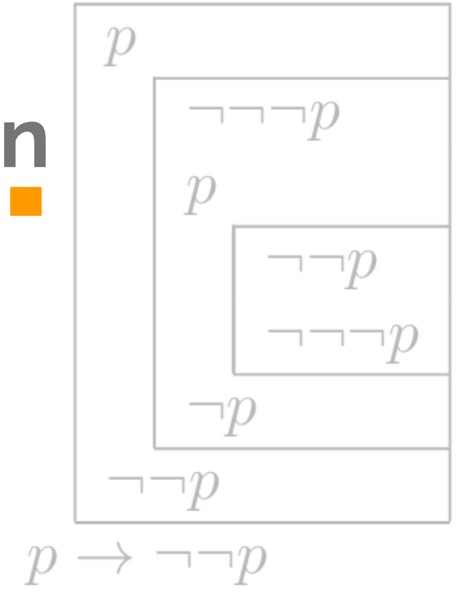
Departamento de Ingeniería Informática
Universidad de Santiago de Chile

Lógica y Teoría de la Computación

Primer semestre 2022

Daniel Vega Araya



Santiago, 2022

Lógica de Primer Orden - LPO

Variables

- En LPO, cada variable presenta un ámbito de influencia (comparable con las variables de clase y de método en Java)
- Una variable puede ser libre y ligada a la vez:
  - $P(x) + \forall x\, Q(x)$
    - En este caso, la variable x para P es **libre** y es **ligada** para Q
    - Dado que x para Q es cuantificada universalmente, Q **es verdadera** cuando se cumple para todos los elementos de U.
    - Dado que para P es libre, la fórmula **será verdadera** dependiendo del valor en U asignado para x.

Lógica de Primer Orden - LPO

Variables

- En LPO, cada variable presenta un ámbito de influencia (comparable con las variables de clase y de método en Java)
- Una variable puede ser libre y ligada a la vez:
  - $P(x) + \forall x\, Q(x)$
    - En este caso, la variable x para P es **libre** y es **ligada** para Q
    - **Dado que x para Q es cuantificada universalmente, Q es verdadera cuando se cumple para todos los elementos de U.**
    - **Dado que para P es libre, la fórmula será verdadera dependiendo del valor en U asignado para x.**

- **¿Qué sucede con los dos últimos puntos?**

Lógica de Primer Orden - LPO

Variables

- Dado que son contradictorios...
  ambas variables x deben ser distintas (x es **sólo** una etiqueta).

$$P(x) + \forall x\, Q(x)$$

distintas

- Lo anterior lo podemos re-escribir como:

$$P(\mathbf{u}) + \forall x\, Q(x)$$

Llamaremos ***renombramiento*** a la re-escritura anterior.

Lógica de Primer Orden - LPO

Variables

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists x\,(Q(x) \rightarrow \forall x\, R(x)))$$

distintas

Lógica de Primer Orden - LPO

Términos

- Dado un vocabulario L = {P, F, C}, un **término** se define como:
    - Todas las variables son términos. Ej: x, y , z, …
    - Todas las constantes son términos. Ej: Fulano, Zutano, …
    - Si $t_1, ..., t_n$ son términos y f una función n-aria, entonces $f(t_1, ..., t_n)$ es un término.

      Ej: suma(x, 5), sucesor (sucesor (1)), …

Lógica de Primer Orden - LPO

Fórmulas

- Una fórmula puede ser:
  - Cerrada: si no tiene variables libres.
  - Abierta: si tiene al menos una variable libre.

- También se pueden clasificar en:
  - Fórmulas atómicas
  - Fórmulas bien formadas (contienen a las atómicas)

Lógica de Primer Orden - LPO

Fórmulas atómicas

- Dado un vocabulario, una fórmula atómica tiene la forma de:
  - $P(t_1, ..., t_k)$, donde:
    - P es un predicado k-ario.
    - $t_1, ..., t_k$ son términos.
- Las fórmulas atómicas nos ayudan a expresar proposiciones de LP (hechos):
  - EsVecinoDe(Pedro, hijo(Pablo))

Lógica de Primer Orden - LPO

Fórmulas atómicas

- Dado un vocabulario, una fórmula atómica tiene la forma de:
  - $P(t_1, ..., t_k)$, donde:
    - P es un predicado k-ario.
    - $t_1, ..., t_k$ son términos.
- Las fórmulas atómicas nos ayudan a expresar proposiciones de LP (hechos):
  - EsVecinoDe(Pedro, hijo(Pablo))

Esta fórmula puede leerse como: “Pedro es vecino del hijo de Pablo”.

