technische universität
dortmund

fakultät für informatik

Bachelor-Arbeit

MetroMap-Layout-konforme Visualisierung von Höchstspannungsnetzen

Robin Möhring

29. August 2017

Gutachter:

Prof. Dr. Heinrich Müller

M.Sc. Dominic Siedhoff

Lehrstuhl Informatik VII
Graphische Systeme
TU Dortmund

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Notation

Notation	**Bedeutung**
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^d$	d-dimensionaler Raum
$\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_N\}$	ungeordnete Menge $\mathcal{M}$ von N Elementen m_i
$\mathcal{M} = \langle m_1, \ldots, m_N \rangle$	geordnete Menge $\mathcal{M}$ von N Elementen m_i
$\mathbf{v}$	Vektor $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$ mit N Elementen v_i
$v_i^{(j)}$	i-tes Element des j-ten Vektors
$\mathbf{A}$	Matrix $\mathbf{A}$ mit Einträgen $a_{i,j}$
$G = (V, E)$	Graph G mit Knotenmenge V und Kantenmenge E

1 Einleitung

1.1 Motivation und Hintergrund

Das Höchstspannungsnetz, welches sich über Deutschland erstreckt ist riesig und besteht aus tausenden von Strommasten und Verbindungen. Da ist sehr vom Nutzen eine Karte zu haben, die einige Verbindungen und Orte verschiebt um eine weitaus bessere und übersichtlichere Darstellung zu erhalten. Das ist genau die Methode einer MetroMap, den Verlust genauer Daten um sicherzustellen, dass die wichtigen Verbindungen und Standorte schnell und sicher erkannt werden.
In dieser Arbeit geht es darum, die Methoden einer MetroMap für Bus- und Bahnverbindungen zu nutzen, um eine angepasste MetroMap für das deutsche Höchstspannungsnetz zu erhalten.

1.2 Aufbau der Arbeit

Abbildung 1.1: Karte des deutschen Höchstspannungsnetzes

Abbildung 1.2: MetroMap der Bahnverbindungen in Singapur

3

2 Graphbasierte Modellierung des Höchstspannungsnetzes

2.1 Höchstspannungsnetz

Die vorliegenden Ausführungen orientieren sich am Lehrerfachheft "Übertragung und Verteilung der elektrischen Energie". Um elektrische Energie über große Distanzen zu transportieren werden Höchstspannungsnetze benutzt. Von einem Kraftwerk ausgehend wird versucht möglichst viele Haushalte, Industrie- und Gewerbebetriebe zu erreichen. Davon ausgehend wird auch der Standort der meisten Kraftwerke bestimmt. Einige Kraftwerke lassen sich nur an bestimmten Standorten errichten, zum Beispiel ein Wasserkraftwerk muss an einem Fluss oder Staudamm errichtet werden. So ist es oft nicht möglich genug Verbraucher zu erreichen, sodass es Mittel bedarf den elektrischen Strom auch über weite Strecken hinweg zu transportieren.

Die Generatoren der modernen Kraftwerke erzeugen eine Spannung von $10500V$, $21000V$ oder $27000V$[1]. Die Höhe dieser Spannung ist bestimmt durch die Größe bzw. die Leistungsfähigkeit des Kraftwerks und somit von der Nennleistung des Generators.

Da der überwiegende Teil der elektrischen Energie in Wärmekraftwerken erzeugt wird und diese mit einer Generatorleistung von 600 bis $1300MW$, bedeutet dies, dass Ströme zwischen $15000A$ und $30000A$ abgegeben werden müssen. Das ist jedoch weder aus technischen noch wirtschaftlichen Gründen für einen Transport über lange Distanzen lohnenswert, da es entweder sehr großen Leiterquerschnitte oder sehr große Stromverluste zur Folge hätte.

Es kann die gleiche Leistung P auch mit weniger Strom I und einer erhöhten Spannung U erreicht werden, denn die Beziehung lautet:

$$P = U \cdot I \tag{2.1}$$

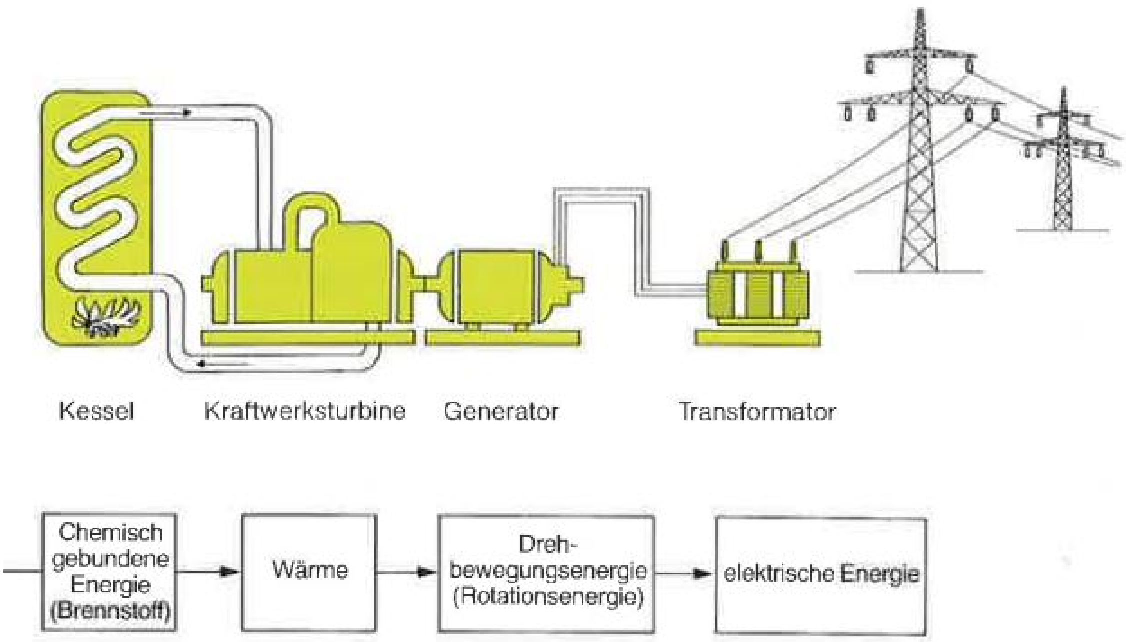


Abbildung 2.1: Prinzip der Stromerzeugung[1]

Diese Eigenschaft wird ausgenutzt und das führt dazu, dass die Generatorspannung bereits direkt am Kraftwerk durch einen Transformator in eine höhere Spannung umgeformt wird. Dadurch wird die elektrische Leistung mit kleineren Stromstärken über die Netze geleitet. Nur die Übertragung in höheren Spannungen ermöglicht es die elektrische Energie effizient zu übertragen. Die Anpassungen führen zu einem sehr geringen Gesamtverlust von etwa 5% der erzeugten Energie.

