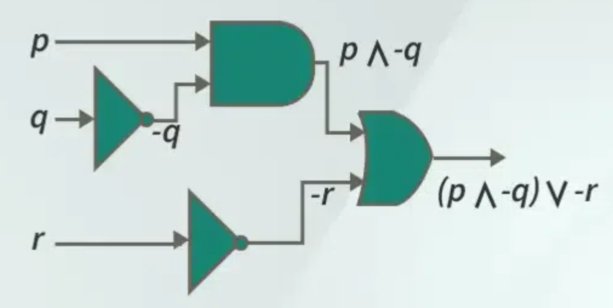
Teoría de la Computación
Unidad 1: Lógica proposicional (parte 2)

cristobal.loyola@usach.cl



Diapositivas basadas en el material del profesor Daniel Vega

Contenidos

- Lógica proposicional: sintaxis (fórmula bien formada, inducción estructural).
- Semántica: valuaciones, tablas de verdad.
- Deducción e inferencia: método de resolución.

Sintaxis

Lógica proposicional: Sintaxis

Definiremos un conjunto de símbolos (alfabeto) dado por:

- Un conjunto P (posiblemente infinito) de variables proposicionales: p, q, r, s,...

Definiremos un conjunto de símbolos (alfabeto) dado por:

- Un conjunto P (posiblemente infinito) de variables proposicionales: p, q, r, s,...
- Constantes: V o F (1 o 0, T o F)

Lógica proposicional: Sintaxis

Definiremos un conjunto de símbolos (alfabeto) dado por:

- Un conjunto P (posiblemente infinito) de variables proposicionales: p, q, r, s,...
- Constantes: V o F (1 o 0, T o F)
- Conectores lógicos: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Lógica proposicional: Sintaxis

Definiremos un conjunto de símbolos (alfabeto) dado por:

- Un conjunto P (posiblemente infinito) de variables proposicionales: p, q, r, s,...
- Constantes: V o F (1 o 0, T o F)
- Conectores lógicos: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Símbolos de puntuación: (,)

Lógica proposicional: Sintaxis

A partir de un conjunto fijo P de variables, es posible definir un lenguaje proposicional L(P), que contiene todas las fórmulas posibles a través de una definición inductiva.

Así, L(P) está formado por fórmulas, donde una fórmula es:

- Una constante o un elemento de P (fórmulas atómicas).
- Si φ es una fórmula, entonces $\sim \varphi$ también es una fórmula.
- Si φ y Ψ son fórmulas, entonces $(\varphi \star \Psi)$ es una fórmula ($\star$ representa cualquier conector binario).

Definición: en lógica proposicional, una fórmula bien formada (FBF) es aquella que es obtenida usando únicamente las reglas de construcción antes definidas una cantidad finita de veces.

Definiciones inductivas, como la anterior, son muy frecuentes, tanto que se suelen definir empleando una gramática en Backus Naur Form (BNF). En esa forma, la definición anterior se lee de manera más compacta como:

$$\varphi ::= p \,|\, (\sim \varphi) \,|\, (\varphi \wedge \varphi) \,|\, (\varphi \vee \varphi) \,|\, (\varphi \rightarrow \varphi) \,|\, (\varphi \leftrightarrow \varphi)$$

donde p representa cualquier proposición atómica y cualquier ocurrencia de φ a la derecha de $::=$ representa cualquier fórmula antes construida.

¿Son las siguientes expresiones FBF?

- $(p \vee q) \wedge q$
- $(p \wedge \sim q \sim) \wedge \vee r)$

Inducción

Lógica proposicional: Inducción

- Sumemos los primeros 10 números naturales.

- Sumemos los primeros 10 números naturales.
- Ahora, los 100 primeros naturales.

- Sumemos los primeros 10 números naturales.
- Ahora, los 100 primeros naturales.
- ¿Y si queremos la suma de los 1000 primeros naturales?

