Forma standard (prob 1)
min $c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$,
$x, c \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$, rang $A = m \leq n$
functia obiectiv $f : \mathcal{P} \subseteq R^k \to R$
$f(x_1..x_k) = c^T x$

Transformarea in forma standard
$x_1 \ldots x_i \leq$ ceva -> $x_1 \ldots x_i + x_{nou}$ = ceva
$x_1 \ldots x \geq$ ceva -> $x_1 \ldots x_i - x_{nou}$ = ceva

Schimbari de var:
$x_i \leq 0$ -> $x_{nou} = -x_i$
$x_i \in R$ -> $x_i = x_{nou1} - x_{nou2}$

x_{nou} - urile se adauga in fct obiectiv cu coeficient 0

x care verifica restrictiile (Ax=b) sn **solutie admisibila**
$\mathcal{P}$ este multimea (poliedrul) sol admisibile

$\Sigma x_i \lambda_i$ se num:
-**combinatie liniara**: $\lambda^T x$
-**combinatie afina**: $\Sigma\lambda_i = 1$
-**combinatie convexa**: $\lambda_i \in [0, 1]$
dreapta = mt combinatiilor afine
segment = mt combinatiilor convexe
M **convexa** daca $\forall x_1, x_2 \in M$, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M$, $\lambda \in [0, 1]$
M **afina** daca $\forall x_1, x_2 \in M$, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M$, $\lambda \in R$
Multimea sol sist Ax=b este mt afina
Poliedrul sol admisibile este mt convexa

$x \in C$ este **punct extremal** al multimii convexe C daca $\nexists x_1, x_2 \in C$, $x_1 \neq x_2$ a.i. x sa fie in interiorul segm $[x_1, x_2]$

$x^* \in \mathcal{P}$ se numeste **varf** al poliedrului $\mathcal{P}$ daca $\exists c \in \mathcal{R}^n$ astfel incat $c^T x^* < c^T x$ $\forall x \in \mathcal{P}$

Vect. $x_1..x_p$ sn **liniar independenti** $\Leftrightarrow \Sigma x_i \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$, $\forall i = 1..p$
Vect. $x_1..x_p$ sn **liniar independenti** $\Leftrightarrow$ det. Matricei formate de acesti vectori $\neq 0$

Caracterizarea solutiei extremale ale poliedrului sol admisibile
x este pct extremal al lui $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ coloanele lui A corespunzatoare componentelor pozitive ale lui x sunt liniar independente
x pct extremal $\Leftrightarrow$ x solutie de baza
$\{v^i : i \in \mathbf{I}\}$ mt pct extremale ale $\mathcal{P}$, atunci $\forall x \in \mathcal{P}$: $x = \lambda_i v_i + \alpha d$, $\lambda_i \geq 0$, $\Sigma\lambda_i = 1$, d = 0 sau d directie extremala
Cazul rangA = $m \leq n$:
Corolar1: $x \in \mathcal{P}$ este p. extremal al lui $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow$ este sol. adm de baza prob(1)

Corolar2: $\mathcal{P}$ are cel mult comb(n,m) pct. extremale.
Teorema fundamentala a optimizarii liniare: prob (1) de optimizare liniara fie are optim ∞ fie exista sol optima printre punctele extremale ale poliedrului $\mathcal{P}$, sunt sol admisibile de baza pt prob (1)

Teorema: Conditia de optim
Fie B baza primal admisibila. Daca $\forall j \in \mathcal{R}$ $r_j \geq 0$ ($r_j = c_j - c_B^T B^{-1} A^j$), adica $\mathbf{c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0}$, atunci sol de baza $x_B = (B^{-1}b, 0)$ este **solutie optima**.

Daca $\exists$ un $r_j = 0$ cu $j \in \mathcal{R}$ atunci problema admite **solutii optime multiple.** (pentru o baza B primal admisibila).

Se numeste **semispatiu** in R^n multimea de puncte $\{x \in R^n \mid a^T x \leq b\}$ b constanta

Hiperplanul este o intersectie de 2 semi spatii complementare. Dimensiunea unui hiperplan este cu 1 mai mica decat dimensiunea spatiului initial.

