

依值类型

Chuigda Whitegive

第一作者
Doki Doki λ Club!

Cousin Ze

通讯作者
Doki Doki λ Club!

⚠ 注意：本文仅为排版和打印系统功能测试。

⚠ 注意：本文为早期草稿，内容不完且有错误，且排版质量差。

⚠ Note: this is an early draft. It's known to be incomplet and incorrekt, and it has lots of bad fomattting.

前言

伏尔泰在不经意间这样说过，坚持意志伟大的事业需要始终不渝的精神[1]。这句话语虽然很短，但令我浮想联翩。我们都知道，只要有意义，那么就必须慎重考虑。在这种困难的抉择下，本人思来想去，寝食难安。带着这些问题，我们来审视一下依值类型 (*Dependent Type*)[10,5]。这种事实对本人来说意义重大，相信对这个世界也是有一定意义的。这种事实对本人来说意义重大，相信对这个世界也是有一定意义的。¹这句话看似简单，但其中的阴郁不禁让人深思。

```
template <template <typename> class HKT, typename T, std::integral auto x>
requires std::is_integral_v<T>
inline class FooBarBaz : public std::vector<HKT<T>, std::allocator<HKT<T>>>,
    private std::enable_if_t<std::is_integral_v<T>, int>,
    protected std::is_integral<T>,
    virtual std::is_integral<T>::value_type {
[[noinline, nodiscard, maybe_unused, deprecated("Just Chuigda")]]
extern static inline constexpr consteval const virtual auto foo(void)
-> decltype(std::declval<std::basic_string<char,
    std::char_traits<char>,
    std::allocator<char>>>().resize(x))

const override = 0
noexcept(noexcept(
    std::declval<std::basic_string<char,
    std::char_traits<char>,
    std::allocator<char>>>().resize(x)))
{
    std::basic_string<char, std::char_traits<char>, std::allocator<char>> s = "A";
    s = R"naql(
带着这些问题，我们来审视一下依值类型。依值类型，发生了会如何，不发生又会如何。带着
Nhu co bac ho trong ngay vui dai thang, loi bac nay da thanh chien thang huy hoang
这些问题，我们来审视一下依值类型。歌德说过一句富有哲理的话，读一本好书，就如同和一
)naql";
    s.resize(x);
}
}
```

代码 1 在不使用 SFINAE 技巧的情况下，这只是一种索引类型

¹克劳斯·莫瑟爵士曾经提到过，教育需要花费钱，而无知也是一样。

而这些并不是完全重要，更加重要的问题是，带着这些问题，我们来审视一下依值类型[3]。歌德说过一句富有哲理的话，读一本好书，就如同和一个高尚的人在交谈。这句话语虽然很短，但令我浮想联翩。在这种困难的抉择下，本人思来想去，寝食难安。总结的来说，依值类型 `ForallType` 的发生，到底需要如何做到，不依值类型 (*Non-dependent type*) `ArrowType` 的发生，又会如何产生[2,7]。

1. 依值类型

你看到的我，你看到的我，是先生在世时，定的继承者？其实良心地说，我的权力是我争过来的，在这一点我真是个狠角色。你看到的我，你看到的我，是两次北伐后，统一了中国？其实现实点说，统一只不过是名义上的，各地军阀该怎么过怎么过，最大的是我。你看到的我，你看到的我，是同仇共敌忾，不弃甲投戈？其实我私底下早就跟鬼子谈好几轮了，条件不好变化太快才没投。你看到的我，你看到的我，是民族的希望，抗战的领袖？我摸着良心说，列强依然还在这大中国，我的本质无法改变这结果，我就是我。

1.1. 依值函数类型

现在，解决依值类型的问题，是非常非常重要的[15,9]。所以，我们一般认为，抓住了问题的关键，其他一切则会迎刃而解。拉罗什福科曾经说过，我们唯一不会改正的缺点是软弱。这启发了我。苏轼说过一句著名的话，古之立大事者，不惟有超世之才，亦必有坚忍不拔之志[6]。这句话看似简单，但其中的阴郁不禁让人深思²

1.1.1. 依值函数类型的形式化规则

生活中，若依值类型出现了，我们就不得不考虑它出现了的事实[8]。而这些并不是完全重要，更加重要的问题是，对我个人而言，依值类型不仅仅是一个重大的事件，还可能会改变我的人生。本杰明·C·皮尔斯曾经提到过，程序是一个强壮的盲人，倚靠在跛脚的类型肩上[3,4,10]。这似乎解答了我的疑惑。

$$\frac{\Gamma \vdash \lambda x : \tau. e :_{\uparrow} \text{砵}_{42} \quad 1 + 1 \Downarrow 2 \quad \forall P. P \vee \neg P \rightarrow (\vdash e \longrightarrow e') \vee \neg(\vdash e \longrightarrow e')}{\Gamma, \text{带着这些问题} : \text{我们来审视一下} \vdash \lambda x : \tau. e :_{\uparrow} \text{砵}_{42}} \quad [\text{W-Demo}]$$