- Sumemos los primeros 10 números naturales.
- Ahora, los 100 primeros naturales.
- ¿Y si queremos la suma de los 1000 primeros naturales?
- Se puede demostrar mediante inducción que:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lógica proposicional: Inducción

La inducción matemática nos permite probar que determinada propiedad es satisfecha por cualquier número natural. Por ejemplo, para el caso anterior, basta definir $M(k)$ para indicar que la propiedad es satisfecha por k. Así, supongamos que conocemos las siguientes propiedades para M:

- **Caso base:** el número natural 1 satisface $M(1)$.
- **Paso inductivo:** se asume que la propiedad $M(n)$ es cierta para un determinado número natural n, luego se debe probar que para $n+1$ se satisface $M(n+1)$, es decir, existe una prueba de que $M(n) \rightarrow M(n+1)$.

Definición: sea φ una FBF, definimos su altura como la suma entre 1 y el tamaño del camino más largo de su árbol de análisis sintáctico.

Ya que cualquier FBF tiene tamaño finito, podemos mostrar declaraciones sobre todas las FBF por inducción matemática en sus alturas. Esta propiedad se conoce habitualmente como **inducción estructural**, técnica de razonamiento muy importante en ciencias de la computación. Por ejemplo:

Teorema: para cada FBF, el número de paréntesis izquierdos es igual al número de paréntesis derechos.

Teorema: para cada FBF, el número de paréntesis izquierdos es igual al número de paréntesis derechos.

Demostración: usamos inducción sobre la altura de la FBF φ, definiendo $M(n)$ como "todas las fórmulas de altura n tienen el mismo número de paréntesis izquierdos y derechos". Luego, asumimos $M(k)$ para cada $k < n$ e intentamos probar $M(n)$.

Lógica proposicional: Inducción

Teorema: para cada FBF, el número de paréntesis izquierdos es igual al número de paréntesis derechos.

Caso base (n=1): en este caso φ es una proposición atómica, por lo que no hay paréntesis izquierdos ni derechos, es decir, $0 = 0$.

Paso inductivo: en este caso, el inicio del árbol sintáctico de φ debe ser alguno de los conectores $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ para que φ sea una FBF. En particular y sin pérdida de generalidad, asumimos que es $\rightarrow$ (los otros casos siguen el mismo razonamiento). Luego, φ equivale a $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ para φ_1, φ_2 FBF (φ_1, φ_2 son las representaciones lineales de los subárboles izquierdo y derecho de φ). Dado que las alturas de φ_1 y φ_2 son estrictamente menores que n, usando la hipótesis inductiva, podemos concluir que φ_1 tiene el mismo número de paréntesis izquierdos y derechos, y lo mismo para φ_2. Pero en $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ agregamos dos paréntesis más. Así, el número de ocurrencias de paréntesis izquierdos y derechos es el mismo.

Semántica

La semántica debe proveer tres cosas:

- Significado de las fórmulas.
- Noción de verdad.
- Noción de consecuencia lógica.

Ejemplo: ¿cómo podemos formalizar el siguiente razonamiento?

Si tomas el medicamento, te mejorarás.
No estás mejorando.

Por lo tanto, no tomaste el medicamento.

Ejemplo: ¿cómo podemos formalizar el siguiente razonamiento?

Si tomas el medicamento, te mejorarás.
No estás mejorando.

Por lo tanto, no tomaste el medicamento.

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

Sea $P = \{p_1, p_2, ...\}$ un conjunto de proposiciones. Una valuación o asignación de verdad es una función:

$$\sigma : P \to \{0, 1\}$$

Ejemplo: si $P = \{p,\ q\}$, la función σ_1 es una valuación definida por:

$$\sigma_1(p) = 1; \quad \sigma_1(q) = 0$$

¿Cuántas funciones de valuación distintas existen para el conjunto P anterior? ¿Y para un conjunto que contiene n proposiciones?

