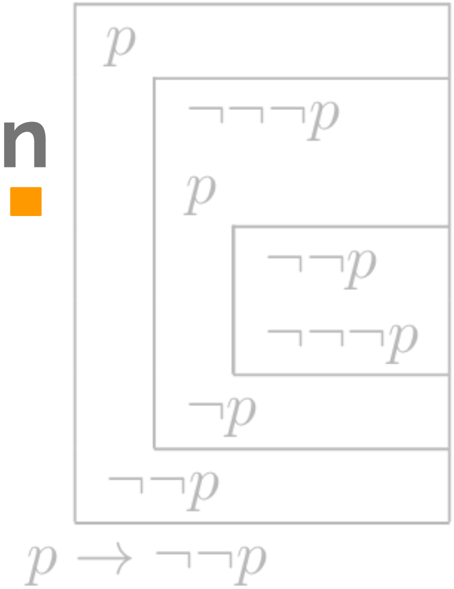
Departamento de Ingeniería Informática
Universidad de Santiago de Chile

Lógica y Teoría de la Computación

Primer semestre 2022



Daniel Vega Araya

Santiago, 2022

LPO - **Formas normales**

- **Forma Normal Conjuntiva** (FNC)

- **Forma Normal Disyuntiva** (FND)

- **Forma Normal Rectificada** (FNR)
  - Ninguna variable aparece libre y ligada a la vez.
  - Cada cuantificador actúa sobre una variable distinta.

- **Forma Normal Prenex** (FNP)
  - cuantificadores están sólo al comienzo.

- **Forma Normal de Skolem** (FNS)
  - como FNP pero sin existenciales.

¿por qué estudiar

Lógica de Primer Orden?

Lógica de Primer Orden - LPO

- Es un sistema formal que permite generalizar la lógica de predicados (LP) o de orden cero.
- **Aumenta** su poder expresivo.
- No sólo es declarativa, sino también **procedural**.
- No sólo define ***hechos***, sino además objetos, predicados o relaciones, y funciones.
- **Es completa**

Lógica de Primer Orden incluye...

Lógica de Primer Orden incluye...

Objetos

Lógica de Primer Orden incluye...

Objetos + **Relaciones**

Lógica de Primer Orden incluye...

Objetos + Relaciones + Funciones

Lógica de Primer Orden - **LPO**

"Homero es padre de Bart y esposo de Marge"

Lógica de Primer Orden - **LPO**

"**Homero** es padre de **Bart** y esposo de **Marge**"

Objetos

Lógica de Primer Orden - **LPO**

"**Homero es padre de Bart** y **esposo de Marge**"

Objetos

Relaciones

Lógica de Primer Orden - **LPO**

"**Homero es padre de Bart** y **esposo de Marge**"

Objetos

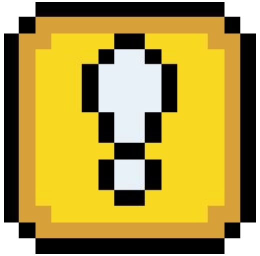
Relaciones

Funciones

Lógica de Primer Orden - **LPO**

"**Homero** **es padre de** **Bart** y **esposo de** **Marge**"

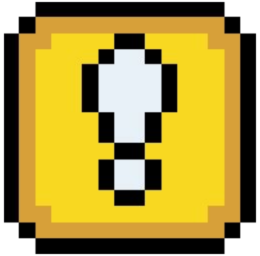
Objetos
Relaciones
Funciones



Lógica de Primer Orden - **LPO**

"**Homero es padre de Bart** y **esposo de Marge**"

Objetos
Relaciones
Funciones

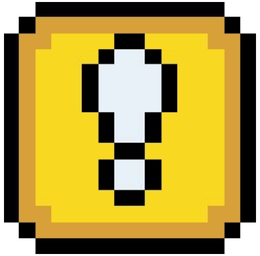


Función: informalmente, es una herramienta que permite transformar una cosa en otra.

