Algoritmi de rasterizare

- Algoritmul DDA (Digital differential Analyzer
- Algoritmul lui Bresenham

Problematizare Context 2D

Continuu

Grafică vectorială

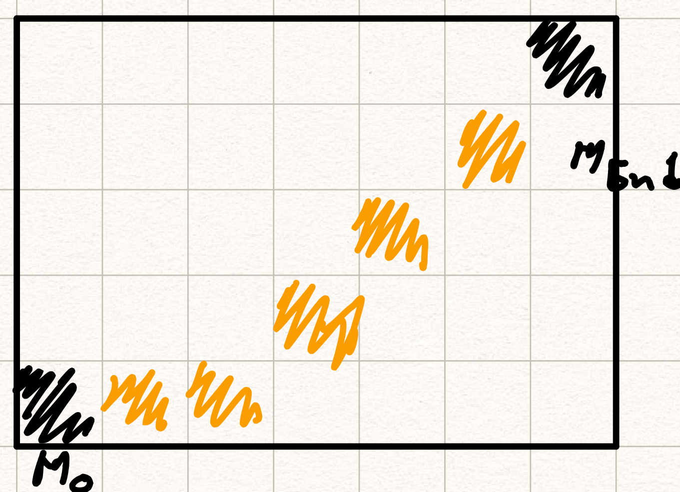
$M_0 = (x_0, y_0)$

$M_{End} = (x_E, y_E)$

$x_0, y_0, x_E, y_E \in \mathbb{R}$

Discret

Grafică rasterială



$M_0 = (x_0, y_0)$

$M_{End} = (x_E, y_E)$

$x_0, y_0, x_E, y_E \in \mathbb{Z}$

Algoritm de rasterizare

Input $x_0, y_0, x_E, y_E \in \mathbb{Z}$

Output ce pixeli sunt selectați pt a ajunge de la (x_0, y_0) la (x_E, y_E) aproximând segmentul $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Ipoteze/restricții (totul se poate adapta la restul situațiilor

1. $x_E > x_0$

   $y_E > y_0$

   $\Delta x = x_E - x_0 \; ; \; \Delta x > 0$

   $\Delta y = y_E - y_0 \; ; \; \Delta y > 0$

2. $\Delta x > \Delta y > 0$

$\{$ Ec. dr. care unește M_0 și M_E

$y = mx + n$; cu $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Deoarece (x_0, y_0) verifică ec. dreptei $\Rightarrow y_0 = mx_0 + n \Rightarrow n = y_0 - mx_0$

$$n = y_0 - \frac{\Delta y}{\Delta x} x_0$$

În cazul continuu

$$y = mx + n \stackrel{Not}{=} f(x) \; ; \forall x$$

În cazul discret

Var 1 Înlocuire în ec. dreptei

Algoritm

- Inițializare x_0, y_0, m
- Pasul $k \leftarrow k+1$ $(k \geq 0)$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + 1$$

$$f(x_{k+1}) = m x_{k+1} + n$$

$$y_{k+1} \leftarrow round(f(x_{k+1}))$$

$$f(x_{k+1}) = m(x_{k+1}) + n = m(x_{k+1}) + n =$$
$$= m x_k + m + n =$$
$$= f(x_k) + m$$

Var 2 Algoritmul DDA

Algoritm

- Initializare $x_0; y_0 = f(x_0), m$
- Pasul $k \to k+1$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + 1$$
$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + m$$
$$y_{k+1} = round(f(x_{k+1}))$$

