Geometrie

-Seminar-

Spații afine (euclidiene)

1. Fie $\mathbb{A} = \mathbb{R}^3$ cu str canonică de spațiu afin

$A(1,0,0)$, $B(0,1,2)$, $C(0,0,-1)$

1) Scrieți ec dreptei AB

2) Sunt A,B,C coliniare?

3) Dacă nu, ecuația planului π determinat de A,B,C

4) Aflați $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $\left(d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}\right) \subseteq \pi$

Rez: 1) AB: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}$

I $\boxed{\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} = t}$

Obs: Un subspațiu afin în $\mathbb{A}^n$ este de fm $\mathcal{A}$: $\underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{A}}x + \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{b}} = 0$

În $\mathbb{R}^2$ - dreaptă - 1ec

În $\mathbb{R}^3$ - plan, 1ec

- dreaptă - 2ec

II ca sol a unui sistem de ec

$$\begin{cases} x-1+y=0 & \leftarrow \text{Plan 1} \\ 2y-z=0 & \leftarrow \text{Plan 2} \end{cases}$$

III Ec parametrică

$d: \{u + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$

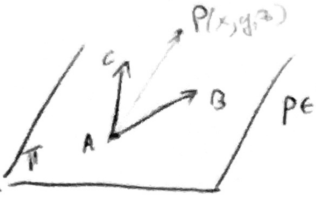
$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$\boxed{(x,y,z) = (1,0,0) + t(-1,1,2) : d_{AB}}$

2) A, B, C col $\Leftrightarrow C \in (AB)$ [Fals]

$\left(\frac{0-1}{-1} = 0 = -\frac{1}{2}\right)$

3)



$P \in \pi \Leftrightarrow \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AP}$ liniar dependenți $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} \overline{AB} \\ \overline{AC} \\ \overline{AP} \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ x-1 & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2y+1-x-y+z = 0 \Leftrightarrow x+3y-z-1=0 \quad (\pi)$$

4) I sistemul $\begin{cases} \alpha(x-1) - 2y = 0 \\ y - \alpha z = 0 \\ x+3y-z-1=0 \end{cases}$ are ca sol. o dreaptă

II $d_\alpha \subseteq \pi$, $d_\alpha : x = 2t+1$, $y = \alpha t$, $t \in \mathbb{R}$, $z = t$ $\Leftrightarrow (2t+1) + 3\alpha t - t - 1 = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3\alpha+1)t = 0, \forall t \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$

2. $\mathbb{A} = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de sp. afin

$\pi: x - y + 2z - 3 = 0$, $A(1,1,1)$

1) Ec planului $\pi' : \pi \parallel \pi', A \in \pi'$

Obs: $\pi: ax+by+cz+d=0$

$\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

Avem $\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

$\Rightarrow \pi': x - y + 2z + d = 0$, d a.î. $A \in \pi' \Leftrightarrow 1 - 1 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

2) i) Găsiți ecuația unei perpendiculare comune pt. π și π'

De ex, $d: t(1,-1,2)$

ii) —||— prin A, $d: t(1,-1,2) + u = t(1,-1,2) + (x_u, y_u, z_u)$

$d \perp \pi$

$d \perp \pi'$

Pt $A \in d$ alegem $u = A$

3) $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{\alpha}$; $\alpha = ?$ a.î. $d \parallel \pi$

$Dir(\pi) = \langle(1,-1,2)\rangle^{\perp}$

↑

sp director

subsp vect în $\mathbb{R}^3$

$d \parallel \pi \Leftrightarrow Dir(d) \subseteq dir(\pi)$

$dir(d) = \langle(2,3,\alpha)\rangle$

$\Leftrightarrow \langle(2,3,\alpha),(1,-1,2)\rangle = 0 \Leftrightarrow 2-3+2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

4) Găsiți o perpendiculară comună pt d, π

Alegem $A \in d$; $A = (1,1,1)$

$d' : \{(1,1,1) + t(1,-1,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Examen ~~...~~ seminar

