

# Calculabilitate & Complexitate

## Subiectul 1

Mașini Turing

---

### Ce tre să știi?

Nota 6:

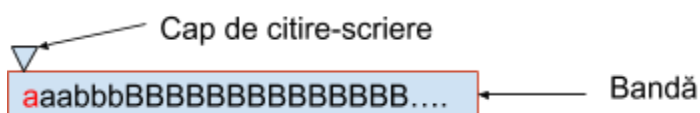
- definitii pentru toate tipurile de masini Turing (deterministe, nedeterministe, cu mai multe benzi)
- limbaj acceptat si functie Turing calculabila
- relatiile intre ele tipurile de masini Turing (enunturi)

Fiecare demonstratie, la alegere: 2p

### Definiții

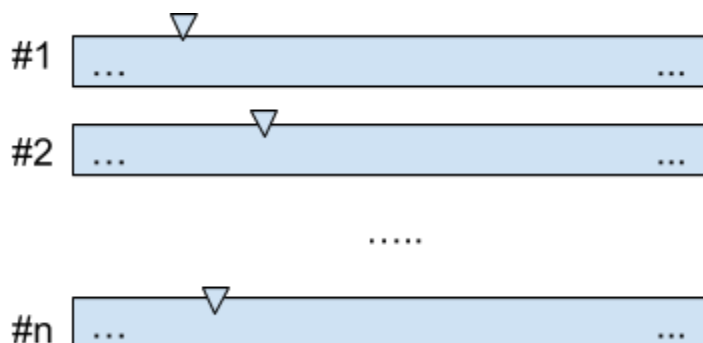
O **mașină Turing** se definește ca un 7-tuplu  $M = (Q, V, U, \delta, q_0, B, F)$ , unde:

- **Q** este mulțimea stărilor
- **V** este alfabetul de input
- **U** este alfabetul benzii, include V (pentru că mașina modifică inputul)
- $\delta$  este funcția de tranziție, parțial definită.
  - Dacă mașina are o singură bandă:



- $\delta : Q \times U \rightarrow P(Q \times U \times \{L, R\})$
- $\delta(q, a)$  conține  $(s, b, X) =$  dacă mașina se află în starea  $q$  și citește pe bandă simbolul  $a$ . Atunci:

1. Înlocuiește simbolul a cu simbolul b
  2. deplasează capul de citire scriere în direcția indicată de X.
  3. Schimbă starea q în starea s
- Mașina Turing se numește **deterministă** dacă  $|\delta(q, a)| \leq 1$  oricare ar fi q și a. Altfel, mașina se numește **nedeterministă**.
  - Dacă mașina are mai multe benzi:



- $\delta : Q \times U^n \rightarrow P(Q \times U^n \times \{L, R\}^n)$
  - $\delta(q, a_1, a_2, \dots, a_n)$  conține  $(s, b_1, b_2, \dots, b_n, X_1, X_2, \dots, X_n)$  = dacă mașina se află în starea q și citește simbolul  $a_1$  pe banda 1,  $a_2$  pe banda 2, ...,  $a_n$  pe banda n, atunci:
    1. scrie  $b_1$  în locul lui  $a_1$ ,  $b_2$  în locul lui  $a_2$ , ...,  $b_n$  în locul lui  $a_n$
    2. capul de citire scriere corespunzător benzii i se deplasează în direcția indicată de  $X_i$ .
    3. Schimbă starea q în starea s
  - Dacă  $|\delta(q, a_1, a_2, \dots, a_n)| \leq 1$ , pentru orice q și orice  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , atunci mașina se numește **deterministă**. Altfel, mașina Turing este **nedeterministă**.
- **q0** este starea inițială a mașinii
  - **B** este simbolul blank (simbol care marchează sfârșitul inputului)
  - **F** este mulțimea stărilor finale

Mașina Turing M poate fi:

- Dispozitiv de acceptare
  - Mașina are la început pe bandă un cuvânt  $w \in V^*$

- Mașina decide dacă  $w \in L(M) = L$ :
  - Dacă M se oprește într-o stare finală, atunci w este **acceptat** ( $\in L$ ).
  - Dacă M nu se oprește sau se oprește într-o stare nefinală, atunci w este **respins** ( $\notin L$ ).
- $\{w \in V^* \mid w \text{ acceptat de } M\} = L(M) = \text{limbajul acceptat de } M$
- Dispozitiv de calcul
  - Avem funcția  $f : N^k \rightarrow N$  - definită parțial sau total
  - Input:  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  din  $N^k$ , scris astfel:  $1^{x_1+1}01^{x_2+1}0\dots01^{x_k+1}$
  - Dacă  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  este definit, mașina se oprește într-o stare finală și vom găsi pe bandă output-ul:  $1^{f(x_1, x_2, \dots, x_k)+1}$
  - Dacă  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$  nu este definit, mașina nu se oprește într-o stare finală
  - Dacă se poate construi o astfel de mașină pentru funcția f, atunci f se numește **Turing calculabilă**.

