Geofísica Computacional Aplicada
Equação da Onda Sísmica
Parte 2

Carlos H. S. Barbosa[1]
José Luis Drummond Alves

7 de Agosto de 2023

COPPE UFRJ
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

[1] clshenry@lamce.coppe.ufrj.br

» UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

CONTATOS:

- José Luis Drummond Alves
- Contato: jalves@lamce.coppe.ufrj.br

- Carlos Henrique dos Santos Barbosa
- Contato: clshenry@lamce.coppe.ufrj.br

- Bruno Souza Silva
- Contato: brunosi@lamce.coppe.ufrj.br

» **EQUAÇÃO DA ONDA SÍSMICA NO CONTÍNUO E DISCRETIZADA**

» **CRITÉRIOS DE NÃO-DISPERSÃO E ESTABILIDADE NUMÉRICA**

» **ATENUAÇÃO DO CAMPO DE ONDAS NO CONTORNO**

- Condição de contorno de Reynolds
- Atenuação do campo de ondas no contorno com a condição de Cerjan

» **IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

EQUAÇÃO DA ONDA SÍSMICA

Formulação da Equação da Onda Acústica

Formulação: Equação da Onda Acústica

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 i_v(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s),$$

- $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ é o vetor posição definido no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$, $n_{sd} = 2, 3$,
- $t \in [0, T]$ é o tempo,
- $p(\mathbf{r}, t)$ é o campo de pressão,
- $v(\mathbf{r})$ é o campo de velocidades,
- i_v a fonte sísmica na posição $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$,
- δ é a delta de Dirac,
- $p(\mathbf{r}, 0) = \partial p(\mathbf{r}, 0) / \partial t = 0$ para $\mathbf{r} \in \Omega$ são as condições iniciais e $p(\mathbf{r}, t) = 0$ em $\partial\Omega$ a condição de contorno.

Equação da Onda Acústica Discretizada

» Discretização da equação da onda sísmica para o caso 2D
» Diferenças finitas de segunda ordem no tempo e quarta ordem no espaço:

$$
\begin{aligned}
p_{i,k}^{n+\Delta t} = C_{i,k}[2.0 * c_0 * p_{i,k}^{n} & \\
& + c_1(p_{i+h,k}^{n} + p_{i-h,k}^{n} + p_{i,k+h}^{n} + p_{i,k-h}^{n}) \\
& + c_2(p_{i+2h,k}^{n} + p_{i-2h,k}^{n} + p_{i,k+2h}^{n} + p_{i,k-2h}^{n})] \\
& + 2.0 * p_{i,k}^{n} - p_{i,k}^{n-\Delta t} + v_{i,k}^{2} * f_{i,k}^{n},
\end{aligned}
$$

onde $C_{i,k} = (v_{i,k}\Delta t/h)^2$, $c_0 = -5/2$, $c_1 = 4/3$ e $c_2 = -1/12$ são os coeficientes das diferenças finitas, Δt a taxa de amostragem temporal, h o espaçamento da malha de diferenças finitas e $v_{i,k}$ o campo de velocidades.

CRITÉRIOS DE NÃO-DISPERSÃO E ESTABILIDADE NUMÉRICA

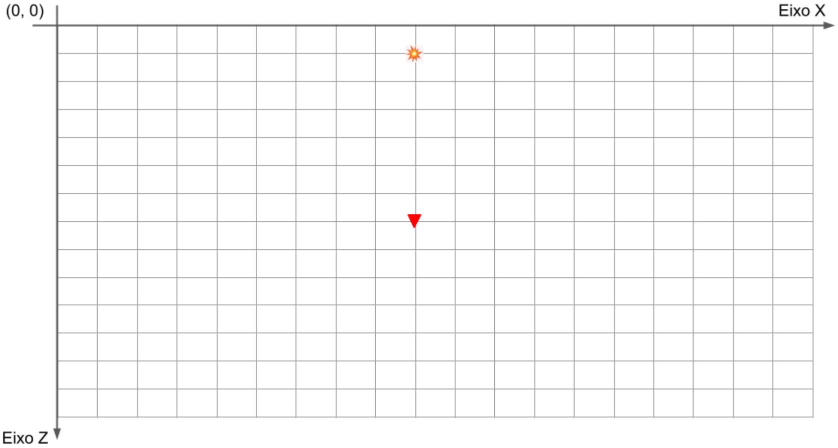
Critério de Não-dispersão

$$max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \leq \frac{v_{min}}{Gf_{corte}}$$

