Maths Expertes - DM 4

Scott Hamilton

1

89p48

1.1

$z_1 = \frac{i}{3}z_0 = \frac{i}{3}\cdot 81 = i\frac{3^4}{3} = 27i$, $z_2 = \frac{i}{3}z_1 = \frac{i}{3}\cdot 27i = -\frac{27}{3} = -9$, $z_3 = \frac{i}{3}z_2 = \frac{i}{3}\cdot(-9) = -3i$, $z_4 = \frac{i}{3}z_3 = \frac{i}{3}\cdot(-3i) = 1$

1.2

$Z_{n+2} = \frac{i}{3}(\frac{i}{3}Z_n) = -\frac{1}{9}Z_n$, donc $\overrightarrow{OM_{n+2}} = -\frac{1}{9}$ donc M_n et M_{n+2} sont alignés.

1.3

$OM_n = |Z_n - Z_O| = |Z_n|$.
$OM_{n+1} = |Z_{n+1} - Z_O| = |Z_{n+1}| = |\frac{i}{3}Z_n| = |\frac{i}{3}|\cdot|Z_n| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}|Z_n| = \sqrt{\frac{1}{9}}|Z_n| = \frac{\sqrt{9}}{9}|Z_n| = \frac{3}{9}|Z_n| = \frac{1}{3}|Z_n| = \frac{1}{3}OM_n$.
Donc OM_n est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$. $-1 < q < 1$ donc

$$\lim_{n\to\infty} OM_n = 0$$

, OM_n est une longueur donc $\forall n \in \mathbb{N}, OM_n > 0$. Donc il existe un rang à partir duquel la suite $OM_n < 0,001$.

$OM_{10} \approx 0,0013 > 0,001$, $OM_{11} \approx 0,0005 < 0,001$ ce rang est atteind à $n = 11$.

1.4

$$\begin{aligned} M_0M_1 &= |Z_1 - Z_0| \\ &= |27i - 81| \\ &= \sqrt{(-81)^2 + 27^2} \\ &= \sqrt{6561 + 25} \\ &= \sqrt{6584} \\ &= 27\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1M_2 &= |Z_2 - Z_1| \\ &= |-9 - 27i| \\ &= \sqrt{(-9)^2 + (-27)^2} \\ &= 9\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2M_3 &= |Z_3 - Z_2| \\ &= |-3i + 9| \\ &= \sqrt{9^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{90} \\ &= \sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

1.5

$d_n = M_nM_{n+1} = |Z_{n+1} - Z_n| = |\frac{i}{3}Z_n - Z_n| = |\left(\frac{i}{3} - 1\right)Z_n| = |\frac{i}{3} - 1|\cdot|Z_n| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}|Z_n| = \sqrt{\frac{10}{9}}|Z_n| = \frac{\sqrt{9}}{9}\sqrt{10}|Z_n| = \frac{\sqrt{10}}{3}|Z_n|$

$d_{n+1} = \frac{\sqrt{10}}{3}|Z_{n+1}| = \frac{\sqrt{10}}{3}|\frac{i}{3}Z_n| = \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot|\frac{i}{3}|\cdot|Z_n| = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}|Z_n| = \frac{1}{3}d_n$
$d_0 = M_0M_1 = 27\sqrt{10}$ et $d_1 = M_1M_2 = 9\sqrt{10}$, donc $d_1 = \frac{1}{3}d_0$, donc pourquoi n doit-il être non nul ?

1.6

(d_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ donc, $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = d_0\left(\frac{1}{3}\right)^n = 27\sqrt{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
$-1 < q < 1$ donc

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

.

1.7

$$\begin{aligned}
L_n &= \sum_{i=0}^{n} M_i M_{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} d_n \\
&= d_0 \frac{1-q^n}{1-q} \\
&= 27\sqrt{10} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \\
&= 27\sqrt{10} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{81}{2}\sqrt{10} \cdot \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0,\ \lim_{n\to\infty} 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1,\ \lim_{n\to\infty} \frac{81}{2}\sqrt{10} \cdot \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{81}{2}\sqrt{10}, \text{ donc}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{81}{2}\sqrt{10}$$

2

Exercice 2

2.1

2.1.1

$z_{C'} = \frac{1-z_C}{\overline{z_C}-1} = \frac{1-(-2+i)}{\overline{-2+i}-1} = \frac{1+2-i}{-2-i-1} = \frac{3-i}{-3-i} = \frac{(3-i)(-3+i)}{9+1} = \frac{-9+3i+3i+1}{10} = \frac{-8+6i}{10} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

2.1.2

$C \in \mathscr{C}(O;1) \Leftrightarrow |z_C - z_O| = 1 \Leftrightarrow |z_C| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{25}+\frac{9}{25}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{25}} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1.$

2.1.3

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{AC}} &= z_C - z_A \\
&= -2+i-1 \\
&= -3+i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{AC'}} &= z_{C'} - z_A \\
&= -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i - 1 \\
&= -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i - \frac{5}{5} \\
&= \frac{-9+3i}{5} \\
&= \frac{3}{5}(-3+i) \\
&= \frac{3}{5} z_{\overrightarrow{AC}}
\end{aligned}$$

$z_{\overrightarrow{AC'}} = \frac{3}{5} z_{\overrightarrow{AC}}$, donc A, C et C' sont alignés.

2.2

$z' = z_A \Leftrightarrow \frac{1-z}{\overline{z}-1} = 1 \Leftrightarrow 1-z = \overline{z}-1$ et $z \neq 1$.
Soient $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x+iy \neq 1$, $1-z = \overline{z}-1 \Leftrightarrow 1-x-iy = x-iy-1 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$.
L'ensemble des points qui ont par image A par la transformation f est représenté par la droite d'équation $x = 1$.

2.3

$|z_{M'}| = |\frac{1-z_M}{\overline{z_M}-1}| = 1 \Leftrightarrow |1-z_M| = |\overline{z_M}-1|$.

Soient $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x+iy \neq 1$, $|1-z_M| = |\overline{z_M}-1| \Leftrightarrow |1-x-iy| = |x-iy-1| \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2+(-y)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(-y)^2} \Leftrightarrow (1-x)^2+(-y)^2 = (x-1)^2+(-y)^2$ (car une somme de carrés est forcément positive et la fonction racine est croissante)

$\Leftrightarrow (1-x)^2 = (x-1)^2$, (toujours vrai car $x^2 = (-x)^2$)

2.4

$\frac{z'-1}{z-1} = \frac{\frac{1-z}{\overline{z}-1}-1}{z-1} = \frac{\frac{1-z}{\overline{z}-1}-\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}-1}}{z-1} = \frac{1-z-\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{z-(z+\overline{z})}{(z-1)(\overline{z}-1)} = \frac{z-(z+\overline{z})}{z\overline{z}-(z+\overline{z})+1}$

Or, soient $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x+iy \neq 1$, $z+\overline{z} = x+iy+x-iy = 2x \in \mathbb{R}$ et $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ donc $\frac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$.

$\frac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \frac{z'-1}{z-1} = k \Leftrightarrow z'-1 = k(z-1)$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow z'-z_A = k(z-z_A)$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AM'}} = kz_{\overrightarrow{AM}}$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$ et $z \neq 1$, donc A, M et M' sont alignés.