2. Proprietăți de închidere ale limbajelor regulate

Fie $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$. Ne punem întrebarea dacă următoarele limbaje aparțin lui $\mathcal{L}_3$ (sunt închise față de respect. oper.)

a) $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$?

b) $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$?

c) $L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_3$ (respectiv $L_2 \setminus L_1 \in \mathcal{L}_3$) ?

d) $C(L_1) \in \mathcal{L}_3$ $(C(L_2) = V^* \setminus L_2)$?

e) $L_1 \cdot L_2 = \{pq \mid p \in L_1, q \in L_2\} \in \mathcal{L}_3$ (respectiv $L_2 \cdot L_1 \in \mathcal{L}_3$)

f) $L_1^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$, unde $L^i = L^{i-1}L$, pt $i>0$ și $L^0 = \{\lambda\}$.

$L_1^* \in \mathcal{L}_3$ (respectiv $L_2^* \in \mathcal{L}_3$) ?

g) limbajele reg. sunt închise la ~~substituții~~ morfisme (inverse) ?

adică dacă $h: V^* \to U^*$, V, U două alfabete

$h(L_1) = \{h(w) \mid w \in L_1\} \in \mathcal{L}_3$ (resp. $h(L_2) \in \mathcal{L}_3$)

m. invers: $h: V^* \to U^*$, $h^{-1}: U^* \to V^*$

$h^{-1}(y) = \{y \in V^* \mid h(x) = y\}$, $h^{-1}(L_1) \in \mathcal{L}_3$?

h) limbajele reg. sunt închise la substituții?

$s: V^* \to 2^{V^*}$, $s(xy) = s(x)s(y)$, $s(L_1) \in \mathcal{L}_3$?

Răspunsul la toate aceste întrebări este DA.

Să demonstrăm, spre exemplu, pt. "$\cup$" și "$\cap$", restul propozițiilor având o dem. asemănătoare

"$\cup$". Fie $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$. Putem defini două gramatici

$G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ și $G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2)$ a.î. $(N_1 \cap N_2 \neq \emptyset)$

$L(G_1) = L_1$ și $L(G_2) = L_2$. Fie $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S_0\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S_0 \to S_1 \mid S_2\})$

unde $S_0 \notin N_1 \cup N_2$. ~~Să dem. mai întâi că~~ o gramatică regulată cu $L(G) = L \in \mathcal{L}_3$.

Să dem. că $L(G) \subset L(G_1) \cup L(G_2)$ (1)

Fie $w \in L(G) \Rightarrow \exists$ o derivare $S_0 \xrightarrow{*} w$ in G'. Singurele producții care se pot aplica prima dată sunt fie $S \to S_1$, fie $S \to S_2$. (considerăm doar $S \to S_1$, pentru $S \to S_2$ se proc. analog). Deci $S_0 \xrightarrow{*} w \Leftrightarrow S_0 \to S_1 \xrightarrow{*} w$, dar în derivarea $S_1 \xrightarrow{*} w$ apar doar neterminale din N_1, deci se pot aplica doar producțiile din P_1, deci există o derivare $S_1 \xrightarrow{*} w$ in $G_1 \Rightarrow w \in L(G_1)$

Să dem. că $L(G) \supset L_1 \cup L_2$. (2)

Fie $w \in L_1(G_1)$ (analog se procedează și pentru $L(G_2)$)

Există o derivare de forma $S_1 \xrightarrow{*} w$. Cum în G am definit producția $S_0 \to S_1 \Rightarrow S_0 \to S_1 \xrightarrow{*} w$ este o derivare în $G \Rightarrow w \in L(G)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) \xRightarrow{\text{definiție } L =} L_1 \cup L_2$

deci $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$ □

"$\cap$". Fie $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, resp. $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ a.î. $L_1 = L(A_1)$ și $L_2 = L(A_2)$. Construim $A = (Q, \Sigma, \delta_{12}, q_{12}, F_{12})$ unde $Q = Q_1 \times Q_2$, $\delta_{12}((q,s),a) = (\delta_1(q,a), \delta_2(s,a))$, $F_{12} = F_1 \times F_2$ și $q_{12} = (q_1, q_2)$.

