4.10.2012

ANALIZĂ
CURS 1

Mulțimi ordonate

<u>Def 1</u> a) Fie $X, Y \neq \emptyset$. Mulțimea perechilor ordonate (x, y) cu $x \in X$ și $y \in Y$ s.n. produsul cartezian <u>de la</u> mulțimea X la mulțimea Y.

<u>NOTAȚIE</u> $X \times Y \overset{def}{=} \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ nu sunt
$Y \times X \overset{def}{=} \{(y,x) \mid y \in Y, x \in X\}$ egale

b) Sn rel binară de la mulțimea X la mt. Y orice submulțime R a ~~produsului~~ nevidă produsului cartezian $X \times Y$

<u>NOTAȚIE</u> $(x,y) \in R \overset{def}{\Leftrightarrow} xRy$ – elementul x este în relația R cu el y

<u>Terminologie</u>: relație binară pe mulțimea nevidă X = = rel. binară de la mt X la mt X

<u>Def 2</u> S.n. <u>rel. de ordine</u> pe o mulțime nevidă X o rel. bin. R pe mt X care este:

a) reflexivă: ~~xRx~~ $xRx \ \forall x$

b) antisimetrică: xRy și $yRx \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y$

c) tranzitivă: xRy și $yRz \Rightarrow xRz$

<u>NOTAȚIE</u> $xRy \overset{not}{\Leftrightarrow} x \leq y$ (doar dacă R = rel de ordine)

• $x < y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \leq y$ și $x \neq y$

Def 3 S.n. mt. ordonată o mt nevidă X, înzestrată cu cel puțin o rel. de ordine „$\leq$".

NOTAȚIE $(X, \leq) \to$ simbol pt. mulțime ordonată

Exemple (de mulțimi ordonate)

• $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

• $(\mathbb{C}, \leq)$

$$\underset{\text{„e în relație"}}{a+bi \leq c+di} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases}$$

• $X \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$

1) $A \leq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B$

2) $A \leq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} B \subseteq A$

• $T \neq \emptyset$ $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(T) = \{f : T \to \mathbb{R} \mid f \text{ funcție}\}$

$f \leq g \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(t) \leq g(t)\ \forall t \in T$

Def 4 O mt ordonată $(X, \leq)$ s.n. total ordonată dacă orice două elemente din X se pot compara ($\forall x, y \in X$, $x \leq y$ sau $y \leq x$)

Def 5 Fie $(X, \leq)$ o mt ordonată și $A \subseteq X$.

a) Elementul ~~m~~ $a \in X$ s.n. minorant al mt A, dacă $a \leq x$, $\forall x \in A$

b) Elementul $b \in X$ s.n. majorant al mt A, dacă $\forall x \in A$ avem $x \leq b$

c) Mulțimea A s.n. mărginită superior dacă are cel puțin un majorant în X

d) Mult A s.n. mărg inf dacă are cel puțin un minorant în X

e) Mult A s.n. mărginită, dacă are cel puțin un majorant și un minorant în mt X.

f) Elementul $x_1 \in A$ s.n. cel mai mic element al mulțimii A dacă, din $x \leq x_1$ și $x \in A$, rez că $x = x_1$

g) Elementul $x_2 \in A$ s.n. cel mai mare element al mulțimii A dacă, din $x_2 \leq x$ și $x \in A \Rightarrow$ rez că $x = x_2$

h) O mt $A \subseteq X$ mărg sup. admite Supremum, notat $\sup\limits_{x \in A} x$, dacă există cel mai mic majorant al mult A în X sau $\sup A$

i) O mt $A \subseteq X$ mărg sup admite infimum, notat $\inf\limits_{x \in A} x$, dacă există cel mai mare minorant al mult A în X,

j) Mt $A \subseteq X$ mărg sup. are maxim dacă $\exists \sup A \in A$

k) Mt. $A \subseteq X$ mărg inf are minim dacă $\exists \inf A \in A$

! **Def 6** O mt ordonată $(X, \leq)$ s.n. complet ordonată dacă orice submulțime mărginită a lui X are supremum și infimum în X

Obs $x = \sup A \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \forall a \in A, \ a \leq x \\ \forall y\, a \in A, \ a \leq y \Rightarrow x \leq y \end{cases}$

$z = \inf A \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \forall a \in A, \ z \leq a \\ \forall a \in A, \ t \leq a \Rightarrow t \leq z \end{cases}$

Elemente de teoria funcțiilor

Def 7 Fie $X, Y \neq \emptyset$. O relație binară de la mț. X la mț. Y s.n. funcție că $\forall\, x \in X\ (\exists!)\, y \in Y$ a.î. $x R y$.

NOTAȚIE
- $R = f$
- $x f y \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = y$
- $f \subseteq X \times Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} f : X \to Y$

Def 8:
a) Fie $f : X \to Y$ o funcție și $A \subseteq X$. Funcția $f|_A : A \to Y$, $f|_A(x) = f(x)$ s.n. restricția funcției f la mț. A.

b) Fie $f : X \to Y$ și $g : Z \to Y$ 2 funcții. Spunem că funcția g prelungește funcția f, dacă $X \subseteq Z$ și $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X$

c) Funcția $f : X \to Y$ s.n. injectivă dacă din $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $x_1 = x_2$. ($\forall x_1 \neq x_2 \in X$ $f(x_1) \neq f(x_2)$)

d) Fct $f : X \to Y$ s.n surjectivă dacă $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$ a.î. $f(x) = y$

e) Fct $f : X \to Y$ s.n. bij. dacă este inj. și surj.

f) Fct $1_X : X \to X$ $1(x) = x$ s.n. fct identică a mulțimii X

g) Fie $g: X \to Y$ și $f: Z \to T$ a.î. $Y \subseteq Z$. Funcția $f \circ g: X \to T$ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ s.n. compunerea funcțiilor f și g

11.10.2012

ANALIZĂ
CURS 2
Elemente de teoria funcțiilor

Def 1. Fie $f: X \to Y$ o funcție

a) f s.n. funcție bij, dacă este inj și surj

$(\forall y \in Y \ \exists! \ x \in X$ a.î. $f(x) = y$

b) f s.n. funcție inversabilă dacă $\exists g: Y \to X$ o funcție a.î. $f \circ g = 1_Y$ și $g \circ f = 1_X$

Obs Dacă $f: X \to Y$ este bijectivă, putem construi funcția $f^{-1}: Y \to X$ ~~a~~ $f^{-1}(y) = x \overset{def}{\Leftrightarrow}$ ~~g~~ $f(x) = y$

Funcția f^{-1} se numește inversa funcției f

- $f: X \to Y$ bij $\Leftrightarrow$ f este inversabilă

În plus, $f \circ f^{-1} = 1_Y$ și $f^{-1} \circ f = 1_X$

Def 2 Fie $f: X \to Y$ o funcție

a) Dacă $A \subseteq X$, mulțimea $\{f(x) \mid x \in A\} \overset{not}{=} f(A)$

$f(A) \subseteq Y$ se numește imaginea directă a mulțimii A prin funcția f

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \operatorname{Im} f$$

b) Dacă $B \subseteq Y$, mulțimea $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ $\overset{not}{=} f^{-1}(B)$ (! NU are leg cu funcția bijectivă) se numește preimaginea mult B prin funcția f (imaginea inversă)

Obs $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X$

(preim. codomeniului prin funcția f este domeniul)

c) O fct $f: X \to Y$ surj $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im} f = Y \Leftrightarrow f(X) = Y$

Elemente de teoria mulțimilor

Def 3 a) Două mulțimi A și B sunt egale dacă au aceleași elemente. $(A = B)$

b) Mulțimea ~~$A \subseteq B$~~ A e inclusă în B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B $(A \subseteq B)$

c) $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B, A \neq B$

(A e submulțime proprie a lui B

d) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$ – intersecția mulțimilor A și B

e) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$ – reuniunea mț A și B

f) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$ – diferența mț A și B

g) Mulțimile A și B se numesc disjuncte dacă $A \cap B =$

h) Dacă $A \subseteq B$ mulțimea $B \setminus A \stackrel{not}{=} C_B A$ se numește complementara mulțimii A în raport cu mulțimea B

i) Dacă X este o mulțime oarecare, mț $\{A \mid A \subseteq X\} \stackrel{not}{=} P(X)$ s.n. mulțimea părților lui X

Def 4 Fie A o mulțime nevidă

a) S.n. familie de elemente din mulțimea A orice funcție $f: I \to A$ unde $I \neq \emptyset$

$$f(i) \stackrel{def}{=} a_i$$

$$f \longleftrightarrow (x_i)_{i \in I}$$

I s.n. mulțimea indicilor familiei $(x_i)_{i \in I}$

b) S.n. șir cu elementele în mulțimea A o familie de elemente ~~$(x_i)_{i \in}$~~ din A, $(x_i)_{i \in I}$ în care $I = \mathbb{N}$

c) S.n. familie finită din mt A o familie de elemente în care mulțimea indicilor este finită

d) S.n. familie de submulțimi a unei mt. X orice familie de elemente din $\mathcal{P}(X)$

Obs NOTAȚIE $(A_i)_{i \in I}$ fam. de submt. a lui X

Def 5 Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi a lui X

$$\bigcap_{i \in I} A_i \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$$ - intersecția fam. de submt. $(A_i)_{i \in I}$

$$\bigcup_{i \in I} A_i \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid \exists i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$ - reuniunea fam. de submulțimi $(A_i)_{i \in I}$

a) $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I$ a.î. $x \notin A_i$

b) $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I \; x \notin A_i$

Regulile lui de Morgan

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o fam. de submulțimi ale lui X. Sunt adev urm relații

a) $C_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_X A_i$

b) $C_X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_X A_i$

Ambele egalități se vor demonstra prin dublă incluziune

Dem a) „$\subseteq$"

Fie $x \in C_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Rightarrow x \in X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in X$ și $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in X$ și $\forall i\in I\ x \notin A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i \in I\ x \in X$ și $x \notin A_i \Rightarrow \forall i\in I\ x \in C_X A_i \Rightarrow \cancel{x \in C_X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)}$ $x \in \bigcap_{i\in I} C_X A_i$

„$\supseteq$"

Fie $x \in \cancel{C_X(\cap A}\ \bigcap_{i\in I} C_X A_i \Rightarrow \forall i\in I\ x \in C_X A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i\in I\ x \in X\setminus A_i \Rightarrow \forall i\in I\ x\in X$ și $x\notin A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in X$ și $\forall i\in I\ x\notin A_i \Rightarrow x \in X$ și $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in C_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$

b) În relația de la punctul a) substituim A_i cu $C_X A_i$

$C_X\left(\bigcup_{i\in I}(C_X A_i)\right) = \bigcap_{i\in I} C_X(C_X A_i)$

$C_X\left(\bigcup_{i\in I}(C_X A_i)\right) = \bigcap_{i\in I} A_i \quad / C_X$

$\bigcup_{i\in I} C_X A_i = C_X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$

Teorema 1

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de părți submulțimi ale lui X și $B\subseteq X$

1) $B\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$

2) ~~$B\cup(\bigcap_{i\in I}$~~ $B\cap\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(B\cap A_i)$

3) $B\cup\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(B\cup A_i)$

4) $B\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)$

5) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\setminus B=\bigcup_{i\in I}(A_i\setminus B)$

6) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\setminus B=\bigcap_{i\in I}(A_i\setminus B)$

7) $B\setminus\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(B\setminus A_i)$ (generalizare pt cea cu complementara)

8) $B\setminus\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(B\setminus A_i)$

Teorema 2

Considerăm funcția $f: X\to Y$, $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale lui X și $(B_i)_{i\in I}$ o fam. de submt. ale lui Y.

