sẽ nhận được công thức tổng quát, đó là công thức Fubini.

Chú ý: Xét tích phân phụ thuộc tham số trong dạng tổng quát:

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \tag{2.4}$$

trong đó $f(x,y)$ xác định trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$,

$$a(y)\in[a,b], b(y)\in[a,b],\ \forall y\in[c,d]$$

Chúng ta có thể chứng minh được các kết quả sau đây:

Định lí 2.4: *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục trên hình chữ nhật* $[a,b]\times[c,d]$ *và các hàm* $a(y),\ b(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số liên tục trên* $[c,d]$.

Định lí 2.5: *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục cùng với đạo hàm riêng* $f_y^{/}(x,y)$ *trên hình chữ nhật* $[a,b]\times[c,d]$ *và các hàm* $a(y),\ b(y)$ *khả vi trên* $[c,d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số khả vi trên* $[c,d]$ *và ta có*

$$I^{/}(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y^{/}(x,y)\,dx + f\left(b(y),y\right)b^{/}(y) - f\left(a(y),y\right)a^{/}(y) \tag{2.5}$$

Ví dụ 2.1: Kiểm tra công thức (2.2) đối với tích phân $I(y)=\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx,\ y>0.$

Giải: Hiển nhiên hàm số $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ thỏa mãn định lí 2.2 trên miền $[0,1]\times 3^{*}$.

Để tính trực tiếp, ta tích phân từng phần $I(y)=\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{y}+\frac{1}{2}y\ln\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

Suy ra $$I^{/}(y) = -\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}$$

Sau khi chuyển phép tính đạo hàm qua dấu tích phân ta sẽ nhận được

$$I^{/}(y)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{arctg}\frac{x}{y})dx = -\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}\ .$$

Ví dụ 2.2: Kiểm tra điều kiện định lí 2.3 cho hàm số

$$f(x,y)=x^y,\ (x,y)\in[0,1]\times[a,b],\ b>a>0.$$

Từ đó hãy tính $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

Giải: Dễ thấy hàm số đã cho thỏa mãn định lí 2.3 và ta nhận thấy $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$

Do vậy

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$
$$I = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

2.1.2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

A. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên miền $[a,+\infty)\times[c,d]$, ($c < d$) đồng thời tích phân suy rộng

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx \quad (2.6)$$

hội tụ với mọi $y \in [c,d]$. Khi đó (2.6) được gọi là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số y.

Tương tự ta có khái niệm về tích phân suy rộng phụ thuộc tham số khi hàm dưới dấu tích phân có cực điểm. Đó là tích phân dạng

$$I(y) = \int_a^b f(x,y) dx, \ (\exists x_0 \in [a,b]: \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \infty) \quad (2.7)$$

B. Tính chất

Cũng như tích phân suy rộng được xem xét trong chương IV của GIẢI TÍCH 1, ở đây chúng ta chỉ xét đến các tính chất của tích phân dạng (2.6). Các khái niệm và kết quả được trình bày có thể chuyển sang cho tích phân dạng (2.7)

Để có được các tính chất tương tự như tích phân xác định phụ thuộc tham số, sự hội tụ của tích phân suy rộng là chưa đủ mà phải thêm tính hội tụ đều theo tham số y.

Tích phân suy rộng (2.6) được gọi là hội tụ đều đối với $y \in [c,d]$ nếu:

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists B(\varepsilon) > 0) \ \left(\forall b > B \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} f(x,y) dx \right| < \varepsilon, \ \forall y \in [c,d]\right)$$

Định lí 2.6*: Nếu* $\left|f(x,y)\right| \le g(x),\ \forall (x,y)\in\left[a,+\infty\right)\times\left[c,d\right]$ *và* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì tích phân suy rộng (2.6) hội tụ đều đối với* $y\in\left[c,d\right]$

Chứng minh: Ta đánh giá như sau:

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \int\limits_b^{+\infty}\left|f(x,y)\right|dx \le \int\limits_b^{+\infty} g(x) < \varepsilon,\ \forall y\in\left[c,d\right]$$

Vì tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ nên bất đẳng thức trên xảy ra với $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước và $b > B(\varepsilon)$. Trong trường hợp này ta luôn tìm được số $B > 0$ (B chỉ phụ thuộc vào ε)

Vậy tích phân suy rộng (2.6) hội tụ đều đối với $y\in\left[c,d\right]$.

Định lí 2.7*: Nếu hàm số* $f(x,y)$ *thỏa mãn các điều kiện:*

1. *Liên tục* $\forall (x,y)\in\left[a,+\infty\right)\times\left[c,d\right]$,

2. *Tích phân suy rộng (2.6) hội tụ đều đối với* $y\in\left[c,d\right]$.

thì $I(y)$ *liên tục trên* $\left[c,d\right]$.

Chứng minh: Lấy $y\in\left[c,d\right],\ h\in 3^*$ sao cho $y+h\in\left[c,d\right]$. Xét số gia của hàm số tại y

$$I(y+h)-I(h) = \int\limits_a^{+\infty}\left[f(x,y+h)-f(x,y)\right]dx$$

$$= \int\limits_a^{b}\left[f(x,y+h)-f(x,y)\right]dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x,y+h)dx - \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx$$

Ta có $\left|I(y+h)-I(y)\right| \le \left|I_1\right| + \left|I_2\right| + \left|I_3\right|,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists B>0,\ \forall b>B,\ \forall y\in\left[c,d\right]$

trong đó I_1, I_2, I_3 tương ứng là các tích phân ở vế phải

I_1 là tích phân xác định với biểu thức dưới dấu tích phân liên tục theo y nên với h đủ bé thì $\left|I_1\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, còn $\left|I_2\right| < \frac{\varepsilon}{3},\ \left|I_3\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ vì các hàm số dưới dấu tích phân thỏa mãn điều kiện b. Vậy với h đủ bé thì $\left|I(x,y+h)-I(x,y)\right| < \varepsilon$, chứng tỏ tích phân suy rộng (2.6) liên tục trên $\left[c,d\right]$

Định lí 2.8*: Nếu hàm số* $f(x,y)$ *thỏa mãn các điều kiện:*

1. *Liên tục* $\forall(x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d]$,

2. *Tích phân suy rộng (2.6) hội tụ đều đối với* $y\in[c,d]$.

thì $$\int_c^d I(y)dy=\int_a^{+\infty}dx\int_c^d f(x,y)dy \tag{2.8}$$

Chứng minh: Ta biểu diễn $\int_c^d I(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx+\int_c^d dy\int_b^{+\infty} f(x,y)dx,\ \forall b>a$

Theo định lí 2.3 , ta có $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$

Do đó $$\left|\int_c^d I(y)dy-\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy\right|=\left|\int_c^d dy\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|\le\int_c^d dy\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|$$

Từ diều kiện 2. của định lí ta suy ra:

$$(\forall\varepsilon>0)\ \left(\exists B(\varepsilon)>0\right)\ \left(\forall b>B\Rightarrow\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{d-c},\ \forall y\in[c,d]\right)$$

Vậy $$\left|\int_c^d I(y)dy-\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy\right|\le\int_c^d dy\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|\le\frac{\varepsilon}{d-c}\left(d-c\right)=\varepsilon,$$

Công thức (2.8) cho phép ta thay đổi thứ tự lấy tích phân.

Định lí 2.9: *Cho hàm số $f(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện:*

1. *Liên tục theo x trên $[a,+\infty)$ với mọi y cố định trên $[c,d]$.*

2. *Tồn tại đạo hàm riêng $f_y^{/}(x,y)$ liên tục trên $[a,+\infty)\times[c,d]$.*

3. Tích phân suy rộng (2.6) hội tụ,

4. *Tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f_y^{/}(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y\in[c,d]$*

Khi đó $$I^{/}\left(y\right)=\int_a^{+\infty} f_y^{/}\left(x,y\right)dx \tag{2.9}$$

Chứng minh: Áp dụng định lí 2.8 cho hàm số $f_y^{/}(x,y)$ và thay d bởi $y\in[c,d]$, ta có

$$\int_c^y dy \int_a^{+\infty} f_y^/(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^y f_y^/(x,y)dy = \int_a^{+\infty} \left(f(x,y)|_c^y \right) dx$$
$$= \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} f(x,c)dx$$

Lấy đạo hàm hai vế theo y ta nhận được công thức cần chứng minh $\int_a^{+\infty} f_y^/(x,y)dx = I^/(y)$

Công thức (2.9) cho phép ta chuyển phép lấy đạo hàm qua dấu tích phân.

Ví dụ 2.3: Chứng minh tích phân sau đây hội tụ đều

$$\int_1^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx$$

Giải: Giả sử $b > 1$, ta có $\left| \int_b^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx \right| = \frac{x}{x^2 + y^2}|_b^{\infty} = \frac{b}{b^2 + y^2} \le \frac{1}{b} < \varepsilon$

Vậy $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B = \frac{1}{\varepsilon}:\ \forall b > B \Rightarrow \left| \int_b^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \right| < \varepsilon$. Chứng tỏ tích phân đã cho hội tụ đều.

Ví dụ 2.4: Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

Giải: Trước tiên ta nhận thấy: $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx} dx = \frac{1}{y},\ y > 0$ và tích phân này hội tụ đều đối với $y \ge y_0 > 0$. Bởi vì $e^{-yx} \le e^{-y_0 x}$ mà $\int_0^{+\infty} e^{-y_0 x} dx$ hội tụ

Ví dụ 2.5: Sử dụng phép lấy đạo hàm dưới dấu tích phân, hãy tính tích phân suy rộng

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx,\ (\alpha,\ \beta > 0)$$

Giải: Ta kiểm tra các điều kiện của định lí 2.9

Ta có $0 < \frac{1 - \cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} \le \frac{2}{x} e^{-\beta x},\ \forall x > 0$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{2}{x}e^{-\beta x}dx,\ (\alpha,\ \beta>0)=\int_0^1\frac{2}{x}e^{-\beta x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{2}{x}e^{-\beta x}dx$$

Tích phân thứ nhất ở vế phải là tích phân xác định,

Tích phân thứ hai hội tụ bởi vì $\frac{e^{-\beta x}}{x}=0(\frac{1}{x^2})$ khi $x\to\infty$. Ta suy ra tích phân đã cho hội tụ đều (Định lí 2.9 chỉ đòi hỏi tính hội tụ)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-\beta x}\right)=e^{-\beta x}\sin\alpha x,$$

Do $\left|e^{-\beta x}\sin\alpha x\right|\le e^{-\beta x}\Rightarrow\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\sin\alpha x dx$ hội tụ đều (Theo định lí 2.6). Ở đây ta sử dụng $e^{-\beta x}=0(\frac{1}{x^2})$ khi $x\to 0$

Các điều kiện còn lại của định lí 2.9 cũng được thỏa mãn.