Lógica de Primer Orden - **LPO**

"**Homero es padre de Bart** y **esposo de Marge**"

Objetos
Relaciones
Funciones



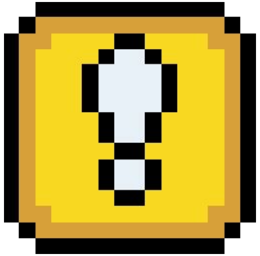
Función: informalmente, es una herramienta que permite transformar una cosa en otra.

y es función?

Lógica de Primer Orden - **LPO**

"**Homero es padre de Bart y esposo de Marge**"

Objetos
Relaciones
Funciones



Función: informalmente, es una herramienta que permite transformar una cosa en otra.

y es función?... y es un **conectivo lógico**

así….

LPO - **Alfabeto**

- **Constantes** (C): persona, casa, Homero, dos, alumnos, etc.
- **Predicados o relaciones** (P): es igual a, es padre de, tienen sueño, pertenece a, se compone de, etc.
- **Funciones** (F): más, raíz cuadrada, sucesor, padre, etc.
- **Variables**: x, y , z, etc.
- **Conectivos lógicos**: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- **Cuantificadores lógicos**: $\forall$, $\exists$
- **Relación igualdad**: =
- **Símbolos de puntuación**: (,)

LPO - **Alfabeto**

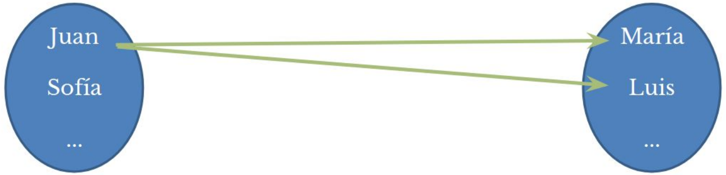
- **Constantes** (C): persona, casa, Homero, dos, alumnos, etc.
- **Predicados o relaciones** (P): es igual a, **es padre de**, tienen sueño, pertenece a, se compone de, etc.
- **Funciones** (F): más, raíz cuadrada, sucesor, **padre**, etc.
- **Variables**: x, y , z, etc.
- **Conectivos lógicos**: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- **Cuantificadores lógicos**: $\forall$, $\exists$
- **Relación igualdad**: =
- **Símbolos de puntuación**: (,)

LPO - **Alfabeto**

- **Predicados o relaciones** (P): permiten definir hechos o verdades aceptadas dentro de un universo de discurso.

LPO - **Alfabeto**

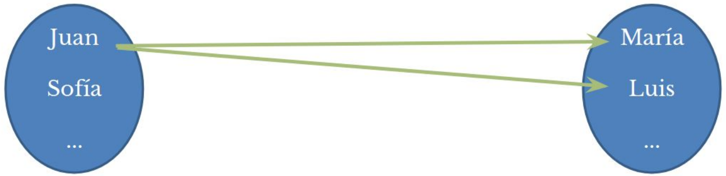
- **Predicados o relaciones** (P): permiten definir hechos o verdades aceptadas dentro de un universo de discurso.



Conjunto de objetos de entrada Conjunto de objetos de salida

LPO - **Alfabeto**

- **Predicados o relaciones** (P): permiten definir hechos o verdades aceptadas dentro de un universo de discurso.

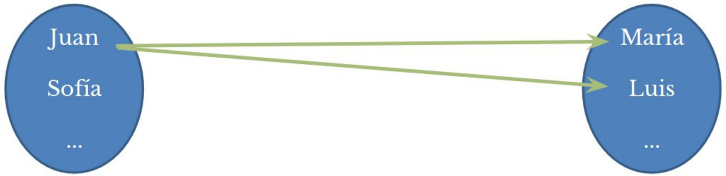


Conjunto de objetos de entrada   Conjunto de objetos de salida

- **Funciones** (F): es un tipo especial de relación entre los objetos del dominio de discurso que mapea un conjunto de objetos de entrada a un objeto único de salida.

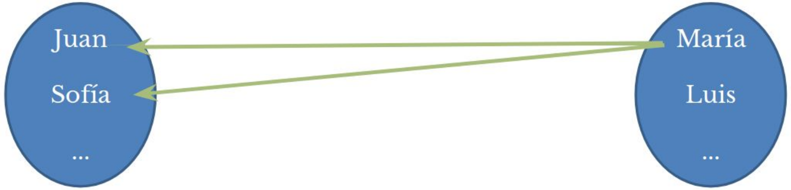
LPO - **Alfabeto**

- **Predicados o relaciones** (P): permiten definir hechos o verdades aceptadas dentro de un universo de discurso.