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$

Lógica proposicional: Semántica

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$

Lógica proposicional: Semántica

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$
- Si $\varphi = \sim \Psi$, entonces $\sigma(\varphi) = 1 - \sigma(\Psi)$

Lógica proposicional: Semántica

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$
- Si $\varphi = \sim \Psi$, entonces $\sigma(\varphi) = 1 - \sigma(\Psi)$
- Si $\varphi = \Psi \wedge \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{mín}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$
- Si $\varphi = \sim \Psi$, entonces $\sigma(\varphi) = 1 - \sigma(\Psi)$
- Si $\varphi = \Psi \wedge \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{mín}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \vee \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{máx}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$
- Si $\varphi = \sim \Psi$, entonces $\sigma(\varphi) = 1 - \sigma(\Psi)$
- Si $\varphi = \Psi \wedge \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{mín}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \vee \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{máx}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \to \chi$, entonces:

Lógica proposicional: Semántica

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$
- Si $\varphi = \sim \Psi$, entonces $\sigma(\varphi) = 1 - \sigma(\Psi)$
- Si $\varphi = \Psi \wedge \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{mín}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \vee \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{máx}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \to \chi$, entonces:
  - si $\sigma(\Psi) = 0$ entonces $\sigma(\varphi) = 1$

Lógica proposicional: Semántica

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$
- Si $\varphi = \sim \Psi$, entonces $\sigma(\varphi) = 1 - \sigma(\Psi)$
- Si $\varphi = \Psi \wedge \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{mín}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \vee \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{máx}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \to \chi$, entonces:
  - si $\sigma(\Psi) = 0$ entonces $\sigma(\varphi) = 1$
  - en caso contrario, $\sigma(\varphi) = \sigma(\chi)$

Lógica proposicional: Semántica

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$
- Si $\varphi = \sim \Psi$, entonces $\sigma(\varphi) = 1 - \sigma(\Psi)$
- Si $\varphi = \Psi \wedge \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{mín}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \vee \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{máx}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \rightarrow \chi$, entonces:
    - si $\sigma(\Psi) = 0$ entonces $\sigma(\varphi) = 1$
    - en caso contrario, $\sigma(\varphi) = \sigma(\chi)$
- Si $\varphi = \Psi \leftrightarrow \chi$, entonces:

Lógica proposicional: Semántica

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$
- Si $\varphi = \sim \Psi$, entonces $\sigma(\varphi) = 1 - \sigma(\Psi)$
- Si $\varphi = \Psi \wedge \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{mín}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \vee \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{máx}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \rightarrow \chi$, entonces:
  - si $\sigma(\Psi) = 0$ entonces $\sigma(\varphi) = 1$
  - en caso contrario, $\sigma(\varphi) = \sigma(\chi)$
- Si $\varphi = \Psi \leftrightarrow \chi$, entonces:
  - si $\sigma(\Psi) = \sigma(\chi)$ entonces $\sigma(\varphi) = 1$

Debemos extender σ a todo el lenguaje $L(P)$, es decir, a todas las posibles FBF. Sea φ una fórmula proposicional, entonces:

- Si φ está en P, entonces $\sigma(\varphi) \in \{0, 1\}$
- Si $\varphi = V$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$
- Si $\varphi = F$, entonces $\sigma(\varphi) = 0$
- Si $\varphi = \sim \Psi$, entonces $\sigma(\varphi) = 1 - \sigma(\Psi)$
- Si $\varphi = \Psi \wedge \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{mín}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \vee \chi$, entonces $\sigma(\varphi) = \text{máx}(\sigma(\Psi), \sigma(\chi))$
- Si $\varphi = \Psi \rightarrow \chi$, entonces:
    - si $\sigma(\Psi) = 0$ entonces $\sigma(\varphi) = 1$
    - en caso contrario, $\sigma(\varphi) = \sigma(\chi)$
- Si $\varphi = \Psi \leftrightarrow \chi$, entonces:
    - si $\sigma(\Psi) = \sigma(\chi)$ entonces $\sigma(\varphi) = 1$
    - en caso contrario, $\sigma(\varphi) = 0$

