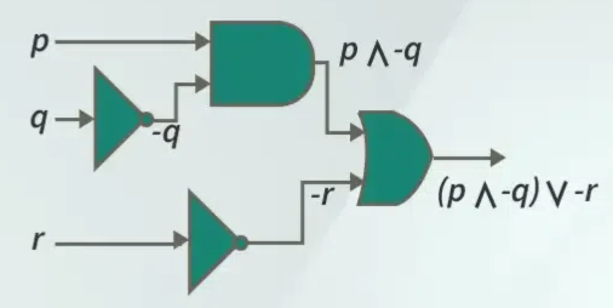
Teoría de la Computación
Unidad 1: Lógica proposicional

cristobal.loyola@usach.cl



Contenidos

- Contenido 1
- Contenido 2

Motivación

Motivación

Considere el problema cotidiano de decidir si llevar paraguas o no al salir de casa. Podemos razonar de la siguiente manera:

- **Premisas:**

Motivación

Considere el problema cotidiano de decidir si llevar paraguas o no al salir de casa. Podemos razonar de la siguiente manera:

- **Premisas:**
  1. Si el cielo está nublado, entonces lloverá.

Motivación

Considere el problema cotidiano de decidir si llevar paraguas o no al salir de casa. Podemos razonar de la siguiente manera:

- **Premisas:**
  1. Si el cielo está nublado, entonces lloverá.
  2. Si llueve y no llevo paraguas, entonces me mojaré.

Motivación

Considere el problema cotidiano de decidir si llevar paraguas o no al salir de casa. Podemos razonar de la siguiente manera:

- **Premisas:**
  1. Si el cielo está nublado, entonces lloverá.
  2. Si llueve y no llevo paraguas, entonces me mojaré.
  3. Hoy está nublado.

Motivación

Considere el problema cotidiano de decidir si llevar paraguas o no al salir de casa. Podemos razonar de la siguiente manera:

- **Premisas:**
  1. Si el cielo está nublado, entonces lloverá.
  2. Si llueve y no llevo paraguas, entonces me mojaré.
  3. Hoy está nublado.
  4. No quiero mojarme

Motivación

Considere el problema cotidiano de decidir si llevar paraguas o no al salir de casa. Podemos razonar de la siguiente manera:

- **Premisas:**
  1. Si el cielo está nublado, entonces lloverá.
  2. Si llueve y no llevo paraguas, entonces me mojaré.
  3. Hoy está nublado.
  4. No quiero mojarme
- **Conclusión:**

Motivación

Considere el problema cotidiano de decidir si llevar paraguas o no al salir de casa. Podemos razonar de la siguiente manera:

- **Premisas:**
  1. Si el cielo está nublado, entonces lloverá.
  2. Si llueve y no llevo paraguas, entonces me mojaré.
  3. Hoy está nublado.
  4. No quiero mojarme
- **Conclusión:**
  - Llevaré un paraguas.

Motivación

Algunas formas de razonamiento son:

- **Razonamiento deductivo:** parte de premisas generales para llegar a una conclusión necesariamente verdadera (si las premisas son verdaderas).

Motivación

Algunas formas de razonamiento son:

- **Razonamiento deductivo:** parte de premisas generales para llegar a una conclusión necesariamente verdadera (si las premisas son verdaderas).
  - **Ej:** Todos los humanos son mortales. Alan Turing es humano. Por lo tanto, Alan Turing es mortal.

Algunas formas de razonamiento son:

- **Razonamiento deductivo:** parte de premisas generales para llegar a una conclusión necesariamente verdadera (si las premisas son verdaderas).
  - **Ej:** Todos los humanos son mortales. Alan Turing es humano. Por lo tanto, Alan Turing es mortal.
- **Razonamiento inductivo:** usa premisas específicas para llegar a una conclusión probable (no segura).

Motivación

Algunas formas de razonamiento son:

- **Razonamiento deductivo:** parte de premisas generales para llegar a una conclusión necesariamente verdadera (si las premisas son verdaderas).
  - **Ej:** Todos los humanos son mortales. Alan Turing es humano. Por lo tanto, Alan Turing es mortal.
- **Razonamiento inductivo:** usa premisas específicas para llegar a una conclusión probable (no segura).
  - **Ej:** El sol ha salido todas las mañanas hasta hoy. Por lo tanto, mañana saldrá el sol (es probable, pero no está garantizado).

Motivación

Algunos tipos de lógica son:

- **Lógica proposicional:** estudia proposiciones simples (verdaderas o falsas) y su combinación mediante conectores.

Motivación

Algunos tipos de lógica son:

- **Lógica proposicional:** estudia proposiciones simples (verdaderas o falsas) y su combinación mediante conectores.
- **Lógica de primer orden:** incluye predicados, cuantificadores y variables.

Motivación

Algunos tipos de lógica son:

- **Lógica proposicional:** estudia proposiciones simples (verdaderas o falsas) y su combinación mediante conectores.
- **Lógica de primer orden:** incluye predicados, cuantificadores y variables.
- **Lógica difusa:** trabaja con grados de verdad (no sólo verdadero / falso).