Conjunto de objetos de entrada Conjunto de objetos de salida

- **Funciones** (F): es un tipo especial de relación entre los objetos del dominio de discurso que mapea un conjunto de objetos de entrada a un objeto único de salida.



LPO - **Semántica**

- LP
- LPO

LPO - **Semántica**

- LP: σ
- LPO

LPO - **Semántica**

- LP: σ
- LPO: La veracidad de las fórmulas depende de la interpretación sobre un dominio.

LPO - **Semántica**

- LP: σ
- LPO: La veracidad de las fórmulas depende de la interpretación sobre un dominio.

Ejemplo:

¿Es $\forall x \exists y(x = y + y)$ cierta en $L = \{<, +, *, \text{sucesor}, 0, 1\}$?

LPO - **Semántica**

- LP: σ
- LPO: La veracidad de las fórmulas depende de la interpretación sobre un dominio.

Ejemplo:

¿Es $\forall x \exists y(x = y + y)$ cierta en $L = \{<, +, *, sucesor , 0, 1\}$?

¿Qué pasa en el dominio de $\mathbb{N}$?

LPO - **Semántica**

- LP: σ
- LPO: La veracidad de las fórmulas depende de la interpretación sobre un dominio.

Ejemplo:

¿Es $\forall x \exists y(x = y + y)$ cierta en $L = \{<, +, *, sucesor , 0, 1\}$?

¿Qué pasa en el dominio de $\mathbb{N}$?... ¿y en $\mathbb{R}$?

LPO - **Semántica**

- LP: σ
- LPO: La veracidad de las fórmulas depende de la interpretación sobre un dominio.

Ejemplo:

¿Es $\forall x \exists y(x = y + y)$ cierta en $L = \{<, +, *, sucesor, 0, 1\}$?

¿Qué pasa en el dominio de $\mathbb{N}$?... ¿y en $\mathbb{R}$?

- Los **modelos** permiten interpretar la veracidad de una fórmula, presentando:
  - **Estructuras**: interpretan elementos del vocabulario en un dominio.
  - **Asignación de variables**: relacionar variables con elementos del dominio.