Au loc urm. relații

a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I} f(A_i)$

b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in I} f(A_i)$

c) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

d) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

<u>Exemple</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x|$

$A_1 = [2, \infty)$

$A_2 = (-\infty, 1]$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$

$f(A_1) = [2, \infty)$

$f(A_2) = f((-\infty, 1]) = [0, \infty)$

$f(A_1) \cap f(A_2) = [2, \infty)$

ANALIZĂ
CURS 3.1

18.10.2012

Corpuri ordonate. Corpuri complet ordonate

<u>Def 1</u> Un corp comutativ $(R,+,\cdot)$ s.n. corp ordonat dacă există o rel. de ordine „$\leq$" pe R astfel încât

1) $(R,\leq)$ este total ordonat și (adică $\forall x,y\in R$ $x\leq y$ sau $y\leq x$)

2) $x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z \quad \forall z\in R$

3) $0_R\leq x,\ 0_R\leq y \Rightarrow 0_R\leq x\cdot y$
(elementele pozitive ale corpului ordonat)

<u>NOTAȚIE</u> $(R,+,\cdot,\leq)$ – corp ordonat

<u>Def 2</u> Corpurile ordonate $(R,+,\cdot,\leq)$, $(K,+,\cdot,\leq)$ se numesc izomorfe dacă există o funcție bij. $f:R\to K$ a.î.

a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$
   $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ $\forall x,y\in R$ – izomorf. algebric

b) $x\leq y \Leftrightarrow f(x)\leq f(y)$ – izomorf. de ord.

Funcția ~~f s.n.~~ $f:R\to K$ s.n. izomorfism algebric și de ordine între corpurile ordonate R și K

<u>NOTAȚIE</u> $R\overset{f}{\simeq}K$

<u>Teorema 1</u> Fie $(R,+,\cdot,\leq)$ un corp ordonat. Sunt adevărate următoarele afirmații:

a) $x\leq y$ și $z\leq t \Rightarrow x+z\leq y+t$

$$\left(\begin{array}{l} x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z \\ z\leq t \Rightarrow y+z\leq y+t \end{array}\right\} \underset{\leq\ \text{tranz}}{\Rightarrow} x+z\leq y+t\Bigg)$$

b) $x \le y,\ 0_R \le z \Rightarrow xz \le y \cdot z$

$$\left. \begin{array}{l} x \le y \Rightarrow x + (-x) \le y + (-x) \Rightarrow 0_R \le y - x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0_R \le z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0_R \le z(y-x) \Rightarrow 0_R \le zy - zx \Leftrightarrow$ (corp ordonat față de $\le$)

$\Rightarrow zx \le zy$

c) $x \le y,\ z \le 0_R \Rightarrow \cancel{x}\, yz \le xz$

d) $\forall x \in R$ avem $0_R \le x$ sau $0_R \le -x$

e) $0_R < 1_R$

f) $\forall x \in R$ cu $0_R < x$ avem $0_R < x^{-1}$

$\forall y \in R$ cu $y < 0_R$ avem $y^{-1} < 0_R$

(pp $0_R \not< x^{-1} \Rightarrow x^{-1} \le 0_R$
$$\left. \begin{array}{l} x^{-1} \le 0_R \\ 0_R \le x \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot x^{-1} \le 0 x^{-1}$$

$1_R \le 0_R$ abs $\Rightarrow \cancel{x^{-1} \le 0_R}$ $0_R < x^{-1}$)

<u>Teorema 2</u> Fie $(R, +, \cdot, \le)$ un corp ordonat și $A \subseteq R$ o submulțime mărginită în R:

a) $\exists \inf A = a \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a \le x \ \forall x \in A \\ \text{Dacă } a < y \in R, \exists x \in A \text{ a.î. } x \le y \end{cases}$

b) $\exists \sup A = b \in R \Leftrightarrow \begin{cases} x \le b \ \forall x \in A \\ \text{Dacă } y < b \in R, \exists x \in A \text{ a.î. } y \le x \end{cases}$

<u>Def 3</u> Se numește corp complet ordonat un corp ordonat $(R, +, \cdot, \le)$ în care orice submulțime mărg. are supremum și infimum în R.

Def. 4 Fie $(R, +, \cdot, \leq)$ un corp ordonat

a) mulțimea $R_+ = \{x \in R \mid 0_R \leq x\}$ s.n. mulțimea el. poz. din corpul ordonat R

b) Oricare element $x \in R$, $|x| = \begin{cases} x, & 0_R \leq x \\ -x, & x \leq 0_R \end{cases}$ s.n. modulul el. x

Obs a) $0_R \leq |x| \ \forall x \in R$

b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in R$

c) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in R$

d) $||x| - |y|| \leq |x - y| \ \forall x, y \in R$

Def. 5 Fie $(R, +, \cdot, \leq)$ un corp complet ordonat

a) O submulțime $B \subseteq R$ s.n. inductivă dacă $\forall x \in B$, avem $\underbrace{x + 1_R}_{\text{"succesor"}} \in B$

b) Intersecția tuturor submulțimilor inductive din R care conțin el. 0_R s.n. mulțimea nr. nat. din corpul complet ord. R

Notăm $\mathcal{A} = \{B \subset R \mid B \text{ inductivă}, 0_R \in B\}$

$R \in \mathcal{A}$

$N \overset{def}{=} \bigcap_{B \in \mathcal{A}} B$ - mț. nr. nat. din corpul B

Teorema 3 Intersecția unei familii de mulțimi inductive este o mulțime inductivă

Dem. Fie $(A_i)_{i \in I}$ o fam. de mulțimi ind. din R

Notăm $A = \bigcap_{i \in I} A_i$

Fie $x \in A$ arbitrar ales $\Rightarrow x \in A_i \ \forall i \in I$ $\left.\begin{matrix} \\ A_i \text{ mt inductivă} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+1_R \in A_i \ \forall i \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\forall i \in I$ A_i inductivă~~ $x+1_R \in \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow x+1_R \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ mt inductivă

Corolar N este mulțime inductivă

Principiul inducției matematice

Dacă $A \subseteq N$ este o mulțime inductivă ce conține elementul 0_R atunci $A = N$

Dem

$$\left.\begin{matrix} A \text{ mulțime inductivă} \\ 0_R \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \in \mathcal{A}$$

$$\left.\begin{matrix} N = \bigcap_{B \in \mathcal{A}} B \\ A \in \mathcal{A} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} N \subseteq A \\ A \subseteq N \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = N$$

~~cdt~~

Def 6 Fie $(R, +, \cdot, \leq)$ un corp complet ordonat

a) $Z \overset{\text{def}}{=} N \cup \{-n \mid n \in N\}$ s. n. mulțimea nr întregi din corpul R

b) $Q \overset{\text{def}}{=} \{m \cdot n^{-1} \mid n, m \in Z, n \neq 0_R\}$ s. n. mt nr raționale din corpul R

c) $R \setminus Q$ s. n. mt nr iraționale din corpul R

Teorema 4 a) Suma a oricăror 2 nr naturale din corpul R este nr natural

b) Prod $\to$ natural

Dem a) $\forall m, n \in N \Rightarrow m+n \in N$???

Fixăm $m \in N$ și construim mț $A = \{p \in N \mid p+m \in N\}$

$0_R + m = m \in N \Rightarrow 0_R \in A$

este evident faptul că $A \subseteq N$

Vom aplica principiul inducției matematice și vom verif:

- $A \subseteq N$ ✓
- $0_R \in A$ ✓
- A inductivă

Fie $p \in A \Rightarrow p+m \in N$
$\left.\begin{array}{l} p+m \in N \\ N \text{ mulțime inductivă} \end{array}\right\} \Rightarrow (p+m)+1_R \in N \left.\right\} \underset{+ \text{ asociat}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (p+1_R)+m \in N \Rightarrow (p+1_R) \in A \Rightarrow A$ e inductivă

Din. P. i $\Rightarrow A = N \Rightarrow p+m \in N \ \forall p \in N$ ~~$\Rightarrow p+$~~

$\Rightarrow n+m \in N \ \forall n \in N$

b) $\forall m, n \in N \Rightarrow n \cdot m \in N$?

Fixăm $m \in N$ și construim mț $B = \{q \in N \mid q m \in N\}$

- $0_R \cdot m = 0_R \in N \Rightarrow 0_R \in B$
- evident $B \subseteq N$
- vrem B inductivă

Fie $q \in B$ arbitrar ales $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q \cdot m \in N \\ m \in N \end{array}\right\} \overset{(a)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow q \cdot m + m \in N \Rightarrow m(q+1_R) \in N$
$\left.\begin{array}{l} m(q+1_R) \in N \\ q+1_R \in B \end{array}\right\} \Rightarrow B$ mț inductivă

$\Rightarrow$ conform Pi $\Rightarrow B = N \Rightarrow q \cdot m \in N \ \forall q, m \in N$

$\Rightarrow n \cdot m \in N \ \forall n, m \in N$

Teorema 5 În orice corp complet ordonat R, N se descrie

$N = \{0_R, 1_R, 1_R + 1_R, 1_R + 1_R + 1_R \ldots\}$

Dem. Notăm $A = \{0_R, 1_R, 1_R + 1_R, \ldots\}$

- $0_R \in A$ evident
- $0_R \in N \overset{N \text{ mt ind}}{\Longrightarrow} 0_R + 1_R = 1_R \in N \Rightarrow 1_R + 1_R \in N$

$\Rightarrow 1_R + 1_R + 1_R \in N \ldots \Rightarrow A \subseteq N$

- A ind.

oricе el din mt A are succ în mt $A \Rightarrow A$ ind.