Die erforderlichen Leitungen um ein effizientes Netz sicherzustellen werden in verschiedenen Ebenen anhand ihrer Betriebsspannung eingeteilt:

- Höchstspannungsleitungen mit Betriebsspannungen über $150000V$
- Hochspannungsleitungen mit Betriebsspannungen über $60000V$
- Mittelspannungsleitungen mit Betriebsspannungen über $1000V$
- Niederspannungsleitungen mit Betriebsspannungen bis $1000V$.

In Deutschland werden die Höchstspannungsleitungen mit $380000V$ oder mit $220000V$ betrieben. Sie sind zuständig für die überregionale Übertragung. Von den Kraftwerken werden mittels Höchstspannungsleitungen Umspannanlagen, die in der Nähe der Verbraucherschwerpunkte liegen verbunden. In den Umspannanlagen findet eine

(a) Niederspannungsleitungen

(b) Mittelspannungsmast

(c) Hochspannungsleitungen

(d) modernisierter Höchstspannungsmast

Abbildung 2.2: Die vier verschiedenen Leitungstypen

Herabtransformation auf 110000V statt. Dann sind Hochspannungsleitungen für die weitere regionale Übertragung zuständig. Nach einer weiteren Herabtransformation in einer Umspannanlage beträgt die Spannung noch 10000V oder 20000V und ist jetzt bereit für die Übertragung in der Stadt mittels Mittelspannungsleitungen.

Um die Transportaufgaben zu bewältigen müssen die Höchstspannungsleitungen oft über 100 km lang sein. Das komplette Netz, welches sich über Deutschland erstreckt wird auch das Verbundnetz genannt. Die Einzelnetze werden dabei über Kuppelstellen miteinander verbunden. Das Netz erstreckt sich nicht nur über Deutschland sondern über ganz Europa. Der Vorteil bei einem großen verbundenen Netz sind der Nutz- und Erzeugungsausgleich sowie der kostengünstigen Reservestellung für nicht verbundene Kraftwerke[1].

Da der Stromverbrauch stets variabel ist und sehr örtlich sowie zeitlich unterschiedlich, macht ein großes Verbundnetz viel Sinn. Ebenso aus Sicht der Kraftwerke, zum Beispiel wenn der Schneefall oder Regen ausbleibt, so gibt es an einem Kraftwerk welches an einem Staudamm oder Fluss errichtet worden ist weniger Energie und der Bedarf kann leicht durch andere Quellen über das Netz gedeckt werden.

Abbildung 2.3: Karte des deutschen Höchstspannungsnetzes[1]

Es gibt zwei verschiedene Arten für den Transport der elektrischen Energie:

- Freileitung
- Kabel.

Entschieden wird anhand der technischen Möglichkeiten, die unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften der Freileitungen und Kabel, die Kosten sowie Vorstellungen hinsichtlich des Landschaftsschutzes und der Gestaltung des Stadtbildes[1].
Die meisten Leiter bestehen aus Kupfer und Aluminium, dank der hohen Elastizität und elektrischen Leitfähigkeit. Aluminium hat gerade für den Freileitungsbau eine besondere Eigenschaft des sehr geringen Eigengewichtes, was einen größeren Abstand der Masten ermöglicht.

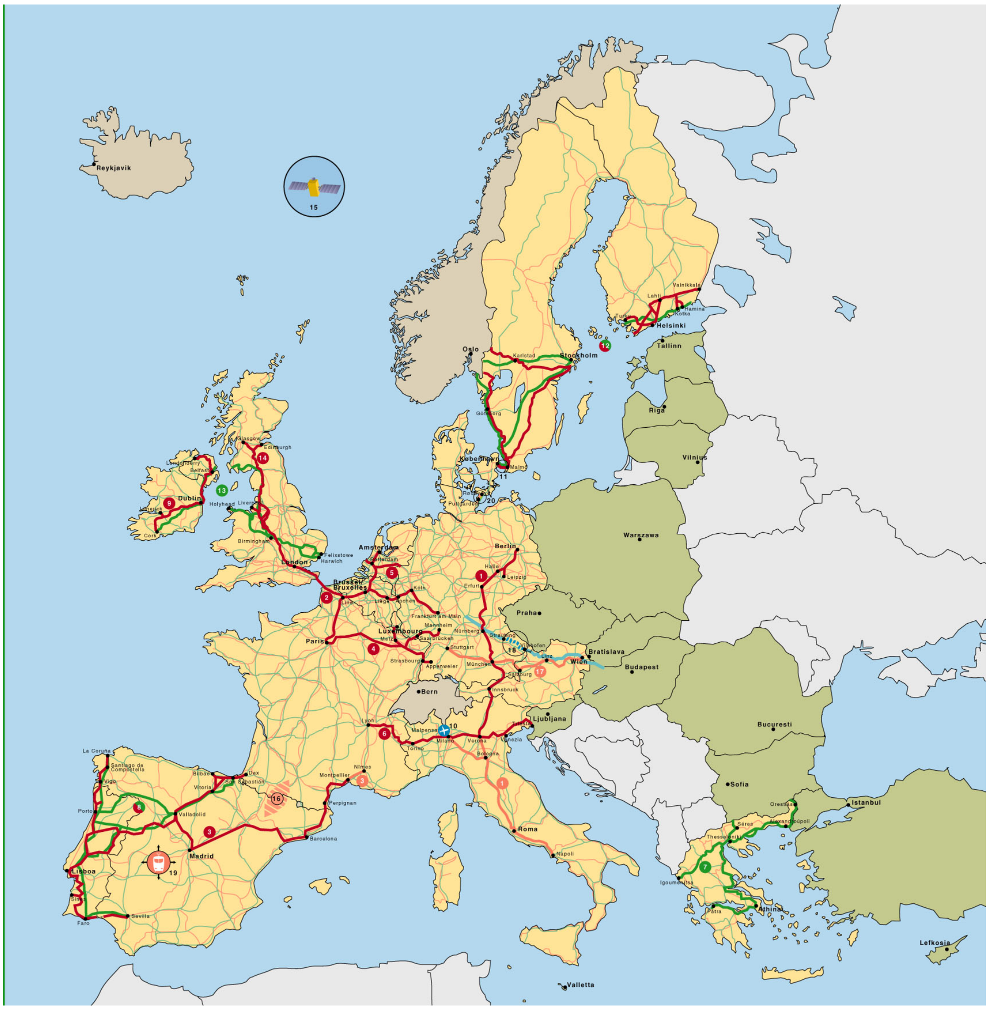


Abbildung 2.4: Karte des europäischen Verbundnetzes[1]