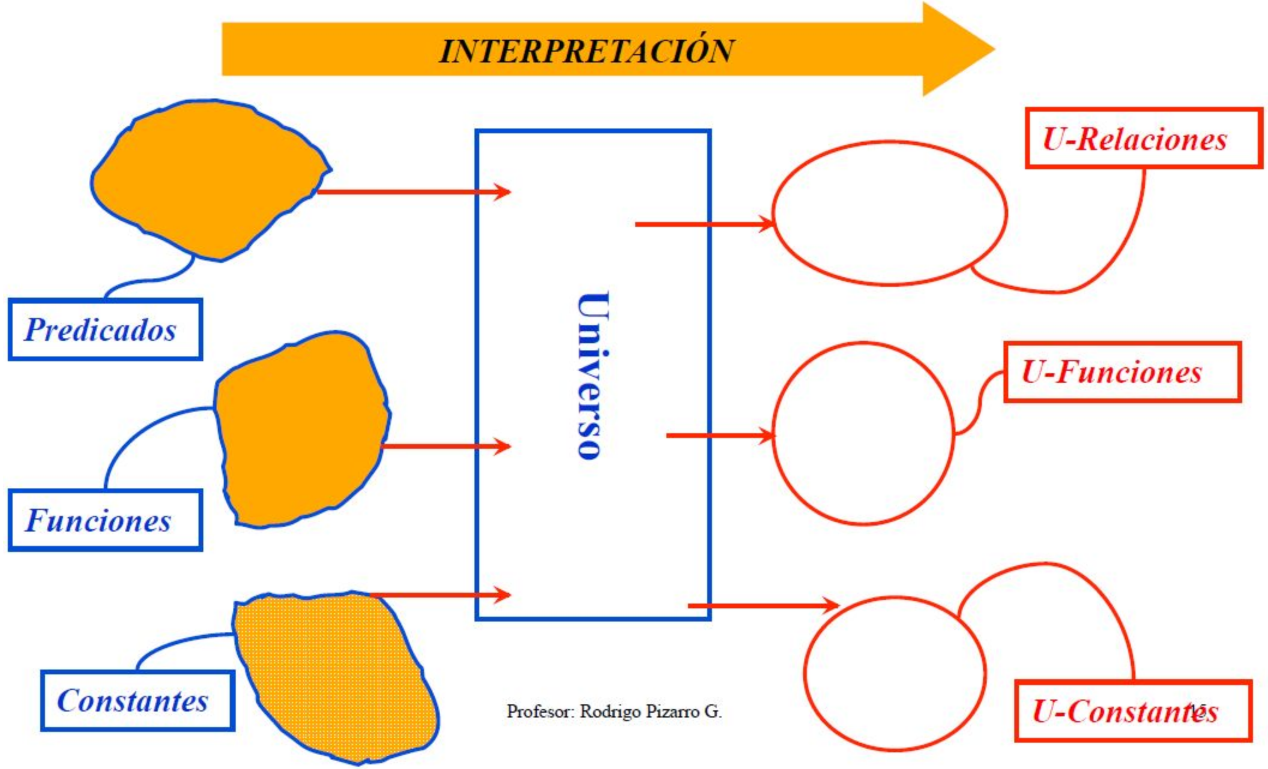
LPO - **Semántica, Modelos**

Un modelo es una tupla $M =< D, I, g >$ tal que:

- D es el **dominio** (colección no vacía de objetos).
- I es la **función de interpretación**, que asigna:
  - Un elemento c^D a cada constante c en C .
  - Una relación k-aria $p^D \subseteq D^k = D \times \ldots \times D$ para cada símbolo de predicado p en P.
  - Una función k-aria $f^D : D^k \rightarrow D$ para cada símbolo de función f en F.
- $g : V \rightarrow D$ es la **asignación de variables**.
- Una **estructura** E conformada por la tupla $< D, I >$, puede denotarse como:
  - $E =< D, < p^D, \ldots >, < f^D, \ldots >, < c^D, \ldots >>$

Ejemplo: $\mathbb{R} =< \mathbb{R}, <<^{\mathbb{R}}>, < sucesor^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, *^{\mathbb{R}} >, < 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}} >>$

LPO - **Semántica, Modelos**



LPO - **Semántica, Modelos**

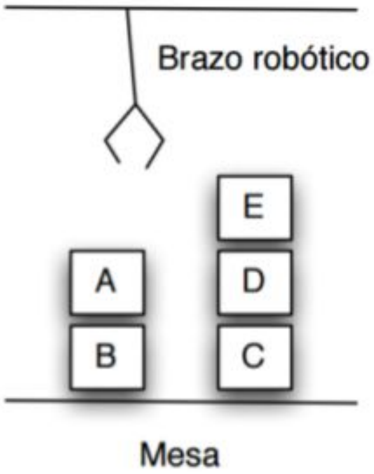
En general,

- Un **vocabulario** L **define** constantes, predicados, funciones.

- Un **dominio** *D* **define** objetos de la “realidad” que pueden asumir las variables, mediante una asignación de variables *g*.

- Una **estructura** *E* **interpreta** L en *D*, mediante una función de interpretación *I*.

LPO - **Semántica, Modelos**



Ejemplo

Vocabulario L = {C, P, F}

C = {A, B, C, D, E}
P = {Sobre, ...}
F = {}

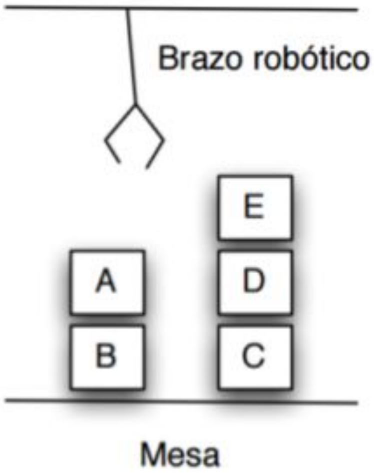
Dominio D = { $\boxed{A}, \boxed{B}, \boxed{C}, \boxed{D}, \boxed{E}$ }

Interpretación I:

$A^D = \boxed{A}$ ....