Din PI $\Longrightarrow A = N$

ANALIZĂ
CURS 4

25.10.2012

Corpuri complet ordonate

Propoziția 1

a) Pentru orice $n \in N$, $n \neq 0_R$ avem că $n - 1_R \in N$

b) Orice submulțime din N are minim

c) Dacă $n \in N$, mulțimea $\{x \in N \mid n < x, x < n+1_R\} = \emptyset$

d) Dacă $m, n \in N$ a.î. $m \leq n$, atunci $n - m \in N$

Teorema 1 Orice două corpuri complet ordonate $(R_1, +, \cdot, \leq)$ și $(R_2, +, \cdot, \leq)$ sunt izomorfe ($\exists f: R_1 \to R_2$ izomorfism algebric și de ordine)

Schița dem.:

Pasul 1) Construim $\varphi: N_1 \to N_2$ $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$, $\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$

$\varphi(1_{R_1} + 1_{R_1}) = 1_{R_2} + 1_{R_2}$

Pasul 2) Construim $\psi: Z_1 \to Z_2$

$$\psi(n) = \begin{cases} \varphi(n), & n \in N_1 \\ -\varphi(-n), & -n \in N_1 \end{cases}$$

$\psi|_{N_1} = \varphi$

Pasul 3) Construim $g: Q_1 \to Q_2$

$$g(m \cdot n^{-1}) = \psi(m) \cdot (\psi(n))^{-1}$$

$m, n \in Z_1$, $n \neq 0_{R_1}$

$g|_{Z_1} = \psi$

Pasul 4) Construim $f: R_1 \longrightarrow R_2$ ~~$f(x) = \sup\{g(y)\}$ $y \in Q_1, y \leq$~~

$$f(x) = \sup\{g(y) \mid y \in Q_1,\ y \leq x\}$$

$$f|_{Q_1} = g$$

f este izomorfism algebric și de ordine între corpurile complet ordonate R_1, R_2

1 Se numește corp de numere reale orice corp complet ordonat $(R, +, \cdot, \leq)$

NOTAȚIE $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

PRINCIPIUL LUI ARHIMEDE:

Fie $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ un corp de numere reale.

Pentru orice 2 el $x, y \in \mathbb{R}$ cu $0_R < y$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $x \leq ny$.

Dem. $0_R < y \Longrightarrow \exists y^{-1} \in \mathbb{R}$ și $0_R < y^{-1}$

Notăm $z = xy^{-1}$

Demonstrăm prin reducere la absurd că $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $z \leq n$.

Pp că $\forall n \in \mathbb{N}$ $z \nleq n$ $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $n \leq z$ $\Rightarrow$ (pt că suntem într-o mulțime total ordonată)

$\Rightarrow z$ este un majorant al lui $\mathbb{N}$ $\Rightarrow \exists \sup \mathbb{N} = w$ (orice mt mărg sup din corp are sup)

$\sup \mathbb{N} = w \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ n \le w \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ n + 1_{\mathbb{R}} \le w \Rightarrow$
(orice nr natural are succesor nr natural)

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ n \le w - 1_{\mathbb{R}} \Rightarrow w - 1_{\mathbb{R}}$ este majorat al mult $\mathbb{N}$

$\xRightarrow{w = \sup \mathbb{N}} w \le w - 1_{\mathbb{R}} \Rightarrow 1_{\mathbb{R}} \le 0_{\mathbb{R}}$ contradicție $\Rightarrow$ presupunerea este falsă $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $z \le n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $xy^{-1} \le n$, $0_{\mathbb{R}} < y \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $x \le ny$

<u>Obs</u>. Principiul lui Arhimede se poate reformula în mod echivalent sub urm. formă:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ a.î. } 0_{\mathbb{R}} < y\ \exists p \in \mathbb{N} \text{ a.î. } x < py$$

<u>Corolar</u> a) $\forall y \in \mathbb{R}$ cu $0_{\mathbb{R}} < y$ $\exists n \in \mathbb{N}, n \neq 0_{\mathbb{R}}$ a.î. $n^{-1} < y$

b) Dacă $0_{\mathbb{R}} \le y$ pt care $y \le p^{-1}$ $\forall p \in \mathbb{N}, p \neq 0_{\mathbb{R}}$ atunci $y = 0_{\mathbb{R}}$

<u>Dem</u>. a) Aplicăm principiul lui Arhimede pt $x = 1_{\mathbb{R}}$ și $0_{\mathbb{R}} < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $1_{\mathbb{R}} < ny$

$1_{\mathbb{R}} < ny \Rightarrow n \neq 0_{\mathbb{R}}$

$n \in \mathbb{N}\ n \neq 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}} < n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}} < n^{-1}$

$1_{\mathbb{R}} < ny \mid \cdot n^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow n^{-1} < y$

b) Pp $y \neq 0_R \Rightarrow 0_R < y \xRightarrow{a)} \exists n \in \mathbb{N}, n \neq 0_R$ a.î. $n^{-1} < y$

~~dar $y \le n^{-1}$~~

$y \le p^{-1}, \forall p \in \mathbb{N}, p \neq 0_R \xRightarrow{p=n} y \le n^{-1} \Rightarrow n^{-1} < y \le n^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow n^{-1} < n^{-1}$ contradicție $\Rightarrow y = 0_R$
(Pt că e strictă)

Teorema de densitate a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Fie $(\mathbb{R}, +, \cdot, \le)$ un corp de numere reale și $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \neq y$. Există $r \in \mathbb{Q}$ a.î. $x < r < y$

Dem. $x < y \Rightarrow 0_R < y - x \xRightarrow{\text{corolar a)}} \exists n \in \mathbb{N}, n \neq 0_R$ a.î. $\boxed{n^{-1} < y - x}$ (1) $\Rightarrow x + n^{-1} < y$ pt $y - x$

$n \in \mathbb{N}, n \neq 0_R \Rightarrow 0 < n^{-1}$

Aplicăm principiul lui Arhimede pentru x și n^{-1}

$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{x \le p \cdot n^{-1}}$ (2)

Construim mulțimea $A = \{k \in \mathbb{N}, x \le k \cdot n^{-1}\}$

Din 2 $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} A \neq \emptyset \\ A \subseteq \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \min A = m$

$m \in A \Rightarrow \boxed{x \le m \cdot n^{-1}}$ (3)

$m - 1_R \notin A \Rightarrow x \not\le (m - 1_R) \cdot n^{-1} \Rightarrow (m - 1_R) n^{-1} < x \Rightarrow$

$\Rightarrow m n^{-1} - n^{-1} < x \Rightarrow \boxed{m n^{-1} < x + n^{-1}}$ (4)

Din (1), (3), (4) obținem inegalitățile

$x \le m \cdot n^{-1} < x + n^{-1} < y$

Notăm $r = m \cdot n^{-1} \in \mathbb{Q}$ $\Big\} \Rightarrow x < r < y$

Teorema 1 Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există și este unic $p \in \mathbb{Z}$ a.î. $p \leq x < p + 1_{\mathbb{R}}$

($p = [x]$ – partea întreagă a lui x)

NOTAȚIE $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0_{\mathbb{R}}$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ ori}}$$

Teoremă Fie $x \in \mathbb{R}$ (x într-un corp de nr. reale) a.î. $0_{\mathbb{R}} < x$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0_{\mathbb{R}}$ și $n \neq 1_{\mathbb{R}}$.
Există și este unic un element $y \in \mathbb{R}$, $0_{\mathbb{R}} < y$ a.î. $y^n = x$.

Spații topologice

$X \neq \emptyset$ $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$

Def 1 S.n. topologie pe mulțimea X o submulțime $\tau \in$ ~~părții~~ dispoziția X $1_{\mathbb{R}_2}$ $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ care are proprietățile:

a) $\emptyset, X \in \tau$

b) $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$ (τ este închisă la intersecții finite)

c) ~~Dacă~~ $G_i \in \tau$ $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

(τ închisă la reuniuni oarecare)

Def 2 S.n. spațiu topologic o mulțime nevidă X pe care se poate construi o topologie τ

Notație (X, τ)

Exemple de topologii

a) $X \neq \emptyset$ (topologia discretă pe X)
$\tau = \{\emptyset, X\}$

b) $X \neq \emptyset$ (topologia grosieră a lui X)
$\tau = \mathcal{P}(X)$

Def 3 Fie (X, τ) un spațiu topologic ~~și~~

a) O mulț. $G \subseteq X$ s.n. deschisă (relativ la topologia τ) dacă $G \in \tau$

b) O mulț $F \subseteq X$ s.n. închisă (rel la topologia τ) dacă $C_X F = X \setminus F \in \tau$

c) O mulț $V \subseteq X$ s.n. vecinătate a el $x \in X$ (rel la top. τ) dacă $\exists\, G \in \tau$ a.î. $x \in G$ și $G \subseteq V$

NOTAȚIE $\mathcal{V}_\tau(x)$ = mulț vecinătăților el x

1.11.2012

SP1

ANALIZĂ
CURS 5

SPAȚII TOPOLOGICE

(X, τ) - spațiu topologic

$\mathcal{F}_\tau = \{ F \subseteq X \mid F \text{ mulțime închisă} \}$

<u>Teorema 1</u> (proprietățile mulțimilor închise)

a) $\emptyset, X \in \mathcal{F}_\tau$

b) Dacă $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_\tau$, atunci $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_\tau$ (valabil și ptr mai mulți prin inducție)

c) Dacă $(F_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}_\tau$, atunci $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}_\tau$

<u>Dem</u> a) $C_X \emptyset = X \setminus \emptyset = X \in \tau \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}_\tau$

$C_X X = X \setminus X = \emptyset \in \tau \Rightarrow X \in \mathcal{F}_\tau$

b) $\left.\begin{array}{l} F_1 \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow C_X F_1 \in \tau \\ F_2 \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow C_X F_2 \in \tau \end{array}\right\} \Rightarrow C_X F_1 \cap C_X F_2 \in \tau \Rightarrow$

$\Rightarrow C_X(F_1 \cup F_2) \in \tau \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_\tau$

c) $F_i \in \mathcal{F}_\tau \ \forall i \in I \Rightarrow C_X F_i \in \tau \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} C_X F_i \in \tau \Rightarrow$

$\Rightarrow C_X \bigcap_{i \in I} F_i \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}_\tau$

<u>Teorema 2</u> (Proprietățile vecinătăților unui punct $x \in X$)

a) $x \in V, \forall V \in \mathcal{V}_\tau(x)$

b) $V_1 \in \mathcal{V}_\tau(x), V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow V_2 \in \mathcal{V}_\tau(x)$

c) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2,\ V_1 \cup V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

Dem a) $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, G \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in G$ și $G \subseteq V$

$\left.\begin{matrix} x \in G \\ G \subseteq V \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in V,\ \forall\, V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

b) $\left.\begin{matrix} V_1 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, G \in \mathcal{T} \text{ a.î. } x \in G \text{ și } G \subseteq V_1 \\ V_1 \subseteq V_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, G \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in G \subseteq V_2 \Leftrightarrow V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

c) $\left.\begin{matrix} V_1 \subseteq V_1 \cup V_2 \\ V_1 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{din b}} V_1 \cup V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

$\left.\begin{matrix} V_1 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, G_1 \in \mathcal{T},\ x \in G_1 \subseteq V_1 \\ V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, G_2 \in \mathcal{T},\ x \in G_2 \subseteq V_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow x \in G_1 \cap G_2 \subseteq V_1 \cap V_2 \\ \left.\begin{matrix} G_1 \in \mathcal{T} \\ G_2 \in \mathcal{T} \end{matrix}\right\} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T} \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

Obs Dacă $x \in G$ și $G \in \mathcal{T}$, atunci $G \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

Def Fie $(X, \mathcal{T})$ spațiu topologic și $A \subseteq X$

a) $x \in X$ se numește punct interior al mulțimii A dacă $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

b) $x \in X$ se numește punct de aderență al mulțimii A dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ avem $V \cap A \neq \emptyset$ (în orice vecinătate a elementului x găsim un element din A)

c) $x \in X$ se numește punct de acumulare al mulțimii A dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ avem $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq 0$ (în orice vecinătate a lui x găsim un element din A diferit de x)

d) Elementul $x \in X$ se numește punct izolat al mulțimii A dacă $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \cap A = \{x\}$ (există o vecinătate a el x în care x este singurul element comun cu mt. A)