Intersectia finita a unor semispatii inchise se numeste **poliedru**.
Un poliedru care este multime nevida si marginita se numeste **politop**.

d se numeste **directie extremala** (de recesiune) pentru $\mathcal{P}$ daca $\forall$ $x_0 \in \mathcal{P}$, $x_0 + \lambda d \in \mathcal{P}$, $\lambda \geq 0$. Un politop este nemarginit daca are o directie extremala.

x_B este **solutie de baza** corespunzatoare bazei B daca $x_B = (B^{-1}b, 0)$. Daca $x_B \geq 0$, adica $B^{-1}b \geq 0$, x_B sn **solutie admisibila de baza** corespunzatoare bazei B care la randul ei sn **baza primal admisibila**.

Pt Ax = b: fie m = rang(A)
x **solutie de baza nedegenerata** daca nr de componente nenule = m
x **solutie de baza degenerata** daca nr de componente nenule < m, adica pt pr de optimizare: inf $c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$, $x = (x_B, 0) = (B^{-1}b, 0) \geq 0$. Daca $B^{-1}b$ are comp nule, x sn **solutie degenerata**.

Teorema (optim infinit):
Fie B o baza primal admisibila. Daca $\exists j \in \mathcal{R}$ a.i. $r_j < 0$ si $d^j \geq 0$ atunci pb1 are **optim infinit** (unde $\mathbf{d^j = (-B^{-1} A^j, e_j)}$ si e_j = matrice coloana cu 0 pe toate poz si 1 pe poz j)

Teorema (schimbarea bazei):
Fie B baza primal admisibila si x sol coresp bazei B. Presupunem ca $\exists j \in \mathcal{R}$ a.i. $r_j < 0$ si $d^j \ngeq 0$. Fie $\alpha = \min_{k \in \mathcal{B}} \{ -x_k / d_k^j \mid d_k^j < 0 \} = -x_i / d_i^j \}$. Atunci $x^* = x + \alpha d^j$ este sol admisibila de baza pt prob (1) si $C^T x^* < C^T x$

Lema substitutiei:Fie B o matrice inversabila de dimensiune n si B' matricea obtinuta prin inlocuirea coloanei r din B cu vectorul A, atunci:
1. B' inversabila $\leftrightarrow y_r \neq 0$
2. $B'^{-1} = Er(@) B^{-1}$

Unde: $Y = B^{-1} A$ si Er(@) este matricea unitate de ordin m cu coloana r inlocuita cu: @ = $(-y_1/y_r, \ldots, -Y_{r-1}/y_r, 1/y_r, -Y_{r+1}/y_r, .. -y_m/y_r)$

Regula de evitare a ciclarii (Bland)
intrare in baza:
1. aleg $j \in \mathcal{R}$: $r_j = \min\{r_k, r_k < 0\}$
2. Bland: $j \in \mathcal{R}$, $j = \min\{k \in \mathcal{R}, r_k < 0\}$

iesire din baza:
1. $i \in \mathcal{B}$ a.i $(-x_i)/d_i^j = \min\{(-x_k)/d_k^j, d_k^j < 0\}$
2. Bland: se ia indiciele k minim pt care $\alpha = (-x_k)/d_k^j$

$x_1, x_2 \in \mathcal{P}$ **solutii de baza adiacente** daca bazele lor primal admisibile au in comun m-1 coloane

Formularea dualei
Notam $w^T = c_B^T B^{-1}$
min $c^T x$, Ax=b, $x \geq 0 \leftrightarrow$
max $b^T w$, $A^T w \leq c$

min $c^T x$, $Ax \geq b$, $x \geq 0 \leftrightarrow$
max $b^T w$, $A^T w \leq c$, $w \geq 0$

Reguli de formare a pb duale:
pr de min -> pr de max (si invers)
term. liberi b -> coef. fct. obiectiv b
coef fct. obiectiv c -> term liberi c
A -> A^T
ineg. concordante -> var. nenegative var. nenegative -> ineg. concordante
var. libere -> egalitati (si invers)

Teorema slaba de dualitate
Fie x^0 solutie admisibila a problemei simple si w^0 solutie admisibila a problemei duale => $c^T x^0 \geq b^T w^0$
Corolar1: daca ajung sa fie egale - sol optime
Corolar2: daca una din pr are f obiectiv nemarginita, atunci cealalta pr nu are sol admisibila.
Teorema tare de dualitate

1. Daca una dintre probleme are solutie optima finita, atunci si cealalta are sol optim finita si functiile obiectiv au valori optime egale.
2. Daca una dintre probleme are optim infinit, atunci cealalta problema nu are solutie admisibila.

<u>Determinarea unei baze dual admisibile</u>

(1) $\inf c^T x$, $Ax=b$, $x \geq 0$, $\operatorname{rang} A = m \leq n$

Fie B o baza care nu e dual admisibila.