Vậy $I'=\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\sin\alpha x dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\Rightarrow I=\int\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}d\alpha=\frac{1}{2}\ln\left(\alpha^2+\beta^2\right)+C$

Ta nhận thấy $I(0)=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}\ln\beta^2$, và cuối cùng $I=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$.

2.2 TÍCH PHÂN BỘI HAI (TÍCH PHÂN KÉP)

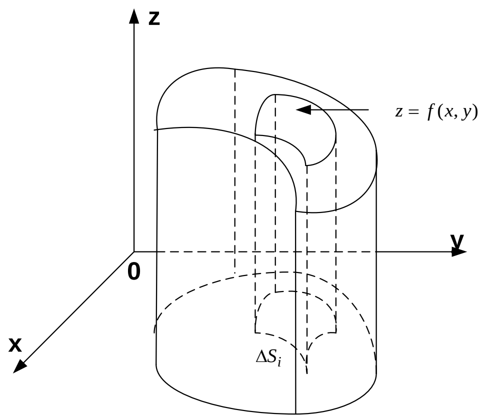
2.2.1 Bài toán mở đầu

Bài toán: Cho vật thể V $\in 3^3$ giới hạn bởi các mặt sau đây: mặt phẳng Oxy, mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và đường chuẩn L là biên của miền đóng hữu hạn D$\subset$ Oxy và mặt cong cho bởi phương trình z = f(x,y), $(x, y)\in D$, trong đó f(x,y) liên tục và không âm trên miền D (H.2.1). Hãy tính thể tích vật thể V (ta thường gọi V là hình trụ cong)

Cách tính:

Chia hình trụ cong V thành n hình trụ cong bằng cách chia miền D thành n mảnh không dẫm lên nhau bởi một lưới các đường cong trong mặt phẳng Oxy. Gọi tên và diện tích các mảnh đó là ΔS_i, (i = $\overline{1,\ n}$) . Dựng các hình trụ cong có các đáy dưới là ΔS_i ; đáy trên là phần của mặt cong z = f(x,y) , đường sinh song song với trục Oz. Để đơn giản ta gọi tên và thể tích các hình trụ cong thành phần là ΔV_i (i = $\overline{1, n}$) và của hình trụ là V

Như vậy $$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$



H.2.1

Nhận xét: Lấy tuỳ ý M$_i$(x_i, y_i) $\in \Delta S_i$ (i = $\overline{1, n}$). Vì miền ΔS_i là nhỏ và hàm f(x,y) liên tục nên trên miền ΔS_i nên các giá trị f(x,y) khác f(x_i, y_i) rất ít, do đó $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\ \Delta S_i$. Do đó

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\ \Delta S_i$$

Gọi d$_i$ là đường kính của mảnh ΔS_i (i = $\overline{1, n}$)

Người ta gọi đường kính của miền E là số $d = \mathrm{Sup}\{d(P,Q)\},\ P \in E,\ Q \in E$.

Rõ ràng sự xấp xỉ theo công thức trên của V càng chính xác nếu ta chia càng nhỏ miền D . Vậy thể tích V sẽ bằng giới hạn nếu có của tổng ở vế phải khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$

$$V = \lim_{\max d_i} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\ \Delta S_i$$

Chú ý: Ý tưởng tính thể tích hình trụ cong hoàn toàn như tính diện tích hình thang cong, ở đó dẫn đến khái niệm tích phân xác định, còn ở đây sẽ dẫn đến khái niệm tích phân kép.

2.2.2 Định nghĩa tích phân kép.

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trên miền đóng D$\subset$ 3^2

1. Chia miền D thành n miền nhỏ bởi một lưới các đường cong, gọi tên và diện tích các miền là ΔS_i (i = $\overline{1, n}$) đồng thời kí hiệu d_i là đường kính mảnh thứ i, (i = $\overline{1, n}$)

2. Lấy tuỳ ý $M_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ (i = $\overline{1, n}$) .

3 . $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i$ được gọi là tổng tích phân cuả f(x,y) trên miền D ứng với một phân hoạch và một cách chọn các điểm $M_1, M_2, ..., M_n$. Khi $n \to \infty$ sao cho $\text{Max}d_i \to 0$ mà I_n hội tụ về I không phụ thuộc vào phân hoạch ΔS_i và cách chọn $M_i \in \Delta S_i$, (i = $\overline{1, n}$) thì số I được gọi là tích phân kép của f(x,y) trên miền D và kí hiệu là $\iint\limits_D f(x, y)dS$.

Như vậy $$\iint\limits_D f(x, y)dS = \lim_{\text{Max}d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (2.10)$$

Khi đó ta nói rằng f(x,y) khả tích trên miền D; f(x,y) là hàm dưới dấu tích phân còn x, y là các biến tích phân, dS là yếu tố diện tích.

Chú ý:

a. Vì tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D nên có thể chia D bởi một lưới các đường thẳng song song với các trục toạ độ Ox, Oy. Khi đó $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$ suy ra dS = dx.dy. Do đó tích phân kép thường kí hiệu là: $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$

b. Cũng như tích phân xác định, kí hiệu biến lấy tích phân kép cũng không làm tích phân kép thay đổi, tức là: $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_D f(u, v)dudv$

c. Nếu $f(x,y) \geq 0$ trên D thì thể tích hình trụ cong đã xét trong phần 2.2.1 được tính theo công thức $$V = \iint f(x, y)dxdy \qquad (2.11)$$

d. Nếu f(x,y) = 1 trên D thì số đo diện tích miền D tính theo công thức
$$S = \iint\limits_D f(x, y)dxdy \qquad (2.12)$$

2.2.3. Điều kiện khả tích

Tương tự như tích phân xác định, suy ra:

1. Nếu hàm số f(x,y) khả tích trên miền D thì f(x,y) bị chặn trên miền D (điều kiện cần của hàm khả tích).

2. Nếu hàm số f(x,y) liên tục trên miền D, tổng quát hơn: nếu hàm số f(x,y) chỉ cógián đoạn loại 1 trên một số hữu hạn cung cong của miền D thì khả tích trên miền D

2.2.4. Tính chất của tích phân kép.

Từ định nghĩa của tích phân kép, tương tự như tích phân xác định, ta suy ra được các tính chất sau:

1. Nếu D được chia thành 2 miền D_1, D_2 mà $D_1 \cap D_2 = \phi$ thì *f(x,y)* khả tích trên D khi và chỉ khi nó khả tích trên D_1 và D_2 đồng thời.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \qquad (2.13)$$

2. Nếu *f(x,y)* khả tích trên D và *k* là hằng số thì:

$$\iint_D k.f(x,y)dxdy = k.\iint_D f(x,y)dxdy \qquad (2.14)$$

3. Nếu *f(x,y), g(x,y)* khả tích trên D thì

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy \qquad (2.15)$$

4. Nếu *f(x,y), g(x,y)* cùng khả tích trên D và $f(x,y) \le g(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy \qquad (2.16)$$

5. Nếu *f(x,y)* khả tích trên D thì $|f(x,y)|$ cũng khả tích trên D và

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy \qquad (2.17)$$

6. Nếu *f(x,y)* khả tích trên D và thoả mãn $m \le f(x,y) \le M$, $\forall (x,y) \in D$ thì

$$mS \le \iint_D f(x,y)dxdy \le MS \qquad (2.18)$$

trong đó *S* là diện tích miền D.

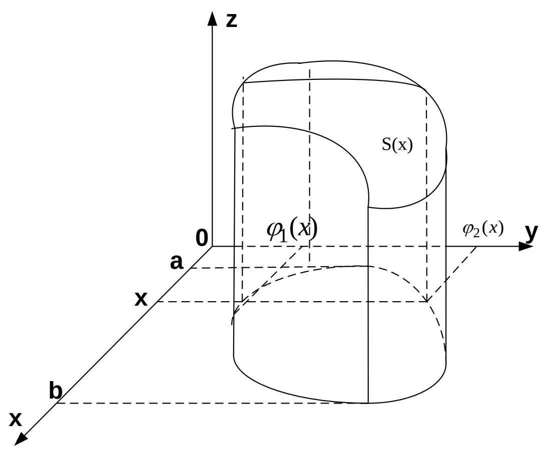
2.3. TÍNH TÍCH PHÂN KÉP

2.3.1. Công thức tính tích phân kép trong tọa độ đề các (Descartes).

Định lí 2.10: *Nếu hàm số f(x,y) liên tục trên miền D cho bởi hệ bất phương trình*

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases}$$

thì $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (2.19)$$



H.2.2

Chứng minh: Trước hết xét $f(x,y) \geq 0$ và liên tục trên miền D :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{cases}$$

trong đó $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ liên tục trên *[a,b]*.

Theo ý nghĩa hình học ta có: $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

trong đó V là thể tích hình trụ cong. Mặt khác, ứng dụng tích phân xác định ta lại có: $V = \int\limits_a^b S(x)dx$, trong đó *S(x)* là diện tích thiết diện của hình trụ cong do mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm *x* tạo ra. (H.2.2).Từ hình 2.2 ta thấy *S(x)* là diện tích hình thang cong nằm trên mặt phẳng *Oyz* (bằng phép tịnh tiến) giới hạn bởi trục *Oy*, các đường $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ và đường cong *z = f(x,y), x* cố định.Theo ý nghĩa tích phân xác định ta có: $S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$

Suy ra $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Tích phân lặp trên được qui ước viết trong dạng:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Bây giờ xét *f(x,y)* liên tục và có dấu bất kỳ trên miền D.

Ta xét các hàm số phụ sau:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{khi } f(x,y) \ge 0, \forall (x,y) \\ 0 & \text{khi } f(x,y) < 0, \forall (x,y) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} -f(x,y) & \text{khi } f(x,y) < 0, \forall (x,y) \\ 0 & \text{khi } f(x,y) \ge 0, \forall (x,y) \end{cases}$$

Các hàm số $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ liên tục và không âm trên miền D đồng thời

$$f(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y).$$

Theo tính chất 3. của tích phân bội và kết quả trên, ta được:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy - \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_1(x,y)dy - \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_2(x,y)dy$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [f_1(x,y) - f_2(x,y)]dy$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Vậy ta nhận được công thức (2.19). Như vậy, để tính tích phân kép ta đưa về tính tích phân lặp: đầu tiên ta tính tích phân theo biến y (trong khi tính coi x là hằng số) và tiếp theo tính tích phân theo biến x .

Chú ý:

a. Nếu miền D cho bởi hệ bất phương trình:

$\begin{cases} c \le y \le d \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \end{cases}$ thì ta nhận được công thức tính tích phân kép tương tự là:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \tag{2.20}$$

b. Công thức thay đổi thứ tự lấy tích phân (hay gọi là công thức Fubini).