Lo anterior puede ser resumido en una tabla de verdad:

φ	ψ	$\sim\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Lo anterior puede ser resumido en una tabla de verdad:

φ	ψ	$\sim\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Definición: una fórmula Ψ es **equivalente** a otra fórmula χ si y sólo si $\sigma(\varphi) = \sigma(\chi)$ para toda valuación σ (es decir, deben tener exactamente la misma tabla de verdad).

Definición: una fórmula es **satisfacible** si es verdadera para alguna valuación σ.

Ejemplo: indique si la siguiente expresión es satisfacible:

$$\sim p \wedge (p \vee q)$$

p	q	~p	p ∨ q	~p ∧ (p ∨ q)
0				
0				
1				
1				

Definición: una fórmula es **satisfacible** si es verdadera para alguna valuación σ.

Ejemplo: indique si la siguiente expresión es satisfacible:

$$\sim p \wedge (p \vee q)$$

p	**q**	**~p**	**p ∨ q**	**~p ∧ (p ∨ q)**
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

Definición: un conjunto de fórmulas Σ es satisfacible **si existe al menos una valuación** σ que hace verdaderas a todas las fórmulas de σ. Esto último se denota como:

$$\sigma \models \Sigma$$

Un conjunto de fórmulas que no se puede satisfacer (insatisfacible) se le conoce como **inconsistente**.

- Si una fórmula es verdadera para toda valuación σ, entonces diremos que es una **tautología**.

- Si una fórmula es verdadera para toda valuación σ, entonces diremos que es una **tautología**.
  - **Ej:** $p \vee \sim p$

- Si una fórmula es verdadera para toda valuación σ, entonces diremos que es una **tautología**.
  - **Ej:** $p \vee \sim p$
- Si una fórmula es falsa para toda valuación σ, entonces diremos que es una **contradicción**.

- Si una fórmula es verdadera para toda valuación σ, entonces diremos que es una **tautología**.
  - **Ej:** $p \vee \sim p$
- Si una fórmula es falsa para toda valuación σ, entonces diremos que es una **contradicción**.
  - **Ej:** $p \wedge \sim p$

- Si una fórmula es verdadera para toda valuación σ, entonces diremos que es una **tautología**.
    - **Ej:** $p \vee \sim p$
- Si una fórmula es falsa para toda valuación σ, entonces diremos que es una **contradicción**.
    - **Ej:** $p \wedge \sim p$
- Si una fórmula es verdadera para al menos una valuación σ_1 y falsa para al menos otra valuación σ_2, entonces diremos que es una **contingencia**.

- Si una fórmula es verdadera para toda valuación σ, entonces diremos que es una **tautología**.
  - **Ej:** $p \vee \sim p$
- Si una fórmula es falsa para toda valuación σ, entonces diremos que es una **contradicción**.
  - **Ej:** $p \wedge \sim p$
- Si una fórmula es verdadera para al menos una valuación σ_1 y falsa para al menos otra valuación σ_2, entonces diremos que es una **contingencia**.
  - **Ej:** $p \vee q$

Ejercicio: formalice el siguiente razonamiento y determine si es una tautología, una contradicción o una contingencia:

Si toma el medicamento, se recuperará.
Usted no está tomando el medicamente

Por lo tanto, usted no se recuperará.

Ejercicio: determine si las siguientes fórmulas corresponden a una tautología, una contradicción o una contingencia.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \leftrightarrow q) \vee q$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim (q \rightarrow p))$
4. $\sim (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$

Deducción

Definición: un conjunto C de conectores lógicos es **funcionalmente completo** si es posible definir a todos los conectores estándar en función de los que contiene C.
Por ejemplo, el conjunto:

$$C = \{\sim,\ \vee,\ \wedge\}$$

es funcionalmente completo.