NOTAȚII 1) $\overset{\circ}{A} \overset{def}{=} \{x \in X \mid x$ este punct interior al mulțimii $A\}$ – interiorul mulțimii

2) $\bar{A} \overset{def}{=} \{x \in X \mid x$ este punct de aderență al mulțimii $A\}$ – aderența (închiderea) mulțimii A

3) $A' \overset{def}{=} \{x \in X \mid x$ este punct de acumulare al mulțimii $A\}$ – derivata mulțimii A

4) $\text{Izo}\, A \overset{def}{=} \{x \in X \mid x$ este punct izolat al mulțimii $A\}$

Teorema 3 (Proprietățile interiorului unei mulțimi)

a) $\overset{\circ}{A} \subseteq A$

b) $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{T}$,

• $G \subseteq \mathcal{T}$, $G \subseteq A \Rightarrow G \subseteq \overset{\circ}{A}$

$\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{\substack{G \in \mathcal{T} \\ G \subseteq A}} G$ (este cea mai mare mt. deschisă inclusă în A)

c) $A = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$

d) $A \subseteq B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$

e) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

f) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

Teorema 4 (Proprietățile aderenței unei mulțimi)

a) $A \subseteq \bar{A}$

b) $\bar{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$

c) $A \subseteq F$, $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \bar{A} \subseteq F$

$\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \\ A \subseteq F}} F$

• $\bar{A}$ = cea mai mică mulțime închisă care conține mulțimea A

d) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

e) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

f) $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

g) $A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow A = \bar{A}$

<u>Teorema 5</u> (Proprietățile derivatei unei mulțimi)

a) $A' \subseteq \bar{A}$

b) $\bar{A} = A \cup A'$

c) $A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow A' \subseteq A$

d) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

e) $(A \cap B)' = A' \cap B'$

f) $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$

<u>Teorema 6</u> (Proprietățile mulțimii punctelor izolate)

a) $\mathrm{Izo}\, A \subseteq A \setminus A'$

<u>Def 2</u>. Fie $A \subseteq (X, \tau)$. Mulțimea $\bar{A} \cap \overline{C_X A}$ se numește frontiera topologică a mulțimii A

<u>NOTAȚIE</u> $\mathrm{Fr}_\tau A = \bar{A} \cap \overline{C_X A}$

<u>Teorema 7</u> ~~Orice~~ Pentru orice 2 mulțimi $A \subset (X, \tau)$ sunt adevărate proprietățile:

a) $\overline{C_X A} = C_X \overset{\circ}{A}$

b) $\overset{\circ}{\widehat{C_X A}} = C_X \bar{A}$

(formulele duale din topologie)

Dem - Prin dublă incluziune că $\overline{C_X A} = C_X \overset{\circ}{A}$

• "$\subseteq$"

a) $\overset{\circ}{A} \subseteq A \mid C_X \Rightarrow C_X A \subseteq C_X \overset{\circ}{A}$

$\left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{A} \in \tau \Rightarrow C_X \overset{\circ}{A} \in \mathcal{F}_\tau \\ C_X A \subseteq C_X \overset{\circ}{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{C_X A \in \mathcal{F}_\tau}$ $\xrightarrow{\text{teorema 4}}$ $\boxed{\overline{C_X A} \subseteq C_X \overset{\circ}{A}}$

• "$\supseteq$"

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \bar{A} \mid C_X \Rightarrow C_X \bar{A} \subseteq C_X A \\ \bar{A} \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow C_X \bar{A} \in \tau \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\text{teorema 3}}$ $C_X \bar{A} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{C_X A}}$

$\xRightarrow{A \to C_X A}$ $C_X \overline{C_X A} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{C_X (C_X A)}} \Rightarrow C_X \overline{C_X A} \subseteq \overset{\circ}{A} \mid C_X \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{C_X C_X}$ $\boxed{C_X \overset{\circ}{A} \subseteq \overline{C_X A}}$

b) ~~Substituim~~ $C_X A$ $\overline{C_X A} = C_X \overset{\circ}{A}$ $\forall A \subseteq X$

$A \longrightarrow C_X A \Rightarrow \overline{C_X (C_X A)} = C_X \overset{\circ}{\widehat{C_X A}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{A} = C_X \overset{\circ}{\widehat{C_X A}} \mid C_X \Rightarrow \boxed{C_X \bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{C_X A}}}$

Corolar $\quad Fr A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

$\left.\begin{array}{l} Fr A = \bar{A} \cap \overline{C_X A} \\ \text{Din th. 7} \Rightarrow \overline{C_X A} = C_X \overset{\circ}{A} \end{array}\right\} \Rightarrow Fr A = \bar{A} \cap C_X \overset{\circ}{A} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

Obs $\quad M \cap C_X N = M \setminus N$

Def 3 Se numește distanță (metrica) pe o mulțime nevidă X o funcție $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ care are prop. următoare:

a) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall (x,y) \in X \times X$

b) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\forall$ ~~x, y, z ∈ X~~ $(x,z),(x,y),(y,z) \in X \times X$

(inegalitatea triunghiului)

Def 4 Se numește spațiu metric o mulțime X pe care se definește cel puțin o distanță $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$

NOTAȚIE (X, d)

8. 11. 2012

ANALIZĂ

CURS 6

Def 1 Fie (X, τ) spațiu topologic și $x \in X$. O mulț. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}_{\tau}(x)$ se numește sistem fundam. - de vecinătăți ale lui x dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{\tau}(x)\ \exists\ B \in \mathcal{B}$ a.î. $B \subset V$

EXEMPLU $\mathcal{B} = \{G \in \tau \mid x \in G\}$ este un sistem fund. de vecinătăți ale lui x

Def 2 Fie $X \neq \emptyset$ și τ_1, τ_2 2 topologii pe X. Spunem că τ_1 este mai puțin fină decât τ_2 (τ_2 este mai fină decât τ_1) dacă $\tau_1 \subseteq \tau_2$

NOTAȚIE $\tau_1 \leq \tau_2 \Rightarrow \tau_1 \subseteq \tau_2$

Def 3 Fie (X, d) un spațiu metric și $x_0 \in X$

a) Dacă $r > 0$, mulțimea $\{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ $\overset{not}{=}$ $B(x_0, r)$ se numește bila deschisă de centru $x_0 \in X$ și rază $r > 0$.

b) Dacă $r > 0$, mulțimea $\{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\} \overset{not}{=}$ $B[x_0, r]$ de centru $x_0 \in X$ și rază $r > 0$.

c) Mulțimea nevidă $G \subseteq (X, d)$ se numește deschisă dacă $\forall a \in G\ \exists\ r > 0$ a.î. $B(a, r) \subseteq G$

Teorema 1 Orice spațiu metric (X, d) este spațiu topologic!

Demonstrație Dem că pt ~~bila~~ mulț nevidă X se poate construi o topologie.

Notăm $\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \emptyset,\ G$ deschisă$\} \subseteq \mathcal{P}(X)$

- Este clar că $\emptyset \in \tau_d$
- $X \neq \emptyset$
  $\forall x \in X,\ B(x,1) \subseteq X$ $\Bigg\} \Rightarrow X$ este mulțime deschisă $\Rightarrow X \in \tau_d$

Deci? pt că orice bilă $\subseteq X$ fiind o mț a $x \in X$

- Fie $G_1, G_2 \in \tau_d$

Cazul 1. $G_1 = G_2 = \emptyset \Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset \in \tau_d$

Cazul 2 $G_1 = \emptyset,\ G_2 \neq \emptyset$ și deschisă $\Rightarrow$
$\Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset \in \tau_d$

Cazul 3 $G_1 \neq \emptyset$ și deschisă, $G_2 = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset \in \tau_d$

Cazul 4 $G_1 \neq \emptyset$ și $G_2 \neq \emptyset$, G_1 și G_2 deschise

Dacă $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ atunci $G_1 \cap G_2 \in \tau_d$.

Pp $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$

Fie $a \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow a \in G_1 \Rightarrow \exists r_1 > 0$ a.î. $B(a, r_1) \subseteq G_1$
și $a \in G_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r_2 > 0$ a.î. $B(a, r_2) \subseteq G_2$

Notăm $r = \min\{r_1, r_2\} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(a, r) \subseteq B(a, r_1) \subseteq G_1$ și
$B(a, r) \subseteq B(a, r_2) \subseteq G_2$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow B(a, r) \subseteq G_1 \cap G_2 \Rightarrow G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, $G_1 \cap G_2$

este mț deschisă $\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau_d$

... (Alegem o familie oarecare)

Fie $(G_i)_{i\in I} \subseteq \tau_d \Rightarrow G_i \in \tau_d \ \forall i \in I$

$\Rightarrow G_i = \emptyset$ sau $G_i \neq \emptyset$, G_i deschisă $\forall i \in I$

Cazul 1 $\quad G_i = \emptyset \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i = \emptyset \in \tau_d$

Cazul 2 $\quad \exists i_0 \in I$ a.î. $G_{i_0} \neq \emptyset$, G_{i_0} deschisă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \neq \emptyset$

Alegem $a \in \bigcup_{i\in I} G_i \Rightarrow \exists j \in I$ a.î. $a \in \underset{\in \tau_d}{G_j} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists r > 0 \text{ a.î. } B(a,r) \subseteq G_j \\ G_j \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \end{array}\right\} \Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(a,r) \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ este deschisă și nevidă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \in \tau_d$

$\Rightarrow \tau_d$ topologie

Def 4 Topologia τ_d descrisă în teorema 1 se numește topologia asociată dist. spațiului metric (X,d)

Def 5 O mulțime $F \subseteq (X,d)$ se numește închisă dacă $C_X F = X \setminus F \in \tau_d$

Teorema 2 Fie (X,d) un spațiu metric. Sunt adev. urm. af.

a) $\forall x \in X, \forall r > 0, B(x,r) \in \tau_d$

b) $\forall x \in X, \forall r > 0, B[x,r]$ este mulțime închisă în X

Obs a) $\forall x \in X, \forall r > 0, B(x, r) \neq \emptyset$ ($x \in B(x, r)$)

b) $\forall x \in X, \forall r > 0, B[x, r] \neq \emptyset$ ($x \in B[x, r]$)

c) $B(x, r) \subseteq B[x, r]$ $\forall x \in X, \forall r > 0$.