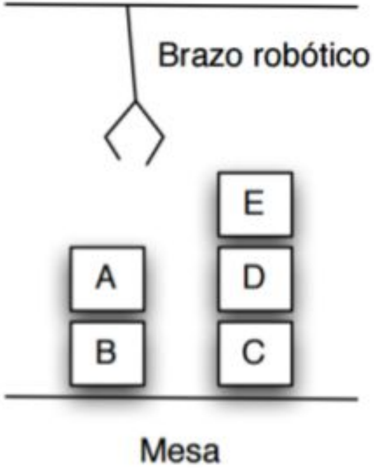
$Sobre^D = \{ (\boxed{A}, \boxed{B}), (\boxed{E}, \boxed{D}), (\boxed{D}, \boxed{C}) \}$

LPO - **Semántica, Modelos**



¿Cómo verificar que el bloque B está debajo del bloque A?

LPO - **Semántica, Modelos**

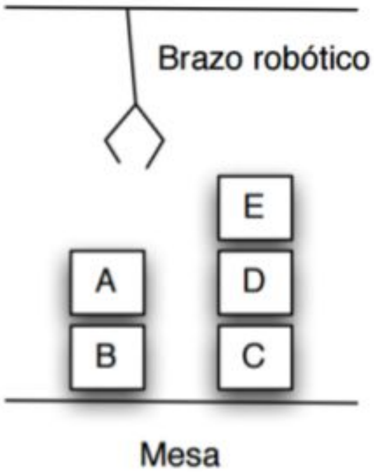


¿Cómo verificar que el bloque B está debajo del bloque A?

Faltaría definir una interpretación

$\text{Bajo}^D = \{ \dots \}$

LPO - **Semántica, Modelos**



¿Cómo verificar que el bloque B está debajo del bloque A?

Faltaría definir una interpretación

$\text{Bajo}^{D} = \{ \ldots \}$

$$\forall x \, \forall y \, (\text{Bajo}(x,y) \leftrightarrow \text{Sobre}(y,x))$$

LPO - **Validez y consecuencia**

- Una fórmula φ es válida si para cualquier modelo M, tenemos M |= φ. En tal caso, decimos |= φ.

- Una inferencia $\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}$ válida si para cualquier modelo M

  tal que M |= φ_1, …, M |= φ_n, se concluye M |= ψ.

- Una fórmula ψ es consecuencia lógica de otra φ si φ |= ψ.

- Una fórmula ψ es equivalente a otra φ si φ |= ψ y ψ |= φ.

LPO - **Método de Resolución**

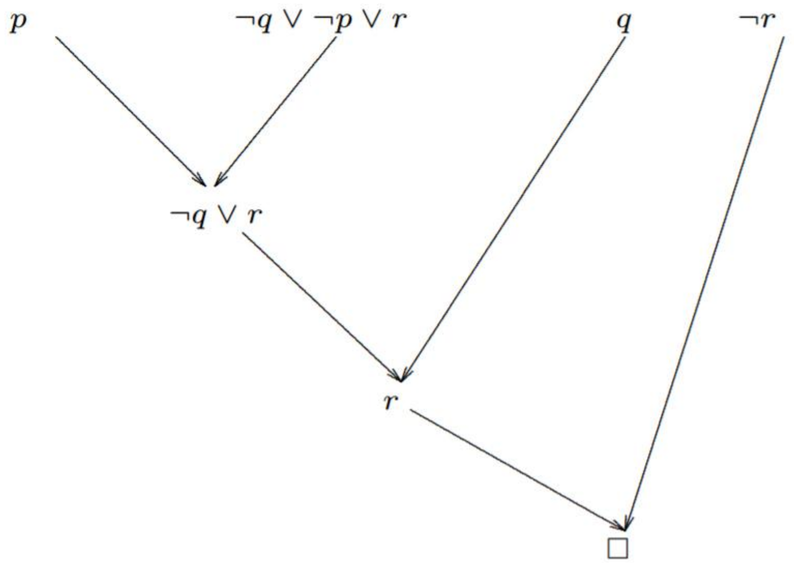
En LP...