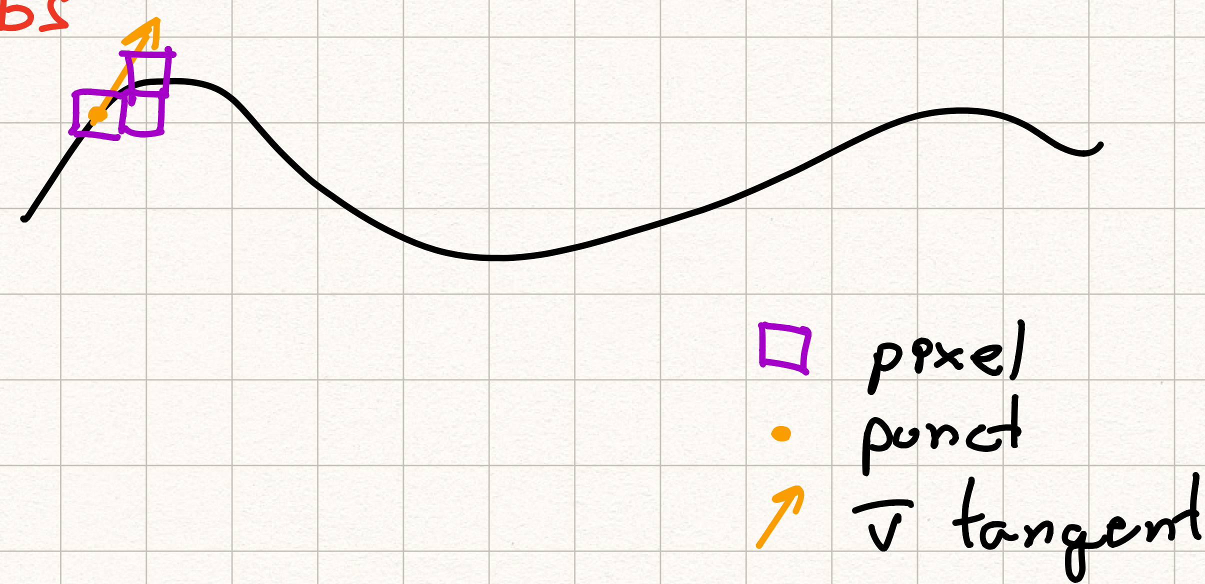
Exp $M_0 = (10, 20)$ $M_E = (20, 28)$

$\Delta x = 10$ $\Delta y = 8$

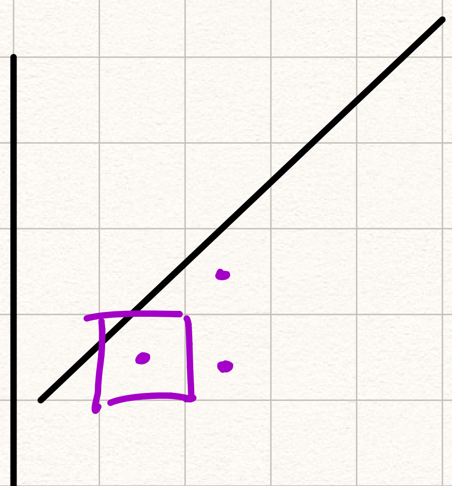
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(x_k)$	20	20.8	21.6	22.4	23.2	24	24.8	25.6	26.4	27.2	28
y_k	20	21	22	22	23	24	25	26	26	27	28

Var 3 — Algoritmul lui Bresenham

Obs



Folosind conceptul de vector tangent, alg. poate fi aplicat și în cazul altor curbe



Pp că pixelul (x_k, y_k) a fost selectat

∃ 2 candidați pt pixelul urm.

Se calculează distanța de la centrele pixelilor candidat la punctul real de pe dreapta coresp

$$d_s = \underbrace{y_k+1}_{\substack{\text{ordonata}\\\text{centrului}\\\text{lui } S}} - \underbrace{f(x_k+1)}_{\substack{\text{ordonata}\\\text{pct de pe}\\\text{dr.}}} =$$

$$= y_k + 1 - m x_k - m - n$$

$$d_j = -y_k + f(x_k+1) = m x_k + m + n - y_k$$

Decizia: $d_s \gtreqless d_j$

Ne interesează semnul $(d_j - d_s)$

$$d_j - d_s = 2\underset{\substack{\parallel\\ \frac{\Delta y}{\Delta x}}}{m}(x_k+1) - 2y_k + 2n - 1 =$$

$$= \frac{2\Delta y(x_k+1) - 2\Delta x y_k + 2\Delta x n - \Delta x}{\Delta x}$$

$$\Delta x \overset{\text{ip}}{>} 0$$

Not $\gamma = 2\Delta y + 2\Delta x \cdot n - \Delta x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Semnul lui $d_j - d_s$ este semnul

$$p_k \overset{\text{Def}}{=} 2\Delta y \cdot x_k - 2\Delta x \cdot y_k + \gamma$$

$$\begin{cases} \text{a) } p_k < 0 \Rightarrow d_j < d_s \Rightarrow \text{Se alege pixelul de jos} \\ \text{b) } p_k \geq 0 \Rightarrow d_j \geq d_s \Rightarrow \text{Se alege pixelul de sus} \end{cases}$$

$$p_{k+1} - p_k = 2\Delta y \cdot x_{k+1} - 2\Delta x \cdot y_{k+1} + \gamma -$$
$$- 2\Delta y \cdot x_k - 2\Delta x\, y_k + \gamma =$$

$$= 2\Delta y\, x_k + 2\Delta y - 2\Delta x\, y_{k+1} -$$
$$- 2\Delta y\, x_k - 2\Delta x\, y_k =$$

$$= 2\Delta y - 2\Delta x\, y_{k+1} - 2\Delta x\, y_k =$$

$$= \begin{cases} 2\Delta y, \text{ Dacă } p_k < 0 \Leftrightarrow y_{k+1} = y_k \\ 2\Delta y - 2\Delta x, \text{ Dacă } p_k \geq 0 \Leftrightarrow y_{k+1} = \\ \qquad = y_k + 1 \end{cases}$$

$$p_0 = 2\Delta y x_0 - 2\Delta x \cdot y_0 + \gamma =$$
$$= \cancel{2\Delta y} x_0 - 2\Delta x(\cancel{m x_0} + \cancel{n}) + 2\Delta y + 2\cancel{\Delta x \cdot n} - \Delta x =$$
$$= 2\Delta y - \Delta x$$

Algoritm

Pp $\Delta x > \Delta y > 0$

Input: $x_0, y_0, x_E, y_E \in \mathbb{Z}$

Output: pixeli selectați

Calcul: $\Delta x, \Delta y$

$p_0 = 2\Delta y - \Delta x$

$2\Delta y, 2\Delta y - 2\Delta x$

$k \leftarrow k+1 \ (k \geq 0)$

Pp că avem $x_k, y_k, p_k \ (\in \mathbb{Z})$

Dacă $p_k < 0$ $\begin{cases} x_{k+1} \leftarrow x_k + 1 \\ y_{k+1} \leftarrow y_k \\ p_{k+1} \leftarrow p_k + 2\Delta y \end{cases}$

Dacă $p_k \geq 0$ $\{ x_{k+1} \leftarrow x_k + 1$

$$\begin{cases} y_{k+1} \leftarrow y_k + 1 \\ p_{k+1} \leftarrow p_k + 2\Delta y - 2\Delta x \end{cases}$$

Exp $M_0 = (10, 20)$ $M_E = (20, 28)$

$x_0 = 10$ $x_E = 20$

$y_0 = 20$ $y_E = 28$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_k	20	21	22	22	23	24	25	26	26	27	28
p_k	6	2	-2	14	10	6	2	-2	14	10	6