Luam ecuatia: $\Sigma x_j \leq M$ ($j \in \mathcal{R}$), adaug o var $x_0 + \Sigma x_j = M$. Avem:

(2) $\inf c_1^T x$, $A_1 x = b$, $x_0, x_1..x_n \geq 0$, $x_0 + x_{j1} + x_{j2} + ... + x_{jn*m} = M$ unde $c_1 = (0\ c)^T$, $A_1 = (1\ 0\ e^T,\ 0\ \mathfrak{B}\ \mathcal{R})$.

Luam $B_1 = (1\ 0,\ 0\ B)$. Este B_1 dual admisibila?

Pt $j \in \mathcal{R}$: $r_j^{B1} = c_j - c_1^T * B_1^{-1} * A_1^j = r_j^B$

Pt $j \in \mathfrak{B}$: $r_j^{B1} = ... = r_j^B = 0$

=> B_1 nu e dual admisibila

Luam $B2 = B1 \cup \{k\} \setminus \{0\}$, x0 paraseste baza, x_k intra in baza, k ales a.i $r_k = \min\{r_j, r_j < 0\}$. Avem:

$r_j^{B2} = r_j^{B1} - r_k^{B1} \geq 0$, $r_0^{B1} = -r_k^{B1} > 0$ => B2 e dual admisibila

<u>Teorema **fundamentala** a dualitatii:</u>

Fie (1) o problema de minimizare si (2) duala acesteia. Atunci putem avea urmatoarele cazuri:

1. Ambele probleme au solutii admisibile => ambele probleme au solutii optime si val functiilor obiectiv in solutiile optime sunt egale
2. Una dintre probleme are solutii admisibile si celalta nu are, atunci problema care are solutie admisibila are optim infinit
3. Niciuna dintre cele 2 probleme nu are solutie admisibila

<u>Teorema ecarturilor complementare</u>

Fie (1) $\inf c^T x$, $Ax \geq b, x \geq 0$ cu duala (2) $\sup b^T w$, $A^T w \leq c, w \geq 0$.

x^* e sol optima pt (1) si w^* e sol optima pentru (2) ⇔ $x_j^* v_j^* = 0$ si $w_i^* u_i^* = 0, \forall j=1,n$ $\forall i = 1,m$ unde $v^* = c - A^T w^*$ si $u^* = Ax^* - b$

Sau $v^* = A^T w^* - c$ si $u^* = b - Ax^*$

G = (N, A) graf orientat 1-src, m-dst

|N| = n ,# noduri

x = (xj) flux, $j \in N$

y = (yi), $i \in N$, yi =

$$\sum_{\{j \in N | (i,j) \in A\}} xij - \sum_{\{j \in N | (j,i) \in A\}} xji$$

Conservarea fluxui: yi=0, $\forall i \in N$

kij = capacitatea arcului (i,j)

1) xji = -xij $\forall i,j \in N$

2) xij = 0, (i,j) $\notin$ N *antisimetrie*

Problema fluxului maxim:

(1) max f

$$\sum_{j \in N} xij - \sum_{j \in N} xj1 = f$$

$$\sum_{i \in N} xij - \sum_{j \in N} xji = 0$$

$$\sum_{j \in N} xmj - \sum_{j \in N} xjm = -f$$

xij ≤ kij, $\forall i,j \in N$

Fie A - matricea de incidenta nod-arc si $e = (1,0,..,0,-1)^T$

(1) => **(2)** max f, Ax - f*e = 0, x ≤ k ⇔ **(3)** max f, **-**A*x+f*e = 0, x ≤ k

pr (3) si duala:

$\max w^T k$, $-A^T u + w = 0$, $e^T u = 1$, $w \geq 0$

min $\sum_{(i,j) \in \aleph} wij * kij$, ui - vj = wij i,j∈N,

u1-um=1, wij≥0, $\forall i,j \in N$

Fie S, Ŝ doua submt de noduri ale grafului G, astfel incat (S∩Ŝ=Ø si S∪Ŝ=N), iar 1∈S si m∈Ŝ. Se numeste **taietura** suma capacitatilor arcelor (i,j) cu i∈S si j∈Ŝ si o notam (S,Ŝ), $\sum_{i \in S, j \in \hat{S}} kij$.

Din *th. de dualitate* de la optim. liniara => daca x-sol optima a pr **(2)** => max f = min $\sum_{i,j \in N} kij * wij$ (**fluxul maxim coincide cu taietura minima**)

Arcul (i,j) sn <u>saturat</u> (in raport cu fluxul x) daca xij = kij. Un <u>drum</u> sn <u>saturat</u> daca are cel putin o muchie saturata.