Să dem. $L(A) \subset L(A_1) \cap L(A_2)$

Fie $w \in L(A) \Rightarrow$ există o tranziție $(q_{12}, w) \vdash_A^* (q_f, \lambda) \Leftrightarrow$ ($q_f \in F_{12}$)

$\Leftrightarrow ((q_1,q_2), w) \vdash^* (q_f, \lambda)$, $q_f = (q_{f_1}, q_{f_2})$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (q_1, w) \vdash^* (q_{f_1}, \lambda) \\ (q_2, w) \vdash (q_{f_2}, \lambda) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} w \in L(A_1) \\ w \in L(A_2) \end{cases} \Leftrightarrow w \in L(A_1) \cap L(A_2)$

Să dem. $L(A) \supset L(A_1) \cap L(A_2)$

Fie $w \in L(A_1) \cap L(A_2) \Rightarrow \exists \begin{cases} (q_1, w) \vdash_{A_1}^* (q_{f_1}, \lambda) \in F_1 \\ (q_2, w) \vdash_{A_2}^* (q_{f_2}, \lambda) \in F_2 \end{cases}$

Fie $q = (q_1, q_2)$ și $q_f = (q_{f_1}, q_{f_2}) \Rightarrow \exists (q, w) \vdash_A^* (q_f, \lambda) \in F_{12}$

$\Rightarrow w \in L(A)$. □

3. Probleme de decizie pentru limbajele regulate

1. Apartenența: pt. $L \in \mathcal{L}_3$, $w \in L$?
2. Trivialitatea: pt. $L \in \mathcal{L}_3$, $L \neq \emptyset$?
3. Finitudinea: pt. $L \in \mathcal{L}_3$, $|L| < \infty$?
4. Incluziunea: pt $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, $L_1 \subseteq L_2$?
5. Echivalența: pt $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, $L_1 = L_2$?

Toate prop. de mai sus sunt decidabile.

1. Apartenența se poate testa prin backtracking.
Fie A un af a.i. $L(A) = L$ și $w = a_1 \dots a_n$. Constr. mulțimile $Q_0 = \{q_0\}, \dots, Q_i = \{q_i \in Q \mid (\exists) s \in Q_{i-1}$ a.i. $q \in \delta(s$
~~Dacă~~ " $Q_n \cap F \neq \emptyset \iff w \in L$. Complexitatea depinde de dimensiunea inputului.

2. Trivialitatea se poate testa prin găsirea unui drum de la q_0 la o stare finală din F, convertind un A af a.i. $L = L(A)$.

3. Finitudinea se testează folosind urm. consecință a lemei de pompare:
<u>Consecință</u> $|L(A)| = \infty \iff \exists w \in L(A)$ $p < |w| \leq 2p$, unde p este const. din lema de pompare.

"$\Leftarrow$" $w \in L(A)$ a.i. $|w| > p \Rightarrow w = uvx$ și $uv^ix \in L(A)$ $(\forall) i \geq$

"$\Rightarrow$" $L(A)$ infinit $\Rightarrow \exists w \in L(A)$ a.i. $|w| \not> p \Rightarrow \begin{cases} |w| \leq 2p \\ |w| \geq 2p+1 \end{cases}$

~~Dacă $|w| \geq 2p+1$ și considerăm $w = uvx$ cu $0 < |v| \leq p$ = (lema de pomp.) $\Rightarrow ux \in L$, și $|ux| \leq p$.~~
~~$|ux| = |w| - |v|$~~
~~$|ux| > p$ ... $\Rightarrow |w| \leq 2p$ □~~

4. ~~Incluziunea~~

~~Fie A_1, A_2 a.f.d. a.î. $L_1 = L(A_1)$ și $L_2 = L(A_2)$~~

~~$L_1 \subseteq L_2 \iff L(A_1) \subseteq L(A_2) \iff \underbrace{\underbrace{C L(A_2)}_{A'} \cap L(A_1)}_{A''} = \emptyset$~~

~~"$\Rightarrow$" $L(A_1) \subseteq L(A_2)$~~

dacă $|w| \geq 2p+1$, cf. lemei de pompare avem că $w = xyz$ a.î. $|xy| \leq p$ și $|y| \geq 1$ și $xz \in L$

Deci : 1) $|xz| = |w| - |y| \geq 2p+1 - p = p+1$.