## Relațiile între tipurile de mașini Turing

1. O mașină Turing cu n benzi este echivalentă cu o mașină Turing cu o singură bandă.
2. O mașină Turing nedeterministă cu o bandă este echivalentă cu o mașină Turing deterministă cu 3 benzi.
3. Deci, o mașină Turing nedeterministă cu o singură bandă este echivalentă cu o mașină Turing deterministă cu o singură bandă. (rezultă din 1 și din 2).

## Demonstrații

**Pentru orice mașină Turing M nedeterministă cu o bandă, există o mașină Turing cu 3 benzi M', deterministă echivalentă cu M.**

### Demonstrație

Fie  $M = (Q, V, U, \delta, q_0, B, F)$  o mașină Turing nedeterministă.

Fie  $E = \{(q, a, s, b, x)\}$  unde:

- 
- $q, s$  sunt stări (elemente ale mulțimii  $Q$ )
  - $q$  nu este stare finală (nu aparține lui  $F$ )
  - $a, b$  sunt din  $U$  și  $b$  nu e  $B$ .
  - $x$  e  $L$  sau  $R$ .
  - Dacă mașina se află în starea  $q$  și citește simbolul  $a$ , atunci scrie  $b$ , deplasează capul de citire în direcția indicată de  $x$  și trece în starea  $s$ .

$M'$  are 3 benzi și lucrează astfel:

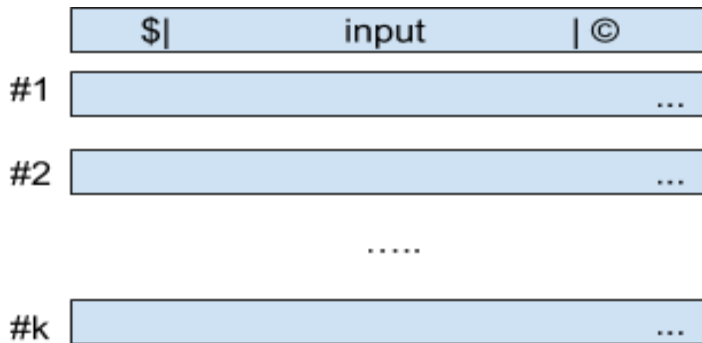
1. Copiază  $w$  pe banda 3.
2. Generează pe banda 2 succesorul cuvântului din  $E^*$  înscris pe bandă.
3. Citește simbolul de pe banda 2:  $(q, a, s, b, x)$ 
  - a. Verifică dacă mașina se află în starea  $q$ . Dacă nu, merge la pasul 5.
  - b. Verifică dacă simbolul citit de pe banda 1 este  $a$ . Dacă nu, merge la pasul 5.
  - c. Scrie  $b$  peste  $a$ .
  - d. Schimbă starea în  $s$ .
  - e. Deplasează capul de citire scriere pe banda 1 în direcția indicată de  $x$ .
  - f. Deplasează capul de citire scriere pe banda 2 la dreapta.
  - g. Dacă mai sunt simboluri pe bandă, se reia pasul 3. Altfel, merge la pasul 4.
4. Verificăm dacă starea obținută e finală. Dacă da, ne oprim. Altfel mergem la pasul 5.
5. Copiază  $w$  de pe banda 3 pe banda 1. Merge în starea  $q_0$  și merge la pasul 2.

**Pentru orice mașină Turing  $M$  cu  $k$  benzi, există o mașină Turing cu o bandă,  $M'$ , care echivalentă cu  $M$ .**

În plus, dacă  $M$  este deterministă,  $M'$  este și ea deterministă.

---

Avem mașina M, cu k benzi:



Și acum, construim mașina M' astfel:

- M' are o singură bandă auxiliară, iar elementele ei vor fi **vectori cu 2k piste:**
  - Pe pista  $2 * i - 1$  se află conținutul benzii i a mașinii M
  - Pista  $2 * i$  conține 0-uri mai puțin pe o poziție - are 1 unde se afla capul de citire-scriere al benzii i a mașinii M.
  - Mașina M' citește conținutul benzii de la stânga la dreapta și memorează simbolurile de pe piste impare aflate imediat deasupra simbolurilor 1 de pe piste pare.
  - Când ajunge la finalul benzii, simulează mișcările pe care le-ar fi făcut mașina M. Parcurge din nou banda, dar de la dreapta la stânga, și actualizează conținutul pistelor impare în conformitate cu simbolurile ce ar fi fost scrise de mașina M și conținutul pistelor pare în conformitate cu direcția în care s-ar fi deplasat fiecare cap de citire.