- Δx, Δy e Δz representam o espaçamento da malha de diferenças finitas;
- v_{min} é a menor velocidade de propagação da onda em um determinado meio heterogêneo;
- G determina a quantidade de pontos necessário para representar o menor comprimento de onda dado uma frequência de corte f_{corte}.
- $G = 10$ para a discretização de segunda ordem, $G = 5$ para a discretização de quarta ordem, por exemplo.

Critério de Não-dispersão - Exemplo

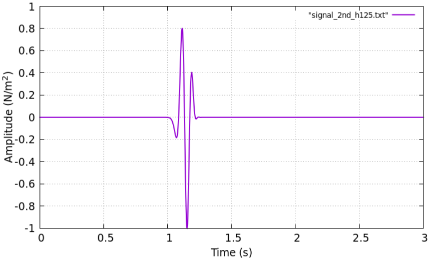
- Propagação do campo de ondas para uma fonte sísmica e registro em um receptor
- Campo de velocidades constante e igual a 3000 m/s e frequência de corte $f_{corte} = 30$Hz
- Espaçamento da malha variável: $h = 12,5$ e $h = 25,0$ metros
- Diferentes ordens de discretização numérica no espaço: segunda e quarta ordem

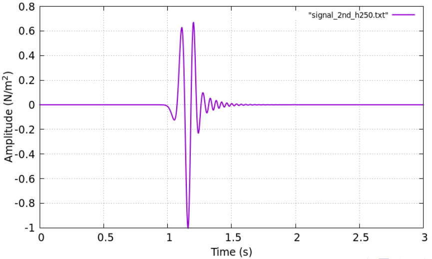


Critério de Não-dispersão - Exemplo

» Discretização espacial de segunda ordem

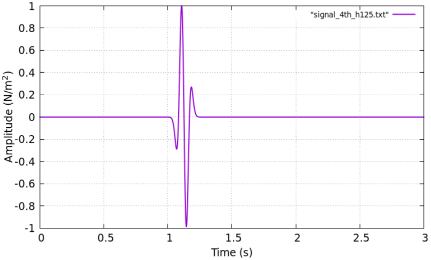
» Valor de $h = \Delta x = \Delta z$ ideal $\longrightarrow v_{min}/(G * f_{corte}) = 3000/(10 * 30) = 10,0$ metros

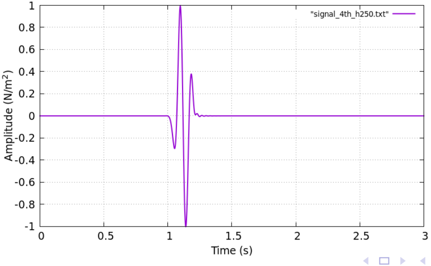




Critério de Não-dispersão - Exemplo

» Discretização espacial de quarta ordem
» Valor de $h = \Delta x = \Delta z$ ideal $\longrightarrow v_{min}/(G * f_{corte}) = 3000/(5 * 30) = 20,0$ metros





Critério de Estabilidade Numérica

$$\mu = \frac{v_{max}\Delta t}{max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)} \leq 1$$

- v_{max} é a maior velocidade de propagação da onda em um determinado meio heterogêneo;
- Δt taxa de amostragem temporal;
- Δx, Δy e Δz representam o espaçamento da malha de diferenças finitas.

ATENUAÇÃO DO CAMPO DE ONDAS NO CONTORNO

Condições de Contorno e Camadas de Amortecimento

- É necessário o conhecimento das condições iniciais e de contorno para solucionar as equações diferenciais:
    - Condições de contorno mais usuais: Dirichlet e Neumann,
    - Condições de contorno não reflexivas (Reynolds, 1978),
    - Camadas de Amortecimento: Cerjan, Perfectly Matched Layer (PML) e variações, tal como, a PML Convolucional.
- As condições de contorno não reflexivas e camadas de amortecimentos são utilizadas para atenuar o campo de ondas no contorno a fim evitar reflexões no contorno devido ao truncamento do domínio de interesse.