2) $|xz| < |w|$ deoarece $|y| \geq 1$

adică $|xz| \leq 2p$ ot$_0$ $\square$

$(|w| \geq 2p+1)$

4. Incluziunea

Fie A_1, A_2 două automate finite det. a.î. $L_1 = L(A_1)$ și $L_2 = L(A_2)$. $L_1 \subseteq L_2 \iff L(A_1) \subseteq L(A_2) \iff C(L(A_2)) \cap L(A_1) = \emptyset$

"$\Rightarrow$" $L_1 \subseteq L_2$

Fie $w \in L(A_1) \Rightarrow w \in L(A_2) \Rightarrow w \notin C(L(A_2)) \Rightarrow$

$\Rightarrow C L(A_2) \cap L(A_1) = \emptyset$ $(L(A_1) \subseteq L(A_2))$

"$\Leftarrow$" $C L(A_2) \cap L(A_1) = \emptyset$

$(\Sigma^* - L(A_2)) \cap L(A_1) = \emptyset \Rightarrow L(A_1) \cap L(A_2) \neq \emptyset$

P.p. $\exists w \in L(A_1)$ a.î. $w \notin L(A_2) \Rightarrow w \in C L(A_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow C L(A_2) \cap L(A_1) = \{w\} \neq \emptyset$ ot$_0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall) w \in L(A_1), w \in L(A_2) \Rightarrow L_1 \subseteq L_2$.

5. Echivalența

$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} L_1 \subseteq L_2 \\ \text{și} \\ L_2 \subseteq L_1 \end{cases}$

5. Proprietăți de închidere ale limbajelor independente de context

Fie $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2$. Ne punem întrebarea dacă următoarele limbaje ~~sunt incluse~~ aparțin lui $\mathcal{L}_2$, adică dacă $\mathcal{L}_2$ este inchisă la urm. operații:

a) $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$? DA

b) $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2$? NU

c) $L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$? NU

d) $C L_1 \in \mathcal{L}_2$ $(C L_2 \in \mathcal{L}_2)$? NU

e) $L_1 \cdot L_2 \in \mathcal{L}_2$ $(L_2 \cdot L_1 \in \mathcal{L}_2)$? DA

f) $L_1^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$, unde $L^i = L^{i-1} \cdot L$ ($i > 0$) și $L^0 = \{\lambda\}$

L_1^* = inchiderea Kleene $\in \mathcal{L}_2$ $(L_2^* \in \mathcal{L}_2)$? DA

g) limbajele C.F. sunt inchise la substituții? DA

h) — " — morfisme (inverse)? DA

i) Fie $L_3 \in \mathcal{L}_3$. $L_1 \cap L_3 \in \mathcal{L}_2$? DA

j) Fie $L_3 \in \mathcal{L}_3$. $L_1 \setminus L_3 \in \mathcal{L}_2$? $(L_2 \setminus L_3 \in \mathcal{L}_2)$ DA

Să demonstrăm afirmațiile a), b), c), d) și i).

"$\cup$" Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ și $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ g. C.F. cu $N_1 \cap N_2$ a.i. $L(G_1) = L_1$ și $L(G_2) = L_2$. Fie $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S_0\}, T_1 \cup$ S_0, $P_1 \cup P_2 \cup \{S_0 \to S_1 | S_2\})$ o gramatică C.F. Să dem că $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

Dem $L(G) \subset L(G_1) \cup L(G_2)$ (1)

Fie $w \in L(G) \Rightarrow$ există o derivare de forma $S_0 \xrightarrow{*} w$.
Prima producție ce se poate aplica este însă $S_0 \to S_1$ (respectiv $S_0 \to S_2$), deci derivarea devine $S_0 \to S_1 \xrightarrow{*} w$ ($S_0 \to S_2 \xrightarrow{*} w$). ~~de~~ Așadar există o derivare în G_1 (res. G_2) prin care se ajunge la $w \Rightarrow w \in L(G_1)$ $(w \in L(G_2))$.