Teorema 3 Fie (X, d) un spațiu metric $x \in X$ și $A \subseteq X$. Sunt adev urm afirmații

a) $\mathcal{B} = \{ B(x, r) \mid r > 0 \}$ este un sist. fundam de vecinătăți al elementului x

b) $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$

c) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

d) $x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0$ $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

e) $x \in \operatorname{Izo} A \Leftrightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \cap A = \{x\}$

Def 5 O mt $A \subseteq (X, d)$ s.n. mărginită dacă $\exists a \in X$, $\exists r > 0$ a.î. $A \subseteq B(a, r)$

§ Convergență într-un spațiu metric

Def 6 Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (X, d)$ se numește convergent dacă $\exists x \in X$ a.î. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (rang) pt care $d(x_n, x)$ ~~e ab~~ $< \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$

Elementul x este unic și se numește limita șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

NOTAȚIE $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

<u>Obs</u>: $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{\tau_d}(x)\ \exists n_V \in \mathbb{N}$ a.î.
$x_n \in V\ \forall n \geq n_V$

<u>Caz particular</u> $X = \mathbb{R}$
$d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |x-y|$

<u>Def 6</u> Un şir ~~de p~~ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ s.n. convergent dacă $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ pentru care $|x_n - x| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$

<u>Def 7</u> Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X,d)$ se numeşte şir Cauchy sau şir fundamental dacă $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_\varepsilon$

<u>Teorema 4</u> Orice şir convergent $(x_n)_n \subseteq (X,d)$ este şir Cauchy

<u>Demonstrație</u>: $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = l \in X \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_\varepsilon$ (1)

(pot să zic asa pt că ε e ales aleator)

$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(l, x_m)\ \forall n, m \in \mathbb{N}$ (2)

Din (1) şi (2) deducem că $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(l, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\forall n, m \geq n_\varepsilon$

$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X, d)$

este șir Cauchy

/ 15.11.2012

ANALIZĂ
CURS 7

Convergența într-un spațiu metric

DEF 1 Spațiul metric (X, d) se numește __complet__ dacă orice șir Cauchy cu elemente din X este convergent

DEF 2 O mulțime $A \subseteq (X, d)$ se numește __mărginită__ dacă $\exists\, a \in X, \exists\, r > 0$ a.î. $A \subseteq B(a, d)$.

DEF 3 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (X, d)$

a) ~~Elementul x~~ Se numește subșir al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, șirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $n_k < n_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$

b) Elementul $x \in X$ se numește __punct limită__ al șirului dacă $\exists\, (x_{n_k})$ un subșir al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a.î. $\exists \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x$

__EXEMPLU__ 1) $x_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ impar} \end{cases}$

$-1, 1 \in \mathbb{R}$ sunt punctele limită ale șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2)

__Teorema 1__ Orice șir Cauchy cu elemente într-un spațiu metric este șir mărginit.
(Un șir este marg. într-un sp. metric dacă mulțimea el sale este mărginită)

Dem: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (X, d)$ șir Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists$

aî $d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_\varepsilon$

Fie $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ aî $d(x_n, x_m) < 1\ \forall n, m \geq n_1$

$\xRightarrow{m=n_1} \exists n_1 \in \mathbb{N}$ aî $d(x_n, x_{n_1}) < 1\ \forall n \geq n_1$ (1)

(dacă luam 1 rază bila e bună numai pt unii termeni, nu știm ce e cu cei cu $n < n_1$)

Notăm $r = \max\{1, d(x_0, x_{n_1}) \dots d(x_{n_1-1}, x_{n_1})\} > 0$ (2)

Din (1) și (2) rez că $d(x_n, x_{n_1}) \leq r\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_n, x_{n_1}) < r+1\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in B(x_{n_1}, r+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ șirul este mărginit

Corolar: Orice șir convergent cu elemente într-un spațiu metric este șir mărginit.

Teorema 2: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir Cauchy. Dacă ~~există~~ $\exists x \in X$ aî x este punct limită al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci acesta este unic și $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

Dem: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aî $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

x punct limită al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subșir aî $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aî $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall k \geq k_\varepsilon$ (2)

$n_k < n_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $n_k \geq n_\varepsilon \ \forall k \geq k_0$ (3)

notăm $k_1 = \max\{k_0, k_\varepsilon\}$

$k_1 \geq k_\varepsilon \xrightarrow{(2)} d(x_{n_{k_1}}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ (4)

$k_1 \geq k_0 \xrightarrow{(3)} n_{k_1} \geq n_\varepsilon \xrightarrow[m = n_{k_1}]{(1)} d(x_n, x_{n_{k_1}}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\varepsilon$ (5)

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_{k_1}})}_{(5)} + \underbrace{d(x_{n_{k_1}}, x)}_{(4)} \underset{(4)+(5)}{\overset{(4,)}{<}} \varepsilon$$

$\Downarrow$

$d(x_n, x_{n_{k_1}}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ a.î. $d(x_n, x) < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

Unicitatea lui x rezultă din unicitatea limitei unui șir

<u>Teorema 3</u> (Caracterizarea punctelor de aderență și a punctelor de acumulare în spații metrice)

Fie $A \subseteq (X, d)$ o submulțime nevidă

a) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

b) $x \in A' \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

Exemplu $A = [0, 1)$

$1 \in \bar{A}$?

$1 \in A'$?

$x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \in \bar{A}$$

$x_n \neq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in A'$

$B = [0, 2) \cup \{3\}$

$3 \in \bar{B}$?

$3 \in B'$? NU

$3 \in B \Rightarrow 3 \in \bar{B}$

$V = [2, 4] \in \mathcal{V}(3)$

$(V \setminus \{3\}) \cap B = \emptyset \Rightarrow 3 \notin B'$

Şiruri de nr reale

DEF 4 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$

a) Şirul se numeşte crescător dacă $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Şirul se numeşte strict cresc. dacă $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c) Şirul se numeşte descrescător dacă $x_n \geq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

d) Șirul se numește strict descrescător dacă $x_n > x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

e) Șirul se numește monoton dacă este cresc. sau descresc.

f) Șirul s.n. strict monoton dacă este strict cresc sau strict descresc.

__DEF 5__ a) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ are limită $+\infty$ dacă $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n > \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$

b) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită $-\infty$ dacă $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n < -\varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$

__Obs__ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\mathbb{R}, \cancel{\mathbb{E}})$ este mărginit $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\mathbb{R}, d)$ este mărginit

__LEMA LUI CESARO__ Din orice șir mărg. de nr. reale se poate extrage cel puțin un subșir convergent.

__Criteriul lui Cauchy pentru șiruri de nr reale__

Orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy.

Drem „$\Longrightarrow$"

S-a demonstrat deja că orice șir convergent este șir Cauchy (sau S-a demonstrat anterior teorema: Orice șir ~~Cauchy~~ convergent într-un spațiu metric este șir Cauchy???)

„$\Longleftarrow$" $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ șir Cauchy $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ șir mărginit aplicând lema lui Cesaro $\exists (x_{n_k})$ un subșir al șirului, $\exists x \in \mathbb{R}$ ai

$\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x$ (șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ are cel puțin un punct limită în $\mathbb{R}$)

$(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ șir Cauchy

$\exists x \in \mathbb{R}$ punct limită al șirului $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este convergent și are limita x

<u>Corolar</u> $\mathbb{R}$ este spațiu metric complet.

22.11.2012

ANALIZĂ
CURS 8

Şiruri de numere reale

Def 1 Elementul $x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se numeşte punct limită pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ dacă $\exists\ (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Teorema lui Weierstrass: Orice şir de nr reale monoton şi mărginit este convergent.

Dem Mulţimea $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ este mărginită $\Rightarrow \exists\ \alpha = \sup\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, $\beta = \inf\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

Cazul 1: Pp. şirul crescător $\{x_n \le x_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}\}$

Vom demonstra că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \alpha - \varepsilon < \alpha \Rightarrow \alpha - \varepsilon$ nu este majorant al mulţimii $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\} \Rightarrow \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{x_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon}$ (1)

$\boxed{\forall n \ge n_\varepsilon \Rightarrow x_n \ge x_{n_\varepsilon}}$ (2)

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow x_n \le \alpha < \alpha + \varepsilon}$ (3)

Din 1, 2, 3 $\Rightarrow \alpha - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \le x_n \le \alpha < \alpha + \varepsilon$
$\forall n \ge n_\varepsilon$

$\Rightarrow \alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon,\ \forall n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon$
$\forall n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$

Cazul 2 : Pp șirul descrescător $\{x_n \geq x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$

Vom dem că $\exists \lim_{n \to \infty} x_n = \beta$

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \beta < \beta + \varepsilon \Rightarrow \beta + \varepsilon$ nu este minorant al mulț. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{x_{n_\varepsilon} < \beta + \varepsilon}$ (4)

$$\boxed{\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n \leq x_{n_\varepsilon}} \quad (5)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \geq \beta > \beta - \varepsilon} \quad (6)$$

Din 4, 5, 6 $\Rightarrow \beta - \varepsilon < \beta \leq x_n \leq x_{n_\varepsilon} < \beta + \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow \beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - \beta| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$

Teorema 1 Orice șir monoton de nr reale are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$)

Pt un șir crescător

Dem: Cazul 1 Pp $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este mărg sup $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ șirul este monoton (cresc?) & mărg. $\xRightarrow{TW}$ ~~Sirul~~ $\exists \lim_{n \to \infty} x_n \overset{=?}{\in} \mathbb{R}$

Cazul 2 Șirul este nemărg. sup. $\Rightarrow \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este nemărg. sup.

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon$ nu este maj. al mulț $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$ (1)

$n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n \geq x_{n_\varepsilon}$ (2)

$\Rightarrow x_n > \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

<u>Teorema 2</u> Din orice șir de nr. reale se poate extrage un subșir care are limită. (Orice șir de nr. reale are cel puțin un punct limită în $\overline{\mathbb{R}}$)

<u>Dem</u> (pe cazuri):

1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir ~~ne~~mărginit $\xRightarrow[\text{Cesaro}]{\text{Lema}}$ $\exists$ un subșir al șirului care este convergent

2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir nemărginit $\Rightarrow$ șirul este nemărg inf sau nemărg sup.

Pp că șirul este nemărg. superior $\Rightarrow \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$ este nemărg. superior $\xRightarrow{\text{(nu are majoranți în } \mathbb{R})}$ $\forall b\in\mathbb{R}$, mulțimea indicilor $\{x_n\; n\in\mathbb{N} \mid x_n > b\}$ este infinită

(Dacă ar fi un nr finit, atunci ar exista un max, indicele care ar fi majorant x_0)

$\{n\in\mathbb{N} \mid x_n > b\} \subseteq \mathbb{N}$ infinită $\Rightarrow \exists\, m_b = \min\{n\in\mathbb{N} \mid x_n > b\}$

$\Rightarrow x_n > b \;\forall\, n \geq m_b$

$b = 1 \Rightarrow \exists\, m_1 \in\mathbb{N}$ ai $x_n > 1 \quad \forall n \geq m_1$

Alegem ~~m_1~~ $n_1 = m_1 \Rightarrow x_{m_1} > 1$

$b = 2 \Rightarrow \exists\, m_2 \in\mathbb{N}$ ai $x_n > 2 \quad \forall n \geq m_2$

Alegem $n_2 = \max\{n_1, m_2\} + 1$

$n_2 > n_1 \;>1\;\; x_{n_2} > 1$?

$n_2 > m_2 \Rightarrow x_{n_2} > 2$

$b = 3 \Rightarrow \exists\, m_3 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n > 3 \;\forall n \geq m_3$

Alegem $n_3 = \max\{n_1, n_2, m_3\} + 1$

$n_3 > n_2 > n_1$

$n_3 > m_3 \Rightarrow x_{n_3} > 3$.