Condições de Contorno Não Reflexiva

» **Reynolds (1978)**

Equação da onda 1D sem termo fonte

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

Condições de contorno

$$p(x = \pm L, t) = 0 \qquad \frac{\partial p(x = \pm L, t)}{\partial x} = 0$$

- $\Omega \in [-L, L] \subset \mathbb{R}$

Condições de Contorno Não Reflexiva

» Reynolds (1978)

- Motivada pela fatorização do operador diferencial da equação da onda 1D

Operador diferencial fatorado

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Contornos não reflexivos

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0 \qquad \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$$

- Estas aproximações são válidas para ondas planas da forma $e^{i(\omega t - kx)}$
- Esta metodologia pode ser extralolada para todos os contornos,
- As derivadas podem ser discretizadas com o Método das Diferenças Finitas.

» Cerjan et al (1985)

- Esta técnica minimiza o efeito do truncamento do domínio inserindo camadas no entorno do domínio para atenuar a amplitude da onda antes de alcançar o contorno.

Perfil de Amortecimento

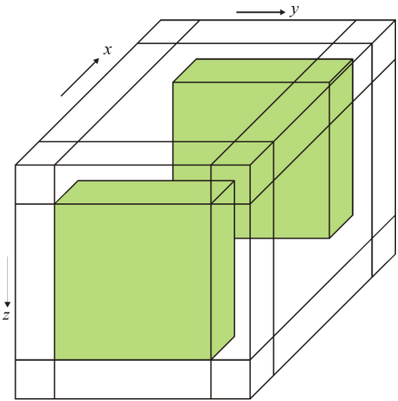
$$f_a(i) = e^{-[f_{at}(N_p - i)]^2}, \quad i \in 1, \ldots, N_p.$$

- f_a é chamado de perfil de amortecimento,
- f_{at} é um fator de atenuação a determinar,
- N_p é o número de pontos a adicionar no domínio truncado para atenuar o campo de ondas,
- i é o índice da malha do domínio discretizado.

» **Cerjan et al (1985)**

Perfil de Amortecimento

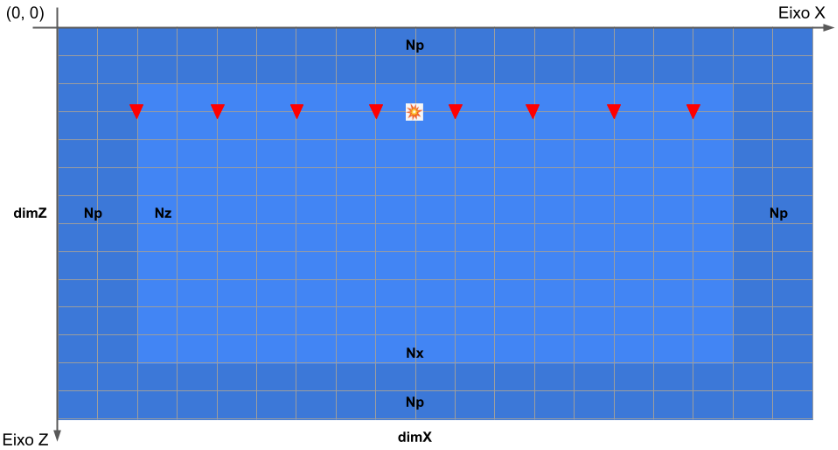
$$f_a(i) = e^{-[f_{at}(N_p - i)]^2}, \quad i \in 1, \ldots, N_p.$$



IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Camadas de Amortecimento do Campo de Ondas

» Campo de velocidades constante e igual a 2000 m/s (diferenças na tonalidade de azul meramente ilustrativas para exemplificar onde é domínio e onde é contorno)