Cap. reziduala = kij - xij,xij<kij

Daca G este o retea, notam <u>Gf retea reziduala</u> daca (i,j)∈A si xij<kij => in Gf capac. arcului (i,j) este xij - kij. (Gf are arce in plus fata de G).

<u>Obs</u>: x flux in G, x* flux in Gf, $x^T = x + x^*$ flux in G cu val $f^T = f + f^*$

<u>Rezolvam</u> flux maxim fie cu Ford fie cu simplex.

Algoritm Ford

1: xij = 0, $\forall$ i,j f=0

2: Det. reteaua reziduala Gf

3: Atat timp cat exista flux de val > x* in Gf:

a) det x*
b) det in G x+x*
c) det Gf

<u>Idee:</u>

-gen. drum de la 1 la m

-eticheteaza nodurile si citeste etichetele j->eticheta(i, c_j), i-pred lui j, c_j-cap. nod j

Daca:

- ∃ (i,j) si $x_{ij} < k_{ij}$ atunci $c_j = \min(c_i, k_{ij} - x_{ij})$
- ∃ (j,i) si xji>0 atunci cj=min(ci,xji)

Creste fluxul de pe muchia (i,j) cu kij-xij si pe muchia opusa pune -xij.

<u>Alg Simplex Primal:</u>

Pas1: Alegem o baza B. Verificam $B^{-1} b \geq 0$ (baza primal admisibila)

Calc. $r_j = c_j - C_B^T \cdot B^{-1} \cdot A^j$, $j \in \mathcal{R}$

Pas2: Daca $\forall j \in \underline{\mathcal{R}}$ $r_j \geq 0$, => x sol. optima => STOP. Altfel pt fiecare $j \in \mathcal{R}$ cu $r_j < 0$, calc. $\boldsymbol{d^j = (-B^{-1} A^j\ \ e_j)}$ **si e_j = matrice coloana cu 0 pe toate poz si 1 pe poz j)**. Valorile in noua matrice se pun in functie de $\mathcal{R}$ si $\mathfrak{B}$ (e pe $\mathcal{R}$ si restul pe $\mathfrak{B}$).

Pas3: test de optim infinit

Daca $\exists j \in \mathcal{R}$ a.i. $r_j < 0$ si $d^j \geq 0$ => pb are optim infinit => STOP

Pas4: schimbarea bazei

Alegem $j \in \mathcal{R}$ a.i $r_j = \min\{r_k \mid r_k < 0, k \in \mathcal{R}\}$ (cel mai mic r_j negativ sau primul, la egalitate)

Alegem $i \in \mathfrak{B}$ a.i. $-x_i / d_k^j = \min_{k \in \mathfrak{B}}\{-x_k / d_k^j \mid d_k^j < 0\} = \alpha$

(alegem cel mai mic $-x_i / d^j$ negativ sau primul, la egalitate)

$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cup \{j\} / \{i\}$ si $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{i\} / \{j\}$

Determinam $x^* = (B^{-1} b, 0)$

($x^* = x + \alpha * d^j$)

GOTO PAS2

<u>Alg Simplex Dual:</u>

Pas1: B - **baza dual admisibila** ($r_j = C_j - C_B^T B^{-1} A^j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{R}$)

Fie $x = (B^{-1} b, O)$ sol de baza

Daca xi≥0, $\forall i \in \mathfrak{B}$ => x e sol optima pt pr (1)

Pas2: calc $y^j = B^{-1} A^j$ pt $\forall j \in \mathcal{R}$, Daca $\exists y^j \geq 0$ => prob nu are solutie

Pas3: Aleg $i \in \mathfrak{B}$ a.i $x_i = \min\{x_i, x_i < 0\}$ (cel mai mic x_i negativ sau primul, la egalitate)

Aleg $j \in \mathcal{R}$ a.i $\varepsilon = \min\{-r_j / y_i^j, y_i^j < 0\}$

(y_i^j = a j-a coloana a matricei y si luam elem. de pe linia i)

Ex. $\mathfrak{B}$ = {1, 4}, $\mathcal{R}$ = {2, 3}, y = (1 1 **1** 0; 0 -1 **-1** 1) => y_4^3 = (1 0 0 **-1**) = -1

$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cup \{j\} \setminus \{i\}$, $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{i\} \setminus \{j\}$

GOTO PAS2