Lógica de Primer Orden - LPO

Fórmulas bien formadas

- Una lista de símbolos es una fórmula bien formada (fbf) ssi se puede aplicar un número finito de veces las reglas:
  - Las fórmulas atómicas son fórmulas
  - Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ es una fórmula
  - Si φ y ψ son fórmulas, entonces $(\varphi + \psi)$, $(\varphi * \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas.
  - Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces $(\forall x\, \varphi)$ y $(\exists x\, \varphi)$ son fórmulas.

Lógica de Primer Orden - LPO

Ejemplo:

- "Todos los que estudian lógica son inteligentes"

$$\forall x \, (\, Estudia\,(\, x \,,\, lógica\,) \rightarrow inteligente\,(\, x\,))$$

- "Todos los que tengan 3,94 de promedio reprobarán lógica"

$$\forall x \, (\, Tiene\ Promedio\,(\, x \,,\, 3{,}94\,) \rightarrow RepruebaLógica\,(\, x\,))$$

- "Todos tienen una madre"

$$\forall x \; \exists y \; Madre\,(\, y \,,\, x\,)$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Algunas equivalencias

$$
\begin{array}{ccc}
\neg\forall x\, \varphi x & \text{equivale a} & \exists x\, \neg\varphi x \\
\neg\exists x\, \varphi x & \text{equivale a} & \forall x\, \neg\varphi x \\
\forall x\, \varphi x & \text{equivale a} & \neg\exists x\, \neg\varphi x \\
\exists x\, \varphi x & \text{equivale a} & \neg\forall x\, \neg\varphi x \\
\neg\forall x\, (\varphi x \to \psi x) & \text{equivale a} & \exists x\, \neg(\varphi x \to \psi x) \\
 & \text{equivale a} & \exists x\, (\varphi x \wedge \neg\psi) \\
\forall x\, (\varphi x \to \neg\psi x) & \text{equivale a} & \neg\exists x\, \neg(\varphi x \to \neg\psi x) \\
 & \text{equivale a} & \neg\exists x\, (\varphi x \wedge \psi x) \\
\forall x\, (\varphi x \wedge \psi x) & \text{equivale a} & \forall x\, \varphi x \wedge \forall x\, \psi x \\
\exists x\, (\varphi x \vee \psi x) & \text{equivale a} & \exists x\, \varphi x \vee \exists x\, \psi x
\end{array}
$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

- **Forma Normal Conjuntiva** (FNC)

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

- **Forma Normal Conjuntiva** (FNC)

- **Forma Normal Disyuntiva** (FND)

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

- **Forma Normal Conjuntiva** (FNC)

$$EsPar(mult(x, y)) \land (\neg EsImpar(x) \lor \neg EsImpar(y))$$

- **Forma Normal Disyuntiva** (FND)

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

- **Forma Normal Conjuntiva** (FNC)

$$EsPar\ (mult(x, y)) \land (\neg EsImpar\ (x) \lor \neg EsImpar\ (y))$$

- **Forma Normal Disyuntiva** (FND)

$$\neg EsPar\ (mult(x, y)) \lor (EsImpar\ (x) \land EsImpar\ (y))$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

- **Forma Normal Conjuntiva** (FNC)

$$EsPar(mult(x, y)) \land (\neg EsImpar(x) \lor \neg EsImpar(y))$$

- **Forma Normal Disyuntiva** (FND)

$$\neg EsPar(mult(x, y)) \lor (EsImpar(x) \land EsImpar(y))$$

- **Forma Normal Rectificada** (FNR)

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

- **Forma Normal Conjuntiva** (FNC)

$$EsPar\,(mult(x, y)) \land (\neg EsImpar\,(x) \lor \neg EsImpar\,(y))$$

- **Forma Normal Disyuntiva** (FND)

$$\neg EsPar\,(mult(x, y)) \lor (EsImpar\,(x) \land EsImpar\,(y))$$

- **Forma Normal Rectificada** (FNR)
  - Ninguna variable aparece libre y ligada a la vez.
  - Cada cuantificador actúa sobre una variable distinta.