"$\cap$". Pentru a demonstra că $L_1 \cap L_2$ nu este necesar C.F.
Vom considera urm. exemplu: $L_1 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\}$ și $L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\}$. Fie $L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$
$L \notin \mathcal{L}_2$. Din lema de pompare considerăm $p \in \mathbb{N}$ și $n > p/3$, iar $w \in L$ de forma $w = uvwxy$ cu $vx \neq \lambda$ și $uv^j w x^j y \in L$, $j \in \mathbb{N}$. Să analizăm subcuvintele v, x.
Să pres. că în v (sau x) intră două din simbolurile a, b, c, de exemplu $v = aabb$. Atunci considerăm $p_2 = uv^2wx^2y = uaabbaabb\,wx^2y$ $\notin L$, dar conf. lemei de pompare $\in L$ abs.
Să pres. că $v \in \{a\}^*$ și $x \in \{b\}^*$. Atunci multiplicând șirurile v și x la o putere suficient de mare, nu vom mai avea același nr. de simboluri a, b și c deci $p \notin L$, dar prin lema de pompare $\in L$ abs. În concluzie $L \notin \mathcal{L}_2$.

"—" Pres. prin absurd că $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_2$, atunci și $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$ dar și $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} \in \mathcal{L}_2$ adică $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2$, contradicție, deci $\mathcal{L}_2$ nu este închisă la complementare. □

"\". Fie $L_1 = \Sigma^* \in \mathcal{L}_2$ și L_2. Pres. prin absurd că $\Sigma^* \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$, adică $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$, contradicție, deci $\mathcal{L}_2$ nu este închisă la diferență. □

---

* Dem $L(G) \supseteq L(G_1) \cup L(G_2)$. (2)
Fie $w \in L(G_1)$ (sau $\in L(G_2)$). Rezultă că există o deriva[re] $S_1 \xrightarrow{*} w$ ($S_2 \xrightarrow{*} w$). Cum în gramatica G există producția $S_0 \to S_1$ ($S_0 \to S_2$) ~~avem~~ putem defini ~~derivarea~~ în G derivarea $S_0 \to S_1 \xrightarrow{*} w$, adică $S_0 \xrightarrow{*} w$. Deci $w \in L(G)$.
($S_0 \to S_2 \xrightarrow{*} w$)
Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$, deci $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$ □

6. Proprietăți de decizie ale limbajelor indep. de context

1. Apartenența: pt. $L \in \mathcal{L}_2$, $w \in L$? DA (decidabilă)
2. Trivialitatea: pt. $L \in \mathcal{L}_2$, $L \neq \emptyset$? decidabilă
3. Finitudinea: pt. $L \in \mathcal{L}_2$, $|L| < \infty$? decidabilă
4. Incluziunea: pt. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2$, $L_1 \subseteq L_2$? nedecidabil
5. Echivalența: pt. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2$, $L_1 = L_2$? nedecidabil

1. Problema apartenenței se poate testa cu ajutorul alg. Cooke – Younger – Kasami: $(w = w_1 \ldots w_n)$

Se construiește $\Delta_{i,j} \subseteq N$ unde $G = (N, T, S, P)$ astfel:

$$A \in \Delta_{i,j} \Leftrightarrow A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_{i+1} \ldots w_j$$

$$\Delta_{i-1,i} = \{A \mid A \to w_i\}$$

$$\Delta_{i,k} = \bigcup_{j=i+1}^{k-1} \{A \mid A \to BC, B \in \Delta_{i,j}, C \in \Delta_{j,k}\}$$

Dacă $S \in \Delta_{0,n} \Rightarrow w \in L$.