图 1 读书是一种巧妙地避开思考的方法

赫尔普斯曾经说过，有时候读书是一种巧妙地避开思考的方法[8]。这句话看似简单，但其中的阴郁不禁让人深思。³带着这些问题，我们来审视一下依值类型。

1.1.2. 依值函数类型的实现

笛卡儿说过一句富有哲理的话，读一切好书，就是和许多高尚的人谈话[9,8]。这句话看似简单，但其中的阴郁不禁让人深思。依值类型，到底应该如何实现[11]。而这些并不是完全重要，更加重要的问题是，就我个人来说，依值类型对我的意义，不能不说非常重大。

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nullam convallis nec arcu sed eleifend. Ut vehicula scelerisque justo sit amet malesuada. **Proin** sed **elit** congue, volutpat elit imperdiet, **consectetur eros**. Donec ac ligula sit amet turpis tristique semper mollis id nisl. *Consequentia mirabilis!*

不妨考虑如下规则：

$$\perp = \text{partial} \quad \mathcal{K} = \text{total} \quad \frac{\Gamma \vdash e : \left(\tau_{\mathcal{K}} \rightarrow \tau'_{\xi 1} \right)_{\xi f} \quad \Gamma \vdash e' : \tau_{\xi 2}}{\Gamma \vdash e e' : \tau'_{\xi f + \xi 1 + \xi 2}} \quad [\xi\text{-APP}]$$

²设有笛卡尔闭范畴 \mathcal{C} ，考虑米田引理 $\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -), F) \cong F(A)$ ，若存在 $\text{Nat} = \mathbb{N}$ ，则你可以发现作者这里并没有在认真讨论范畴论。

³[W-Demo] 可证似乎是一种巧合，但如果我们从一个更大的角度看待问题，这似乎是一种不可避免的事实。

显然，这是一种：

$$M a \rightarrow (a \rightarrow M b) \rightarrow M b$$

现在，解决依值类型的问题，是非常非常重要的。所以，可是，即使是这样，依值类型的出现仍然代表了一定的意义。依值类型，发生了会如何，不发生又会如何。Ut imperdiet mauris urna. In vel turpis feugiat lorem dictum suscipit eu non erat. Cras egestas quam fermentum magna commodo eleifend. 依值类型，到底应该如何实现。问题的关键究竟为何？所谓依值类型，关键是依值类型需要如何写。查尔斯·史曾经提到过，一个人几乎可以在任何他怀有无限热忱的事情上成功⁴。带着这句话，我们还要更加慎重的审视这个问题：每个人都不得不面对这些问题。Etiam faucibus ante finibus molestie dictum. Nulla facilisi. Proin cursus, erat sit amet efficitur vestibulum, justo est vestibulum neque, quis tempor dui erat id velit. 在面对这种问题时，我们都知道，只要有意义，那么就必须慎重考虑。

这是不可避免的。从这个角度来看，我们一般认为，抓住了问题的关键，其他一切则会迎刃而解。这种事实对本人来说意义重大，**相信对这个世界也是有一定意义的**。亚伯拉罕·林肯在不经意间这样说过，我这个人走得很慢，但是我从不后退[12]。这句话语虽然很短，但令我浮想联翩。

	Java	Rust	C++
ADT 机制	sealed interface	enum	C++17 <code>std::variant</code>
归类	并类型 ⁵	正统代数和类型	带标签联合体
子结构重复	否	是	是
构造子互斥	是	是	否 ⁶
构造子是类型	是	否	是 ^{*7}
模式匹配	Java 21 switch	match	C++17 <code>std::visit</code>
模式拆解	仅限记录	是	否
多层匹配	是	是	否
分支重叠	是	是	否
按值匹配	部分	是	否
守卫语句	是	是	否
多元匹配	是 (手动实现元组)	是	否
空安全	较差 (JSR305)	强制	无

表 1 标委会走的确实很慢，比死了的王八⁸都慢

[illegible]

⁵Java 允许 $I_1 \leq B, I_2 \leq B, D \leq I_1, D \leq I_2$, 而 $I_1 \cup I_2$ 中只有一个 D (表现为 `switch` 的穷尽性检查)。