Die Kabel bestehen aus einem Kern der Leiter, welche voneinander durch Isolierungen geschützt werden. Diese nennt man Adern. Mehrere Adern gebunden durch einen Mantel ergeben das letztendliche Kabel, diese können durch ein- oder mehradrig unterschieden werden. Die einzelnen Isolierungen der Adern bestehen aus ölgetränkten Papier, bei niedrigen Spannungen auch Kunststoff(PVC). Die dicke der Isolierung wird durch die jeweilige Nennspannung der Adern bestimmt.

Der Mantel soll die Kabel eng zusammenhalten und gegen äußere mechanische Beschädigungen schützen, ebenso muss er gegen eindringende Feuchtigkeit isolieren. Da Hochspannungsleitungen eine besonders große Isolierung benötigen, werden die Leiter in einem Stahlrohr mit Stickstoffgas unter sehr großen Druck verlegt.

Einzelne Stromkreise und ein Gestänge bilden eine Freileitung. Die Stromkreise bestehen bestehen jeweils aus drei bis vier Leitern. Die spannungsführenden Leiter werden durch Isolatoren an den Masten befestigt, während die anderen Leiter meist

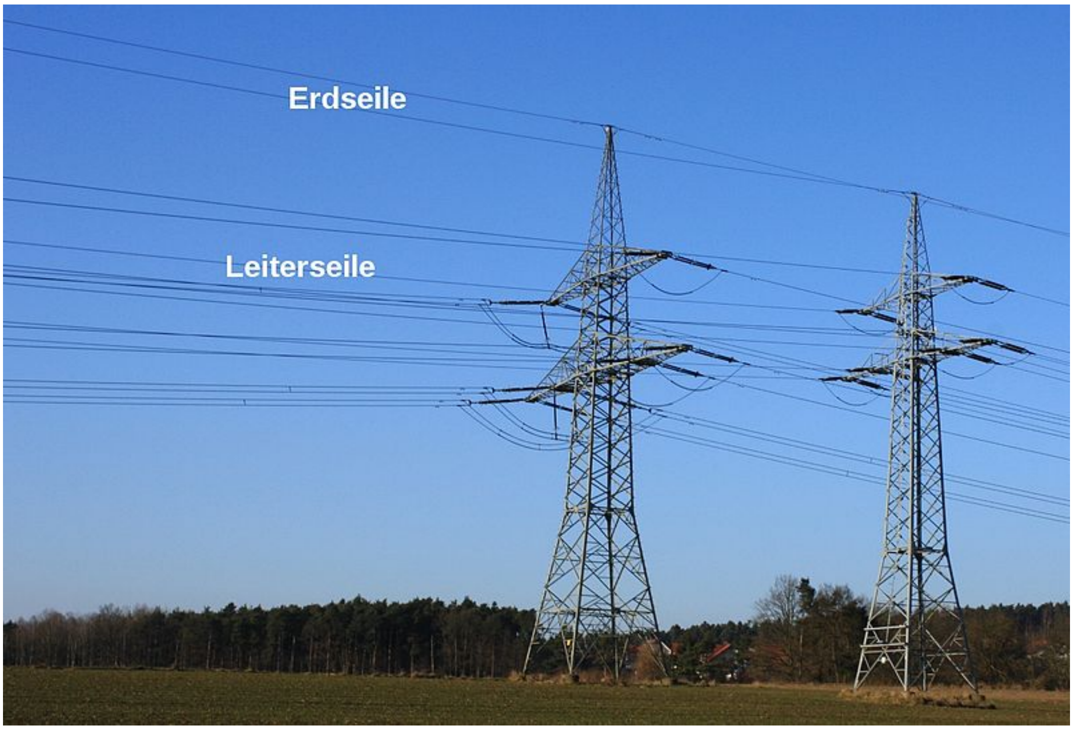


Abbildung 2.5: Freileitungsmast mit Leitern und Erdseil[1]

durch die Luft isoliert werden. Diese werden auch Seile genannt.
Es werden verschiedene Werkstoffe zum Bau der Masten verwendet, dabei entscheidet die Größe der Spannung welcher verwendet wird. Diese sind:

- Holzmasten für Niederspannungsleitungen
- Holz-/Betonmasten für Mittelspannungsleitungen
- Stahlgittermasten für Hoch- und Höchstspannungsleitungen.

Je nachdem wie viel Kraft auf die Masten ausgeübt wird, variiert deren Größe, Konstruktion und Abstand. Äußere Faktoren wie Windbelastungen sowie Schnee- und Eislasten werden dabei mitberücksichtigt.
Die einzelnen Leiter werden mit sogenannten Erdseilen über Isolatoren am jeweiligen Mast angebracht. Die Erdseile dienen dabei nicht dem Transport der elektrischen Energie sondern dem Schutz vor Blitzeinschlägen. Es verlaufen demnach mehrere Stromkreise mit mehreren Leitern und dem Erdseil über einen Mast. In Abbildung 2.5 sieht man die Konstruktion der Masten sehr gut. Ebenso zu sehen sind die jeweiligen Isolatoren zwischen den Leitern und den Masten und das Erdseil welches an der Spitze angebracht ist.

2.2 Graph

Um aus dem Höchstspannungsnetz einen repräsentierenden Graphen zu bekommen wurden die jeweiligen Masten zu Knoten und jeweils eins ihrer Leiterseile zu einer verbindenden Kante. Die Position der Masten war aus einer Karte des Höchstspannungsnetz zu bekommen, ebenso deren Verbindungen. Im Folgenden werden nun die grundlegende Strukturen sowie Eigenschaften eines Graphen erläutert.

Ein Graph ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit folgenden Eigenschaften:

- V ist eine nicht leere Menge, die sogenannten Knoten
- E ist eine Menge von Kanten zwischen jeweils zwei Knoten[2].