Descrição das Variáveis do Problema

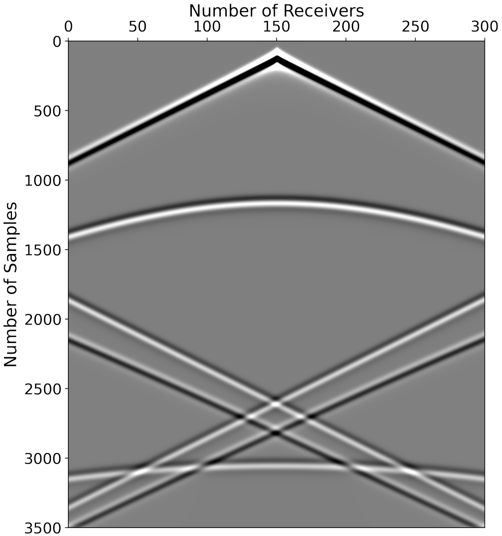
```
h = 10.0                          # espaçamento da malha (m)
dt = 0.001                        # taxa de variação temporal (s)
Ntotal = 3500                     # tempo total discreto
cut_frequency = 30.0              # frequência de corte (Hz)

Np = 100                          # nº pontos camada absorção
Nx   = 300                        # extensão do domínio
Nz   = 200                        # profundidade do domínio

dimX = Np+Nx+Np                   # extensão do domínio mais contorno
dimZ = Np+Nz+Np                   # profundidade do domínio mais contorno

# posicionamento fonte sísmica
shot_x = Np + 150
shot_z = Np + 5

# posicionamento receptores
numberOfReceivers = 300
rec_x = range(Np, Np + numberOfReceivers)
rec_z = Np + 5
```

Descrição das Variáveis do Problema

```
seismic_souce = np.zeros(Ntotal)          # fonte sísmica
velocity      = np.zeros((dimZ, dimX))    # campo de velocidades
C             = np.zeros((dimZ, dimX))    # matriz auxilar

wavefield01   = np.zeros((dimZ, dimX))    # campo de pressão em n - dt
wavefield02   = np.zeros((dimZ, dimX))    # campo de pressão em n
wavefield03   = np.zeros((dimZ, dimX))    # campo de pressão em n + dt

seismogram = np.zeros((Ntotal, numberOfReceivers))    # sismograma

fa_s        = np.empty(Np)                # perfil de atenuação superior
fa_i        = np.empty(Np)                # perfil de atenuação inferior
fa_e        = np.empty(Np)                # perfil de atenuação esquerdo
fa_d        = np.empty(Np)                # perfil de atenuação direito
```

Camadas de Amortecimento do Campo de Ondas

» Sismograma sem atenuação do campo de ondas



Implementação Atenuação do Campo de Ondas

» Atenuação do campo de ondas no contorno localizado na parte superior

```
# Cálculo dos fatores de atenuação
fat = 0.0025

# perfil de atenuação superior
for i in range(Np):
    fa_s[i] = exp(-((fat * (Np - i)) ** 2))
```

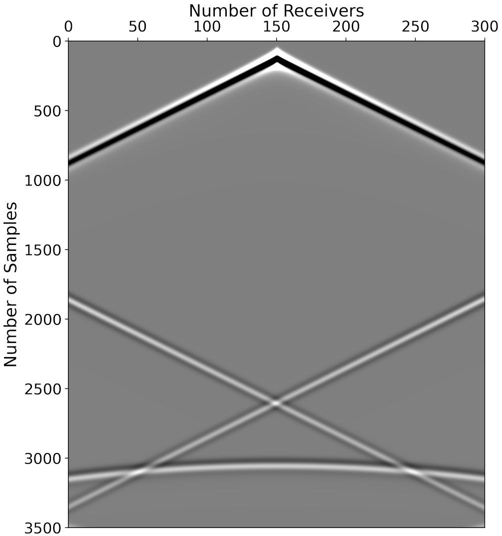
```
@jit
def cerjan_atenuation(wavefield02, wavefield03, fa_s, dimX, dimZ):

# Contorno superior
for i in range(Np):
    for k in range(2, dimX - 2):
        wavefield02[i,k] = fa_s[i] * wavefield02[i,k]
        wavefield03[i,k] = fa_s[i] * wavefield03[i,k]
```