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

- **Forma Normal Rectificada** (FNR)
  - Ninguna variable aparece libre y ligada a la vez.
  - Cada cuantificador actúa sobre una variable distinta.

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \rightarrow \forall x R(x)))$$

$$\forall x \forall y\, (P(x, y) \leftrightarrow (\neg Q(x) \wedge \exists m \exists f\, (\neg R(m, f))))$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

- **Forma Normal Rectificada** (FNR)
  - Ninguna variable aparece libre y ligada a la vez.
  - Cada cuantificador actúa sobre una variable distinta.

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \rightarrow \forall x R(x)))$$

$$\forall x \forall y\, (P(x, y) \leftrightarrow (\neg Q(x) \land \exists m \exists f\, (\neg R(m, f))))$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

- **Forma Normal Rectificada** (FNR)
  - Ninguna variable aparece libre y ligada a la vez.
  - Cada cuantificador actúa sobre una variable distinta.

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists x(Q(x) \rightarrow \forall x R(x)))$$

$$\forall x \forall y\, (P(x, y) \leftrightarrow (\neg Q(x) \land \exists m \exists f\, (\neg R(m, f))))$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales... hay más!

- **Forma Normal Prenex** (FNP)
  - Los cuantificadores están sólo al comienzo.

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi$$

donde $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y ψ no tiene cuantificadores.

Ejemplo:

$$\forall x P(x) \land \exists z R(z)$$
$$\exists y \forall x [P(x) \land Q(y)]$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales… hay más!

- **Forma Normal Prenex** (FNP)
  - Los cuantificadores están sólo al comienzo.

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi$$

donde $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y ψ no tiene cuantificadores.

Ejemplo:

$$\forall x P(x) \land \exists z R(z)$$

$$\exists y \forall x [P(x) \land Q(y)]$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales... hay más!

- **Forma Normal Prenex** (FNP)
  - Los cuantificadores están sólo al comienzo.

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi$$

donde $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y ψ no tiene cuantificadores.

Ejemplo:

$$\forall x P(x) \land \exists z R(z)$$
$$\exists y \forall x [P(x) \land Q(y)]$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales... hay más!

- **Forma Normal Prenex** (FNP)
  - Los cuantificadores están sólo al comienzo.

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi$$

donde $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y ψ no tiene cuantificadores.

Ejemplo:

$$\forall x P(x) \land \exists z R(z)$$
$$\exists y \forall x [P(x) \land Q(y)]$$

Teorema

Cualquier fórmula de LPO es **equivalente** a una fórmula en FNP.

Lógica de Primer Orden - LPO

Algoritmo de cálculo para Forma Normal Prenexa

1. Rectificar

$$\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi[x/y]$$
$$\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi[x/y]$$

y no libre en φ

2. Eliminar bicondicionales

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \land (\psi \rightarrow \varphi)$$

3. Eliminar condicionales

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi$$

4. Interiorizar negaciones

$$\neg(\varphi \land \psi) \equiv (\neg\varphi \lor \neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \lor \psi) \equiv (\neg\varphi \land \neg\psi)$$
$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Algoritmo de cálculo para Forma Normal Prenexa (continuación)

4. Interiorizar negaciones

$$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$$
$$\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$$

5. Exteriorizar cuantificadores

$$\forall x\varphi \land \psi \equiv \forall x(\varphi \land \psi)$$
$$\forall x\varphi \lor \psi \equiv \forall x(\varphi \lor \psi)$$
$$\exists x\varphi \land \psi \equiv \exists x(\varphi \land \psi)$$
$$\exists x\varphi \lor \psi \equiv \exists x(\varphi \lor \psi)$$
$$\psi \land \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \land \varphi)$$
$$\psi \lor \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \lor \varphi)$$
$$\psi \land \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \land \varphi)$$
$$\psi \lor \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \lor \varphi)$$

x no libre en ψ

Lógica de Primer Orden - LPO

Ejemplo

$$\forall x P(x) \land \exists y Q(y)$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Ejemplo

$$\forall x P(x) \land \exists y Q(y)$$
$$\equiv \forall x[P(x) \land \exists y Q(y)]$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Ejemplo

$$\forall x P(x) \land \exists y Q(y)$$

$$\equiv \forall x[P(x) \land \exists y Q(y)] \qquad [\forall x\varphi \land \psi \equiv \forall x(\varphi \land \psi)] \text{ (x no libre en } \psi)$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Ejemplo

$$\forall x P(x) \land \exists y Q(y)$$
$$\equiv \forall x[P(x) \land \exists y Q(y)]$$
$$\equiv \forall x \exists y[P(x) \land Q(y)]$$