2. Problema trivialității construim gramatica echivalentă în F.N.C. Fie $G = (N, T, S, P)$ aceasta. Pentru fiecare $A \in N$ construim $f(A)$ = lung minimă a derivării $A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ cu $\alpha \in T$. Dacă $\nexists\, \alpha$ a.î. $A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$, $f(A) = \infty$. Fie familia de mulțimi $F_i = \{A \mid f(A) = i\}$. (i) (ii)

$F_1 = \{A \mid A \to a \in P\}$, $F_i = \{A \mid A \notin F_1, \ldots, F_{i-1}$ și $A \to BC \in$ a.î. $B \in F_{i-1}$ și $C \in F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1}$ sau $B \in F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1}$ și $C \in F_{i-1}\}$

Să dem. că dacă A îndeplinește (i) și (ii), $f(A) = i$

Din (i) $\Rightarrow f(A) \geq i-1$

Din (ii) $\Rightarrow$ $f(B) \geq i-1$, $f(C) \geq 1$ sau $f(B) \geq 1$, $f(C) \geq i-1$ $\Rightarrow f(A) \geq i$.

Să pres. $B \in F_{i-1}$ și $C \in F_1 \cup \ldots \cup F_{i-1}$ (pt. celălalt caz se dem. an

$A \xrightarrow{1} BC$

$$\left.\begin{array}{l} B \xrightarrow{i-1} \alpha_1 \\ C \xrightarrow{\leq i-1} \alpha_2 \end{array}\right| \Rightarrow BC \xrightarrow{i-1} \underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{\beta} \in T \Bigg| \Rightarrow A \xrightarrow{i} \beta =$$

$\Rightarrow f(A) = i$.

Se observă astfel că F_i se obține din F_{i-1}, deci dacă $F_i = \emptyset \Rightarrow F_{i+1} = \emptyset \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_{i+k} = \emptyset$ $(\forall)\, k \in \mathbb{N}$.

Așadar, construind $F = \bigcup_{i=1} F_i$ putem det. dacă $L \neq \emptyset$.

3. Problema finitudinii se poate decide cu ajutorul următoarei consecințe a lemei de pompare pt. limbajele indep. de cont

<u>Consecință</u>

Fie G o gramatică C.F. Atunci $L(G)$ este infinit $\Leftrightarrow \exists\, z \in L(G)$ a.î. $p < |z| \leq p+q$, p, q const. din lema de pompare.

Dem.

„$\Rightarrow$" $L(G)$ infinit $\Rightarrow \exists\, z \in L(G)$ a.î. $|z| > p \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| \leq p+q & \text{a} \\ |z| \geq p+q+1 \end{cases}$$

Pres. că $|z| \geq p+q+1$. Din lema de pompare avem că $z = uvwxy$ cu $|v|+|x| > 0$, $|vwx| \leq q$ astfel încât $uwy \in L(G)$. $|uwy| < |z|$ și $|z| - |uwy| = |vx| \leq q$

7. Forma normală Chomsky

O gramatică indep. de context se află în forma normală Chomsky dacă regulile ei sunt de tipurile $A \to BC$, $A,B,C \in N$ și $A \to a$, $A \in N$, $a \in T$.

Teoremă Orice gramatică C.F. se poate transforma într-o gramatică în F.N.C. echivalentă cu aceasta.

Dem. Conversia gram. i.c. $G=(N,T,S,P)$ în gram. $G'=(N',T',S',P')$ în formă norm. Chomsky se efectuează în ~~patru~~ pași.

Pasul 1 Se elimină λ-producțiile (regulile $A \to \lambda$ pt $A \in N$)

$P_{(1)}$ Pentru început se găsesc toate variabilele $A \in N$ cu prop că $A \xrightarrow{*} \lambda$.
Considerăm acum producția $A \to X_1 \dots X_k$, $k>0$ unde $X_i \in N \cup T$ și câteva X_i au prop (1).
Construim mulțimile $\Delta = \{A \in N \mid A \xrightarrow{*} \lambda\}$

$\Delta_0 = \{A \in N \mid A \to \lambda \in P\}$ ... $\Delta_k = \{A \in N \mid A \to \alpha, \alpha \in \Delta_{k-1}^*\} \cup \Delta_{k-1}$, pt $k>0$.