Eine Kante $e_{v_i,v_j} \in E$ mit $v_i, v_j \in V$ repräsentiert somit die Verbindung des Knoten v_i mit v_j.
Ein Graph ist demnach eine Struktur die Informationen anhand Knoten und verbindenden Kanten speichert. Ein einfaches Beispiel sieht man in Abbildung 2.6. Es werden die Städte Köln, Kassel, Frankfurt, Nürnberg und München jeweils durch Knoten repräsentiert und deren Höchstleitungsverbindung durch eine Kante. Es ist nun sehr leicht möglich aus dem Graphen zu entnehmen welche Städte durch Freileitungen miteinander verbunden sind.

Ein Graph kann gerichtet oder ungerichtet sein. Bei einem ungerichteten Graphen gilt: $e_{v_i,v_j} = e_{v_j,v_i}$. Bei einem gerichteten Graphen gilt das nicht immer. Es wird der Kante somit eine Richtung mitgegeben. Ein Knoten v_i hat eine Verbindung e_{v_i,v_j} zu einem anderen Knoten v_j, dies muss jedoch nicht bedeuten dass es auch eine Verbindung ausgehend von v_j nach v_i gibt. Es werden im Folgenden nur noch ungerichtete Graphen verwendet, somit gilt stets $e_{v_i,v_j} = e_{v_j,v_i}$.

Gibt es keine Kante e_{v_i,v_i} mit $v_i \in V$ so ist der Graph schlingenfrei, es existiert also keine Kante von einem Knoten zu sich selbst. Eine Kante heißt demnach Schlinge sofern e_{v_i,v_i} gilt.

Kanten sind benachbart oder adjazent, sofern es zwei Knoten $v_i, v_j \in V$ gibt und eine Kante $e_{v_i,v_j} \in E$ sie verbindet. Da nur ungerichtete Graphen verwendet werden, ist es möglich den Start- sowie Endknoten einer Kante stets zu vertauschen und

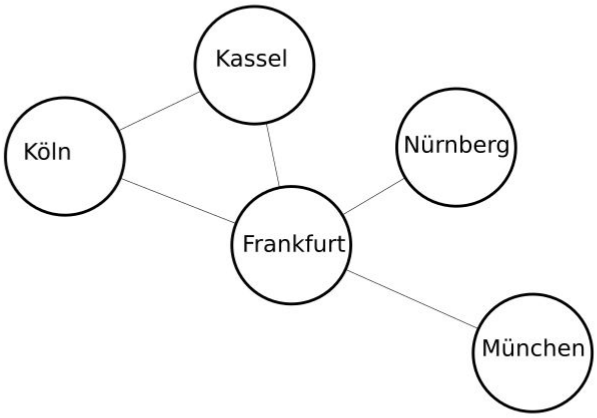


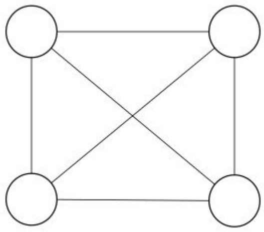
Abbildung 2.6: Einfacher Graph mit Städten als Knoten und deren Höchstspannungsleitungen als Kanten

demnach ist auch $e_{v_j,v_i} \in E$ adjazent.

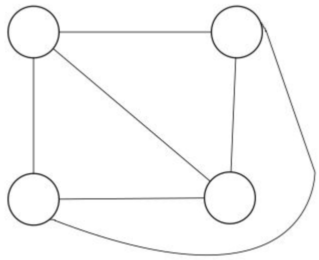
Ein Pfad $w_{v_n,..,v_m}$ ist eine Folge von verbundenen Knoten ausgehend vom Knoten v_n nach v_m oder andersrum. Dabei sind die Knoten v_n und v_m Start- und Endknoten der Folge.

Bei einem Graph ist nicht nur die Einhaltung der eigentlichen Struktur wichtig sondern auch wie dessen Knoten und Kanten platziert werden, um eine übersichtliche und anschauliche Zeichnung zu erhalten. Eine wichtige Eigenschaft eines Graphen um dies zu erreichen ist die Planarität. Im Zweidimensionalen Raum ist ein Graph planar sofern es möglich ist diesen so zu zeichnen, dass sich keine Kanten überschneiden. Existiert eine solche Darstellung so ist es auch stets möglich den Graphen planar mit geraden Kanten zu zeichnen[2]. In Abbildung 2.7 ist der Unterschied zwischen dem planaren Graphen und seiner unterschiedlichen Zeichnungen zu sehen. Der planare Graph kann somit auch mit überschneidbaren Kanten gezeichnet werden, mit eckigen oder auch immer mit geraden Kanten.

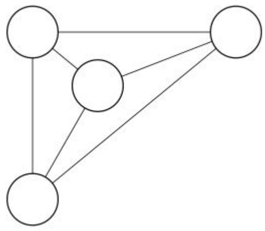
Der Graph wird auf einer simplen Oberfläche im R_2 gezeichnet. Die Knoten werden jeweils durch ihre Koordinaten auf der Karte als Punkte dargestellt. Kanten sind an keinem expliziten Koordinatenpaar gebunden, werden jedoch indirekt durch die Koordinaten ihrer Knoten auf die Oberfläche gezeichnet. Existiert eine Kante $e_{v_i,v_j} \in E$ so wird diese gezeichnet von der Position des Knotens v_i zur Position des Knotens v_j. Durch das Koordinatenpaar der Knoten ist es demnach sehr einfach möglich den Graphen auf einer Oberfläche darzustellen.



(a) Planarer Graph mit einer nicht planaren Zeichnung



(b) Planarer Graph mit einer planaren Zeichnung aber einer kurvigen Kante



(c) Planarer Graph mit planarer Zeichnung sowie geraden Kanten

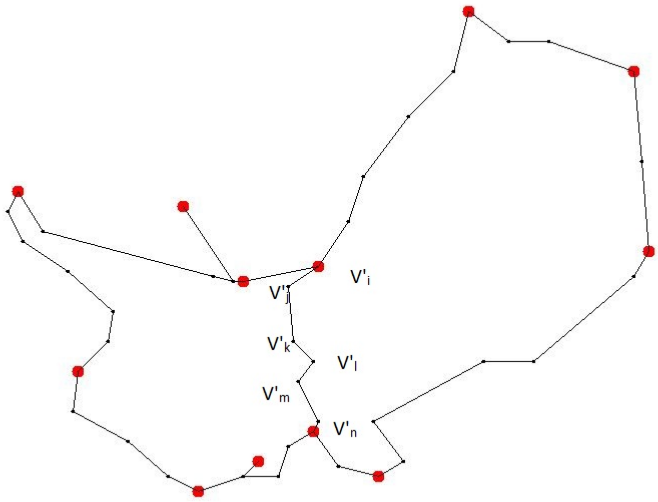
Abbildung 2.7: Verschiedene Zeichnungen eines planaren Graphen