Trước tiên ta xét miền D có tính chất: Mỗi đường thẳng song song với các trục toạ độ cắt biên của miền D nhiều nhất ở hai điểm (trừ ra các đoạn biên song song với các trục tọa độ). Khi đó tồn tại hình chữ nhật:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$$

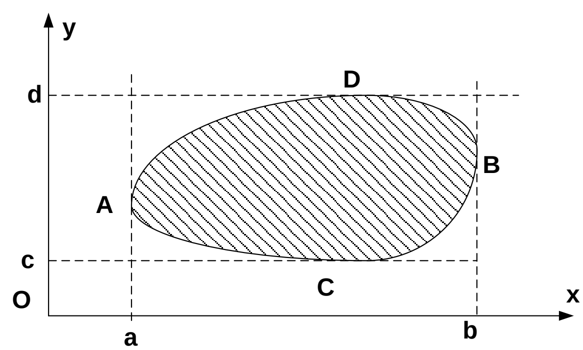
có cạnh tiếp xúc với biên của miền *D* (H.2.3)

Giả sử ACB, ADB có phương trình là: $y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),\ a \le x \le b$

CAD, CBD có phương trình là: $x = \psi_1(y),\ x = \psi_2(y),\ c \le y \le d$

Từ công thức (2.19), (2.20) nhận được công thức Fubini sau đây:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (2.21)$$



H.2.3

c. Khi miền D không có tính chất đã nêu trên thì có thể chia miền D thành một số hữu hạn các miền $D_1, D_2, ..., D_n$ có tính chất mô tả ở hình H.2.3 sau đó áp dụng tính chất 1. của tích phân kép.

d. Nếu miền D là hình chữ nhật $a \le x \le b, c \le y \le d$ và hàm $f(x,y) = h_1(x).h_2(y)$ (*f(x,y)* là hàm số có biến số phân li) thì công thức (2.19) trở thành:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b h_1(x)dx.\int_c^d h_2(y)dy \qquad (2.22)$$

Đó là tích của hai tích phân xác định.

Ví dụ 2.6: Tính tích phân sau:

$$\iint_D x^2 ydxdy$$

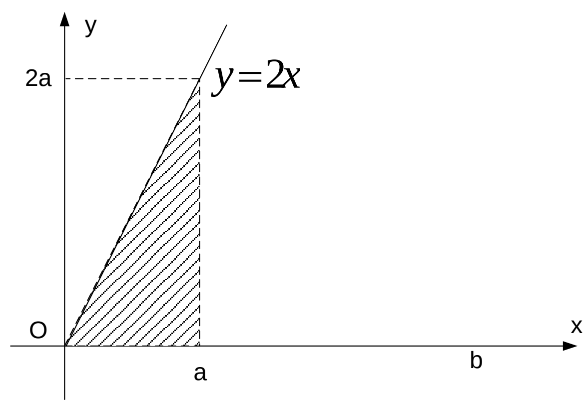
trong đó D là miền giới hạn bởi các đường *y = 0, y = 2x* và *x = a, a>0*

Giải: Để có hệ phương trình mô tả miền D trước hết ta phải vẽ miền D (H.2.4).

Vậy D: $\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le 2x \end{cases}$ hoặc D: $\begin{cases} 0 \le y \le 2a \\ \dfrac{y}{2} \le x \le a \end{cases}$

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_0^a dx \int_0^{2x} x^2 y dy = \int_0^a x^2 \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{2x} dx = 2\int_0^a x^4 dx$$

$$= \frac{2}{5} x^5 \Big|_0^a = \frac{2}{5} a^5$$



H.2.4

Ví dụ 2.7: Tính tích phân: $I = \iint_D xydxdy$

trong đó D giới hạn bởi các đường $y = x - 4$ và $y^2 = 2x$

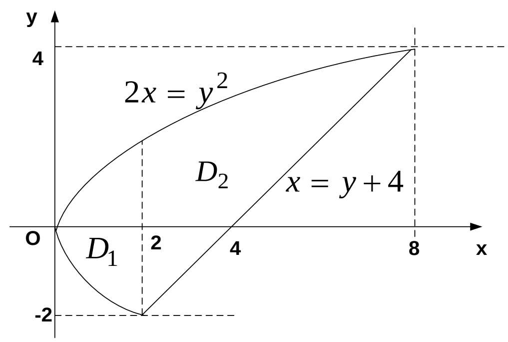
Giải: Vẽ miền D (H.2.5)

Để vẽ được miền D trước hết phải tìm giao của các đường bằng cách giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

Ta suy ra: $\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2} \\ y = \dfrac{y^2}{2} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2} \\ y^2 - 2y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2} \\ \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right.$

Ta mô tả miền D như sau:



H.2.5

D: $\begin{cases} -2 \le y \le 4 \\ \dfrac{y^2}{2} \le x \le y + 4 \end{cases}$ hoặc $D = D_1 \cup D_2$

trong đó $D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x} \end{cases}$ $D_2 : \begin{cases} 2 \le x \le 8 \\ x - 4 \le y \le \sqrt{2x} \end{cases}$

Trong trường hợp này nên áp dụng công thức (2.20) tức là lấy tích phân lặp theo biến x trước và theo biến y sau:

$$I = \int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xydx = \int_{-2}^{4} y.\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y(y^2 + 8y + 16 - \frac{y^4}{4})dy$$

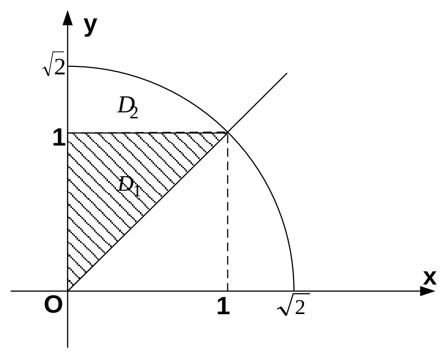
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{4}y^4 + \frac{8}{3}y^3 + 8y^2 - \frac{y^6}{24})\Bigg|_{-2}^{4} = 90$$

Ví dụ 2.8: Hãy thay đổi thứ tự lấy tích phân sau:

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

Giải: Ta vẽ miền D khi đã biết các cận của tích phân. Theo đầu bài miền D giới hạn bởi các đường : $x=0,\ x=1,\ y=x,\ y=\sqrt{2-x^2}$

Đường cong có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ chính là nửa đường tròn : $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y\ge 0 \end{cases}$



H.2.6

Do tính không trơn của biên miền D nên ta biểu diễn: $D=D_1\cup D_2$ (H.2.6)

trong đó: $D_1:\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ 0\le x\le y \end{cases},\quad D_2:\begin{cases} 1\le y\le \sqrt{2} \\ 0\le x\le \sqrt{2-y^2} \end{cases}$

Vậy $I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^{\sqrt{2}} dy\int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

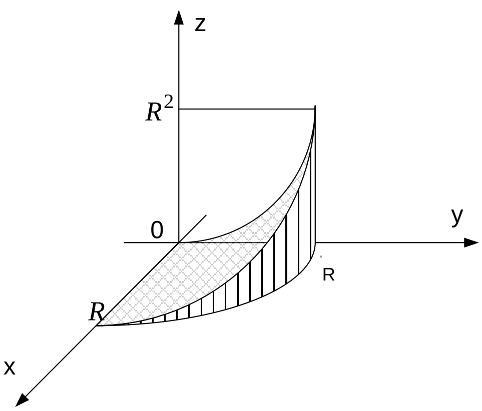
Ví dụ 2.9: Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi các mặt $z=0,\ x^2+y^2=R^2,\ z=y^2$

Giải: Vật thể được mô tả bởi hình H.2.7. Vật thể đối xứng qua mặt tọa độ *Oxz* và *Oyz*. Ta xét phần vật thể trong góc phần tám thứ nhất, phần vật thể này được giới hạn bởi các mặt

$$z=0,\ x^2+y^2=R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0 \text{ và } z=y^2.$$

Vậy $V=4\iint\limits_D y^2dxdy$ trong đó D là phần tư hình tròn $x^2+y^2=R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

Rõ ràng $D:\begin{cases} 0\le x\le R \\ 0\le y\le \sqrt{R^2-x^2} \end{cases}$



H.2.7

$$V = 4\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy = \frac{4}{3}\int_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

Ta đổi biến số $x = R\cos t,\ dx = -R\sin t dt$

$$V = -\frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} R^4 \sin^4 t dt = \frac{4}{3} R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt$$

$$= \frac{4}{3} \mathrm{R}^4 \frac{\pi}{2} \frac{3!!}{4!!} = \frac{\pi \mathrm{R}^4}{4}$$

(Xem công thức Wallis, Mục 4.2.2. Giải tích 1)

2.3.2. Công thức tính tích phân kép trong toạ độ cực

Trước khi đưa ra công thức tính tích phân kép trong toạ độ cực, ta thừa nhận định lý sau liên quan đến phép đổi biến tích phân kép.

Định lý 211: *Giả sử f(x,y) liên tục trên miền* $D \subset Oxy$ *đồng thời tồn tại các hàm số* $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

thoả mãn các điều kiện :

1. *Là các song ánh từ D lên* Δ

2. *Có đạo hàm riêng liên tục trong miền* $\Delta \subset Ouv$ *và định thức Jacobi* $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$

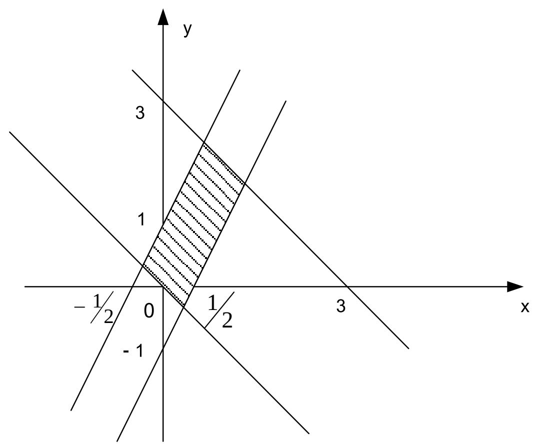
trong miền Δ *(hoặc chỉ bằng 0 ở một số điểm cô lập) khi đó:*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f\left[x(u,v), y(u,v)\right].\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv \qquad (2.23)$$

Như vậy, mục đích của phép đổi biến là : chọn một phép đổi biến thích hợp, miền $D \subset Oxy$ sẽ biến thành miền $\Delta \subset Ouv$ sao cho ta tính tích phân kép trên miền Δ được dễ dàng hơn.

