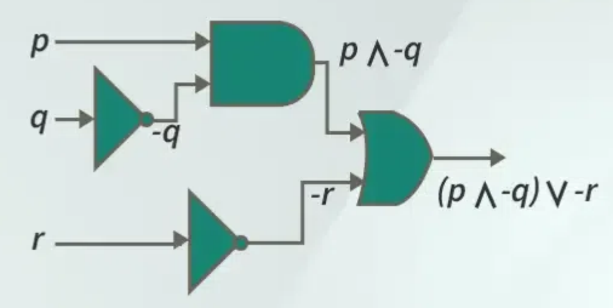
Teoría de la Computación
Unidad 1: Lógica proposicional (parte 2)

cristobal.loyola@usach.cl



Diapositivas basadas en el material del profesor Daniel Vega

Contenidos

Lógica proposicional: sintaxis

- Fórmula bien formada (FBF).
- Inducción estructural.

Definiremos un conjunto de símbolos (alfabeto) dado por:

- Un conjunto P (posiblemente infinito) de variables proposicionales: p, q, r, s,...

Lógica proposicional: Sintaxis

Definiremos un conjunto de símbolos (alfabeto) dado por:

- Un conjunto P (posiblemente infinito) de variables proposicionales: p, q, r, s,...
- Constantes: V o F (1 o 0, T o F)

Lógica proposicional: Sintaxis

Definiremos un conjunto de símbolos (alfabeto) dado por:

- Un conjunto P (posiblemente infinito) de variables proposicionales: p, q, r, s,...
- Constantes: V o F (1 o 0, T o F)
- Conectores lógicos: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Lógica proposicional: Sintaxis

Definiremos un conjunto de símbolos (alfabeto) dado por:

- Un conjunto P (posiblemente infinito) de variables proposicionales: p, q, r, s,...
- Constantes: V o F (1 o 0, T o F)
- Conectores lógicos: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Símbolos de puntuación: (,)

A partir de un conjunto fijo P de variables, es posible definir un lenguaje proposicional L(P), que contiene todas las fórmulas posibles a través de una definición inductiva.

Así, L(P) está formado por fórmulas, donde una fórmula es:

- Una constante o un elemento de P (fórmulas atómicas).
- Si φ es una fórmula, entonces $\sim \varphi$ también es una fórmula.
- Si φ y Ψ son fórmulas, entonces $(\varphi \star \Psi)$ es una fórmula ($\star$ representa cualquier conector binario).

Definición: en lógica proposicional, una fórmula bien formada (FBF) es aquella que es obtenida usando únicamente las reglas de construcción antes definidas una cantidad finita de veces.

Definiciones inductivas, como la anterior, son muy frecuentes, tanto que se suelen definir empleando una gramática en Backus Naur Form (BNF). En esa forma, la definición anterior se lee de manera más compacta como:

$$\varphi ::= p \,|\, (\sim \varphi) \,|\, (\varphi \wedge \varphi) \,|\, (\varphi \vee \varphi) \,|\, (\varphi \rightarrow \varphi) \,|\, (\varphi \leftrightarrow \varphi)$$

donde p representa cualquier proposición atómica y cualquier ocurrencia de φ a la derecha de $::=$ representa cualquier fórmula antes construida.

¿Son las siguientes expresiones FBF?

- $(p \vee q) \wedge q$
- $(p \wedge \sim q \sim) \wedge \vee r)$

- Sumemos los primeros 10 números naturales.

- Sumemos los primeros 10 números naturales.
- Ahora, los 100 primeros naturales.

- Sumemos los primeros 10 números naturales.
- Ahora, los 100 primeros naturales.
- ¿Y si queremos la suma de los 1000 primeros naturales?

- Sumemos los primeros 10 números naturales.
- Ahora, los 100 primeros naturales.
- ¿Y si queremos la suma de los 1000 primeros naturales?
- Se puede demostrar mediante inducción que:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La inducción matemática nos permite probar que determinada propiedad es satisfecha por cualquier número natural. Por ejemplo, para el caso anterior, basta definir $M(k)$ para indicar que la propiedad es satisfecha por k. Así, supongamos que conocemos las siguientes propiedades para M:

- **Caso base:** el número natural 1 satisface $M(1)$.
- **Paso inductivo:** se asume que la propiedad $M(n)$ es cierta para un determinado número natural n, luego se debe probar que para $n+1$ se satisface $M(n+1)$, es decir, existe una prueba de que $M(n) \to M(n+1)$.

Definición: sea φ una FBF, definimos su altura como la suma entre 1 y el tamaño del camino más largo de su árbol de análisis sintáctico.

Ya que cualquier FBF tiene tamaño finito, podemos mostrar declaraciones sobre todas las FBF por inducción matemática en sus alturas. Esta propiedad se conoce habitualmente como **inducción estructural**, técnica de razonamiento muy importante en ciencias de la computación. Por ejemplo:

Teorema: para cada FBF, el número de paréntesis izquierdos es igual al número de paréntesis derechos.

Teorema: para cada FBF, el número de paréntesis izquierdos es igual al número de paréntesis derechos.

Demostración: usamos inducción sobre la altura de la FBF φ, definiendo $M(n)$ como "todas las fórmulas de altura n tienen el mismo número de paréntesis izquierdos y derechos". Luego, asumimos $M(k)$ para cada $k < n$ e intentamos probar $M(n)$.

Lógica proposicional: Sintaxis

Teorema: para cada FBF, el número de paréntesis izquierdos es igual al número de paréntesis derechos.

Caso base (n=1): en este caso φ es una proposición atómica, por lo que no hay paréntesis izquierdos ni derechos, es decir, $0 = 0$.

Paso inductivo: en este caso, el inicio del árbol sintáctico de φ debe ser alguno de los conectores $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ para que φ sea una FBF. En particular y sin pérdida de generalidad, asumimos que es $\rightarrow$ (los otros casos siguen el mismo razonamiento). Luego, φ equivale a $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ para φ_1, φ_2 FBF (φ_1, φ_2 son las representaciones lineales de los subárboles izquierdo y derecho de φ). Dado que las alturas de φ_1 y φ_2 son estrictamente menores que n, usando la hipótesis inductiva, podemos concluir que φ_1 tiene el mismo número de paréntesis izquierdos y derechos, y lo mismo para φ_2. Pero en $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ agregamos dos paréntesis más. Así, el número de ocurrencias de paréntesis izquierdos y derechos es el mismo.