În mod evident $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \dots \subseteq N \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, k$ a.î. $\Delta_k = \Delta_{k+1} \Rightarrow \Delta = \Delta_k$

Definim $G^{(1)} = (N^{(1)}, T^{(1)}, S^{(1)}, P^{(1)})$ unde $N^{(1)} = N$, $S^{(1)} = S$, $T^{(1)} = T$
și $P^{(1)} = \{A \to f(x) \mid A \to x \in P\} \setminus \{A \to \lambda \mid A \neq S\}$
unde $f(x) = \begin{cases} x & \text{pt } x \in T \cup (N \setminus \Delta) \\ \{x, \lambda\} & \text{pt } x \in \Delta \end{cases}$ → nedeterminism

Pasul 2 Se elimină producțiile unitate ($A \to B$, $A,B \in N$)
Construim $G^{(2)} = (N^{(2)}, T^{(2)}, S^{(2)}, P^{(2)})$ cu $N^{(2)} = N^{(1)}$, $T^{(2)} = T^{(1)}$
$S^{(2)} = S^{(1)}$ ~~și $P^{(2)} \neq$~~.

Construim mulțimile $\Gamma(A) = \{B \mid A \xrightarrow{*} B\}$
$\Gamma_0(A) = \{B \mid A \to B\}$ ... $\Gamma_k(A) = \Gamma_{k-1}(A) \cup \{B \mid \exists C \in \Gamma_k$ a.i. $C \to B \in P^{(1)}\}$.

Definim $P^{(2)} = \{A \to g(x) \mid A \to x \in P^{(1)}\} \setminus \{A \to B \mid A, B \in N\}$

unde $g(x) = \begin{cases} x, & x \in T^{(2)} \\ \Gamma(x) \cup \{x\}, & x \in N^{(2)} \end{cases}$

Pasul 3 Eliminarea terminalelor în exces.

Considerăm producțiile din $P^{(2)}$ de forma $A \to B_1 B_2 \dots B_k$ care conține un terminal α. Adăugăm producția $C_\alpha \to \alpha$ dacă aceasta nu există și apoi înlocuim fiecare $B_i = \alpha$ cu C_α. Deci $G^{(3)} = \{N^{(3)} = N^{(2)}, T^{(3)} = T^{(2)}, S^{(3)} = S^{(2)}, P^{(3)}\}$,

unde ~~$P^{(3)}$ este definit~~ $P^{(3)} = \{A \to h(x) \mid A \to x \in P^{(2)}\} \setminus \{A \to B \dots$ cu prop că $\exists$ cel puțin un indice i a.î. $B_i = \alpha\}$.

$h(x) = \begin{cases} x, & x \in T^{(2)} \\ \Delta(x) \cup \{x\}, & x \in N^{(2)} \end{cases}$

unde $\Delta(x) = \{A \to \dots\}$ $P^{(3)}$ def. ca mai sus

Pasul 4

Considerăm toate producțiile de forma $A \to B_1 B_2 \dots B$ pt $k \geq 3$ și le înlocuim cu următoarele producții:

$$\begin{cases} A \to B_1 C_1 \\ C_1 \to B_2 C_2 \\ C_2 \to B_3 C_3 \\ \vdots \\ C_{k-2} \to B_{k-1} B_k \end{cases}$$

Astfel gramatica $G^{(4)} = (N^{(4)} = N^{(3)}, T^{(4)} = T^{(3)}, S^{(4)} = S^{(3)}, P^{(4)} =$ construit din $P^{(3)}$ prin op. def. mai sus) este o gramatică în formă normală Chomsky.