Inductiv construim $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{N}$ a.î. $n_k < n_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$x_{n_k} > k \;\; \forall k \in \mathbb{N}^*$ este un subșir ?

<u>Cazul 3</u> Pp șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nemărginit inferior $\Rightarrow (-x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este nemărginit sup. $\xRightarrow{\text{Cazul 2}} \exists\, (-x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ subșir al lui $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a.î. $\lim\limits_{k \to \infty} -x_{n_k} = +\infty \Rightarrow \exists \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = -\infty$

$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subșir al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

<u>Concluzii</u>: Din orice șir de nr reale se <u>poate</u> extrage un subșir care are limită în $\overline{\mathbb{R}}$

<u>Criterii de convergență pt șiruri de nr reale</u>

1) <u>Criteriul cleștelui</u> Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a.î. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ pt care $a_n \leq x_n \leq b_n \;\forall n \geq n_0$. Dacă $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = l \in \mathbb{R}$ atunci $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$

2) <u>Criteriul majorării</u> Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ pt care $a_n \leq b_n \;\forall n \geq n_0$

a) Dacă $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, atunci $\exists \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$

b) Dacă $\exists \lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$, atunci $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$.

3) Criteriul raportului pentru șiruri cu termeni pozitivi

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

a) Dacă $l<1$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b) Dacă $l>1$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Obs $l=1$ criteriul nu poate fi folosit

4) Criteriul rădăcinii pt. șiruri cu termeni pozitivi

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

5) Lema Stolz-Cesaro (varianta $\frac{\pm\infty}{+\infty}$)

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ sau $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ și $b_n \le b_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

6) Lema Stolz-Cesaro (varianta $\frac{0}{0}$)

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ cu urm prop:

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ și $b_n \ge b_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

29.11.2012

ANALIZĂ
CURS 9

Examen ora 9

Convergența în $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$

$\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k \text{ ori}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall 1 \leq i \leq k\}$

Funcția $d_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $d_2((x_1 \dots x_k), (y_1 \dots y_k)) =$
$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_k - y_k)^2}$ este distanță pe $\mathbb{R}^k$

<u>Lema 1</u> $\forall (x_1, \dots x_k), (y_1, y_2 \dots y_k) \in \mathbb{R}^k$ au loc inegalitățile:

a) $|x_i - y_i| \leq d((x_1, x_2 \dots x_k), (y_1, \dots y_k)) \ \forall 1 \leq i \leq k$

b) $d((x_1, \dots, x_n), (y_1 \dots y_n)) \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$

<u>Teorema 1</u> Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$; $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{kn})$ și $(x_{1n})_n, (x_{2n})_n, \dots, (x_{kn}) \subseteq \mathbb{R}$

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$ este șir Cauchy $\Leftrightarrow$ $(x_{1n})_n, (x_{2n})_n, \dots, (x_{kn})_n \subset \mathbb{R}$ sunt șiruri Cauchy

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$ este șir convergent $\Leftrightarrow$ $(x_{1n})_n, \dots, (x_{kn})_n \subseteq \mathbb{R}$ sunt șiruri convergente

În plus, $\lim_{n \to \infty} x_n = (\lim_{n \to \infty} x_{1n}, \lim_{n \to \infty} x_{2n}, \dots \lim_{n \to \infty} x_{kn})$

CRITERIUL LUI CAUCHY PT ~~VE~~ ŞIRURI DIN $\mathbb{R}^k$

Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ este şir Cauchy $\Leftrightarrow$ este şir convergent

<u>Dem:</u> $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{kn})$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$ este şir Cauchy $\overset{Th\,1}{\Leftrightarrow} (x_{1n})_n, \dots, (x_{kn})_n^{\mathbb{R}}$ sunt Cauchy $\underset{\text{pt şiruri de nr reale}}{\overset{\text{Crit Cauchy}}{\Leftrightarrow}} (x_{1n}), \dots, (x_{kn}) \subseteq \mathbb{R}$ sunt convergente $\overset{Th\,1}{\Leftrightarrow}$ ~~$(x_{1n})_n, \dots (x_{kn})$~~ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ este şir convergent

~~Obs~~:

<u>Def</u> Un spaţiu metric (X, d) în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte spaţiu metric complet.

<u>Obs</u> $\mathbb{R}, \mathbb{R}^k$ sunt spaţii metrice complete

<u>Ex:</u> $x_n = \left(\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{a_n}, \underbrace{n\cdot(-1)^n}_{b_n}\right), n\in\mathbb{N}$ este ~~ℓx~~ şirul convergent?

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \Rightarrow (a_n)_n$ convergent (limită finită)

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to+\infty} b_{2k} = +\infty \\ \lim\limits_{k\to+\infty} b_{2k+1} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ are 2 puncte limită diferite $\Rightarrow$ nu are limită $\Rightarrow$ nu e convergent

$\Rightarrow$ şirul de vectori este divergent

Limita inferioară și limita superioară a unui șir de numere reale

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Îi asociem șirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ și $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ definite în felul următor:

$$u_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\}$$
$$v_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\}$$

<u>Obs</u>

1) $\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = \sup \underbrace{\{x_k \mid k \geq n+1\}}_{B} \\ u_n = \sup \underbrace{\{x_k \mid k \geq n\}}_{A} \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $(B \subseteq A \Rightarrow \sup B \leq \sup A)$

$\left.\begin{array}{l} v_{n+1} = \inf\{x_k \mid k \geq n+1\} \\ v_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\} \end{array}\right\} \Rightarrow v_{n+1} \geq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) $u_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\}$

$v_m = \cancel{\sup}\ \inf\{x_k \mid k \geq m\}$

- $n = m \Rightarrow u_n \geq v_m$
- $n < m \Rightarrow$ $\cancel{u_n \geq v_m}$ $\cancel{v_n \geq v_m}$ $\left.\begin{array}{l} v_m \leq u_m \\ u_m \leq u_n \end{array}\right\} \Rightarrow$

  $\Rightarrow v_m \leq u_n$

- $n > m \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ v_n \geq v_m \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \geq v_m$

$\Rightarrow u_n \geq v_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Def 1 a) $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește limita sup. a șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește limita inferioară a șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Notații: $\overline{\lim}\, x_n = \limsup x_n \stackrel{def}{=} \inf_n \left(\sup_{k\geq n} \{x_k\}\right)$

$\underline{\lim}\, x_n = \liminf x_n \stackrel{def}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$

Obs 1) $\boxed{\liminf x_n \leq \limsup x_n}$

2) Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este mărginit atunci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ și $\overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$, și $\underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$ ($v_n \uparrow$ și mărg. sup. de-aia știm că lim e reală)

Notăm $A = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x$ punct limită al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\}$

Mulțimea A e nevidă.

Teorema 2 a) $\underline{\lim}\, x_n = \inf_{\overline{\mathbb{R}}} A$

b) $\overline{\lim}\, x_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} A$

Teorema 3 $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow A$ are un singur element $\Leftrightarrow x_n$ are limită ($\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$)

Teorema 4 Sunt adev. urm. afirmații:

a) $\underline{\lim}(\alpha x_n) = \begin{cases} \alpha\, \underline{\lim}\, x_n & \alpha \geq 0 \\ \alpha\, \overline{\lim}\, x_n & \alpha < 0 \end{cases}$

5) $\overline{\lim} \alpha x_n = \begin{cases} \alpha \overline{\lim}\, x_n & \alpha \geq 0 \\ \alpha \underline{\lim}\, x_n & \alpha < 0 \end{cases}$

b) $\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$

$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \geq \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$

EXEMPLU $\quad x_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$\lim_{k \to \infty} x_{2k} = \lim_{k \to \infty} 2k \cdot 0 = \lim_{k \to \infty} 0 = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} x_{4k+1} = \lim_{k \to \infty} (4k+1) \cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{k \to \infty} x_{4k+3} = \lim_{k \to \infty} -(4k+3) = -\infty$$

$A = \{-\infty, 0, \infty\} \Rightarrow \sup A = \limsup x_n = \infty$

$\inf A = \liminf x_n = -\infty$

/

6.12.2012

ANALIZĂ
CURS 10

Examen 1 feb - ora 9

Serii de numere reale

Unui şir de nr reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ îi asociem un alt şir $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definit prin: $s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$

Def 1 Perechea de şiruri $\left((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ se numeşte seria ~~cu termenul general~~ ~~atas~~ asociată şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şi se notează $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

- x_n se numeşte termenul general de ordin n al seriei
- s_n se numeşte suma parţială de ordinul n a seriei

Def 2 a) Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ se numeşte convergentă dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

b) Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ se numeşte divergentă dacă nu este convergentă.

c) Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ are sumă (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă şirul sumelor parţiale are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

În acest caz, ~~limita~~ $\lim_{n \to \infty} s_n \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte suma seriei şi se notează $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

d) Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ se numește absolut convergentă (după val absolută)
dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ este convergentă

Teorema 1 Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Dem $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă $\overset{def}{\Rightarrow} (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$
este convergent $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n \\ s_{n+1} = x_0 + x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s_{n+1} - s_n = x_{n+1} \\ \downarrow n\to\infty \quad \downarrow n\to\infty \\ S \qquad S \\ S \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Obs RECIPROCA TEOREMEI 1 ESTE FALSĂ!!!

Ex $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă !

$x_n \to 0$

Def 3 Se numește restul de ordin $p \in \mathbb{N}$ al seriei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ seria $\sum_{n=p+1}^{+\infty} x_n$ și se notează r_p

Teorema 2 Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă atunci $\exists \lim_{p\to\infty} r_p = 0$.

Dem: $\forall p \in \mathbb{N}$ este adevărată egalitatea

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{p} x_n}_{s_p} + \underbrace{\sum_{n=p+1}^{+\infty} x_n}_{r_p}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ convergentă $\Rightarrow (s_p)_{p\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ convergent

$\Rightarrow \exists \lim_{p\to\infty} s_p = S \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = S \Rightarrow S = \underset{\downarrow S}{s_p} + r_p \; \forall p \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists \lim_{p\to\infty} r_p = 0$.

CRITERIUL LUI CAUCHY PENTRU SERII DE NR. REALE

a) Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\left| \sum_{k=n}^{n+m} x_k \right| < \varepsilon \; \forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall m \in \mathbb{N}$

b) Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este absolut convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\sum_{k=n}^{n+m} |x_k| < \varepsilon \; \forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall m \in \mathbb{N}$

Teorema 3 Orice serie de nr reale absolut convergentă este convergentă.

Demonstrație $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este absolut convergentă

$\overset{\text{Crit Cauchy}}{\underset{b)}{\Rightarrow}}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\sum_{k=n}^{n+m} |x_k| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon, \ \forall m \in \mathbb{N}$ (1)

Este adev că $\left|\sum_{k=n}^{n+m} x_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+m} |x_k| \ \forall n, m \in \mathbb{N}$ (2)

Din (1) și (2) avem că $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\left|\sum_{k=n}^{n+m} x_k\right| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall m \in \mathbb{N}$ $\overset{\text{Crit Cauchy}}{\underset{a}{\Longrightarrow}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Obs RECIPROCA TEOREMEI 3 ESTE FALSĂ!