2.3 Vom Höchstspannungsnetz zum Graphen

In der Abbildung 2.x wird der Vorgang von einem Höchstspannungsnetz zu einem Graph dargestellt. In Abbildung 2.x(a) ist ein Ausschnitt des deutschen Höchstspannungsnetzes zu sehen. Gut zu erkennen sind die einzelnen Städte und ihre Verbindungen mittels den Höchstspannungsleitern. Diese Verbindungen repräsentieren einen Mast mit mehreren verschiedenen Leiterseilen. Die größeren Städte werden dabei als unbewegliche Knoten dargestellt. Ein Knoten ist unbeweglich, sofern er nicht mehr durch einen späteren Algorithmus verschoben werden kann, demnach ist seine Position endgültig. Die eigentlichen Positionen der Knoten werden mittels einfachen x und y Koordinaten zugewiesen.

Auf der Karte in der Abbildung 2.x(a) sind noch eckige Verbindungen zwischen den Städten zu sehen. Eine Verbindung auf dieser Karte repräsentiert den Verlauf der Leiterseile und die Positionen der Höchstspannungsmasten. Ist eine Ecke in der Verbindung zu sehen so wurden Hindernisse umgangen oder kleinere Orte vernetzt. Es ist nicht nötig jeden Mast auf der Karte auch als Knoten zu modellieren, da

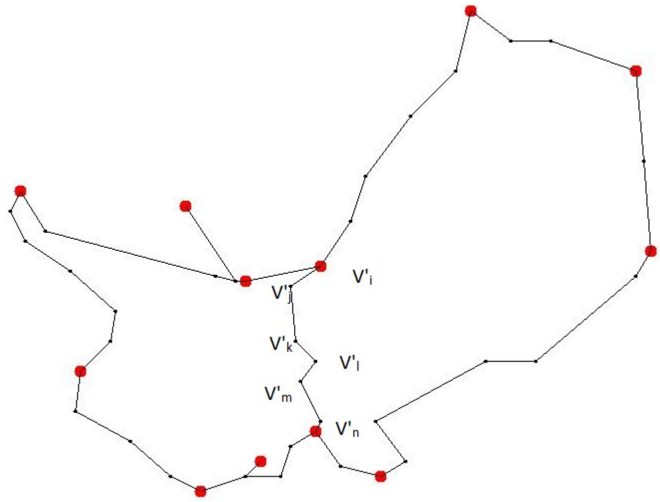
(a) Ausschnitt des deutschen Höchstspannungsnetzes



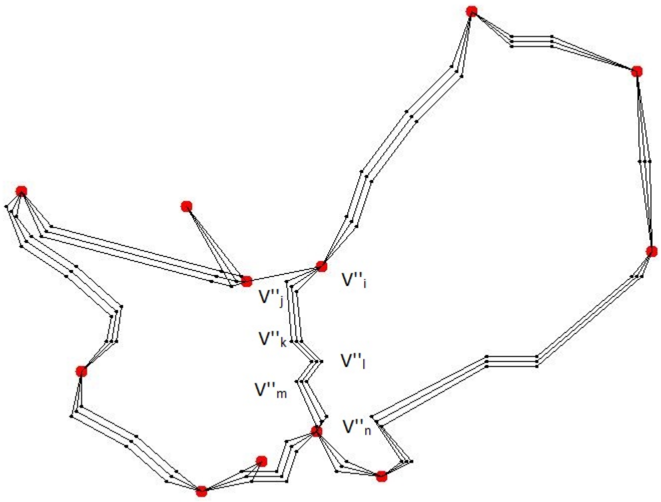
(b) Resultierender Graph aus der Karte

Abbildung 2.8: Übergang von der Karte des Höchstspannungsnetzes zu einem Graphen

die späteren Kanten ohne Ecken verlaufen werden. Je mehr Masten als Knoten modelliert werden, desto besser werden die Verbindungen jedoch werden. Besonders wichtig sind die einzelnen Ecken der Verbindungen, diese müssen als Knoten modelliert werden, weil sonst der komplette Verlauf der Leiterseile im späteren Graphen verloren geht. Die Knoten v_i' und v_n' in der Abbildung 2.x(b) sind größere Städte und wurden dementsprechend zu unbewegliche Knoten. Die Knoten v_j' bis v_m' sind die Ecken im Verlauf der Verbindung der Karte in der Abbildung 2.x(a) und entsprechen ihren Masten v_j' bis v_m'. Diese Knoten können durch spätere Verfahren verschoben werden.



(a) Resultierender Graph aus der Karte



(b) Der Graph mit den modellierten Leiterseilen

Abbildung 2.9: Modellierung der Leiterseile

Um aus der Karte den abschließenden Graphen zu erhalten, der das Höchstspannungsnetz modelliert, müssen noch die einzelnen Leiterseile der Masten hinzugefügt werden. Bis jetzt wurden nur die Knoten und die grundlegenden Verbindungen modelliert. Auf der Karte in Abbildung 2.x(a) fehlen die Informationen um wie viele Leiterseile es sich bei den jeweiligen Verbindungen handelt. Das ist einer der grundlegenden Unterschiede zwischen einer normalen MetroMap und der neuen Darstellung die aus dem Höchstspannungsnetz resultiert. Bei einer MetroMap oder generell bei

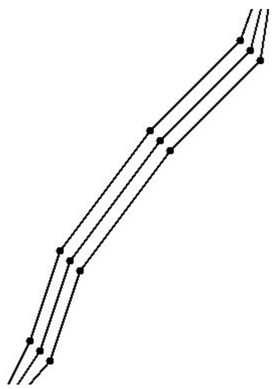


Abbildung 2.10: Erzeugung der neuen Knoten zur Modellierung der Leiterseile

Bus- und Bahnverbindungen existieren nur sehr selten mehrere Straßen oder Gleise die immer mit der selben Verbindung verlaufen. Da dies jedoch der Fall ist bei einem Höchstspannungsnetz muss diese Eigenschaft extra modelliert werden. Im folgenden werden die Verbindungen immer mit genau drei Leiterseilen modelliert, anstatt die echten Werte zu nehmen, welche sich zwischen 1-5 Leiterseile befinden, das macht den Graphen für die spätere Handhabung überschaubarer.