Sea $\Sigma = \{p, q \rightarrow (p \rightarrow r)\}$, demostrar $\Sigma \models (q \rightarrow r)$

LPO - **Método de Resolución**

En LP...

Sea $\Sigma = \{p, q \rightarrow (p \rightarrow r)\}$, demostrar $\Sigma \models (q \rightarrow r)$



LPO - **Método de Resolución**

y en LPO:

LPO - **Método de Resolución**

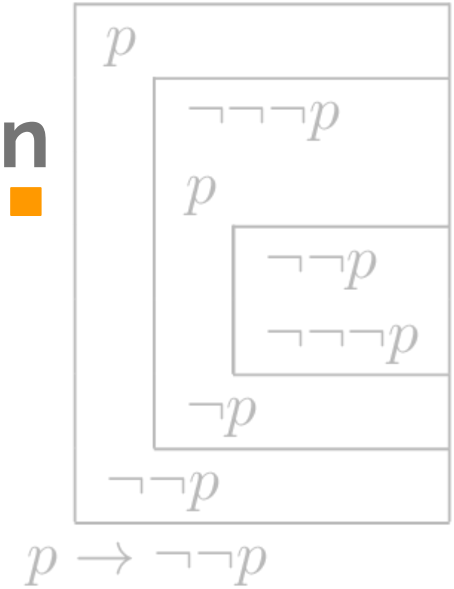
y en LPO:

Necesitamos algo más...

Departamento de Ingeniería Informática
Universidad de Santiago de Chile

Lógica y Teoría de la Computación

Primer semestre 2022

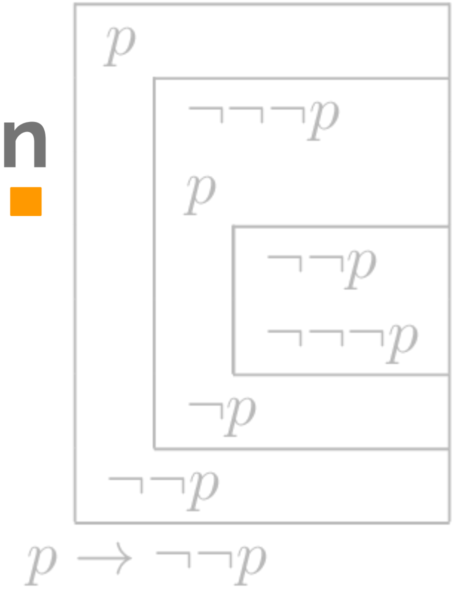


Santiago, 2022

Departamento de Ingeniería Informática
Universidad de Santiago de Chile

Lógica y Teoría de la Computación

Primer semestre 2022



Daniel Vega Araya

Santiago, 2022

LPO - **Sistemas de derivación**

- Al igual que en la lógica proposicional, en LPO existen conjuntos de axiomas y reglas de inferencia que permiten derivar cualquier fórmula válida.

- Un teorema es una fórmula que puede ser derivada en un número finito de pasos siguiendo los pasos de un sistema de derivación.

LPO - **Sistemas de derivación**

- Al igual que en la lógica proposicional, en LPO existen conjuntos de axiomas y reglas de inferencia que permiten derivar cualquier fórmula válida.

- Un teorema es una fórmula que puede ser derivada en un número finito de pasos siguiendo los pasos de un sistema de derivación.

- Un sistema de derivación es **correcto** si **todo teorema es una fórmula válida**.

LPO - **Sistemas de derivación**

- Al igual que en la lógica proposicional, en LPO existen conjuntos de axiomas y reglas de inferencia que permiten derivar cualquier fórmula válida.

- Un teorema es una fórmula que puede ser derivada en un número finito de pasos siguiendo los pasos de un sistema de derivación.

- Un sistema de derivación es **correcto** si **todo teorema es una fórmula válida**.