Exemplu de serii convergentă care nu este absolut convergentă

Alegem $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, este convergentă

Se evaluează seria modulelor $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ este serii divergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu e absolut convergentă

Def 4 O serie de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ se numește semiconvergentă dacă este convergentă și nu este absolut convergentă

Teorema 4 (Operații cu serii convergente și absolut convergente)

a) Dacă seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ sunt convergente atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n)$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n - y_n)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c x_n$ sunt serii convergente

b) Dacă seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ sunt absolut convergente, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n+y_n)$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n-y_n)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c x_n$ sunt absolut convergente

În ambele cazuri $\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n \pm y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} c x_n = c \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

Criterii de convergență pt. serii cu termeni oarecare

1) Criteriul lui Abel

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ a.î.

a) $x_{n+1} \le x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
~~b)~~ $\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

b) $\exists c>0$ ~~a.î.~~ care $\left|\sum_{k=0}^{n} y_k\right| \le c \ \forall n \in \mathbb{N}$

Atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă

(Nu se cheamă seria produs!!!)

2) Criteriul lui Dirichlet

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ a.î.

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este șir monoton și mărginit

b) seria $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este convergentă

Atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ este convergentă

3) Criteriul lui Leibniz

(se deduce $x_n \geq 0$)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ai $x_{n+1} \leq x_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci seriile $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} (-1)^n x_n$, $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x_n$ sunt convergente

Exemplu pt crit Leibniz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = (-1)^n \cdot x_n, \quad x_n = \frac{1}{n} \to 0, \; n\in\mathbb{N}^*$$

$x_{n+1} \leq x_n \; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\overset{\text{crit Leibniz}}{\Longrightarrow}$ seria $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ e convergentă

13.12.2012

ANALIZĂ
CURS 11

Serii de numere reale

Teorema 1 Dacă o serie de nr. reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este absolut convergentă și $S \in \mathbb{R}$ este suma ei, pentru orice funcție bijectivă $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (σ - permutare a lui $\mathbb{N}$) seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ este convergentă și are suma S.

Teorema 2 Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ o serie semiconvergentă ~~cu $S \in \mathbb{R}$ suma~~ ei și $x_0 \in \mathbb{R}$. Există o funcție bij $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a.î. seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$ este convergentă și suma ei este x_0.

Def! Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$. Se numește produsul seriilor (sau seria produs) $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ seria $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, unde $z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \dots + x_n y_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Teorema lui Cauchy

Dacă seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ sunt absolut convergente, atunci seria $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ este absolut convergentă și are loc egalitatea:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

Teorema lui Mertens

Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este absolut convergentă atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ este convergentă și are loc: $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$

Serii cu termeni pozitivi (de numere reale pozitive)

Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este o serie cu termeni pozitivi, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Rezultă că orice serie cu termeni pozitivi este absolut convergentă dacă și numai dacă este convergentă.

Teorema 1 a) Pentru orice serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ este crescător

b) O serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ este mărg. superior. În plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$

c) O serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este fie convergentă, fie divergentă cu suma $+\infty$

Demonstrație

a) $s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$s_{n+1} - s_n = x_{n+1} \geq 0 \Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescător

b) "$\Rightarrow$"

$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ convergentă $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow s_n$ ~~mărginit super~~ convergent $\Rightarrow s_n$ mărg sup

"$\Leftarrow$"

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mărg. superior
Știm că $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărg. inferior
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător

Th. W. $\Rightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ e convergent

$\Rightarrow$ serie convergentă

c) Știm că șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este crescător deci mărg. inf.

<u>Cazul I</u> $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este mărg. sup $\Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este convergent $\Rightarrow$ seria $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x_n$ este converg.

<u>Cazul II</u> $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este nemărg. sup $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$
$\Rightarrow$ seria e divergentă, și are suma $+\infty$

<u>Teorema 2</u> Dacă o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă și suma ei este 0, atunci $x_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Demonstrație</u>

$\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x_n$ convergentă $\Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ este cresc. și mărg. superior

$\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x_n = 0 \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = 0 \Rightarrow s_n \leq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$,
dar $s_n \geq 0 \Rightarrow s_n = 0$

$s_n = 0 \Rightarrow x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0 \Rightarrow x_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Criterii de convergență pt serii cu termeni pozitivi</u>

1) <u>Criteriul raportului (d'Alembert)</u>
<u>(pentru serii cu termeni pozitivi)</u>

Considerăm o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ pt care $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l<1$, atunci seria este convergentă

Dacă $l>1$, atunci seria este divergentă

2) Criteriul radicalului

Considerăm seria cu termeni pozitivi $\sum_{n\ge 0}^{+\infty} x_n$ pt care există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

- $l>1$ - divergentă
- $l<1$ - convergentă

3) Criteriul RAABE-DUHAMEL

Considerăm o serie cu termeni poz $\sum_{n\ge 0}^{+\infty} x_n$ pt care $\exists \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l<1$, atunci seria e divergentă

Dacă $l>1$, atunci seria este convergentă

4) Criteriul de condensare al lui Cauchy

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ este un șir descrescător atunci seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n\ge 0}^{+\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași natură.

5) Criteriul de comparație I

Considerăm seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n\ge 0}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ pt care $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \le y_n$ $\forall n \ge n_0$

Dacă $\sum_{n\ge 0}^{+\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n\ge 0}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Dacă $\sum_{n\ge 0} x_n$ e div $\Rightarrow$ $\sum_{n\ge 0}^{+\infty} y_n$ div

6) Criteriul de comparație II

Considerăm seriile cu termeni poz. $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ pt care $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Dacă $l \in (0,\infty)$ atunci seriile au aceeași natură

Dacă $l=0$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă.

Dacă l ~~$\in (+\infty, 0)$~~ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ e diverg, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este diverg

Mulțimi compacte în spații metrice

(X,d) - spațiu metric

$d \longrightarrow \mathcal{T}_d$ (topologia generată de dist d)

Def 1 O mulțime $A \subset (X,d)$ se numește compactă dacă din orice acoperire a sa cu mulțimi deschise se poate extrage o subacoperire finită.

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \underbrace{\bigcup_{i\in I} G_i}_{\text{o acoperire a lui } A} \\ G_i \in \mathcal{T}_d \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, i_1,\dots,i_n \in I \text{ a.î. } A \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n}$$

Teorema 1 (Proprietățile mulț compacte)

a) Dacă $A, B \subseteq (X,d)$ sunt mulț compacte atunci $A \cup B$ este mulț ~~compactă~~ și $A \cap B$ mulț compacte

b) Dacă $A \subset X$ este mulț compactă atunci este mulț închisă

c) Dacă $A \subseteq B \subseteq (X, d)$ și A este mt închisă și B mt compactă atunci A este compactă

Def 2 O mulțime ~~închisă~~ $B \subseteq (X, d)$ se numește relativ compactă dacă $\overline{B}$ este mț compactă
aderența ~~sau complementara~~?

Teorema 2 (Caracterizare echiv. a mț compacte în sp metrice)

O mț $A \subseteq (X, d)$ este compactă dacă și numai dacă din orice șir de el din mț A putem extrage un subșir convergent, și limita acestuia $\in A$

Corolar O mț $B \subseteq (X, d)$ este relativ compactă dacă și numai dacă din orice șir de el din B se poate extrage un subșir convergent.

ANALIZĂ
CURS 12

20.12.2013

Mulțimi compacte în spații metrice

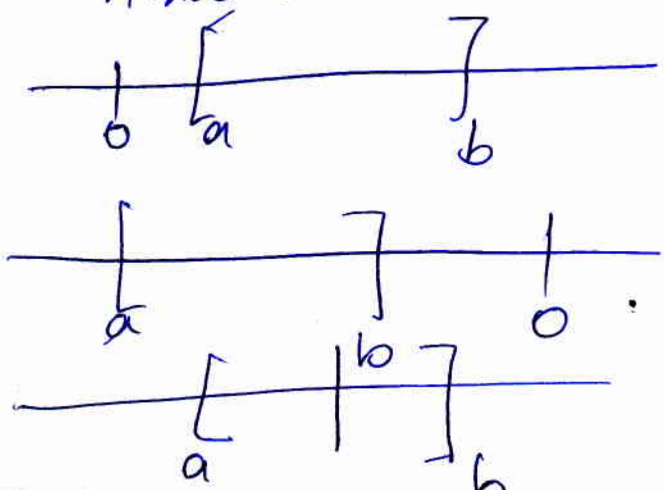
Def 1: O mț $A \subseteq (\mathbb{R}^n, d)$ se numește mărginită dacă $\exists\, r>0$ a.î. $A \subseteq B(0,r)$

Teorema 1 a) O mț $A \subseteq (\mathbb{R}^n, d)$ este compactă dacă și numai dacă e închisă și mărginită

b) O mț $B \subseteq (\mathbb{R}^n, d)$ este relativ compactă dacă și numai dacă este mărginită

Ex 1) $A = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a \leq b$

A mț închisă



$r = b+1$

$R = |a|+1$

$r = \max\{|a|, b\}+1$

$[a,b] \subseteq B(0,r) \Rightarrow [a,b]$ este mărginită $\Rightarrow$ este compactă

2) $[a,b)$ e mărginită, dar nu închisă $\Rightarrow [a,b)$ nu e compactă, dar e rel compactă

3) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ mț închise, nu sunt mărginite $\Rightarrow$ ~~A~~ nu sunt nici compacte, nici rel compacte

4) $[a,b] \cup [c,d]$ este mt închisă, mărg $\Leftrightarrow$ e compactă

Mulțimi conexe în spații metrice

Def 2 Două mt $M, N \subseteq (\mathbb{R}^n, d)$ se numesc separate dacă $\bar{M} \cap N = \{\emptyset\}$ și $M \cap \bar{N} = \{\emptyset\}$

Def 3 O mt $A \subseteq (X, d)$ se numește conexă dacă nu se poate scrie ca reuniune de 2 mt separate și nevide

$$\left.\begin{array}{l} A = M \cup N \\ M, N \neq \emptyset \\ A \text{ conexă} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{M} \cap N \neq \emptyset \text{ sau } M \cap \bar{N} \neq \emptyset$$

- $A = (0,1) \cup (2,3)$ nu este mulțime conexă

- $\mathbb{N} = \underbrace{\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}}_{M \neq \emptyset} \cup \underbrace{\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}}_{N \neq \emptyset}$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{M} = M \\ \bar{N} = N \\ \bar{M} \cap N = M \cap N = \emptyset \\ M \cap \bar{N} = M \cap N = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nu e conexă}$$

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ nu sunt conexe
- $\mathbb{R}$ e conexă

Def O mt $I \subseteq \mathbb{R}$ s.n. interval dacă pentru oricare 2 nr a, b $a < b \in I$ avem că $(a,b) \subseteq I$

- mt vidă e conexă

Teorema 3. O mulț. $A \subseteq \mathbb{R}$, (A ~~≠∅~~) e conexă <=> $A = \emptyset$ sau A e interval în $\mathbb{R}$.

