Задача о клике

Михаил Анухин
Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий

14 декабря 2017 г.

Аннотация

Рассматривается алгоритм нахождения максимальной клики в неориентированном графе. Известно, что задача относится к классу **NP**-полных задач. Описываемый алгоритм находит точное решение за экспоненциальное время. Предлагаемая эвристика демонстрирует достойную производительность во многих практических приложениях.

1. Введение

В данной статье рассматривается задача поиска максимального полного подграфа в графе. Первые работы в этой области были опубликованы в 30-ых годах **XX** века П.Эрдешем и Д.Секерешем[1]. В дальнейшем проблема становилась предметом большего интереса в научном сообществе и в начале 70-ых годов Р.Карп[2] доказал её **NP**-полноту. Сегодня алгоритмы поиска максимальной клики имеют широкое практическое применение в задачах кодирования, классификации, компъютерного зрения, экономике и бионформатике.

2. Формализация задачи

Пусть дан граф $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$, где V - множество вершин, а E - множество ребер. Требуется найти максимальное подмножество вершин, являющееся кликой, иными словами:

$$\max\{\, V' \subseteq V | \forall a \in V', \forall b \in V', (a, b) \in E \,\} \tag{1}$$

3. Решение задачи

3.1. Детальное описание алгоритма

Data: Graph $G = (V, E)$
Result: Maximal clique $G' = (V', E')$
begin
    $Clique \longleftarrow \emptyset$
    $CliqueSize \longleftarrow 0$
    $LeftBorder \longleftarrow 0$
    $RightBorder \longleftarrow \max(deg(v \in V))$
    $PretenderSize \longleftarrow (LeftBorder + RightBorder)/2$
    $PretenderClique \longleftarrow \emptyset$
    while $LeftBorder \leq RightBorder$ **do**
        $k \longleftarrow$ number of vertices which have degree $\geq PretenderSize$
        $s \longleftarrow$ set of vertices which have degree $\geq PretederSize$
        if $k \geq PretenderSize$ **and**
         SELECT(s,*PretenderSize+1*,*PretenderClique*) **then**
            $Clique \longleftarrow PretenderClique$
            $CliqueSize \longleftarrow PretenderSize$
            $LeftBorder \longleftarrow PretenderSize + 1$
        end
        else
            $RightBorder \longleftarrow PretenderSize - 1$
        end
        $PretenderSize \longleftarrow (LeftBorder + RightBorder)/2$
    end
end

Algorithm 1: FindClique()

Замечание: функция Select(S, L, C) возращает **true**, если во множестве вершин s нашлась клика размера L и помещает такую клику в C, иначе возвращает $false$.

3.2. Подход к решению задачи

Для любого конечного графа G максимальная клика существует и ее размер конечен. Воспользуемся тривиальными оценками на кликовое число графа G, а именно:

$$\omega(G) \leq max(deg(v \in V)) \tag{2}$$

$$\omega(G) \geq 0 \tag{3}$$

Учитывая оценки (2), (3), определим границы возможного размера клики. Затем воспользуемся той же идеей, что лежит в основе алгоритма бинарного поиска. Будем искать клику размера равному среднему арифметическому границ, если клика такого размера нашлась, то не имеет смысла искать клики меньших размеров, если такую клику найти не удалось, то значит и клики большего размера не существует. Исходя из этих соображений, вычислим новые границы и начнем поиск клики размера, определяемого по правилу заданному ранее.

4. Сложность алгоритма

4.1. Корректность

Теорема 4.1. *Алгоритм находит точное решение задачи о максимальной клике.*

Доказательство. Докажем корректность описанного алгоритма. Ясно, что не имеет смысл рассматривать клики размера $k+1$, если клики размера k не нашлось. Аналогично при существовании клики размера k, нет надобности рассматривать клики меньших размеров. Пользуясь этим фактом, мы на каждой итерации алгоритма уменьшаем множество возможных размеров максимальной клики. В силу того, что это множество конечно, а максимальная клика всегда существует, получаем, что алгоритм за конечное количество шагов находит клику максимального размера. □

4.2. Время работы

Теорема 4.2. *Алгоритм находит точное решение задачи о максимальной клике за время* $O(2^n \cdot n^2)$.

Доказательство. Количество итераций цикла **while** можно ограничить сверху количеством вершин в графе, так как правая граница меньше или равна степени максимальной вершины и на каждом шаге границы уменьшаются не меньше чем на 1.В функции Select мы сначала выбираем множество мощности k из множества мощности n. В худшем случае мы переберем все такие множества мощности k.После для каждого множества мы проверим, является ли оно кликой, такая проверка не превосходит n^2 операций. Так как k может меняться от 0 до n, получаем желаемую асимптотику:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot n^2 \sim 2^n \cdot n^2 \tag{4}$$

□

Список литературы

[1] Erdős, Paul; Szekeres, George (1935), „A combinatorial problem in geometry“, „Compositio Mathematica“, 2: 463–470.

[2] Karp, Richard M. (1972), „Reducibility among combinatorial problems„, in Miller, R. E.; Thatcher, J. W., Complexity of Computer Computations , New York: Plenum, pp.85–103.

[3] Thampi, Sabu .M; Krishna P, Murali (2007), „A Fast Heuristic Algorithm Based on Verification and Elimination Methods for Maximum Clique Problem“.

[4] Patric R. J Ostergard, "A Fast Algorithm for the Maximum Clique Problem", Discrete Applied Mathematics, Vol. 120, pp. 197-207, 2002.