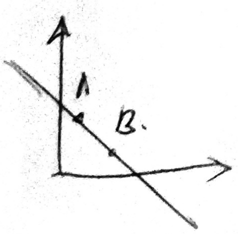
1. a) Def noțiunea de subspațiu afin

$A' \subseteq A$ s.n. subspațiu afin dacă $P_1, \dots, P_n \in A' \Rightarrow$

↑

sp afin

$\Rightarrow \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n \in A'$, $\forall$ $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$



b) Fie $A = \mathbb{R}^3$ cu str. canonică de sp. afin.

Det $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. subsp afin generat de $\begin{cases} P = (1, 0, \alpha) \\ Q = (2, \beta, 0) \\ R = (1, 1, 1) \end{cases}$

să nu intersecteze subsp generat de $\begin{cases} A = (1, 2, -1) \\ B = (0, 2, 0) \\ C = (3, -1, 0) \end{cases}$

$A' = Sp(P, Q, R) = \{a_1 P + a_2 Q + a_3 R \mid a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$

$A'' = Sp(A, B, C) = \{b_1 A + b_2 B + b_3 C \mid b_1 + b_2 + b_3 = 1\}$

MI. Aflăm $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, avem

$a_1 P + a_2 Q + a_3 R \neq b_1 A + b_2 B + b_3 C$

MII: $d_{AB}: \frac{x-1}{-1} = \frac{z+1}{1} = t$

$y - 2 = 0 \cdot t \Rightarrow y = 2$

$C \notin d_{AB} \Rightarrow \dim(A'') = 2$ (1)

$d_{PQ}: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{\beta} = \frac{z-\alpha}{-\alpha}$

$\frac{1-1}{1} \neq \frac{1}{\beta} \Rightarrow R \notin d_{PQ} \Rightarrow \dim(A') = 2$ (2)

(1) și (2) $\Rightarrow$ (A' și A'' nu se int $\Leftrightarrow A' \parallel A''$)

$A'': \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A'': 3x + 3y + 3z - 6 = 0$

$A': \begin{vmatrix} x-1 & y & z-\alpha \\ 1 & \beta & -\alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A': (\beta(1-\alpha)+\alpha)x + (\alpha-1)y + z + \ldots = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta(1-\alpha) + \alpha = \alpha - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 1$

2. a) Def. izomorfismul între spații afine

$f: A \to A'$ e morfism de sp afine dacă

$f(\sum \alpha_i P_i) = \sum \alpha_i f(P_i); \forall P_i \in A; \forall \alpha$ cu $\sum \alpha_i = 1$

f izom $\Leftrightarrow$ f morfism bijectiv.

b) Fie $\mathbb{A} = \mathbb{R}^3$ cu str canonică de sp. afin și

$f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$

Dacă $d: \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 1}{2} = \frac{x_3 - 1}{2}$, determinați $f(d)$

$d: \left. \begin{aligned} x_1 &= 2t + 1 \\ x_2 &= 2t + 1 \\ x_3 &= t + 1 \end{aligned} \right| = (1,1,1) + t(2,2,1)$

M I $f(d) = (0,2,2) + t(0,3,3)$

M II Aleg $A, B \in d$, $A \neq B$ $f(d) = \underbrace{(f(A) f(B))}_{\text{dreapta}}$

c) $\exists$ plane $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ a.î. $f(\pi)$ este dreaptă?

I f izomorfism $\Rightarrow$ e imposibil

II f nu e izom $\Rightarrow$ $\exists$ și dăm exp.

$f(x) = Ax + b$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = 0$

f izom $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$\det(A) = 0$ $\Rightarrow$ nu e izom

$\operatorname{Ker} A = \langle \underbrace{(1,1,-1)}_{P} \rangle$

Fie $Q = (0,0,1)$

$\Rightarrow f(\pi_{OPB})$ dreaptă

$$\pi_{OPB} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{etc (calculăm } x, y, z)$$