Ví dụ 2.10: Tính $I = \iint_D (x+y)dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi các đường thẳng:

$$y = -x,\ y = -x+3,\ y = 2x-1,\ y = 2x+1$$



H.2.8

Giải: Phương trình các đường thẳng tạo ra miền D viết lại dưới dạng:

$$x+y=0, x+y=3,\ 2x-y=1,\ 2x-y=-1 \quad \text{(Xem H.2.8)}$$

Miền D là hình bình hành trong mặt phẳng Oxy. Do đó nếu tính tích phân trên trong tọa độ Descartes sẽ tương đối phức tạp vì ta phải chia miền D làm 3 miền nhỏ. Ta thực hiện phép biến hình bình hành D trong mặt phẳng Oxy thành hình chữ nhật Δ trong mặt phẳng Ouv bằng phép đổi biến

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x-y \end{cases}, \text{ khi đó } \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{3}$$

$$\Delta : \begin{cases} 0 \le u \le 3 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$$

Suy ra $I = \iint\limits_{\Delta} u.\left|-\dfrac{1}{3}\right| dudv = \dfrac{1}{3}\int\limits_{0}^{3} udu.\int\limits_{-1}^{1} dv = \dfrac{2}{3}\dfrac{u^2}{2}\Bigg|_0^3 = 3$

Ví dụ 2.11: Tính $I = \iint\limits_{D} x^3 dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi các đường thẳng:

$$y = \frac{1}{x},\ y = \frac{2}{x},\ y = x^2,\ y = \frac{x^2}{2}.$$

Giải:

Ta thực hiện phép đổi biến số:

$$u = xy,\ v = \frac{y}{x^2}\ \Rightarrow \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3y}{x^2}\ \Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{x^2}{3y} = \frac{1}{3v},\ x^3 = \frac{u}{v}.$$

Miền phẳng D biến thành hình chữ nhật $\Delta: 1 \le u \le 2,\ \dfrac{1}{2} \le v \le 1$

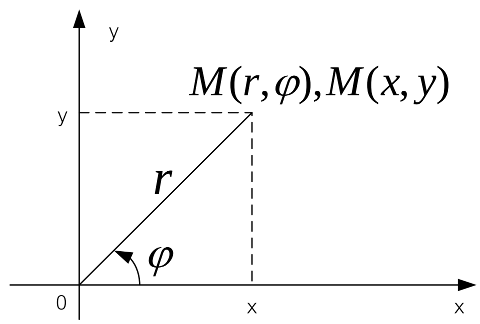
Vậy $\quad I = \iint\limits_{D} x^3 dxdy = \dfrac{1}{3}\iint\limits_{\Delta}\dfrac{u}{v^2}dxdy = \dfrac{1}{3}\int\limits_{1}^{2} udu.\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{1}{v^2}dv = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{2}.1 = \dfrac{1}{2}$

Nhận xét: Nếu giải các ví dụ trên bằng cách trực tiếp dùng công thức tính tích phân kép trong hệ toạ độ Descartes thì phải chia miền D thành các miền thành phần rồi áp dụng tính chất 1. của tích phân kép, như vậy sẽ rất phức tạp. Ta có thể kiểm tra lại kết quả bằng cách dùng trực tiếp công thức (2.19) hoặc (2.20).

1. Hệ toạ độ cực

Để xác định vị trí của các điểm trong mặt phẳng, ngoài hệ toạ độ Descartes, người ta còn dùng hệ toạ độ cực được định nghĩa như sau: Chọn điểm O tuỳ ý gọi là cực và một trục *Ox* gọi là trục cực. Vị trí của điểm *M* bất kỳ được xác bởi hai số: góc φ giữa trục *Ox* và véctơ $\overrightarrow{OM}$ gọi là góc cực và $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ gọi là bán kính véctơ. Cặp (r,φ) gọi là toạ độ cực của *M* và kí kiệu $M(r,\varphi)$. Tất cả các điểm trên mặt phẳng sẽ ứng với φ biến thiên từ 0 đến 2π hoặc φ biến thiên từ -2π đến 0 và r biến thiên từ 0 đến ∞.

Nếu chọn hệ trục toạ độ Descartes *Oxy* tức là O trùng với cực, trục hoành trùng với trục cực thì ta nhận được liên hệ sau đây giữa các toạ độ Descartes và toạ độ cực của điểm M , H.2.9)



H.2.9

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

và ngược lại: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$, x cùng dấu với $\cos\varphi$ hoặc y cùng dấu với $\sin\varphi$

2. Phương trình đường cong trong hệ toạ độ cực

Hệ thức $F(r,\varphi) = 0$ hoặc $r = r(\varphi)$ hay $\varphi = \varphi(r)$ được gọi là phương trình đường cong trong toạ độ cực, chẳng hạn $r = a$ là phương trình đường tròn bán kính bằng a và tâm ở gốc toạ độ, $\varphi = \varphi_0$ là phương trình nửa đường thẳng xuất phát từ gốc toạ độ và lập với trục cực một góc là φ_0.

3. Công thức tích phân kép trong toạ độ cực

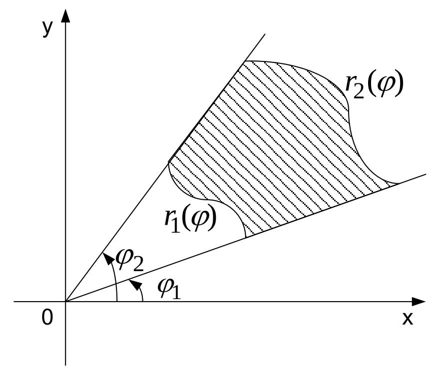
Ta thực hiện phép đổi biến số:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Do đó: $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

Từ công thức (2.23) ta suy ra:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \qquad (2.24)$$



H.2.10

Ta thường hay gặp miền Δ được giới hạn bởi hai tia $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ và đường cong $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ (H.2.10), tức là trong hệ toạ độ cực, miền D được mô tả bởi hệ bất phương trình:

$$D: \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{cases}$$

Khi đó công thức (2.24) sẽ có dạng:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \qquad (2.25)$$

Chú ý:

a. Mối quan hệ giữa các định thức Jacobi của phép biến đổi thoả mãn

$$\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} . \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right| = 1$$

b. Nếu cực là điểm trong của miền D và mọi bán kính cực cắt biên miền D tại một điểm có bán kính $r(\varphi)$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

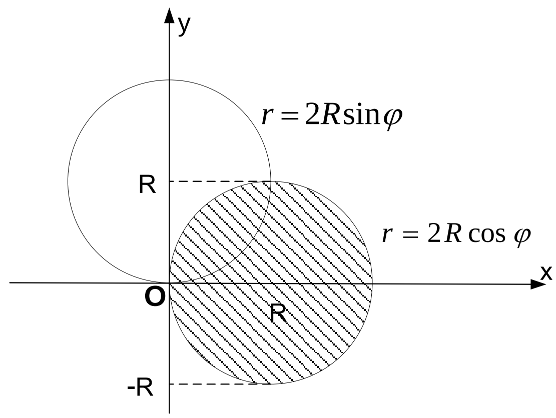
Ví dụ 2.12: Tính $I = \iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ trong đó D là hình tròn $(x-R)^2 + y^2 \le R^2$

Giải: Xem H. 2.11. Đường tròn đã cho chuyển sang toạ độ cực có phương trình:

$$(r\cos\varphi - R)^2 + r^2\sin^2\varphi = R^2 \text{ hay } r = 2R\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Vậy miền D trong hệ toạ độ cực được mô tả bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2R\cos\varphi \end{cases}$$



H.2.11

Theo công thức (2.15) sẽ có:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r.\cos\varphi.r.rdr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{2R\cos\varphi} d\varphi = 8R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = 8R^4 \frac{4!!}{5!!} = 8R^4 \frac{2.4}{3.5} = \frac{64R^4}{15}$$

Ví dụ 2.13: Tính $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$ trong đó $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 2Ry,\ x^2 + y^2 \ge 2Rx\right\}$

Giải: Xem ví dụ 2.12 và H.2.11

Đường tròn $x^2 + y^2 = 2Ry$ chuyển sang toạ độ cực có phương trình

$$r = 2R\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$$

Từ đó ta suy ra miền $D = D_1 \cup D_2$, (D_1 là nửa hình tròn bên phải bị khuyết, D_2 là nửa hình tròn bên trái).

Trong hệ toạ độ cực, miền $D_1,\ D_2$ lần lượt được mô tả bởi hệ bất phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ 2R\cos\varphi\le r\le 2R\sin\varphi\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi\\ 0\le r\le 2R\sin\varphi\end{cases}$$

$$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{2R\cos\varphi}^{2R\sin\varphi}r^2dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^{2R\sin\varphi}r^2dr=\frac{8R^3}{3}\Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\varphi-\cos^3\varphi)d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\Big)$$

$$=\frac{8R^3}{3}\left[\Big(\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\cos\varphi-\sin\varphi+\frac{1}{3}\sin^3\varphi\Big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\Big(\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\cos\varphi\Big)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]=\frac{20\sqrt{2}R^3}{9}$$

2.4. TÍCH PHÂN BỘI BA (TÍCH PHÂN BA LỚP)

2.4.1. Bài toán mở đầu: Tính khối lượng vật thể.

Bài toán: Cho vật thể V không đồng chất, biết khối lượng riêng là

$$\rho=\rho(x,y,z),\quad (x,y,z)\in V$$

Hãy tính khối lượng của vật thể V.

Cách tính: Tương tự như tích phân bội hai, ta chia V tuỳ ý làm *n* phần không dẫm lên nhau bởi một hệ thống các mặt cong. Gọi tên và thể tích các phần đó là $\Delta V_i\quad (i=\overline{1,\ n})$. Trong mỗi phần thứ *i* lấy điểm $P_i(x_i,y_i,z_i)$ tuỳ ý và gọi đường kính của phần đó là $d_i,(i=\overline{1,\ n})$. Khối lượng của vật thể là M thì $M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(P_i)\Delta V_i=\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$.

Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\mathrm{Max}d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$ thì đó chính là khối lượng của vật thể đã cho.

Trong thực tế nhiều bài toán dẫn đến việc tìm giới hạn hạn của tổng dạng trên. Chính vì thế cần phải có định nghĩa toán học tích phân bội ba.

2.4.2. Định nghĩa tích phân bội ba.

Cho hàm số *f(x,y,z)* xác định trên miền $V\subset\mathbb{R}^3$.

1. Chia *V* tuỳ ý thành *n* mảnh nhỏ.Gọi tên và thể tích các mảnh đó là $\Delta V_i,(i=\overline{1,\ n})$, ký hiệu đường kính mảnh ΔV_i là d_i.