Dem. $L(G) = L(G^{(1)}) = L(G^{(2)}) = L(G^{(3)}) = L(G^{(4)})$

1) $L(G) = L(G^{(1)})$

Fie $w \in L(G) \Rightarrow \exists\ \cancel{S} \xrightarrow{i}_G w$, $i > 0$. $(\subset)$

pt $i = 1$ $S \rightarrow_G w \Rightarrow S^{(1)} \rightarrow_{G^{(1)}} w \Rightarrow w \in L(G^{(1)})$

pt $i > 1$ pres. prop. adevărată $(S \xrightarrow{i}_G w \Rightarrow S \xrightarrow{i}_{G^{(1)}} w)$

pt orice $k < i$.

Fie $x_1, \dots, x_n$ a.î. $S \rightarrow_G x_1 \dots x_n \xrightarrow{i-1}_G w$

Deci $w = w_1 w_2 \dots w_n$ a.î. $(\forall) j$ $X_j \xrightarrow{\leq i}_G w_j$. Dacă $w_j \neq \lambda$ $(\forall) j$ atunci aplicăm ipoteza de inducție și ~~deci~~ ~~Dacă nu~~ obținem $X_j \xrightarrow{*}_{G^{(1)}} w_j \Rightarrow S \xrightarrow{*}_{G^{(1)}} w \Rightarrow w \in L(G$

Dacă nu și $\exists j$ a.î. $w_j = \lambda \Rightarrow X_j$ este anulabil și vom avea în $P^{(1)}$ producția $S^{(1)} \rightarrow \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ cu $\beta_j = w_j$ dacă $w_j \neq \lambda$ și $\beta_j = \lambda$ altfel. Deci $\beta_1 \dots \beta_m \xrightarrow{*}_{G^{(1)}} w$ (ip) $\Rightarrow$
$\Rightarrow w \in L(G^{(1)})$. Astfel am dem. „$\subset$"

Fie $w \in L(G^{(1)}) \Rightarrow \exists S^{(1)} \xrightarrow{i}_{G^{(1)}} w$, $i > 0$ $(\supset)$

În mod evident $w \neq \lambda$.

pt $i = 1$ avem că $S^{(1)} \rightarrow_{G^{(1)}} w$ ~~$\Rightarrow S \rightarrow_G w \Rightarrow w \in L(G$~~

~~pt $i > 1$ pres. ip. adev. pt $(\forall)$ $k < i$.~~

Deci $\exists$ o producție $S \rightarrow \alpha$ în P a.î. $\alpha = \alpha_1 X_1 \alpha_2 X_2 \dots \alpha_n$ cu $w = \alpha_1 \dots \alpha_{n+1}$ și $X_1 \dots X_n$ anulabile, deci $S \rightarrow_G \alpha =$
$= \alpha_1 X_1 \dots \alpha_n X_n \xrightarrow{*}_G \alpha_1 \dots \alpha_{n+1} \rightarrow w \Rightarrow w \in L(G)$

pt $i > 1$ pres. prop. adev. pt $k < i$.

$S^{(1)} \xrightarrow{i}_{G^{(1)}} w \Rightarrow S^{(1)} \rightarrow_{G^{(1)}} X_1 \dots X_n \xrightarrow{i-1}_{G^{(1)}} w$, deci

$S \xrightarrow{*}_G X_1 \dots X_n$

Dar $w = w_1 \dots w_n$ a.î. $X_j \xrightarrow{\leq i-1}_{G^{(1)}} w_j$ și $w_j \neq \lambda$

Aplicând ip. de inducție obținem că $X_j \xrightarrow{*}_G w_j$, deci

$S \xrightarrow{*}_G w_1 \dots w_n = w \Rightarrow w \in L(G)$

Având în vedere „$\subset$" și „$\supset$" $\Rightarrow L(G) = L(G^{(1)})$ $\square$

2. $L(G^{(1)}) = L(G^{(2)})$.