[$\forall x \varphi \land \psi \equiv \forall x(\varphi \land \psi)$] (x no libre en ψ)

Lógica de Primer Orden - LPO

Ejemplo

$$\forall x P(x) \land \exists y Q(y)$$

$$\equiv \forall x[P(x) \land \exists y Q(y)] \qquad [\forall x\varphi \land \psi \equiv \forall x(\varphi \land \psi)] \text{ (x no libre en } \psi)$$

$$\equiv \forall x \exists y[P(x) \land Q(y)] \qquad [\psi \land \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \land \varphi)] \text{ (x no libre en } \psi)$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
& \forall x P(x) \land \exists y Q(y) \\
\equiv\ & \forall x[P(x) \land \exists y Q(y)] && [\forall x\varphi \land \psi \equiv \forall x(\varphi \land \psi)] \text{ (x no libre en } \psi) \\
\equiv\ & \forall x \exists y[P(x) \land Q(y)] && [\psi \land \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \land \varphi)] \text{ (x no libre en } \psi)
\end{aligned}
$$

Tarea:

$$\neg \forall x[P(x) \to \exists x Q(x)]$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales... hay más!

- **Forma Normal de Skolem** (FNS)
  - como FNP pero sin existenciales.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi$$

donde ψ no tiene cuantificadores.

Ejemplo:

$$\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$$
$$\forall x \forall y \forall z [P(x) \wedge (R(y) \vee Q(z))]$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales... hay más!

- **Forma Normal de Skolem** (FNS)
  - como FNP pero sin existenciales.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$$

donde ψ no tiene cuantificadores.

Ejemplo:

$$\forall x P(x) \land \forall y Q(y)$$

$$\forall x \forall y \forall z [P(x) \land (R(y) \lor Q(z))]$$

Lógica de Primer Orden - LPO

Formas normales... hay más!

- **Forma Normal de Skolem** (FNS)
  - como FNP pero sin existenciales.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi$$

donde ψ no tiene cuantificadores.

Ejemplo:

$$\forall x P(x) \land \forall y Q(y)$$
$$\forall x \forall y \forall z [P(x) \land (R(y) \lor Q(z))]$$

LPO - **Skolemización**

LPO - **Skolemización**

Eliminación de los cuantificadores existenciales

LPO - **Skolemización**

Eliminación de los cuantificadores existenciales

1. Los existenciales se eliminan de izquierda a derecha.
2. $\exists x ... \varphi(x) ... \rightarrow ... \varphi(c) ...$, donde c es una nueva constante.
3. $\forall x_1 ... \forall x_{k-1} \exists x_k ... \varphi(x_k) ... \rightarrow \forall x_1 ... \forall x_{k-1} ... \varphi(f(x_1, ..., x_{k-1})) ...$, donde f es una nueva función de Skolem.

LPO - **Skolemización**

Eliminación de los cuantificadores existenciales

1. Los existenciales se eliminan de izquierda a derecha.
2. $\exists x \ldots \varphi(x) \ldots \rightarrow \ldots \varphi(c) \ldots$, donde c es una nueva constante.
3. $\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \exists x_k \ldots \varphi(x_k) \ldots \rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \ldots \varphi(f(x_1, \ldots, x_{k-1})) \ldots$, donde f es una nueva función de Skolem.

Ejemplo 1:

$$\forall x \forall y \exists z \forall w\, S(x, y, z, w)$$

LPO - **Skolemización**

Eliminación de los cuantificadores existenciales

1. Los existenciales se eliminan de izquierda a derecha.
2. $\exists x ... \varphi(x) ... \rightarrow ... \varphi(c) ...$, donde c es una nueva constante.
3. $\forall x_1 ... \forall x_{k-1} \exists x_k ... \varphi(x_k) ... \rightarrow \forall x_1 ... \forall x_{k-1} ... \varphi(f(x_1, ..., x_{k-1})) ...$, donde f es una nueva función de Skolem.