2. Lấy tuỳ ý $P_i(x_i,y_i,z_i)\in\Delta V_i,\ (i=\overline{1,\ n})$

3. Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, được gọi là tổng tích phân bội ba của hàm *f(x,y,z)* lấy trên miền *V* ứng với một phân hoạch và các điểm $P_i \in \Delta V_i,\ (i = \overline{1,\ n})$

Khi $n \to \infty$ sao cho $\text{Max}d_i \to 0$ mà I_n hội tụ về *I* không phụ thuộc vào phân hoạch ΔV_i và cách chọn điểm $P_i \in \Delta V_i,\ (i = \overline{1,\ n})$ thì số *I* gọi là tích phân bội ba của *f(x,y,z)* trên miền *V* và được ký hiệu là $\iiint\limits_V f(x, y, z)dV$.

Như vậy: $$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \lim_{\text{Max}d_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \qquad (2.26)$$

Tương tự, khi có tích phân bội ba của hàm số *f(x,y,z)* trên miền *V*.ta cũng nói rằng *f(x,y,z)* khả tích trên miền *V*.

Chú ý:

a. Giống như tích phân kép, yếu tố thể tích *dV* được thay bằng *dxdydz* và khi đó thường ký hiệu tích phân bội ba là: $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$

b. Tương tự như tích phân kép, tích phân bội ba không phụ thuộc vào ký hiệu biến lấy tích phân

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(u, v, \omega)dudvd\omega$$

c. Rõ ràng thể tích *V* của vật thể *V* tính theo công thức: $V = \iiint\limits_V dxdydz$ (2.27)

d. Điều kiện khả tích và tính chất của tích phân bội ba tương tự như tích phân kép.

2.5. TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA

2.5.1. Công thức tính tích phân bội ba trong hệ toạ độ đề các

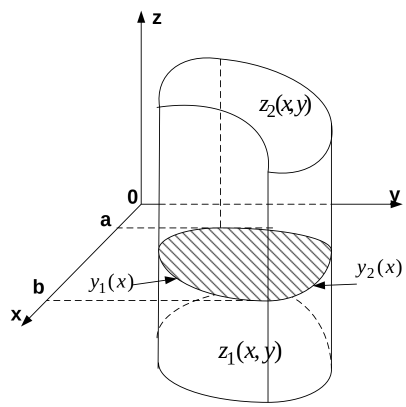
Định lý 2.12: *Nếu f(x,y,z) liên tục trong miền V cho bởi hệ bất phương trình:*

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x, y) \le y \le z_2(x, y) \end{cases} \qquad (2.28)$$

thì $$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \qquad (2.29)$$

Hệ bất phương trình (2.28) mô tả miền V là một vật thể giới hạn phía trên bởi mặt $z = z_2(x, y)$, giới hạn phía dưới bởi mặt $z = z_1(x, y)$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với trục *Oz*, đường chuẩn là biên của miền D_{xy} (miền D_{xy} là hình chiếu của V trên mặt phẳng *Oxy* (H.2.12), cụ thể miền D_{xy} cho bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$



H.2.12

Công thức (2.29) chứng tỏ để tính tích phân bội ba ta đưa về tính tích phân lặp. Khi tính tích phân theo biến *z* ta coi *x, y* là hằng số. Khi tính tích phân theo biến *y* coi *x* là hằng số. Cuối cùng tính tích phân theo biến *x*.

Chú ý:

a. Từ công thức (2.19) suy ra công thức (2.29) có thể viết lại như sau:

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \qquad (2.29)'$$

b. Thay đổi vai trò của các biến *x,y,z* ta cũng có công thức thay đổi thứ tự lấy tích phân bội ba

$$\iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz = \iint_{D_{yz}} dydz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)dx \qquad (2.29)''$$

trong đó D_{yz} là hình chiếu của miền *V* lên mặt phẳng *Oyz*, còn $x = x_1(y,z)$ và $x = x_2(y,z)$ là các mặt cong dưới và trên theo hướng *Ox* để tạo ra miền *V*.

Tương tự ta nhận được: $\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \iint\limits_{D_{zx}} dzdx \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy$ (2.29)’’’

Ví dụ 2.14: Tính $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ trong đó miền *V* được cho giới hạn bởi các mặt phẳng

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y = 1,\ x + y - z = 0.$$

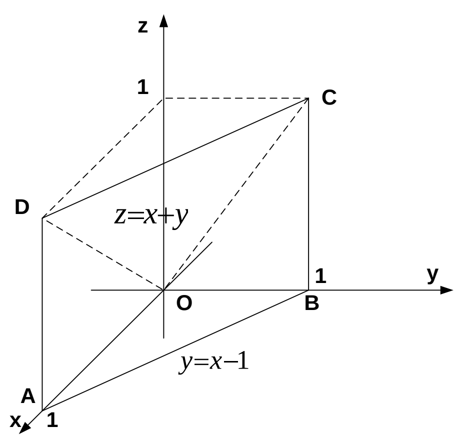
Giải: Vẽ miền *V* (H.2.13). *V* là hình chóp tứ giác có đỉnh là gốc toạ độ, đáy là hình chữ nhật *ABCD*. Mặt trên của *V* (tam giác *OCD*) là mặt phẳng có phương trình *z = x + y*. Mặt dưới của *V* (tam giác *OAB*) là mặt phẳng có phương trình $z = 0$.

Chiếu *V* lên mặt phẳng *Oxy* ta được tam giác *OAB* cho bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}$$

Từ đó theo công thức (2.19) có:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{x+y}$$



H.2.13

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+2x+2y)^2} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right] dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{2(1+2x+2y)}-\frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1+2x}\right)dx-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\ln|1+2x|\Big\|_0^1+\frac{1}{2}\ln|1+x|\Big\|_0^1$$

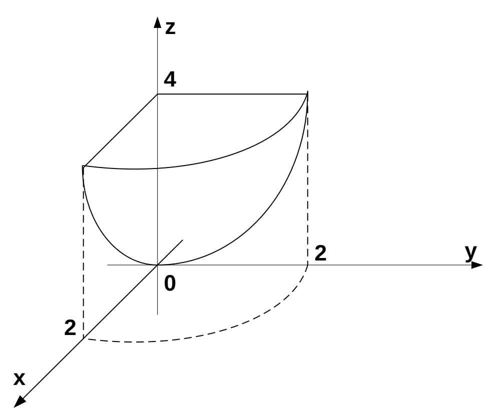
$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{3}\right).$$

Ví dụ 2.15: Tính $I=\iiint_V xdxdydz$ với V là miền cho bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x\geq 0\\ y\geq 0\\ x^2+y^2\leq z\leq 4\end{cases}$$

Giải: Miền V cho bởi H.2.14. Ta thấy mặt trên của V là $z=4$, mặt dưới là paraboloid tròn xoay $z=x^2+y^2$. Hình chiếu D của V lên mặt Oxy là phần tư hình tròn:

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 2\\ 0\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\end{cases}$$



H.2.14

Do đó:

$$I=\iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^4 xdz=\iint_D x\left(4-x^2-y^2\right)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\left(4-x^2-y^2\right)dy$$

$$= \int_0^2 x(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^2 \frac{x}{3} y^3 \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} d(4-x^2) = -\frac{1}{3}.\frac{2}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 = \frac{64}{15}$$

Tương tự như tích phân kép, ta cũng có công thức đổi biến số trong tích phân bội ba dưới đây:

Định lý 2.13: *Cho hàm $f(x,y,z)$ liên tục trên miền $V \subset Oxyz$ đồng thời tồn tại các hàm số:*

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w), \qquad (u,v,w) \in \Omega \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

thoả mãn các điều kiện:

1. *Là các song ánh từ V lên Ω,*

2. *Có các đạo hàm riêng liên tục trong miền $\Omega \subset Ouvw$ và định thức Jacobi*

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0$$

trong miền Ω (hoặc chỉ bằng 0 ở một số điểm cô lập). Khi đó:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\mathrm{w})}\right| dudvdw \quad (2.30)$$

Ví dụ 2.16 : Tính $I = \iiint_V (x+y)(x-z)dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng

$$x+y=0,\ x+y-1=0,\ y+z-1=0,\ y+z-2=0,\ x+y-z-2=0,\ x+y-z-3=0$$

Giải: Nếu tính trực tiếp thì sẽ rất phức tap. Trong trường hợp này ta thực hiện phép đổi biến số:

$$u = x+y,\ v = y+z,\ \mathrm{w} = x+y-z$$

Khi đó $\dfrac{D(u,v,\mathrm{w})}{D(x,y,z)} = -1 \Rightarrow \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,\mathrm{w})} = -1,\ (x+y)(x-z) = u(u-v)$ và hình lăng trụ V biến thành hình lập phương Ω : $0 \le u \le 1,\ 1 \le v \le 2,\ 2 \le \mathrm{w} \le 3$.

Vậy
$$I=\iiint\limits_{\Omega}u(u-v)dudvd\mathrm{w}=\int_0^1 udu\int_1^2(u-v)dv\int_2^3 d\mathrm{w}$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 u(3-2u)du=-\frac{5}{12}$$

2.5.2. Công thức tính tích phân bội ba trong toạ độ trụ

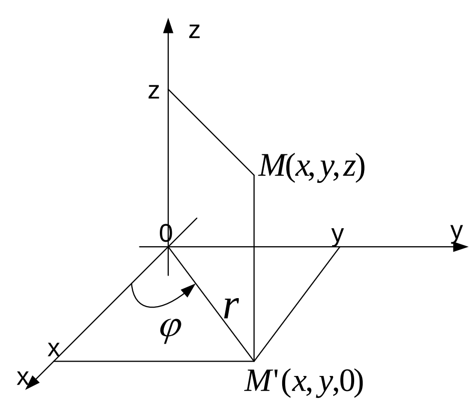
1. Toạ độ trụ : Toạ độ trụ của điểm $M(x,y,z)\in Oxyz$ là bộ ba số sắp thứ tự (r,φ,z) trong đó (r,φ) là toạ độ cực của điểm *M'(x,y)*- hình chiếu của M lên mặt phẳng *Oxy* (H.2.15). Vậy với mọi điểm của không gian, ta có: $r\geq 0,\ 0\leq\varphi<2\pi,\ -\infty<z<+\infty$.

Giữa toạ độ đề các và toạ độ trụ của điểm M có mối liên hệ:

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$$

Trong trường hợp này ta tính được định thức Jacobi của phép biến đổi

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r \qquad (2.31)$$



H.2.15

2. Phương trình mặt cong trong toạ độ trụ

Hệ thức $F(r,\varphi,z)=0$ hoặc giải ra được đối với các biến số $r=r(\varphi,z),\ \ z=z(r,\varphi)$ hoặc $\varphi=\varphi(r,z)$ được gọi là phương trình mặt cong trong toạ độ trụ. Các trường hợp đặc biệt thường gặp sau đây:

$r = r_0$ là phương trình mặt trụ tròn xoay bán kính là r_0 và trục đối xứng là Oz (trong hệ toạ độ $Oxyz$, mặt trụ này có phương trình $x^2 + y^2 = r^2$).