Um die jeweiligen Leiterseile modellieren zu können wurden weitere bewegliche Knoten erstellt. Ein Knoten für jede Ecke einer Verbindung steht für das jeweilige Leiterseile an einem Mast. Diese Knoten wurden um den ursprünglichen Knoten platziert, sodass sich parallele Verlaufe gebildet haben, wie es auch bei einem echten Höchstspannungsnetz mit den Leiterseilen der Fall ist. Auf der Abbildung 2.x wird diese Verfahren dargestellt, der Knoten $v_j^{'}$ wird in Abbildung 2.x zu den drei Knoten $v_i^{''}$, $v_j^{''}$ und $v_k^{''}$, die jetzt den Mast mit den drei Leiterseilen repräsentieren. Da es drei Leiterseile pro Verbindung gibt, wurde die Anzahl der Kanten des resultierenden Graphen durch dieses Vorgehen fast verdreifacht.

2.4 MetroMap Layout Problem

MetroMaps sind Bestandteil des täglichen Lebens. Viele benutzen sie zur schnellen Orientierung und Übersicht. Eine MetroMap macht aus, dass sie schnell zu lesen und zu verstehen ist. Es muss demnach möglich sein die benötigten Informationen in kurzer Zeit und sicher aus der Karte zu erhalten.

MetroMaps dienen hauptsächlich dazu die richtige Bahn oder Bus zum gewünschten Ziel zu nehmen und sich eine gute Übersicht der Lage zu verschaffen. Die geo-

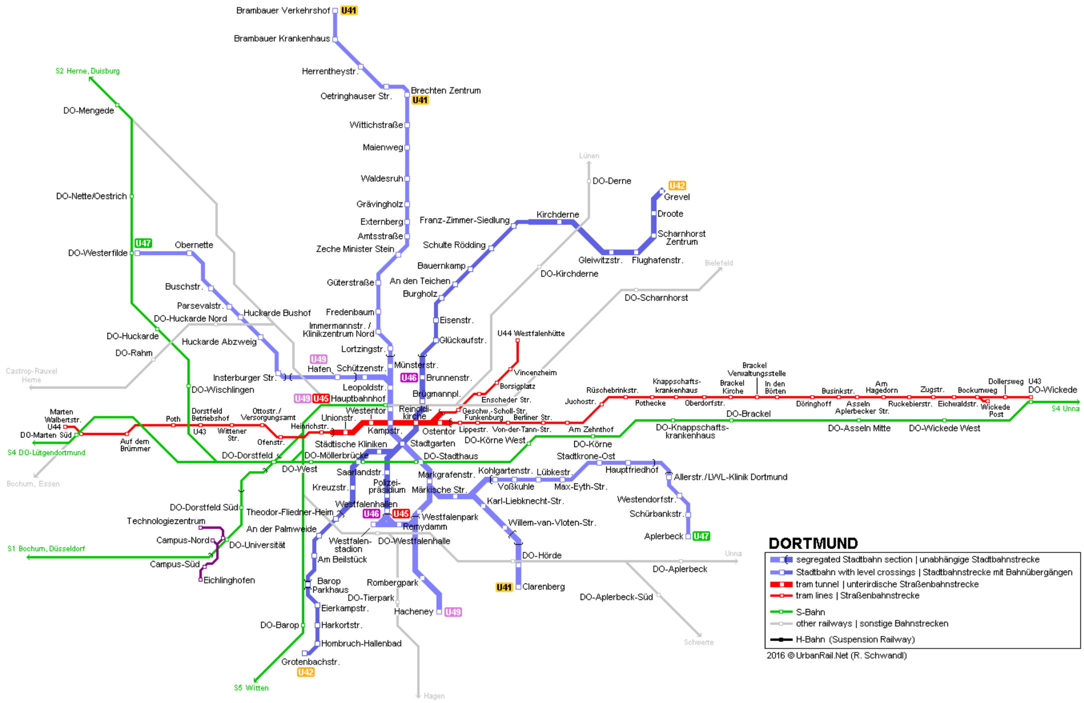


Abbildung 2.11: Dortmunder MetroMap [http://www.urbanrail.net/eu/de/do/dortmund-map.png]

graphisch echten Karten mit ihren Verzweigungen und Überschneidungen erfüllen diesen Zweck nicht. In Abbildung 2.9 wird eine Dortmunder MetroMap der lokalen Bahnverbindungen gezeigt. Fast alle vorhandenen MetroMaps von Bahn- und Busnetzwerken wurden per Hand gezeichnet, jedoch ist es auch möglich dies mittels Algorithmen zu tun. Es gibt bereits viele verschiedene Algorithmen sowie Ansätze die MetroMaps automatisch aus einem Graphen generieren. Um diese zu behandeln muss zu erst geklärt werden was genau eine MetroMap ist und was diese ausmacht.

Eine essentielle Eigenschaft die der Graph der MetroMap haben sollte ist die Planarität. Wird der Graph wie ein Labyrinth gezeichnet mit überlappenden Kanten, so wird diese fast unmöglich für den alltäglichen Gebrauch zu benutzen sein.

Eine weitere Sache die entscheidend dazu beiträgt die resultierende Karte möglichst übersichtlich zu gestalten ist die Vermeidung von eckigen und runden Kanten. Es ist viel einfacher den gewollten Weg auf einer senkrechten bzw. waagerechten Strecke zu verfolgen als wenn dieses über eckige und runde Kanten geschieht.

Bei einer MetroMap ist es sehr wichtig zu unterscheiden um welche Art der Verbindung es sich handelt. Denn ein Bus fährt nicht auf Gleisen und Züge nicht auf

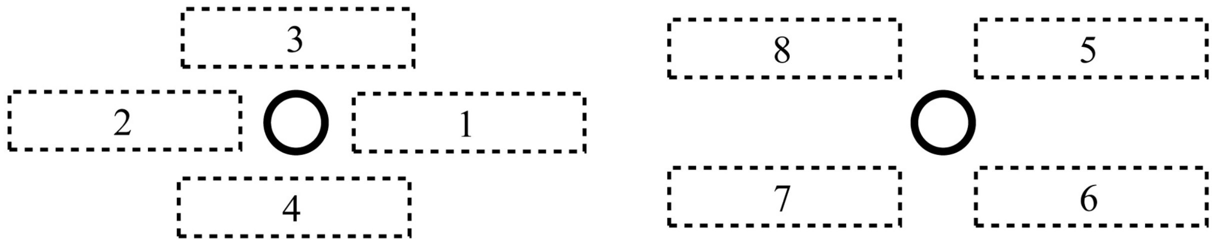


Abbildung 2.12: 8 Mögliche Platzierungen der Beschriftung [http://doi.ieeecomputersociety.org/cms/Computer.org/dl/ trans/tg/2011/01/figures/ttg20110101018.jpg]

Straßen, somit müssen unterschiedliche Verbindungen gekennzeichnet werden. Dafür werden die jeweiligen Pfade $w_{v_n,..,v_m}$ im Graphen aufgestellt, die diese Verbindungen repräsentieren. Hierbei sind die Knoten v_n und v_m jeweils die letzten Stationen der Verbindung. Diese können nun auf unterschiedliche Weise gekennzeichnet werden, durch Färbung, Umrandung oder indem die Verbindung verschieden gestrichelt wird.