Este aproape evident dacă privim prin arborii de derivare.
Fie $w \in L(G^{(1)}) \Rightarrow \exists$ un arbore de derivare pt w. ~~din care~~
~~rezultă corespund secvența~~ $\cancel{S^{(1)} \xrightarrow[G^{(1)}]{} A_1 \xrightarrow[G^{(1)}]{} A_2 \xrightarrow[G^{(1)}]{} \dots \xrightarrow[G^{(1)}]{} A_n}$
Considerăm ramurile de forma $S^{(1)} \xrightarrow[G^{(1)}]{} A_1 \xrightarrow[G^{(1)}]{} \dots \xrightarrow[G^{(1)}]{} A_n \rightarrow \alpha \overset{*}{\rightarrow} w$

unde $\alpha = B_1 \dots B_k$, $k \geq 2$.
Considerăm acum arborele lui w în $G^{(2)}$. Se observă că muchiile $S^{(1)} \rightarrow A_1 \xrightarrow[G^{(1)}]{} \dots \rightarrow A \rightarrow \alpha$ dispar și sunt înlocuite cu $S^{(2)} \xrightarrow[G^{(2)}]{} \alpha$.
Dacă pe drumul de derivare $\alpha \xrightarrow[G^{(1)}]{*} w$ mai există astfel de muchii, în $G^{(2)}$ se înlocuiesc ca mai sus. Obținem astfel secvența de derivare $S^{(2)} \xrightarrow[G^{(2)}]{} \alpha_1 \xrightarrow[G^{(2)}]{} \dots \xrightarrow[G^{(2)}]{} \alpha_n \xrightarrow[G^{(2)}]{} w$
provenită din $S^{(1)} \xrightarrow[G^{(1)}]{} A_1^{(1)} \xrightarrow[G^{(1)}]{} \dots \xrightarrow[G^{(1)}]{} A^{1}_{n_1} \xrightarrow[G^{(1)}]{} \alpha_1 \xrightarrow[G^{(1)}]{} A^{(2)}_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(2)}_{n_2} \rightarrow \dots \xrightarrow[G^{(1)}]{} w$. Deci $w \in L(G^{(1)})$. ~~Analog, fie $w \in L$~~
Analog, fie $w \in L(G^{(2)})$. $S^{(2)} \xrightarrow[G^{(2)}]{*} w$ cu secvența de derivare
$S^{(2)} \xrightarrow[G^{(2)}]{} \alpha_1 \xrightarrow[G^{(2)}]{} \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \xrightarrow[G^{(2)}]{} w$. Producțiile de forma
$\alpha_i \xrightarrow[G^{(2)}]{} \alpha_{i+1}$ se obțin prin adăugarea prod. din $P^{(1)}$ de forma $\alpha_i \xrightarrow[G^{(1)}]{} A^{(i)}_{(1)} \xrightarrow[G^{(1)}]{} A^{(i)}_2 \xrightarrow[G^{(1)}]{} \dots A^{(i)}_{n_i} \xrightarrow[G^{(1)}]{} \alpha_{i+1}$.
Deci $(\exists)$ $S^{(1)} \xrightarrow[G^{(1)}]{*} w$ și $w \in L(G^{(1)})$. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sunt de forma $\alpha_i = B^{(i)}_1 B^{(i)}_2 \dots B^{(i)}_{m_i}$ cu $m_i > 1$.

3. $L(G^{(2)}) = L(G^{(3)})$
Fie $w \in L(G^{(2)}) \Rightarrow \exists$ $S^{(2)} \xrightarrow[G^{(2)}]{*} w$.
Pres. că $\exists$ A a.î. $S^{(2)} \xrightarrow[G^{(2)}]{*} A \xrightarrow[G^{(2)}]{} B_1 B_2 \dots B_i \overset{B_{i+1}}{\overset{\parallel}{\alpha}} B_{i+2} \dots B_n \xrightarrow[G^{(2)}]{*} w$
Atunci $\exists$ $S^{(3)} \overset{*}{\rightarrow} A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_i C_\alpha B_{i+2} \dots B_n \overset{*}{\rightarrow}$
$\rightarrow B_1 B_2 \dots B_i \alpha B_{i+2} \dots B_n \overset{*}{\rightarrow} w \Rightarrow w \in L(G^{(3)})$.
Analog $w \in L(G^{(3)}) \Rightarrow w \in L(G^{(2)})$.

4. Analog cu 3.