- Un sistema de derivación es **completo** si **toda fórmula válida es un teorema**.

¿Consecuencia lógica?

LPO - **Consecuencia lógica**

"Los chilenos pagan las cuentas a última hora"
"Carlos es chileno"

"Carlos paga las cuentas a última hora"

LPO - **Consecuencia lógica**

“Los chilenos pagan las cuentas a última hora”
“Carlos es chileno”

“Carlos paga las cuentas a última hora”

PREMISAS

LPO - **Consecuencia lógica**

"Los chilenos pagan las cuentas a última hora"
"Carlos es chileno"

"Carlos paga las cuentas a última hora"

CONSECUENCIA

LPO - **Consecuencia lógica**

"Los chilenos pagan las cuentas a última hora"
"Carlos es chileno"

"Carlos paga las cuentas a última hora"

La **consecuencia lógica** es la **relación** que conecta una afirmación (φ) o un conjunto de afirmaciones (Σ) con aquello que está lógicamente implicado por la afirmación o el conjunto de afirmaciones.

LPO - **Consecuencia lógica**

¿Es válido lo siguiente en LP?

$$\frac{(p + q) * (\neg q + r)}{(p + r)}$$

LPO - **Consecuencia lógica**

truth table	$(p \lor q) \land (\neg q \lor r) \Rightarrow p \lor r$

p	q	r	$(p \lor q) \land (\neg q \lor r) \Rightarrow p \lor r$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

WolframAlpha computational knowledge engine

LPO - **Consecuencia lógica**

¿Es válido lo siguiente en LP?

$$\frac{(p + q) * (\neg q + r)}{(p + r)}$$

LPO - **Consecuencia lógica**

¿Es válido lo siguiente en LP?

$$\frac{(p + q) * (\neg q + r)}{(p + r)}$$

LPO - **Consecuencia lógica**

¿Es válido lo siguiente en LP?

$$\frac{(p + q) * (\neg q + r)}{(p + r)}$$

Ahora veamos el caso para LPO:

$$\frac{\forall x\ \forall y\ ((P(x) + Q(y)) * (\neg Q(y) + R(x)))}{\forall x\ \forall y\ (P(x) + R(x))}$$

LPO - **Consecuencia lógica**

¿Es válido lo siguiente en LP?

$$\frac{(p + q) * (\neg q + r)}{(p + r)}$$

Ahora veamos el caso para LPO:

$$\frac{\forall x\ \forall y\ ((P(x) + Q(y)) * (\neg Q(y) + R(x)))}{\forall x\ \forall y\ (P(x) + R(x))}$$

LPO - **Consecuencia lógica**

y con....

$$\frac{\forall x\ \forall y\ ((P(x) + Q(Homero)) * (\neg Q(y) + R(x)))}{\forall x\ \forall y\ (\_\_\_\_\_\_)}$$

LPO - **Consecuencia lógica**

y con....

$$\forall x\ \forall y\ ((P(x) + Q(Homero)) * (\neg Q(y) + R(x)))$$

$$\overline{\forall x\ \forall y\ (????????)}$$

LPO - **Consecuencia lógica**

y con....

$$\forall x\ \forall y\ ((P(x) + Q(Homero)) * (\neg Q(y) + R(x)))$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\forall x\ \forall y\ (????????)$$

Necesitamos la Unificación

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificación:

- **Sustitución:** proceso de asignar un valor a una variable, reemplazandola en toda la fórmula.

- Dados los términos s y t
  - t{x/s} es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias de x por s en t.
  - A{x/s} es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de x por s en A.

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificación:

- Ejemplo:
    - Q(y){**y**/**Homero**}

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificación:

- Ejemplo:
  - Q(y){**y**/**Homero**} obtenemos Q(Homero)

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificación:

- Ejemplo:
  - Q(y){**y**/**Homero**} obtenemos Q(Homero)
  - S(y){**y**/**f(z)**}

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificación:

- Ejemplo:
    - Q(y){**y**/**Homero**} obtenemos Q(Homero)
    - S(y){**y**/**f(z)**} obtenemos S(f(z))

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificación

- Dos expresiones son unificables si tienen un unificador.
- Diremos que t es una instancia común de t_1 y t_2 si existe una sustitución θ tal que $t = t_1\boldsymbol{\theta} = t_2\boldsymbol{\theta}$.