Motivación

¿Qué es y cómo se caracteriza una lógica?

- **Sintaxis:** define las reglas para construir expresiones válidas (fórmulas bien formadas).
- **Semántica:** asigna un significado a las expresiones (valores de verdad, interpretaciones).
- **Sistema de inferencia:** establece reglas para derivar conclusiones a partir de premisas.
- **Consistencia:** no debe admitir contradicciones[1].
- **Completitud:** toda fórmula válida puede ser demostrada a partir de las reglas del sistema[2].

[1] No obstante, existen lógicas paraconsistentes.

[2] La lógica de primer orden es completa, pero no decidible: no existe un algoritmo general que determine si una fórmula cualquiera es válida.

Lógica proposicional

Una **proposición** es un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambos a la vez.
¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

1. El sol es una estrella.

Una **proposición** es un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambos a la vez.
¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

1. El sol es una estrella.
2. 8 es un número impar.

Lógica proposicional

Una **proposición** es un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambos a la vez.
¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

1. El sol es una estrella.
2. 8 es un número impar.
3. ¿Qué hora es?

Una **proposición** es un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambos a la vez.
¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

1. El sol es una estrella.
2. 8 es un número impar.
3. ¿Qué hora es?
4. La pizarra es negra.

Una **proposición** es un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

1. El sol es una estrella.
2. 8 es un número impar.
3. ¿Qué hora es?
4. La pizarra es negra.
5. Por favor, cierra la ventana.

Lógica proposicional

Una **proposición** es un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambos a la vez.
¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

1. El sol es una estrella.
2. 8 es un número impar.
3. ¿Qué hora es?
4. La pizarra es negra.
5. Por favor, cierra la ventana.
6. Este enunciado es falso.

Una **proposición** es un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambos a la vez.
¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

1. El sol es una estrella.
2. 8 es un número impar.
3. ¿Qué hora es?
4. La pizarra es negra.
5. Por favor, cierra la ventana.
6. Este enunciado es falso.
7. No está soleado afuera.

Las proposiciones pueden ser:

- **Atómicas:** no se pueden descomponer en proposiciones más simples (ej: hoy es martes, está lloviendo).

Las proposiciones pueden ser:

- **Atómicas:** no se pueden descomponer en proposiciones más simples (ej: hoy es martes, está lloviendo).
- **Moleculares:** combinan una o más proposiciones atómicas a través de **operadores lógicos** (ej: si llueve, entonces las cales se mojan).
  A continuación se muestra los operadores más comunes, ordenados **de mayor a menor precedencia:**

Conector	**Notación**	**Interpretación**
Negación	$\sim p$	No es el caso que p
Conjunción	$p \wedge q$	Ocurre a la vez que p y q
Disyunción	$p \vee q$	Ocurre p o q
Condicional	$p \to q$	Si ocurre p, entonces ocurre q
Bicondicional	$p \leftrightarrow q$	Ocurre p si y sólo si ocurre q

Operadores lógicos: precedencia

Considerando las reglas de precedencia, escriba las siguientes expresiones agregando paréntesis donde corresponda:

1. $\sim p \wedge q$
2. $p \wedge \sim q$
3. $p \wedge q \vee r$
4. $p \vee q \wedge r$
5. $p \rightarrow q \leftrightarrow r$
6. $p \leftrightarrow q \rightarrow r$

Operadores lógicos: precedencia

Considerando las reglas de precedencia, escriba las siguientes expresiones agregando paréntesis donde corresponda:

1. $\sim p \wedge q$ $\qquad ((\sim p) \wedge q)$
2. $p \wedge \sim q$ $\qquad (p \wedge (\sim q))$
3. $p \wedge q \vee r$ $\qquad ((p \wedge q) \vee r)$
4. $p \vee q \wedge r$ $\qquad (p \vee (q \wedge r))$
5. $p \rightarrow q \leftrightarrow r$ $\qquad ((p \rightarrow q) \leftrightarrow r)$
6. $p \leftrightarrow q \rightarrow r$ $\qquad (p \leftrightarrow (q \rightarrow r))$

Operadores lógicos: precedencia

Cuando un término está rodeado de dos operadores $\wedge$ o dos operadores $\vee$, entonces asocia por la izquierda:

- $p \wedge q \wedge r$ $\qquad$ $((p \wedge q) \wedge r)$
- $p \vee q \vee r$ $\qquad$ $((p \vee q) \vee r)$

Cuando un término está rodeado de dos operadores $\rightarrow$ o dos operadores $\leftrightarrow$, entonces asocia por la derecha:

- $p \rightarrow q \rightarrow r$ $\qquad$ $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$ $\qquad$ $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$

Deducción natural

Deducción natural: motivación

Consideremos el siguiente argumento:

> *Si el tren llega tarde y no hay taxis en la estación, entonces José llega tarde a su reunión. José no llega tarde a su reunión. El tren llegó tarde. Por lo tanto, sí había taxis en la estación.*

Sean las proposiciones:

- p = 'El tren llega tarde'
- q = 'Hay taxis en la estación'
- r = 'José llega tarde a su reunión'

¿Cómo podemos construir un procedimiento tal que podamos razonar a través de proposiciones y con ello determinar la validez de una conclusión?