Ejemplo 1:

$$\forall x \forall y \exists z \forall w\, S(x, y, z, w)$$

LPO - **Skolemización**

Eliminación de los cuantificadores existenciales

1. Los existenciales se eliminan de izquierda a derecha.
2. $\exists x ... \varphi(x) ... \rightarrow ... \varphi(c) ...$, donde c es una nueva constante.
3. $\forall x_1 ... \forall x_{k-1} \exists x_k ... \varphi(x_k) ... \rightarrow \forall x_1 ... \forall x_{k-1} ... \varphi(f(x_1, ..., x_{k-1})) ...$, donde f es una nueva función de Skolem.

Ejemplo 1:

$$\forall x \forall y \, \boldsymbol{\exists z} \, \forall w \, S(x, y, z, w)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y \forall w \, S(x, y, \mathbf{f(x, y)}, w)$$

LPO - **Skolemización**

Eliminación de los cuantificadores existenciales

1. Los existenciales se eliminan de izquierda a derecha.
2. $\exists x \ldots \varphi(x) \ldots \rightarrow \ldots \varphi(c) \ldots$, donde c es una nueva constante.
3. $\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \exists x_k \ldots \varphi(x_k) \ldots \rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \ldots \varphi(f(x_1, \ldots, x_{k-1})) \ldots$, donde f es una nueva función de Skolem.

Ejemplo 2:

$$\exists w \forall x \exists y \forall z \exists u (P(x, y) + Q(y, z) \rightarrow R(u, w))$$

LPO - **Skolemización**

Eliminación de los cuantificadores existenciales

1. Los existenciales se eliminan de izquierda a derecha.
2. $\exists x \ldots \varphi(x) \ldots \rightarrow \ldots \varphi(c) \ldots$, donde c es una nueva constante.
3. $\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \exists x_k \ldots \varphi(x_k) \ldots \rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \ldots \varphi(f(x_1, \ldots, x_{k-1})) \ldots$, donde f es una nueva función de Skolem.

Ejemplo 2:

$$\exists w \forall x \exists y \forall z \exists u (P(x, y) + Q(y, z) \rightarrow R(u, w))$$

LPO - **Skolemización**

Eliminación de los cuantificadores existenciales

1. Los existenciales se eliminan de izquierda a derecha.
2. $\exists x \ldots \varphi(x) \ldots \rightarrow \ldots \varphi(c) \ldots$, donde c es una nueva constante.
3. $\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \exists x_k \ldots \varphi(x_k) \ldots \rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \ldots \varphi(f(x_1, \ldots, x_{k-1})) \ldots$, donde f es una nueva función de Skolem.

Ejemplo 2:

$$\exists \mathbf{w} \forall x \exists \mathbf{y} \forall z \exists \mathbf{u} (P(x, y) + Q(y, z) \rightarrow R(u, w))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall z (P(x, \mathbf{f(x)}) + Q(\mathbf{f(x)}, z) \rightarrow R(\mathbf{g(x, z)}, \mathbf{h(C)}))$$

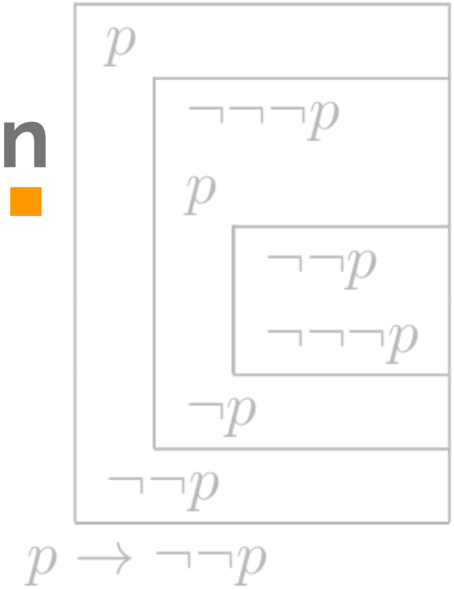
LPO - **Formas normales**

- **Forma Normal Conjuntiva** (FNC)
- **Forma Normal Disyuntiva** (FND)
- **Forma Normal Rectificada** (FNR)
  - Ninguna variable aparece libre y ligada a la vez.
  - Cada cuantificador actúa sobre una variable distinta.
- **Forma Normal Prenex** (FNP)
  - cuantificadores están sólo al comienzo.
- **Forma Normal de Skolem** (FNS)
  - como FNP pero sin existenciales.

Departamento de Ingeniería Informática
Universidad de Santiago de Chile

Lógica y Teoría de la Computación

Primer semestre 2022



Santiago, 2022