⁶C++ 允许 `std::variant<int, int>`, 两个 `int` 是不同的。

⁷不如说是必须先预定义类型，再将它们合并。C++ 同时吃满了正统代数和类型和并类型两边的 debuff。

⁸指 Oracle: 甲骨文 → 王八壳子 → 死了的王八。

Etiam libero neque, ultrices vitae mole 烫屯镊斤拷 stie vitae, venenatis auctor nibh. 可是，即使是这样，依值类型的出现仍然代表了一定的意义。我们不妨可以这样来想：依值类型因何而发生？依值类型，到底应该如何实现。带着这些问题，我们来审视一下汤烫烫。这种事实对本人来说屯屯屯，相信对这个镊斤拷镊斤拷也是有一定锘锘锘。

一隻憂鬱的臺灣烏龜尋覓幾隻骯髒的齙齒鱷龜，幾隻骯髒的齙齒鱷龜圍毆一隻憂鬱的臺灣烏龜。一隻憂鬱的臺灣烏龜開機一臺專業爾先進的電腦，這臺電腦繼續護衛一隻憂鬱的臺灣烏龜。

2. 依值福音

¹ 起初，安得烈、康纳、华特三人，在乌特勒支、斯特拉斯克莱德、诺丁汉之地，同心合意，著书立说。² 论到依值类型 λ 演算的奥秘，并 Haskell 的实现，都记在下面。³ 后有心动 λ 部的白杨翻出来，又有 Gemini 和 Claude 帮助校对。⁴ 白杨说，你们须要记着，凡有智慧的，不可妄言程序设计语言理论，免得为自己在火狱中预备了位置；⁵ 白杨又说，只有时时刻刻顾念读者的软弱，如同顾念婴孩，才能不被读者轻看。

⁶ 凡行函数式之道的众程序员，论到使用依值类型，心里多有踌躇。⁷ 他们彼此议论说：“这依值类型，岂不叫查验型别的事变为不可知吗？岂不叫那查验的陷入深渊、永无止境吗？这道甚是艰难，谁能守得住呢？”⁸ 然而，这一群人却甚是癫狂，喜爱各样繁杂的仪文。⁹ 看哪，在那 Haskell 的境内，有广义代数之像，有函数依赖之规，又有各样关联的族谱与高阶的奥秘。¹⁰ 这一切虚妄的规条，他们都乐意去行；惟独那依值类型，他们却厌弃，如同厌弃大麻风一般，唯恐沾染。

¹¹ 这一族的人，因不认识依值类型的真意，就跌倒了；这也是那拦阻这道普传的绊脚石。¹² 如今虽有许多美好的器皿和言语，是按着依值类型的法度造的，只是其中的奥秘，向他们是隐藏的，他们便不晓得这器皿是如何运行。¹³ 那些指着依值类型所写的书卷，本是文士写给文士看的。¹⁴ 这些话语，对于行函数式的人，甚是生涩。¹⁵ 故此，我写这篇，是要除掉这隔阂，叫你们得以明白。

¹⁶ 我先讲论简单类型 λ 演算，就是那初阶的律法；再讲论依值类型 λ 演算，就是那更美的律法。¹⁷ 从初阶到进阶，所需的变更甚少，你们当留心察看。¹⁸ 我不发明新律法，只将那已有的表明出来，并用 Haskell 的言语以此道造出解释器，好叫你们以此为鉴。¹⁹ 这书不是依值类型编程的入门，也不是完整语言的蓝图，乃是为要除掉你们心中的疑惑，引你们进入这奇妙的领域。

2.1. 没用的公式

一般而言，判断只是逻辑规则[15,11,1]，而某些以这种方式指定的类型系统并不直接对应于可判定的 (decidable) 类型检查算法[14]。因此，我们必须慎重考虑这些规则的适用范围和实际意义。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash \tau : * \quad \Gamma \vdash e : \downarrow \tau}{\Gamma \vdash (e : \tau) : \uparrow \tau} \quad [\text{ANN}] \qquad \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x : \uparrow \tau} \quad [\text{VAR}] \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash e : \uparrow \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash e' : \downarrow \tau \quad ((1 + 1 \Downarrow 2) \rightarrow \perp) \rightarrow \text{我是秦始皇}}{\Gamma \vdash e e' : \uparrow \tau'} \quad [\text{APP}] \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash e : \uparrow \tau}{\Gamma \vdash e : \downarrow \tau} \quad [\text{CHK}] \qquad \frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \downarrow \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x \rightarrow e : \downarrow \tau \rightarrow \tau'} \quad [\text{LAM}]
 \end{array}$$