$\varphi = \varphi_0$ là phương trình nửa mặt phẳng lập với mặt phẳng Ozx một góc là φ_0 (tương ứng trong $Oxyz$ phương trình là $y = tg\varphi_0.x$ với $x.\cos\varphi_0 \geq 0$).

$z = z_0$ là phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng Oxy cắt trục Oz tại điểm có toạ độ z_0. Như vậy mặt cong được mô tả trong hệ toạ độ trụ đôi khi có phương trình rất đơn giản so với trong hệ toạ độ Đề các.

3. Công thức tính tích phân bội ba trong toạ độ trụ

Từ công thức (2.30) và (2.31) ta nhận được:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz \tag{2.32}$$

Thông thường miền Ω trong toạ độ trụ mô tả bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi) \\ z_1(r,\varphi) \leq z \leq z_2(r,\varphi) \end{cases}$$

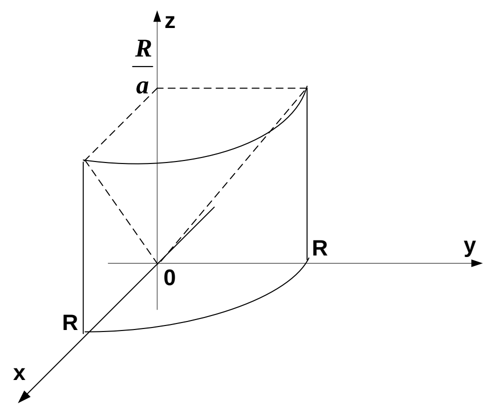
Khi đó (2.32) trở thành:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz \tag{2.33}$$

Ví dụ 2.17: Tính $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$ trong đó V giới hạn bởi các mặt cong

$$z = 0,\ a^2z^2 = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = R^2,\ z \geq 0,\ a > 0.$$

Giải: Miền V được cho trên hình H.2.16 được giới hạn bởi mặt *Oxy*, mặt nón, mặt trụ. Các mặt nón và mặt trụ có phương trình viết trong toạ độ trụ là: $az = r,\ r = R$ (nhận được bằng cách thay $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ vào phương trình các mặt cong đã cho).



H.2.16

Như vậy miền Ω cho bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \\ 0 \le z \le \dfrac{r}{a} \end{cases}$$

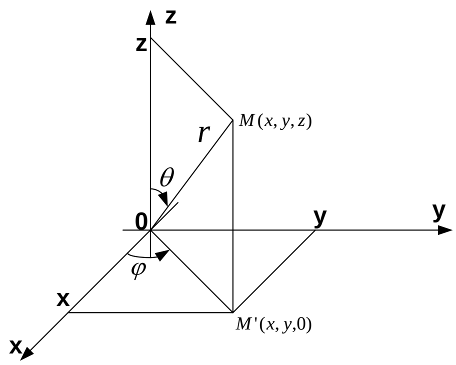
Suy ra $$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{r}{a}} dz = \frac{2\pi}{a} \int_0^R r^4 dr = \frac{2\pi}{5a} R^5$$

Chú ý: Khi miền V có dạng hình trụ và hàm dưới dấu tích phân chứa các biểu thức $x^2 + y^2$ thì thường tính tích phân trong toạ độ trụ sẽ đơn giản hơn trong toạ độ đề các.

2.5.3. Công thức tính tích phân bội ba trong toạ độ cầu

1. Toạ độ cầu: Toạ độ cầu của một điểm $M(x, y, z) \in Oxyz$ là bộ ba số (r, θ, φ) trong đó $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, θ là góc giữa trục Oz và $\overrightarrow{OM}$ và φ là góc giữa trục Ox và $\overrightarrow{OM}'$, ở đây *M'* là hình chiếu của *M* trên O*xy* (H.2.17). Vậy với mọi điểm của không gian sẽ có:
$r \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$. Dễ thấy giữa các toạ độ đề các và toạ độ cầu có mối quan hệ:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



H.2.17

Từ đó suy ra $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$ (2.34)

2. Phương trình mặt cong trong toạ độ cầu

Hệ thức $F(r,\theta,\varphi)=0$ hoặc giải ra được đối với các biến số

$r=r(\theta,\varphi)$; $\theta=\theta(\varphi,r)$; $\varphi=\varphi(r,\theta)$ được gọi là một phương trình mặt cong trong toạ độ cầu. Các trường hợp đặc biệt thường gặp sau đây

$r=r_0$ mô tả mặt cầu tâm gốc toạ độ O và bán kính r_0 (trong hệ toạ độ O*xyz*, mặt cầu này có phương trình $x^2+y^2+z^2=r_0^2$)

$\theta=\theta_0$ là phương trình của mặt nón tròn xoay, đỉnh O và trục đối xứng là O*z* có góc mở là 2θ (mặt nón này trong hệ O*xyz* có phương trình $\sqrt{x^2+y^2}=z\text{tg}\theta$)

$\varphi=\varphi_0$ là phương trình nửa mặt phẳng lập với mặt phẳng O*xy* một góc φ_0 (nửa mặt phẳng này trong hệ toạ độ O*xyz* có phương trình $y=tg\varphi_0.x$ với $x\cos\varphi_0\ge 0$)

3. Công thức tính tích phân bội ba trong toạ độ cầu

Từ công thức (2.30) và (2.34) ta nhận được:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \qquad (2.35)$$

Ta hay gặp miền Ω trong toạ độ cầu được mô tả bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) < r \le r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$$

Khi đó công thức (2.35) trở thành:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2dr \qquad (2.36)$$

Ví dụ 2.18: Tính $I = \iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi hai mặt cầu

$x^2+y^2+z^2=1$ và $x^2+y^2+z^2=4$

Giải: Chuyển sang toạ độ cầu, hai mặt cầu đã cho có phương trình lần lượt là $r=1,\ r=2$. Gốc toạ độ là điểm trong của miền V nên miền Ω cho bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$$

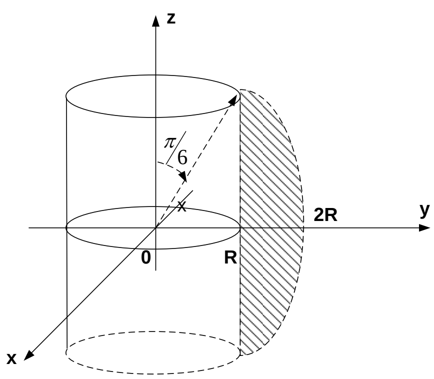
Do đó :

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_1^2 \frac{1}{r}.r^2dr = 2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}.\frac{1}{2}r^2\Big|_1^2 = 6\pi$$

Ví dụ 2.19: Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$ trong đó V là miền ngoài giữa hình trụ $x^2+y^2 \le R^2$

và hình cầu $x^2+y^2+z^2 \le 4R^2$

Giải: Một thiết diện của miền V cho trên hình H.2.18. Xét trong hệ toạ độ cầu, mặt cầu có phương trình $r=2R$, mặt trụ có phương trình $r=\frac{R}{\sin\theta}$ (thay $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi$ vào phương trình $x^2+y^2=R^2$ sẽ nhận được kết quả trên). Để tìm sự biến thiên của θ ta xét giao của mặt cầu và mặt trụ: $r=2R=\frac{R}{\sin\theta}$. Suy ra $\sin\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6},\ \theta=\frac{5\pi}{6}$



H.2.18

Vì V là vật thể tròn xoay nhận Oz làm trục đối xứng, nhận mặt phẳng Oxy làm mặt phẳng đối xứng và hàm dưới dấu tích phân chẵn đối với x, y nên

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_{\frac{R}{\sin\theta}}^{2R} r^4 \sin^2\theta dr = \tfrac{4}{5}\pi R^5 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (32 - \frac{1}{\sin^5\theta})\sin^3\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{5}\pi R^5 \left[32\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-cos^2\theta)d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta} \right] = \frac{4}{5}\pi R^5 \left[32(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta) + \cot g\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{44\sqrt{3}}{5}\pi R^5$$

Chú ý: Khi miền V có dạng hình cầu, hàm dưới dấu tích phân chứa các biểu thức dạng $x^2 + y^2$ hoặc $x^2 + y^2 + z^2$ nên chuyển sang toạ độ cầu, hoặc toạ độ trụ để tính toán cho đơn giản hơn. Ta có thể kiểm tra lại kết quả của ví dụ trên bằng cách dùng toạ độ trụ.

2.6. MỘT VÀI ỨNG DỤNG CƠ HỌC CỦA TÍCH PHÂN BỘI

Ngoài các ứng dụng tích phân bội vào bài toán hình học: tính diện tích, thể tích, của bản phẳng, của vật thể đã được đề cập ngay trong phần định nghĩa tích phân, chúng ta còn nhận được nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như điện tử, cơ học, v.v… Dưới đây ta đưa ra một vài ứng dụng thường dùng đến trong cơ học.