Eine MetroMap verliert ihre Eigenschaft der Topologie sowie der geographischen Richtigkeit im Vergleich zu einer normalen Karte, dies resultiert zwingend aus der Verschiebung der Knoten und Kanten um einen übersichtlicheren Graphen zu bekommen. Da die Verbindungen aus den realen Netzen modelliert wurden, wird stets eine gewisse Topologie beibehalten beim Erstellen der MetroMap. Dabei wird der geographische Abstand zwischen zwei Punkten vernachlässigt. Die Lage der ursprünglichen Stationen ist zur Bewahrung der Navigation da weitaus wichtiger. Es würde auch stark verwirren wenn eine Verbindung von A über B nach C geht, die eigentlichen Stationen auf der Karte jedoch in Reihenfolge A C B gezeichnet werden. Dies würde auch im Widerspruch dazustehen, gerade Kanten aufrechtzuerhalten und ganze Verbindungen möglichst senkrecht und waagerecht zu zeichnen.

Neben der Platzierung der Kanten und Knoten ist es sehr wichtig eine passende Beschriftung der Objekte in der MetroMap zu haben. Für diese Beschriftungen muss es den Platz geben, da sich die Beschriftungen nicht mit den Kanten oder Knoten überschneiden dürfen. Wenn der Abstand zwischen den jeweiligen Beschriftungen der Kanten und Knoten zu weit oder zu nah ist, wird es schwierig zu erkennen zu welchem Objekt diese gehört.

Ein möglicher Ansatz dieses Problem zu lösen wäre es jedem Objekt eine gewisse Anzahl von möglichen Beschriftungspositionen zu geben und anschließend die sich überschneidenden Positionen als mögliche Beschriftungen zu streichen. Was bleibt sind überschneidungsfreie Beschriftungen eines jeden Objektes. Es müssen demnach zu erst die möglichen Beschriftungspositionen eines Objektes gefunden werden. Dazu werden 8 Positionen um das jeweilige Objekt gewählt, wie in der Abbildung 2.x dargestellt. Man kann diesen Positionen nun eine Wertigkeit geben. Im 45 Winkel zum Objekt, wäre die Beschriftung generell am besten platziert um einen übersichtlichen Graphen zu bekommen. Nun ist es leicht die beste überschneidungsfreie Beschriftung mit den geringsten Kosten zu finden. Die Kosten stellen die Wertigkeit der Positionen aller Beschriftungen der Objekte.

3 Spring-Embedder

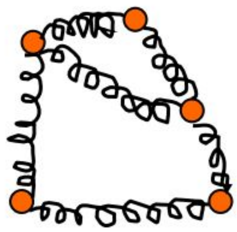
In diesem Kapitel werden die Grundlagen des Spring-Algorithmus erklärt. Es geht um die Verwendung dieser Algorithmen, das grundsätzliche Vorgehen und die Erweiterbarkeit.

3.1 Spring-Embedder - allgemein

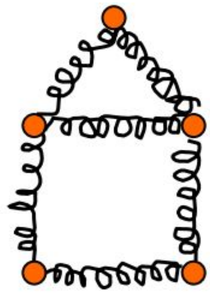
Das Problem der Darstellung basiert auf der Platzierung der Kanten sowie Knoten um eine möglichst ästhetische Zeichnung des Graphen zu erhalten, die gut lesbar und verständlich ist. Die grundlegenden Kriterien für eine ästhetischen Zeichnung eines Graphen sind:

1. die Knoten sollten gleichmäßig verteilt werden
2. minimale Überschneidung der Kanten
3. einheitliche Länge der Kanten
4. möglichst symmetrisch
5. alles soll sich innerhalb der Fläche befinden[3].

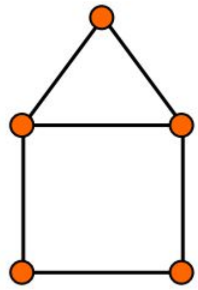
Das heißt es ist leicht möglich die wichtigen Informationen des Graphen anhand einer visuellen Darstellung zu erhalten. Dazu gehören unter anderem die Erkennung von Verbindungen zwischen Knoten oder deren Lage. Dies ist vor allem wichtig bei einer MetroMap wo es darum geht schnell herauszufinden wie es möglich ist von einem Punkt zu einem anderen zu kommen. Um dies zu erreichen gibt es verschiedenste Ansätze.
Im Folgenden wird es um ein Verfahren gehen, welches auf ein Modell der Physik basiert, indem Stahlkugeln für die Knoten, und Federn für die Kanten stehen. Durch die Federn wirken Kräfte auf die Kugeln ein, wodurch sich diese verschieben. Dies passiert solange, bis die Federn ihre optimale Länge haben. Die optimale Länge k



(a) rote Knoten sind die Stahlkugeln verbunden mit Federn



(b) die Federn verschieben die Knoten



(c) darstellung als Graph

Abbildung 3.1: Darstellung als Stahlkugeln und Federn eines Graphen

wird durch die Anzahl der Knoten sowie der zur Verfügung stehender Fläche A bestimmt:

$$k = \sqrt{A/|V|} \tag{3.1}$$

$$A = W * L. \tag{3.2}$$

W ist die Weite und L die Länge der zugrunde liegenden Oberfläche, auf der, der Graph gezeichnet wird. Es ist wichtig zu wissen wie diese Maße sind um eine bessere Verteilung der Knoten zu ermöglichen.
Bildet die bisherige Platzierung der Kanten und Knoten einen planaren Graphen, so wird die neue die Platzierung in fast allen Fällen auch planar sein. Ein Graph ist planar wenn sich keine Kanten überschneiden, diese Eigenschaft ist besonders gewollt um den resultierenden Graphen noch übersichtlicher zu gestalten.