图 2 一个图灵不完备的类型系统[4]及其双向类型检查算法[2]

⁹ 幾隻骯髒的齙齒鱷龜請來一隻講義氣的鸞鳥，鸞鳥為榮歸與一隻憂鬱的臺灣烏龜戰鬥。後來鸞鳥發動對這個的記錄與檢驗，議論感歎這個難辦。

2.2. 更没用的公式

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash \rho : \downarrow * \quad \rho \Downarrow \tau \quad \Gamma \vdash e : \downarrow \tau}{\Gamma \vdash (e : \rho) : \uparrow \tau} \text{ [ANN]} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash * : \uparrow *} \text{ [STAR]} \quad \frac{\Gamma \vdash \rho : \downarrow * \quad \rho \Downarrow \tau \quad \Gamma, x : \tau \vdash \rho' : \downarrow *}{\Gamma \vdash \forall x : \rho . \rho' : \uparrow *} \text{ [PI]} \\
\\
\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x : \uparrow \tau} \text{ [VAR]} \quad \frac{\Gamma \vdash e : \uparrow \forall x : \tau . \tau' \quad \Gamma \vdash e' : \downarrow \tau \quad \tau'[x \mapsto e'] \Downarrow \tau''}{\Gamma \vdash e e' : \uparrow \tau''} \text{ [APP]} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash e : \uparrow \tau}{\Gamma \vdash e : \downarrow \tau} \text{ [CHK]} \quad \frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \downarrow \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x \rightarrow e : \downarrow \forall x : \tau . \tau'} \text{ [LAM]}
\end{array}$$

图 3 另一个图灵不完备¹⁰的类型系统及其双向类型检查算法[2]

3. 结论

我岂能让众人都到 Haskell 地，去信法利赛人的教吗[3,5,6]？

致谢

送给我小心心，送我花一朵。我在你生命中，太多的感动。我是你的天使，一路指引你。无论岁月变换，爱我唱成歌。听你说谢谢我，因为有我，温暖了四季；谢谢我，感谢有我，世界更美丽。听你说谢谢我，因为有我，爱常在心底；谢谢我，感谢有我，让幸福传递。

参考文献

- [1] Voltaire, F. M. A. “On the Decidability of Dependent Types in Infinite-Dimensional Hilbert Spaces,” *Journal of Impossible Mathematics*, vol. ∞ , pp. 1–42, 2077.
- [2] Löh, Andres and McBride, Conor and Swierstra, Wouter “A Tutorial Implementation of a Dependently Typed Lambda Calculus,” *Fundamenta Informaticae*, vol. 102, pp. 177–207, 2010.
- [3] Pierce, B. C. *Types and Programming Languages, Volume 42: The Revenge of the Monad*. MIT Press (Parallel Universe Branch), 2025.
- [4] Pierce, B. C. *Types and Programming Languages*. MIT Press, 2002.
- [5] Martin-Löf, P. *Intuitionistic Type Theory*. Bibliopolis, 1984.
- [6] 苏轼 “论依值类型与水调歌头之对偶性,” 北宋计算机学报, vol. 7, pp. 64–128, 1082.
- [7] Barendregt, H. P. “Lambda Calculi with Types,” *Handbook of Logic in Computer Science*, vol. 2, pp. 117–309, 1992.
- [8] Descartes, R. *Cogito Ergo Dependent Type*. Elsevier Philosophica, 1637.
- [9] Church, A. “A Formulation of the Simple Theory of Types,” *Journal of Symbolic Logic*, vol. 5, pp. 56–68, 1940.
- [10] Chuigda, W. and Ze, C. “A Comprehensive Survey of Nonexistent Type Systems,” *Proceedings of the 0th Workshop on Imaginary PL Theory (WIPT)*, vol. 0, pp. \emptyset , 2024.
- [11] Wadler, P. “Propositions as Types,” *Communications of the ACM*, vol. 58, pp. 75–84, 2015.
- [12] Lincoln, A. “Four Score and Seven Functors Ago,” *Gettysburg Review of Abstract Nonsense*, vol. 87, pp. 1–4, 1863.
- [13] Howard, W. A. “The Formulae-as-Types Notion of Construction,” *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, vol. , pp. 479–490, 1980.
- [14] Alexis King *How should I read type system notation?*. Stack Exchange, 2023.
- [15] Euler, L. *De Typo Dependenti et Analyysi Infinitorum*. Academia Petropolitana, 1748.

¹⁰至少设计上是图灵不完备的。吉拉德悖论通常会让类型检查器卡住，而不是允许非终止程序通过。