Tương tự như Mục 4.4, Giải tích 1, ta phải thực hiện qui tắc hai bước hay thường gọi là lập sơ đồ vi phân tương ứng cho từng đối tượng

2.6.1. Tính khối lượng

1. Khối lượng của bản phẳng

Giả sử bản phẳng D có khối lượng riêng $\rho(x,y)$ khi đó:

a. Vi phân khối lượng của bản phẳng: Ứng với vi phân diện tích dS ta được miền phẳng vô cùng bé được coi là đồng chất nên vi phân khối lượng tương ứng sẽ là $dM=\rho(x,y)dS$

b. Khối lượng M của bản phẳng: Ta lấy tổng suy rộng, tức là chuyển sang tích phân bội hai sẽ nhận được

$$M=\iint_D \rho(x,y)dxdy \tag{2.37}$$

2. Khối lượng của vật thể

Giả sử vật thể V có khối lượng riêng $\rho(x,y,z)$ khi đó:

a. Vi phân khối lượng của vật thể: Ứng với vi phân thể tích dV ta được vật thể vô cùng bé được coi là đồng chất nên khối lượng tương ứng sẽ là $dM=\rho(x,y,z)dV$

b. Khối lượng M của vật thể: Ta lấy tổng suy rộng, tức là chuyển sang tích phân bội ba sẽ nhận được

$$M=\iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz \tag{2.38}$$

2.6.2. Xác định trọng tâm

Trước hết ta cần nhắc lại khái niệm trọng tâm của một hệ cơ:

Cho hệ cơ gồm n chất điểm có khối lượng tương ứng $m_1,\ m_2,...,\ m_n$ đặt tại các điểm $M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2),...,M_n(x_n,y_n,z_n)$. Theo định nghĩa, trọng tâm G của hệ có các tọa độ được cho bởi công thức

$$x_G=\frac{\sum_k^n x_k m_k}{\sum_k^n m_k},\ \mathrm{y}_G=\frac{\sum_k^n y_k m_k}{\sum_k^n m_k},\ \mathrm{z}_G=\frac{\sum_k^n z_k m_k}{\sum_k^n m_k}. \tag{2.39}$$

1. Trọng tâm của bản phẳng

Ta xét bản phẳng D trong mặt phẳng Oxy có khối lượng riêng $\rho(x,y)$. Để có được công thức xác định trọng tâm của bản phẳng ta chỉ cần thay vào công thức (2.39):

m_k bởi $\rho(x,y)dS,\ x_k m_k$ bởi $x\rho(x,y)dS,\ y_k m_k$ bởi $y\rho(x,y)dS$ và $z_k=0$ và chuyển qua giới hạn. Như vậy ta sẽ có

$$x_G = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy},\ y_G = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy},\ M = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy. \qquad (2.40)$$

Nếu bản phẳng đồng chất, tức là $\rho(x,y) = \rho_0 = \text{const}$ thì $M = \rho_0 S$, S là diện tích bản phẳng D. Khi đó ta có

$$x_G = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{S},\ y_G = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{S}. \qquad (2.40)'$$

2. Trọng tâm của vật thể

Ta xét vật thể V trong không gian Oxyz có khối lượng riêng $\rho(x,y,z)$. Để có được công thức xác định trọng tâm của vật thể ta chỉ cần thay vào công thức (2.39):

m_k bởi $\rho(x,y,z)dV$, $x_k m_k$ bởi $x\rho(x,y,z)dV$, $y_k m_k$ bởi $y\rho(x,y,z)dV$ và $z_k m_k$ bởi $z\rho(x,y,z)dV$ và chuyển qua giới hạn. Như vậy ta sẽ có

$$x_G = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},\ y_G = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},\ z_G = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},$$

$$M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$$

(2.41)

Nếu vật thể V đồng chất, tức là $\rho(x,y,z) = \rho_0 = \text{const}$ thì $M = \rho_0 V$, V cũng kí hiệu là thể tích vật thể

thì ta có
$$x_G = \frac{\iiint\limits_V xdxdydz}{V},\ y_G = \frac{\iiint\limits_V ydxdydz}{V},\ z_G = \frac{\iiint\limits_V zdxdydz}{V}. \qquad (2.41)'$$

2.6.3. Mômen quán tính

Trước hết ta cần nhắc lại khái niệm mômen quán tính của một chất điểm:

Cho chất điểm có khối lượng m đặt tại điểm $M(x,y,z)$. Theo định nghĩa mômen quán tính của chất điểm đối với trục Ox, Oy, Oz và gốc tọa độ O tương ứng cho bởi công thức:

$$I_x = m(y^2+z^2),\ I_y = m(z^2+x^2),\ I_z = m(x^2+y^2),\ I_O = m(x^2+y^2+z^2). \qquad (2.42)$$

1. Mômen quán tính của bản phẳng

Ta xét bản phẳng D trong mặt phẳng Oxy có khối lượng riêng $\rho(x,y)$. Để có được công thức xác định mômen quán tính của bản phẳng đối với các trục Ox, Oy và gốc O ta đi xác định vi phân mômen quán tính ứng với vi phân diện tích $dS = dxdy$ của bản phẳng

$$dI_x = \rho(x,y)y^2dS,\ \mathrm{d}I_y = \rho(x,y)x^2dS,\ \mathrm{d}I_O = \rho(x,y)(x^2+y^2)dS.$$

và chuyển qua giới hạn. Kết quả ta sẽ nhận được:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy, \\ I_y &= \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy, \\ I_O &= \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy. \end{aligned} \quad . \tag{2.43}$$

2. Mômen quán tính của vật thể

Ta xét vật thể V trong không gian Oxyz có khối lượng riêng $\rho(x,y,z)$. Để có được công thức xác định mômen quán tính của vật thể đối với các trục Ox, Oy, Oz và gốc O ta đi xác định vi phân mômen quán tính ứng với vi phân thể tich $dV = dxdydz$ của vật thể

$$\begin{aligned} &dI_x = \rho(x,y)(y^2+z^2)dV,\ \mathrm{d}I_y = \rho(x,y)(z^2+x^2)dV,\ \mathrm{d}I_z = \rho(x,y)(x^2+y^2)dV, \\ &\mathrm{d}I_O = \rho(x,y)(x^2+y^2+z^2)dV. \end{aligned}$$

và chuyển qua giới hạn. Kết quả ta sẽ nhận được:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz, \\ I_y &= \iiint_V (z^2+x^2)\rho(x,y,z)dxdydz, \\ I_z &= \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz, \\ I_O &= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz. \end{aligned} \quad . \tag{2.44}$$

Ví dụ 2.20: Tính khối lượng của bản phẳng $D = \left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$, có khối lượng riêng $\rho(x,y) = xy.$

Giải: Theo công thức (2.37), ta có

$$M = \iint_D xydxdy$$

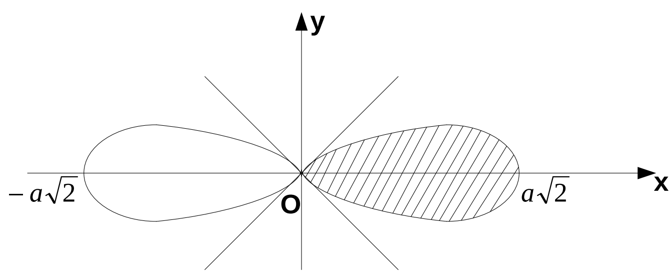
Chuyển sang tọa độ cực: $D \to \Delta = \left\{(r,\varphi):\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le r \le R\right\}$. Do đó

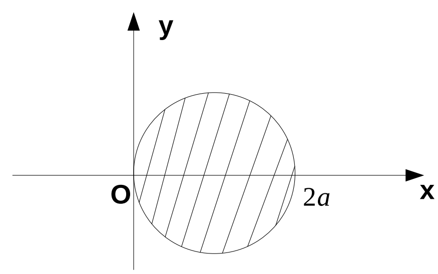
$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^3 \cos\varphi \sin\varphi dr$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = -\frac{1}{4}\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} . \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R = \frac{R^4}{8}$$

Ví dụ 2.21: Xác định trọng tâm G của bản đồng chất

$$D = \left\{(x,y):\ \left(x^2+y^2\right)^2 \le 2a^2\left(x^2-y^2\right),\ x \ge 0,\ a > 0\right\}$$

Giải: Bản đồng chất D là mảnh bên phải của lá lemnixcat, miền giới hạn bởi đường cong có phương trình $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right),\ a > 0$ được gọi là đường lemnixcat.(H.2. 19)





H.2.19 **H.2.20**

Trước tiên, vì tính đối xứng của bản D nên tung độ của trọng tâm $y_G = 0$, Theo công thức (2. 41)', ta có

$$x_G = \frac{\iint_D x dx dy}{S},\ S = \iint_D dx dy$$

Chuyển sang tọa độ cực: đường cong có phương trình $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi,$ ứng với phần bên phải thì

$-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ do đó $D \to \Delta = \left\{(r,\varphi):\ -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4},\ 0 \le r \le a\sqrt{2\cos 2\varphi}\right\}$. Vậy

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}rdr=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi=a^2$$

$$x_G=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{S}=\frac{1}{a^2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}r^2\cos\varphi dr=\frac{4\sqrt{2}}{3}a\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\cos^{\frac{3}{2}}2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}a\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi(1-2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\varphi$$

Thực hiện phép đổi biến số $\sqrt{2}\sin\varphi=\sin\alpha$, ta nhận được

$$x_G=\frac{4}{3}a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\alpha d\alpha=\frac{\pi a}{4}.$$ (Xem công thức Wallis, Mục 4.2.2. Giải tích 1)

Ví dụ 2.22: Tính mômen quán tính đối với gốc tọa độ O của bản tròn (H.2. 20),

$D=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 2ax,\ a>0\ \right\}$, biết khối lượng riêng $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Giải: Theo công thức (2.42), ta có

$$I_o=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực: $D\to\Delta=\left\{(r,\varphi):\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2a\cos\varphi\right\}$. Do đó

$$I_o=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}r^4dr=\frac{2^6a^5}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi d\varphi=\frac{512}{75}a^5.$$

Ví dụ 2.23: Tìm trọng tâm của vật thể V đồng chất giới hạn bởi các mặt phẳng

$$z=x^2+y^2,\ z=x+y.$$

Giải: Trước tiên ta tính thể tích của vật thể, để đơn giản cũng kí hiệu là V

$$V=\iiint\limits_V dxdydz$$

Chuyển sang tọa độ trụ: $z = x^2 + y^2,\ z = x + y \Rightarrow z = r^2,\ z = r\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right)$. Giao của chúng là hệ các phương trình

$$\begin{cases} r^2 = r\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) \\ z = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\cos(\varphi - \dfrac{\pi}{4}) \geq 0 \\ z = r^2 \end{cases}$$

Từ đó, trong tọa độ trụ vật thể V được mô tả bởi hệ các bất phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{3\pi}{4} \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2}\cos(\varphi - \dfrac{\pi}{4}) \\ r^2 \leq z \leq r\sqrt{2}\cos(\varphi - \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Vậy

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} rdr \int_{r^2}^{r\sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} dz$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^4(\varphi - \frac{\pi}{4})d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\alpha d\alpha = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\alpha d\alpha = \frac{2}{3}.\frac{\pi}{2}.\frac{3}{8} = \frac{\pi}{8},\ \alpha = \varphi - \frac{\pi}{4}$$

Do tính đối xứng của vật thể qua mặt phẳng $y = x$ nên $x_G = y_G$ và được tính theo công thức

$$x_G = y_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz = \frac{8}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} r^2 dr \int_{r^2}^{r\sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} dz$$

$$x_G = y_G = \frac{8}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})} r^3\left[\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - r\right]dr = \frac{8}{\pi}.\frac{\sqrt{2}}{5}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\varphi\cos^5(\varphi - \frac{\pi}{4})d\varphi$$

$$= \frac{8}{\pi}.\frac{\sqrt{2}}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\alpha\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})d\alpha = \frac{8}{\pi}.\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6\alpha - \cos^5\alpha\sin\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}.$$

$$z_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz$$

$$=\frac{8}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\varphi\int_{0}^{\sqrt{2}\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})}rdr\int_{r^2}^{r\sqrt{2}\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})}zdz=\frac{8}{\pi}.\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^6(\varphi-\frac{\pi}{4})d\varphi=\frac{8}{\pi}.\frac{2}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\alpha d\alpha=\frac{5}{6}.$$

TÓM TẮT NỘI DUNG CHƯƠNG II.

