Ayudantía Unidad 1: Lógica (parte 2)

Teoría de la Computación 2-2025

1. Lógica proposicional: Resolución

Utilice el método de resolución para determinar si los siguientes resultados son correctos:

1.1. Ejemplo 1

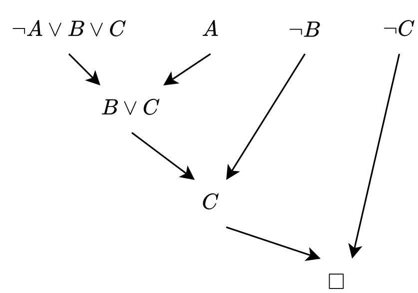
Queremos verificar si $\Sigma \vDash \varphi$ para:

$$\Sigma = \{A \to (B \lor C),\ A,\ \neg B\}$$
$$\varphi = C$$

Paso 1: escribir $\Sigma \vDash \{\neg\varphi\}$ en FNC (es decir, como una conjunción de cláusulas):

- $A \to (B \lor C) \Leftrightarrow \underbrace{\neg A \lor (B \lor C)}_{C_1}$ (premisa 1)
- $\underbrace{A}_{C_2}$ (premisa 2)
- $\underbrace{\neg B}_{C_3}$ (premisa 3)
- $\underbrace{\neg C}_{C_4}$ (negación de la consecuencia)

Paso 2: aplicar la regla de resolución buscando encontrar una contradicción.



Por lo tanto, logramos demostrar que:

$$\{A \to (B \lor C),\ A,\ \neg B\} \vDash C$$

1.2. Ejemplo 2

Si consumo frutas, entonces tengo energía. Puedo consumir frutas o comida chatarra. Si consumo comida chatarra, entonces me enfermo. Por lo tanto, tengo energía o estoy enfermo.

Paso 0: formalizaremos el enunciado a través de las siguientes variables:

- p: consumo frutas
- q: tengo energía
- r: consumo comida chatarra
- s: me enfermo

Así, podemos expresar el conjunto de premisas Σ y la conclusión lógica φ como:

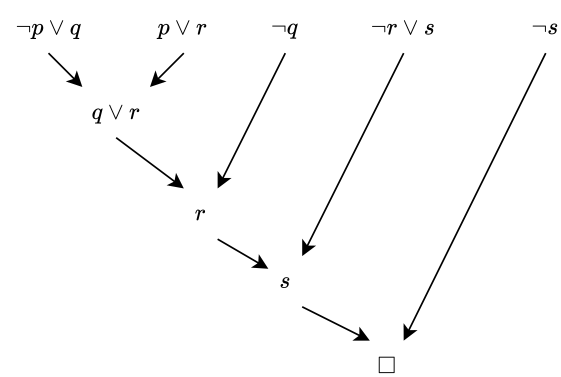
$$\Sigma = \{p \to q,\ p \lor r,\ r \to s\}$$

$$\varphi = q \lor s$$

Paso 1:

- $p \to q \Leftrightarrow \underbrace{\neg p \lor q}_{C_1}$ (premisa 1)
- $\underbrace{p \lor r}_{C_2}$ (premisa 2)
- $r \to s \Leftrightarrow \underbrace{\neg r \lor s}_{C_3}$ (premisa 3)
- $\neg(q \lor s) \Leftrightarrow \underbrace{\neg q}_{C_4} \land \underbrace{\neg s}_{C_5}$ (negación de la consecuencia)

Paso 2:



Por lo tanto, logramos demostrar que $\{p \to q,\ p \lor r,\ r \to s\} \vDash q \lor s$

1.3. Ejemplo 3

Queremos verificar si $\Sigma \models p \to (\neg r \land \neg s)$ para el conjunto de premisas:

$$\Sigma = \{p \to \neg q,\ \neg q \to (\neg r \land s),\ t,\ t \to q\}$$

Paso 1:

- $p \to \neg q \Leftrightarrow \underbrace{\neg p \lor \neg q}_{C_1}$ (premisa 1)
- $\neg q \to (\neg r \land s) \Leftrightarrow q \lor (\neg r \land s)$ (premisa 2)
  $\Leftrightarrow \underbrace{(q \lor \neg r)}_{C_2} \land \underbrace{(q \lor s)}_{C_3}$ (distributividad)
- $\underbrace{t}_{C_4}$ (premisa 3)
- $t \to q \Leftrightarrow \underbrace{\neg t \lor q}_{C_5}$ (premisa 4)
- $\neg(p \to (\neg r \land \neg s)) \Leftrightarrow \neg(\neg p \lor (\neg r \land \neg s))$ (negación de la consecuencia)
  $\Leftrightarrow p \land \neg(\neg r \land \neg s)$ (De Morgan)
  $\Leftrightarrow \underbrace{p}_{C_6} \land \underbrace{(r \lor s)}_{C_7}$ (De Morgan)