Deducción natural

En deducción natural existe una colección de reglas de prueba, las que permiten inferir fórmulas a partir de otras fórmulas. Así, aplicando sucesivamente las reglas de prueba, podemos inferir una conclusión a partir de un conjunto de premisas.

Supongamos que tenemos un conjunto de fórmulas $\varphi_1,\ \varphi_2, ...,\ \varphi_n$, el que llamaremos premisas, y otra fórmula Ψ, la cual será llamada conclusión. Al aplicar reglas de prueba a las premisas, esperamos obtener algunas fórmulas más, las que al aplicar sobre ellas las reglas de prueba nos permitan eventualmente llegar a la conclusión. Lo anterior será denotado como:

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vdash \Psi$$

Esta expresión se conoce como **secuente** y será válida si es posible encontrar una demostración.

Deducción natural: reglas

- Adjunción o introducción de la conjunción (IC):

$$\frac{\varphi \quad \Psi}{\varphi \wedge \Psi}$$

- Eliminación de la conjunción (EC):

$$\frac{\varphi \wedge \Psi}{\varphi} \qquad (1) \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \Psi}{\Psi} \qquad (2)$$

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

1. $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

Deducción natural: ejemplo 1

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

$$p \wedge q, r \vdash q \wedge r$$

(1)	$p \wedge q$	(premisa)
(2)	r	(premisa)
(3)	q	(EC2 (1))
	$q \wedge r$	(IC (3, 2))

Deducción natural: reglas

- Eliminación de la implicancia (EI) o modus ponens:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \Psi}{\Psi}$$

- Modus tollens (MT) o negación del consecuente:

$$\frac{\varphi \to \Psi \quad \sim \Psi}{\sim \varphi}$$

- Adjunción o introducción de la implicancia (II):

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \Psi\end{array}}}{\varphi \to \Psi}$$

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

2. $s \to \sim t, s, \sim t \to r \vdash r$
3. $p \to q \vdash \sim q \to \sim p$

Deducción natural: ejemplo 2

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

$$s \to \sim t, s, \sim t \to r \vdash r$$

(1)	$s \to \sim t$	(premisa)
(2)	s	(premisa)
(3)	$\sim t \to r$	(premisa)
(4)	$\sim t$	(EI (2, 1))
	r	(EI (4, 3))

Deducción natural: ejemplo 3

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

$$p \to q \vdash \sim q \to \sim p$$

(1)	$p \to q$	(premisa)
(2)	$\boxed{\sim q}$	(supuesto)
(3)	$\boxed{\sim p}$	(MT (1,2))
	$\sim q \to \sim p$	(II (2-3))

Deducción natural: reglas

- Adjunción o introducción de la doble negación (IDN):

$$\frac{\varphi}{\sim\sim \varphi}$$

- Eliminación de la doble negación (EDN):

$$\frac{\sim\sim \varphi}{\varphi}$$

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

4. $p \to q, p \vdash \sim\sim q$

Deducción natural: ejemplo 4

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

$$p \to q, p \vdash \sim\sim q$$

(1)	$p \to q$	(premisa)
(2)	p	(premisa)
(3)	q	(EI (2, 1))
	$\sim\sim q$	(IDN (3))

Adjunción o introducción de la disyunción

$$\frac{\varphi}{\varphi \lor \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \lor \psi}$$

Eliminación de la disyunción

$$\frac{\varphi \lor \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ X\end{array}} \ \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ X\end{array}}}{X}$$

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

5. $p \lor q \vdash q \lor p$

Deducción natural: ejemplo 5

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

$$p \vee q \vdash q \vee p$$

(1)	$p \vee q$	(premisa)
(2)	p	(supuesto)
(3)	$q \vee p$	(ID2 (2))
(4)	q	(supuesto)
(5)	$q \vee p$	(ID1 (4))
	$q \vee p$	(ED (1, 2-3, 4-5))

- Adjunción o introducción de la negación (IN):

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\sim \varphi}$$

- Eliminación de la negación (EN):

$$\frac{\Psi \quad \sim \Psi}{\bot}$$

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

6. $p \to \sim p \vdash \sim p$

Deducción natural: ejemplo 6

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

$$p \rightarrow \sim p \vdash \sim p$$

(1)	$p \rightarrow \sim p$	(premisa)
(2)	p	(supuesto)
(3)	$\sim p$	(EI (2, 1))
(4)	$\perp$	(EN (2-3))
	$\sim p$	(IN (2-4))

Deducción natural: reglas

- Demostración por contradicción (DPC):

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \sim \varphi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\varphi}$$

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

7. $\sim p \rightarrow \perp \quad \vdash p$

Deducción natural: ejemplo 7

Utilice las reglas de inferencia anteriores para probar que:

$$\sim p \rightarrow \perp \quad \vdash p$$

(1)	$\sim p \rightarrow \perp$	(premisa)
(2)	$\boxed{\sim p}$	(supuesto)
(3)	$\boxed{\perp}$	(EI (2, 1))
(4)	$\sim (\sim p)$	(IN (2-3))
	p	(EDN (4))