¿Es posible encontrar un conjunto C' aún más pequeño?

Las formas normales son formas sintácticas estándares que pueden cumplir las fórmulas.

Por ejemplo:

- Forma Normal Conjuntiva (**FNC**)
- Forma Normal Disyuntiva (**FND**)

- **Definición:** un **literal** es una variable proposicional, o una variable proposicional negada o una constante V o F.

- **Definición:** un **literal** es una variable proposicional, o una variable proposicional negada o una constante V o F.
- **Definición:** una **cláusula** es una disyunción de literales, es decir, es de la forma:

$$I_1 \vee I_2 \vee I_3 \vee ... \vee I_k$$

- **Definición:** un **literal** es una variable proposicional, o una variable proposicional negada o una constante V o F.
- **Definición:** una **cláusula** es una disyunción de literales, es decir, es de la forma:

$$I_1 \vee I_2 \vee I_3 \vee ... \vee I_k$$

- **Definición:** una **cláusula dual** es una conjunción de literales, es decir, es de la forma:

$$I_1 \wedge I_2 \wedge I_3 \wedge ... \wedge I_k$$

Definición: una fórmula en **Forma Normal Conjuntiva** (FNC) es una **conjunción** de cláusulas. Si cada c_i es una cláusula, entonces la FNC es de la forma:

$$c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_n$$

Por ejemplo, la siguiente fórmula está en FNC:

$$(p \vee \sim q \vee s) \wedge (p \vee s) \wedge p$$

Definición: una fórmula en **Forma Normal Disyuntiva** (FND) es una **disyunción** de cláusulas duales. Si cada $c_i^{'}$ es una cláusula dual, entonces la FND es de la forma:

$$c_1^{'} \vee c_2^{'} \wedge c_3^{'} \wedge ... \wedge c_n^{'}$$

Por ejemplo, la siguiente fórmula está en FND:

$$(p \wedge q) \vee q \vee (\sim p \wedge s)$$

Teorema: Toda fórmula es equivalente a una fórmula en FNC.

Teorema: Toda fórmula es equivalente a una fórmula en FND.

Definición: una inferencia es **válida** si y sólo si en todos los casos en los que todas las premisas son verdaderas, la conclusión también es verdadera.

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\Psi}$$

Lo anterior se puede denotar equivalentemente como:

- Ψ es una consecuencia lógica de $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \Psi$
- $\Sigma \models \Psi$

Una lógica se considera **monótona** si a medida que se agregan fórmulas a una base de conocimiento, los hechos que se concluyan a partir de la base original siguen siendo válidos.

Formalmente, sean Σ_1 y Σ_2 dos conjuntos de fórmulas tales que $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, entonces:

$$\text{Si } \Sigma_1 \models \varphi, \text{ entonces } \Sigma_2 \models \varphi$$

En otras palabras, si una conclusión se puede inferir de un conjunto de premisas, entonces esa conclusión seguirá siendo válida incluso si se añaden más premisas.

Regla de resolución: supongamos que tenemos la siguiente fórmula en FNC:

$$(p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee s \vee \sim t)$$

y que σ es una valuación que la hacer verdadera. Entonces, podemos distinguir dos casos:

- Si $\sigma \models q$, entonces $\sigma \models s \vee \sim t$
- Si $\sigma \not\models q$, entonces $\sigma \models p \vee \sim r$

Por lo tanto, podemos concluir que $\sigma \models (p \vee \sim r \vee s \vee \sim t)$

(Note que hemos conseguido eliminar un literal y su negado, para obtener una cláusula con una proposición menos)

Teorema de deducción: sea $\Sigma \subseteq L(P)$, entonces:

$$\Sigma \vDash (\varphi \rightarrow \Psi) \text{ si y sólo si } \Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \Psi$$

Demostración por resolución (DPR): está basado en la reducción entre consistencia y consecuencia lógica. Supongamos que queremos demostrar que $\Sigma \models \varphi$:

$$\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\sim \varphi\} \text{ es inconsistente}$$

El lado derecho de la equivalencia es lo mismo que $\Sigma \models \Box$, donde el símbolo $\Box$ corresponde a la cláusula vacía (sin literales, y por lo tanto no satisfacible).