3.2 Spring-Embedder - Vorgehen

Zwischen jedem Knotenpaar $v_i, v_j \in V$ wird eine abstoßende Kraft $f^r_{v_i,v_j}$ berechnet. Alle benachbarten Knoten erhalten eine anziehende Kraft $f^a_{v_i,v_j}$. Zwei Knoten $v_i, v_j \in V$sind benachbart wenn $e_{v_i,v_j} \in E$ ist. Das führt dazu, dass verbundene Knoten näher zusammen gezeichnet werden, während sie noch immer einen gewissen Abstand zueinander haben. Der Algorithmus geht dabei in drei Schritten vor:

Eingabe: $G := (V, E)$
Ausgabe: $G := (V, E)$
  for $i := 1 \leq iterations$ **do**
    for $v_i \in V$ **do**
      $d_{v_i} := 0;$
      for $(v_j \in V)$ **do**
        if $v_i \neq v_j$ **then**
          $\Delta := p_{v_i} - p_{v_j};$
          $d_{v_i} := d_{v_i} + (\Delta/|\Delta|) \cdot f^r_{v_i,v_j}(|\Delta|));$
        end if
      end for
    end for

    for $e_{v_i,v_j} \in E$ **do**
      $\Delta := p_{v_i} - p_{v_j};$
      $d_{v_i} := d_{v_i} - (\Delta/|\Delta|) \cdot f^a_{v_i,v_j}(|\Delta|));$
      $d_{v_j} := d_{v_j} + (\Delta/|\Delta|) \cdot f^a_{v_i,v_j}(|\Delta|));$
    end for

    for $v_i \in V$ **do**
      $p_{v_i} := p_{v_i} + (d_{v_i}/|d_{v_i}|) \cdot min(d_{v_i}, t);$
      $p^x_{v_i} := min(W/2, max(-W/2, p^x_{v_i}));$
      $p^y_{v_i} := min(L/2, max(-L/2, p^y_{v_i}))$
    end for
    $t := cool(t)$
  end for

Algorithmus 3.1: Spring-Algorithmus

1. zwischen jedem Knotenpaar die abstoßende Kraft berechnen

2. benachbarten Knoten eine anziehende Kraft zuweisen

3. jeden Knoten seiner neuen Kraft nach bewegen.

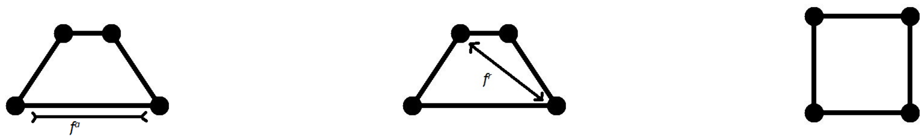
Diese drei Schritte werden werden so oft wiederholt bis keine weitere Bewegung mehr stattfindet. Die Funktionen $f^a_{v_i,v_j}$ und $f^r_{v_i,v_j}$ sind wie folgt definiert:

$$f^a_{v_i,v_j}(x) = x^2/k \tag{3.3}$$

$$f^r_{v_i,v_j}(x) = -k^2/x. \tag{3.4}$$

Der Vektor d_{v_i} gibt an in welcher Richtung der Knoten v_i bewegt wird. Während der Vektor p_{v_i} auf die momentane Position des Knoten v_i zeigt. Der Vektor Δ ist die Differenz zwischen p_{v_i} und p_{v_j}, der Richtungsvektor von v_i nach v_j. Die Variable *iterations* gibt die Anzahl der Durchläufe an. Bei jedem neuen Durchlauf wird der Vektor d_v eines jeden Knotens v auf 0 gesetzt. Mit zwei For-Schleifen geht man jede Knotenkombination durch und berechnet die abstoßende Kraft $f^r_{v_i,v_j}$ mithilfe der Länge des Δ Vektors. Anschließend wird der Bewegungsvektor auf den Einheitsvektor von Δ multipliziert mit der berechneten Kraft gesetzt. Dadurch drücken sich die Knoten direkt voneinander weg.
Der zweite Schritt besteht darin die anziehenden Kräfte zwischen den benachbarten Knoten zu berechnen. Dazu wird jede Kante einmal durchgegangen und der Bewegungsvektor von jedem betroffenen Knoten wird wie bei der abstoßenden Kraft aufaddiert.
Im letzten Schritt des Algorithmus werden die Knoten nun in Richtung ihres Bewegungsvektors bewegt. Es wird darauf geachtet, dass die Knoten dabei nicht das Bild verlassen. Die Variable t ermöglicht es, am Anfang viel Bewegung der Knoten zuzulassen und dies immer weiter einzuschränken, damit mit der Graph mit jeder Iteration feiner wird. Die Funktion $cool(t)$ regelt dabei wie weit sich jeder Knoten in der nächsten Iteration maximal bewegen darf. t könnte zum Beispiel bei der Länge des Bildes starten und sich nach jeder Iteration um ein Zehntel mit $cool(t)$ kürzen. Nach 10 Iterationen wären dadurch keine weiteren Bewegungen der Knoten mehr möglich.

3.3 Spring-Algorithmus - Erweiterbarkeit



(a) anziehende Kraft f^a zwischen dem dritten und vierten Knoten

(b) abstoßende Kraft f^r zwischen dem ersten und vierten Knoten

(c) die wirkenden Kräfte lösen sich auf

Abbildung 3.2: Wirkende Kräfte im Graphen

4 Das Kapitel 4

Eine besondere Eigenschaft dieses Algorithmus ist die leichte Erweiterbarkeit. Er kann leicht an viele verschiedene Probleme angepasst werden. Der Algorithmus 2.1 ist bereits eine erste Erweiterung des ursprünglichen Algorithmus. Beim Bewegen der Knoten im dritten Schritt wird sichergestellt, dass sich die Knoten weiterhin auf der zur Verfügung stehenden Fläche befinden.
Ebenfalls modifizierbar sind die Funktionen $f^a_{v_i,v_j}$ und $f^r_{v_i,v_j}$. Im Kapitel 3 wird dies genutzt um den Graphen weiter anzupassen. Es ist leicht möglich noch weitere Kräfte miteinzubeziehen oder sie ganz anderen Knoten zuzuweisen. Im späteren Verlauf wird es auch Knoten geben, die sich nicht bewegen sollen, weil sie zum Beispiel größere Städte oder zentrale Verbindungspunkte sind.

A Weitere Informationen

Abbildungsverzeichnis

Algorithmenverzeichnis

Quellcodeverzeichnis

Literaturverzeichnis