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificación

- Dos expresiones son unificables si tienen un unificador.
- Diremos que t es una instancia común de t_1 y t_2 si existe una sustitución θ tal que $t = t_1\boldsymbol{\theta} = t_2\boldsymbol{\theta}$.

t_1	t_2	**Unificador**	**Inst. común**	**comentario**
$P(x)$	$P(f(y))$	$\{x / f(y)\}$ ó $\{x / f(z), y / z\}$	$P(x)$ ó $P(f(y))$	
$P(a, b)$	$Q(x, b)$	N/A		tienen distinto símbolo de relación
$P(x)$	$P(f(x))$	N/A		x y $f(x)$ no son unificables
$P(x, y)$	$P(y, x)$	$\{x/y\}$ ó $\{y/x\}$ ó $\{x/z, y/z\}$	$P(x,x)$ ó $P(y,y)$ ó $P(z,z)$	
$P(x, f(x))$	$P(a, f(b))$	N/A		dos valores diferentes sustituyen a x

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificador Más General (UMG)

- Definición: Un unificador θ es más general que τ (denotado como θ > τ) si existe otro unificador λ tal que:

$$t_1\theta\lambda = t_2\,\tau$$

- Definición: Un unificador θ es el más general (**UMG**) si θ > τ para cualquier unificador τ aplicable.

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificador Más General (UMG)

- Definición: Un unificador θ es más general que τ (denotado como $\theta > \tau$) si existe otro unificador λ tal que:

$$t_1 \theta \lambda = t_2 \tau$$

- Definición: Un unificador θ es el más general (**UMG**) si $\theta > \tau$ para cualquier unificador τ aplicable.

Intuitivamente, el UMG es el unificador que unifica dos expresiones en la menor cantidad de pasos o sustituciones.

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificador Más General (UMG)

Ejemplo:

Dados P(x, y) y P(y, x)

LPO - **Consecuencia lógica**

Unificador Más General (UMG)

Ejemplo:

Dados P(x, y) y P(y, x)

{x/a, y/a} no es un **UMG**

{y/x} es un **UMG**

LPO - **Consecuencia lógica**

entonces….

$$\forall x\ \forall y\ ((P(x) + Q(y)) * (\neg Q(Homero) + R(x)))$$

LPO - **Consecuencia lógica**

entonces….

$$\forall x\ \forall y\ ((P(x) + Q(y)) * (\neg Q(Homero) + R(x)))$$

$$\Big\downarrow \{\, y / Homero \,\}$$

$$\forall x\ (P(x) + R(x))$$

LPO - **Método de Resolución**

- ¿Cómo demostramos que $\Sigma \models \varphi$?

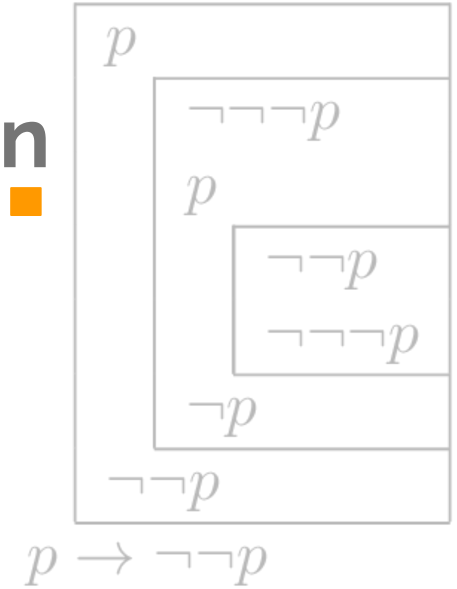
LPO - **Método de Resolución**

- ¿Cómo demostramos que $\Sigma \models \varphi$?
- Necesitamos un método que nos ayude a esto.

Departamento de Ingeniería Informática
Universidad de Santiago de Chile

Lógica y Teoría de la Computación

Primer semestre 2022



Santiago, 2022