Paso 2:

$$\begin{tikzcd}
\neg p \lor \neg q \arrow[dr] & & p \arrow[dl] & & \neg t \lor q \arrow[ddl] & & t \arrow[dddll] & q \lor \neg r & q \lor s & r \lor s \\
& \neg q \arrow[drr] & & & & & & & & \\
& & & \neg t \arrow[dr] & & & & & & \\
& & & & \square & & & & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, logramos demostrar que:

$$\{p \to \neg q,\ \neg q \to (\neg r \land s),\ t,\ t \to q\} \models p \to (\neg r \land \neg s)$$

2. Lógica de primer orden: formas normales

1. Obtenga la forma normal prenexa de:

$$\begin{aligned}
&\neg[\forall x\exists y\ M(x,y,z) \to \exists x(\neg\forall y\ G(y,w) \to H(x))] && \\
\Leftrightarrow&\neg[\forall x\exists y\ M(x,y,z) \to \exists x(\neg\forall s\ G(s,w) \to H(x))] && \text{(rectificación)}\\
\Leftrightarrow&\neg[\forall x\exists y\ M(x,y,z) \to \exists t(\neg\forall s\ G(s,w) \to H(t))] && \text{(rectificación)}\\
\Leftrightarrow&\neg[\neg\forall x\exists y\ M(x,y,z)\vee\exists t(\neg(\neg\forall s\ G(s,w))\vee H(t))] && \text{(eliminación de condicionales)}\\
\Leftrightarrow&\neg[\neg\forall x\exists y\ M(x,y,z)\vee\exists t(\forall s\ G(s,w)\vee H(t))] && \text{(doble negación)}\\
\Leftrightarrow&\neg[\exists x\neg\exists y\ M(x,y,z)\vee\exists t(\forall s\ G(s,w)\vee H(t))] && (\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi)\\
\Leftrightarrow&\neg[\exists x\forall y\ \neg M(x,y,z)\vee\exists t(\forall s\ G(s,w)\vee H(t))] && (\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi)\\
\Leftrightarrow&\neg[\exists x\forall y\ \neg M(x,y,z)\vee\exists t\forall s(G(s,w)\vee H(t))] && (s \text{ no libre en } H)\\
\Leftrightarrow&\neg\exists x\forall y\exists t\forall s[\neg M(x,y,z)\vee(G(s,w)\vee H(t))] && \text{(exteriorizar cuantificadores)}\\
\Leftrightarrow&\forall x\exists y\forall t\exists s\neg[\neg M(x,y,z)\vee(G(s,w)\vee H(t))] && \text{(interiorizar negaciones)}\\
\Leftrightarrow&\forall x\exists y\forall t\exists s[M(x,y,z)\wedge\neg(G(s,w)\vee H(t))] && \text{(De Morgan)}\\
\Leftrightarrow&\forall x\exists y\forall t\exists s[M(x,y,z)\wedge\neg G(s,w)\wedge\neg H(t)] && \text{(De Morgan)}
\end{aligned}$$

2. Obtenga la forma normal de Skolem de:

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x\exists r\forall y\exists z\exists w[(\neg S(x,z)\wedge P(b,y))\vee(\neg P(x,z)\wedge S(w,r))] && \\
\Leftrightarrow&\exists x\forall r\exists y\forall z\forall w\neg[(\neg S(x,z)\wedge P(b,y))\vee(\neg P(x,z)\wedge S(w,r))] && \text{(interiorizar negaciones)}\\
\Leftrightarrow&\exists x\forall r\exists y\forall z\forall w[\neg(\neg S(x,z)\wedge P(b,y))\wedge\neg(\neg P(x,z)\wedge S(w,r))] && \text{(De Morgan)}\\
\Leftrightarrow&\exists x\forall r\exists y\forall z\forall w[(S(x,z)\vee\neg P(b,y))\wedge(P(x,z)\vee\neg S(w,r))] && \text{(De Morgan)}\\
\Leftrightarrow&\forall r\exists y\forall z\forall w[(S(f(C),z)\vee\neg P(b,y))\wedge P(f(C),z)\vee\neg S(w,r))] && \text{(eliminar } \exists x)\\
\Leftrightarrow&\forall r\forall z\forall w[(S(f(C),z)\vee\neg P(b,g(r)))\wedge P(f(C),z)\vee\neg S(w,r))] && \text{(eliminar } \exists y)
\end{aligned}$$