Implementação Atenuação do Campo de Ondas

```python
def seismic_modeling(wavefield01, wavefield02, wavefield03, C, c,
                     seismic_source, shot_x, shot_z, Ntotal,
                     rec_x, rec_z, seismogram):

    for n in range(0, Ntotal):

        # calculo do campo de ondas
        wave_equation(wavefield01, wavefield02, wavefield03, C, c)

        # Atenuação do campo de ondas no contorno
        cerjan_atenuation(wavefield02, wavefield03, fa_s, dimX, dimZ)

        # registro do sismograma (aquisição spread fixo)
        for irec in range(len(rec_x)):
            seismogram[n, irec] = wavefield03[rec_z, rec_x[irec]]

        # fonte sísmica
        wavefield02[shot_z,shot_x] = wavefield02[shot_z,shot_x] +
                                     seismic_source[n]*(velocity[shot_z,shot_x]**2)


        # Atualização do campo de onda
        wavefield01 = np.copy(wavefield02)
        wavefield02 = np.copy(wavefield03)

        if n % 1000 == 0:
            print(n)
```

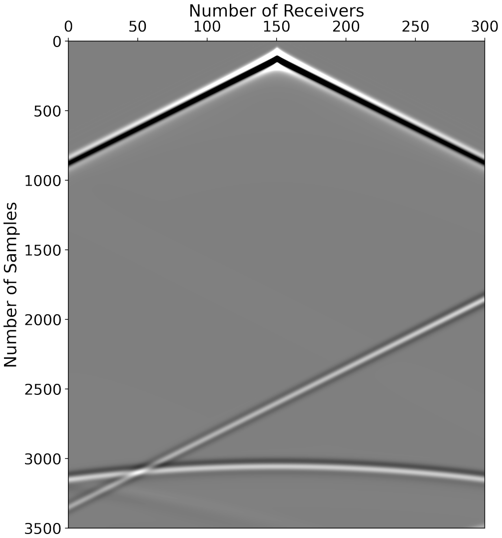
Camadas de Amortecimento do Campo de Ondas

» Sismograma com atenuação no contorno superior



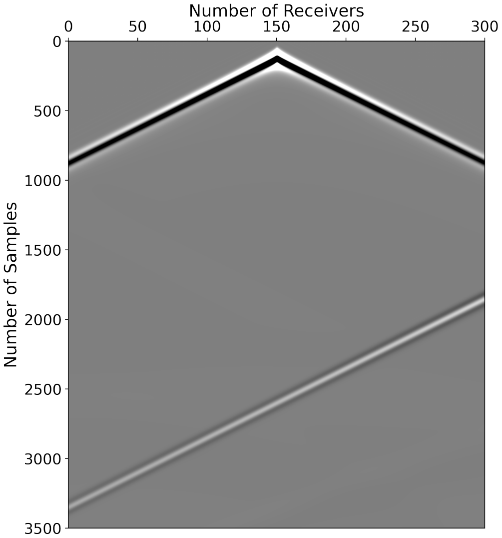
Camadas de Amortecimento do Campo de Ondas

» Sismograma com atenução nos contornos superior e esquerdo



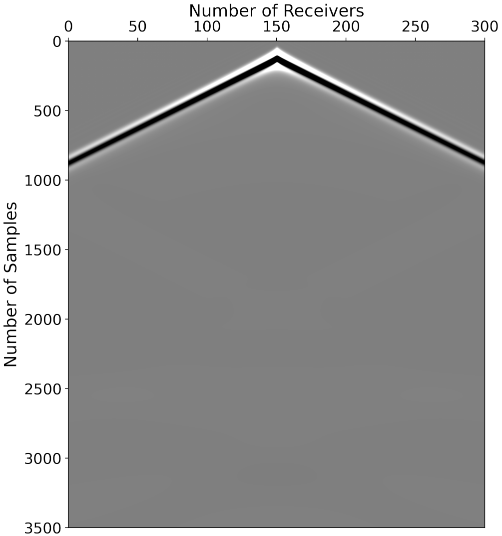
Camadas de Amortecimento do Campo de Ondas

» Sismograma com atenução nos contornos superior, esquerdo e inferior



Camadas de Amortecimento do Campo de Ondas

» Sismograma com atenução nos contornos superior, esquerdo, inferior e direito



Exercícios

1. Construir os perfis de atenuação e realizar a atenuação do campo de ondas nos contornos **esquerdo**, **direito** e **inferior**.

2. Ler um campo de velocidades armazenado em disco e ajustar a implementação computacional para que leve em consideração as camadas de atenuação. Realizar a propagação do campo de ondas e mostrar o sismograma sem a atenuação do campo de ondas e com a atenuação do campo de ondas.