- **Tích phân xác định phụ thuộc tham số**

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$, ($a<b,\ c<d$) đồng thời khả tích theo x trên $[a,b]$ với mọi $y\in[c,d]$. Tích phân dạng

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

được gọi là tích phân phụ thuộc tham số y.

- **Tính chất của tích phân xác định phụ thuộc tham số**

1. *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c,d]$.*

2. *Nếu hàm số $f(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện:*

a. *Liên tục theo x trên $[a,b]$ với mọi y cố định trên $[c,d]$.*

b. *Tồn tại đạo hàm riêng $f_y^{/}(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$.*

Khi đó $$I^{/}(y)=\int_a^b f_y^{/}(x,y)dx$$

3. *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ thì*

$$\int_c^{\eta}\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy=\int_a^b\left\{\int_c^{\eta} f(x,y)dy\right\}dx$$

trong đó $\eta\in[c,d]$

4. *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ và các hàm $a(y),\ b(y)$ liên tục trên $[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c,d]$.*

5. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục cùng với đạo hàm riêng* $f_y^/(x,y)$ *trên hình chữ nhật* $[a,b]\times[c,d]$ *và các hàm* $a(y),\ b(y)$ *khả vi trên* $[c,d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số khả vi trên* $[c,d]$ *và ta có*

$$I^/(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f_y^/(x,y)dx+f(b(y),y)b^/(y)-f(a(y),y)a^/(y)$$

- **Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số**

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên miền $[a,+\infty)\times[c,d]$, ($c<d$) đồng thời tích phân suy rộng dạng

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

hội tụ với mọi $y\in[c,d]$. được gọi là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số y.

Tương tự ta có khái niệm về tích phân suy rộng phụ thuộc tham số khi hàm dưới dấu tích phân có cực điểm. Đó là tích phân dạng

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\ (\exists x_0\in[a,b]:\ \lim_{x\to x_0} f(x,y)=\infty)$$

- **Tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số**

1. *Nếu* $|f(x,y)|\le g(x),\ \forall(x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d]$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì tích phân suy rộng phụ thuộc tham số hội tụ đều đối với* $y\in[c,d]$

2. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *thỏa mãn các điều kiện:*

a. *Liên tục* $\forall(x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d]$,

b. *Tích phân suy rộng hội tụ đều đối với* $y\in[c,d]$.

thì $I(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$.

3. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *thỏa mãn các điều kiện:*

a. *Liên tục* $\forall(x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d]$,

b. *Tích phân suy rộng) hội tụ đều đối với* $y \in [c, d]$.

thì $\int_c^d I(y)dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy$

4. *Cho hàm số* $f(x, y)$ *thỏa mãn các điều kiện:*

a. *Liên tục theo* x *trên* $[a, +\infty)$ *với mọi* y *cố định trên* $[c, d]$.

b. *Tồn tại đạo hàm riêng* $f_y^/(x, y)$ *liên tục trên* $[a, +\infty) \times [c, d]$.

c. *Tích phân suy rộng hội tụ,*

d. *Tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f_y^/(x, y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c, d]$

Khi đó $I^/(y) = \int_a^{+\infty} f_y^/(x, y)dx$

- **Tính tích phân kép trong toạ độ đề các**

Nếu hàm số f(x,y) liên tục trên miền D cho bởi hệ bất phương trình

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases} \quad \text{thì} \quad \iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

- **Tính tích phân kép trong toạ độ cực**

Nếu hàm số f(x,y) liên tục trên miền Δ cho bởi hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{cases} \quad \text{thì} \quad \iint_D f(x, y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

- **Thay đổi thứ tự lấy tích phân (công thức Fubini)**

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$$

- **Tính tích phân bội ba trong toạ độ đề các**

Nếu *f(x,y,z)* liên tục trong miền *V* cho bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x, y) \le y \le z_2(x, y) \end{cases}$$

thì $$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

hay :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dzdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

- **Công thức thay đổi thứ tự lấy tích phân bội ba**

$$\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

- **Tính tích phân bội ba trong toạ độ trụ**

1. Quan hệ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

2. Công thức tính

Nếu f(x,y,z) liên tục trong miền Ω mô tả bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \\ z_1(r,\varphi) \le z \le z_2(r,\varphi) \end{cases}$$

thì $$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz$$

- **Tính tích phân bội ba trong toạ độ cầu**

1. Quan hệ

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

2. Công thức tính

Nếu f(x,y,z) liên tục trong miền Ω mô tả bởi hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) < r \le r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$$

thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{r\ (\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2dr$$

- **Ứng dụng của tích phân bội**

1. Khối lượng của bản phẳng

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$$

2. Khối lượng của vật thể

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y,z)dxdydz$$

3. Trọng tâm của bản phẳng

$$x_G = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy},\ y_G = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy},\ M = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy.$$

Trường hợp bản phẳng đồng chất: $x_G = \dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{S}$, $y_G = \dfrac{\iint\limits_D ydxdy}{S}$.

4. Trọng tâm của vật thể

$$x_G = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},\ y_G = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},\ z_G = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},$$

$$M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$$

Trường hợp vật thể đồng chất:

$$x_G = \frac{\iiint\limits_V xdxdydz}{V},\ y_G = \frac{\iiint\limits_V ydxdydz}{V},\ z_G = \frac{\iiint\limits_V zdxdydz}{V}.$$

5. Mômen quán tính của bản phẳng

$$I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)dxdy,$$
$$I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)dxdy, \qquad .$$
$$I_O = \iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy.$$

6. Mômen quán tính của vật thể

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$I_y = \iiint\limits_V (z^2+x^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$
.
$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$I_O = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1. Chứng minh các tích phân sau hội tụ đều đối với $t,\ t \geq t_0 > 0$

a. $\int\limits_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$, **b.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-tx} x^{\alpha} \cos x dx,\ \alpha > 0$.

2,2, Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq y \\ -1 & \text{khi } x < y \end{cases}$

Chứng minh tích phân phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_0^1 f(x, y) dx$ là hàm số liên tục với mọi y.

Hãy vẽ đồ thị của hàm số $z = I(y)$.

2.3. Xét sự liên tục của tích phân phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{y^2 + x^2} dx$ với $f(x)$ liên tục và dương trên $[0,1]$.

2.4. Tính $\int\limits_0^1 x^{\alpha} (\ln x)^n dx,\ \alpha > 0, n \in$ Đ*.

2.5. Chứng minh rằng hàm số $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\text{arctg}(x + y)}{1 + x^2} dx$ liên tục và khả vi với mọi y. Từ đó tính $I^{/}(y),\ I(y)$.

2.6. Tính các tích phân

a. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + y)^{n+1}} dx,\ y > 0, n \in$ Đ*, **b.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx,\ \alpha > 0, \beta > 0.$,

2.7. Đổi thứ tự tích phân các tích phân sau:

a. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x, y) dy$, **b.** $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{2y} f(x, y) dx$,

c. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x, y) dy$, **d.** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x - x^2}} f(x, y) dy$.

2.8. Tính các tích phân bội hai sau:

a. $\iint\limits_D \frac{\mathrm{dxdy}}{(\mathrm{x+y})^3}$, $D=\{(x,y): x\geq 1, y\geq 1, x+y\leq 3\}$,

b. $\iint\limits_D |x+y|dxdy$, $D=\{(x,y): |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$,

c. $\iint\limits_D \ln(x+y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $x=1, y=1, y=1+x$,

d. $\iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y=x^2, x=y^2$.

2.9. Tính các tích phân bội hai sau:

a. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, D được giới hạn bởi các đường tròn $x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2=4a^2,\ a>0$,

b. $\iint\limits_D (x^2+y^2+1)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $x^2+y^2-x=0$,

c. $\iint\limits_D (x+2y+1)dxdy$, D là giao của hai hình tròn $x^2+y^2\leq 2y, x^2+y^2\leq 2x$,

d. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy, D=\{(x,y): y\geq 0, x^2+y^2\leq 2x\}$.

2.10. Cho $I_a=\iint\limits_{D_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy,\ J_a=\iint\limits_{\Delta_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy,$ trong đó

$$D_a=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq a^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\},$$
$$\Delta_a=\{(x,y):\ a\geq\ x\geq 0,\ \ a\geq y\geq 0\}.$$

a. Tính I_a.

b. Chứng minh rằng $\forall a>0,\ I_a\leq J_a\leq I_{a\sqrt{2}}$. Từ đó hãy tính $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx$

2.11. Tính $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường:

$$x+y=1,\ x-y=1,\ x+y=3,\ x-y=-1.$$

2.12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a. $x=4y-y^2, x+y=6$, **b.** $y^2=x^3, y^2=8(6-x)^3$,

c. $y = 2^x,\ y = -\dfrac{x}{2},\ y = 4$, **d.** $y^2 = x,\ y^2 = \dfrac{5}{2}x,\ x^2 = \dfrac{1}{3}y,\ x^2 = 2y$.

2.13. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt:

a. $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$,

b. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\ x^2 + y^2 = z^2$.

2.14. Tính các tích phân bội ba sau:

a. $\iiint\limits_V z\,dxdydz,\ \ V = \left\{(x,y,z): 0 \le x \le \dfrac{1}{4},\ x \le y \le 2x,\ 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$,

b. $\iiint\limits_V (1 - x - y - z)dxdydz,\ \ V = \{(x,y,z):\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 1\}$,

c. $\iiint\limits_V |xyz|\,dxdydz,\ \ V = \{(x,y,z):\ 0 \le z \le a,\ x^2 + y^2 \le 2z\}$,

d. $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,\ \ V = \left\{(x,y,z):\ \dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{3a^2} \le 1,\ a > 0\right\}$.

2.15. Xác định trọng tâm của các bản phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường:

a. $y^2 = 4x + 4,\ \ y^2 = -2x + 4$, **b.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ \ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} = 1$,

c. $y = \sqrt{2x - x^2},\ \ y = 0$, **d.** $r = a(1 + \cos\varphi)$, a>0.

2.16. Tính mô men quán tính đối với trục Oy của bản phẳng có mật độ khối lượng $\rho(x,y) = x^2$ giới hạn bởi đường $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

2.17. Xác định trọng tâm của các vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt:

a. $x + y = 1,\ z = x^2 + y^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$,

b. $2x + 3y = 12,\ z = \dfrac{1}{2}y^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$,

c. $x^2 + y^2 = 2az,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2,\ a > 0,\ \ z \ge 0$.