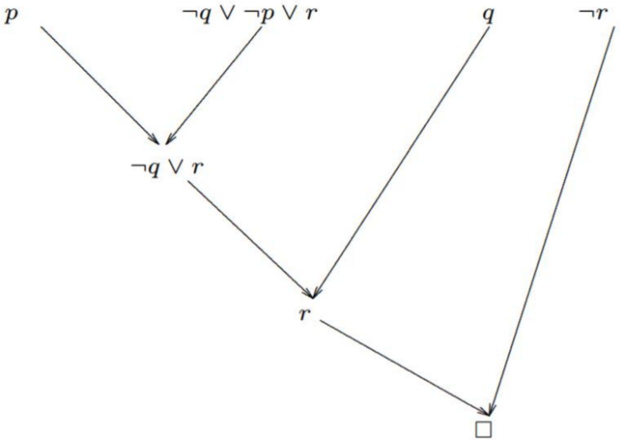
Demostración por resolución: para demostrar que $\Sigma \models \Psi$ seguiremos los siguientes pasos:

- Transformar $\Sigma \cup \{\sim \Psi\}$ a FNC, con un conjunto de cláusulas $C = \{C_1, ..., C_n\}$
- Mientras $\Box \notin C$ y existan $C_i, C_j \in C$ para aplicar la regla de resolución:
  - Aplicar regla de resolución C_i, C_j, generando C'.
  - Hacer $C := C \cup \{C'\}$

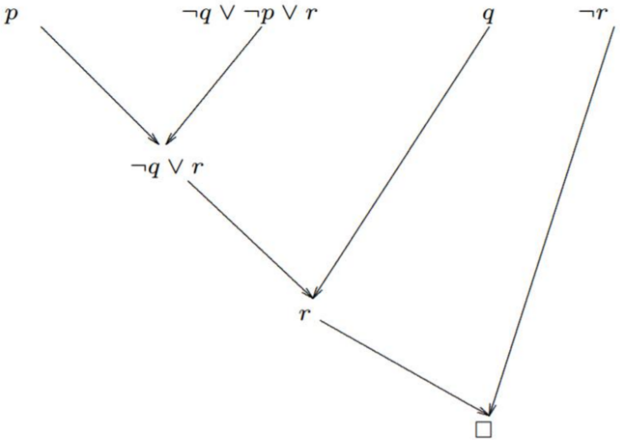
Si $\Box \in C$, entonces $\Sigma \models \Psi$

Ejercicio: sea $\Sigma = \{p,\ q \to (p \to r)\}$. Utilice la demostración por resolución para comprobar que $\Sigma \vDash (q \to r)$

Ejercicio: sea $\Sigma = \{p,\ q \to (p \to r)\}$. Utilice la demostración por resolución para comprobar que $\Sigma \models (q \to r)$



Ejercicio: sea $\Sigma = \{p,\ q \to (p \to r)\}$. Utilice la demostración por resolución para comprobar que $\Sigma \models (q \to r)$



Lógica proposicional: Deducción

- Una **demostración** es una secuencia finita de fórmulas (válidas) en la cual cada fórmula es un axioma, o bien ha sido derivada a partir de fórmulas anteriores mediante una regla de inferencia.
- Un **teorema** es una fórmula derivada de una demostración.
- Un **sistema axiomático** es un conjunto de axiomas y reglas de inferencia.
    - Un sistema axiomático es correcto para una lógica dada si todo teorema es válido en la lógica.
    - Un sistema axiomático es completo para una lógica dada si toda fórmula válida de la lógica es un teorema.