Funcții continue pe spații metrice

X, Y sp. metrice: (X, d_1) (Y, d_2)

Def 1 a) O funcție $f: D \subseteq X \to Y$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă $\forall W \in \mathcal{V}(f(x_0))$ $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(D \cap V) \subseteq W$

b) O funcție $f: D \subseteq X \to Y$ este continuă pe mulț. $A \subseteq D$ dacă f e continuă în orice punct al lui A

Def echivalentă pt continuitatea lui f în x_0

$f: D \subseteq X \to Y$ este continuă în $x_0 \in D$ <=>

1) pt $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, $\forall x \in D$ cu $d(x, x_0) < \delta_\varepsilon$

2) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ pentru care $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ avem că $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

• ~~$f: [0,1] \setminus \{1/2\} \to \mathbb{R}$~~

Teorema 1 Orice funcție $f: D \subseteq X \to Y$ este continuă în punctele izolate ale domeniului de def. (D)

Dem Pp că există $x_0 \in \operatorname{Izo} D \Rightarrow \exists V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $V_0 \cap D = \{x_0\}$, $f(D \cap V_0) = \{f(x_0)\}$ (1)

Alegem $W \in \mathcal{V}(f(x_0)) \Rightarrow f(x_0) \in W \Rightarrow \{f(x_0)\} \subseteq W$
$\Rightarrow f(D \cap V_0) \subseteq W \Rightarrow f$ continuă în x_0

Ex $f:[0,1]\cup\{2\}\to\mathbb{R}$ e continuă în 2

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ e cont pe $\mathbb{N}$

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ e cont pe $\mathbb{Z}$

Teorema 2 (operații cu funcții continue)

a) Fie $g:D\subseteq X\to B\subseteq Y$, $f:B\subseteq Y\to \cancel{Z}$ 2 funcții ai g cont în $x_0\in D$ și f cont în $g(x_0)$. Atunci, $f\circ g: D\to Z$ e cont în x_0

b) Fie $f,g:D\subseteq X\to\mathbb{R}$ 2 f. continue în $x_0\in D$. Atunci $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ sunt funcții continue în x_0. Dacă, în plus, $g(x)\neq 0$ $\forall x\in D \Rightarrow \frac{f}{g}$ e cont în $x_0\in D$

Dem a) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq D$ ai $\exists \lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0$

$g:D\subseteq X\to B\subseteq Y$ e cont în $x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$

$\left.\begin{array}{l}(g(x_n))_n\subseteq B,\ \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) \\ f \text{ cont în } g(x_0)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(x_0)) \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} (f\circ g)(x_n) = (f\circ g)(x_0)$

$\Rightarrow f\circ g$ cont.

b) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ai $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

f cont în $x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

g cont în $x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n)\pm g(x_n)) = f(x_0)\pm g(x_0)$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\cdot g(x_n) = f(x_0)\cdot g(x_0)$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ $(g(x) \neq 0 \ \forall x \in D)$

$\Rightarrow$ sunt ~~f~~ fct continue în x_0

Teorema 3 (Proprietăți ale funcțiilor continue)

a) Fie $f: D \subseteq X \to Y$ o fct cont pe D

Dacă ~~pt~~ $A \subseteq D$ este compactă $\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ este compactă

Dacă $B \subseteq D$ este conexă $\Rightarrow f(B) \subseteq Y$ este conexă

b) Fie $f: X \to Y$ o fct cont pe X

Dacă $G \in \mathcal{T}_{d_2}$ (G e deschisă în Y) atunci $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_{d_1}$ ($f^{-1}(G)$ e deschisă în X)

Dacă ~~$\forall F \in \mathcal{F}_{6}$~~ $F \subseteq Y$ este închisă $\Rightarrow f^{-1}(X)$ este închisă

Dacă $W \in \mathcal{V}(f(x))$ at $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x)$

Teorema 4 Fie $A \subseteq (X, d_1)$ o mt compactă și $f: A \to \mathbb{R}$ fct continuă pe A. Atunci f este funcție mărginită și atinge marginile

Dem $A \subseteq X$ mt compactă

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq X \text{ mt compactă} \\ f: A \to \mathbb{R} \text{ fct continuă} \end{array}\right\} \Rightarrow f(A) \subseteq \mathbb{R}$ e mt compactă $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(A)$ mărginită și închisă $\Rightarrow f$ mărg.

Not $M = \sup f(A)$ și $m = \inf f(A)$; $M = \sup\limits_{x\in A} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f(A)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, A mt compactă $\Rightarrow \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subșir convergent al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x$

$\left.\begin{array}{l} x_{n_k} \to x \\ f \text{ cont în } x \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \Rightarrow \left. f(x_{n_k}) \to M \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = M$

10.01.2018

ANALIZĂ
CURS 13

Funcții continue

Def 1 O funcție $f: A \subseteq (X, d_1) \to B \subseteq (Y, d_2)$ s.n. „homeomorfism" dacă f cont pe A este bijectivă și $f^{-1}: B \to A$ e cont pe B

Th Teorema 1 Fie $A \subseteq (X, d_1)$ și $B \subseteq (Y, d_2)$ două mulțimi compacte.
Orice funcție continuă și bijectivă $f: A \to B$ este homeomorfism

Def 2 O fct $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are ~~prop~~ prop. lui Darboux dacă pt orice interval $x_1 \neq x_2 \in I$ și pt orice nr real $\lambda \in \mathbb{R}$ situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ există un element din I situat între x_1 și x_2 a.î. $\lambda = f(c)$

Teorema 2 Orice funcție continuă are prop. lui Darboux

Dem Alegem $x_1 \neq x_2 \in I$ și $\lambda \in \mathbb{R}$ situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$

Pp că $x_1 < x_2$ și $f(x_1) \le f(x_2)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \in I \\ I \text{ interval} \end{array}\right\} \Rightarrow [x_1, x_2] \subset I \quad (1)$$

~~$[x_1, x_2]$ interval~~

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} [x_1, x_2] \text{ interval pe } \mathbb{R} \\ [x_1, x_2] \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow [x_1, x_2] \text{ e conexă} \\ f \text{ continuă} \\ \text{și } (1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f([x_1, x_2]) \text{ e conexă} \\ f(x_1) \in f([x_1, x_2]) \Rightarrow f([x_1, x_2]) \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow f([x_1, x_2]) \text{ e interval pe } \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} f([x_1,x_2]) \text{ interval } (2) \\ f(x_1) \in f([x_1,x_2]) \\ f(x_2) \in f([x_1,x_2]) \end{array}\right\} \Rightarrow [f(x_1), f(x_2)] \subseteq f([x_1,x_2])_{(3)}$$

$\lambda \in [f(x_1), f(x_2)] \overset{(3)}{\Rightarrow} \lambda \in f([x_1,x_2]) \Rightarrow \exists c \in [x_1,x_2]$ a.î. $\lambda = f(c)$

Concluzie: f are Darboux

<u>Corolar</u> Fie $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f continuă

Dacă $\exists a, b \in I$ cu $a < b$ a.î. $f(a) f(b) < 0$ $(\leq)$
atunci $\exists c \in (a,b)$ a.î. $f(c) = 0$
$(c \in [a,b])$

<u>Dem</u> Pp $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Luăm } \lambda = 0 \in (f(a), f(b)) \\ f \text{ cont} \Rightarrow \text{are Darboux} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ a.î. } f(c) = \lambda = 0$$

Dacă $f(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, atunci $f(x) > 0 \ \forall x \in I$
sau $f(x) < 0 \ \forall x \in I$

<u>Ex</u>. de f cu Darboux care nu sunt continue

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Im} f = [-1, 1]$

f are Darboux pe $[0,1]$
f nu e cont în 0

Teorema 3: Orice $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă și injectivă (I interval) este strict monotonă

Dem. Pp că f nu este strict monotonă $\Rightarrow \exists\, x < y < z$ a.î.

$\left.\begin{array}{l} f(x) < f(y) \\ f(y) > f(z) \end{array}\right\} \Rightarrow f(y) = \max\{f(y), f(x), f(z)\}$

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\begin{cases} f(x) < \lambda < f(y) \\ f(z) < \lambda < f(y) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont pe } I \\ I \text{ interval} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ are PD

$f(x) < \lambda < f(y) \Rightarrow \exists\, c_1 \in (x, y)$ a.î. $f(c_1) = \lambda$

$f(z) < \lambda < f(y) \Rightarrow \exists\, c_2 \in (z, y)$ a.î. $f(c_2) = \lambda$

$\left.\begin{array}{l} \lambda = f(c_1) = f(c_2) \xrightarrow{f \text{ inj}} c_1 = c_2 \\ x < c_1 < y < c_2 < z \end{array}\right\} \Rightarrow$ contradicție

Rămâne că e strict monotonă

Aplicație: $f: [0, 1] \to [0, 1]$ continuă

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$

$(f \circ f)(x) = x \ \forall\, x \in [0, 1]$

Vrem(?) $f(x) = x \ \forall\, x \in [0, 1]$

$\left.\begin{array}{l} (f \circ f)(x) = x \ \forall\, x \in [0, 1] \Rightarrow f \text{ inversabilă} \Rightarrow f \text{ inj} \\ f \text{ cont pe } [0, 1] \text{ interval} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f \text{ strict monotonă} \\ f(0) = 0 < 1 = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow f$ strict cresc

Pp că $\exists\, x_0 \in [0, 1]$ a.î. $f(x_0) \neq x_0$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ bij pe } [0, 1] \\ x_0 \in [0, 1] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\, y_0 \in [0, 1]$ a.î.

$\left.\begin{array}{l} x_0 = f(y_0) \\ f(x_0) = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0) \neq f(y_0)$

$\Downarrow$ f inj

$x_0 \neq y_0$.

CI $x_0 < y_0 \xRightarrow{f \nearrow} f(x_0) < f(y_0) \Rightarrow f(f(x_0)) < f(x_0) \Rightarrow$ (f cresc)

$\Rightarrow x_0 < f(x_0) \Rightarrow f(y_0) < f(x_0)$ $\times$

CII $x_0 > y_0 \xRightarrow{f \nearrow} f(x_0) > f(y_0) \Rightarrow f(f(x_0)) > f(f(y_0)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 > f(x_0) \Rightarrow f(y_0) > f(x_0)$ $\times$

Aşadar $\forall x \in [0,1]$ $f(x) = x$

Funcții uniform continue pe spații metrice

Def 1 O funcție $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ s.n. uniform continuă pe mț D dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ pt care $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ $\forall x, y \in D$ cu $d(x,y) < \delta_\varepsilon$

Obs. Orice funcție uniform continuă este funcție continuă. Dacă $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ e uniform cont pe D și $A \subseteq D$ atunci $f|_A$ e unif cont pe A

Condiții suficiente ca o fct f să fie unif continuă

Teorema 1: Fie $D \subseteq (X, d)$ o mț compactă. Orice funcție continuă $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este funcț unif cont pe D

<u>Def 2</u> O fct $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ s.n. funcție LIPSCHITZ dacă $\exists\, c > 0$ pt care

$$d_2(f(x), f(y)) \le c \cdot d_1(x, y) \quad \forall\, x, y \in D$$

Dacă $c \in (0, 1)$ funcția s.n. contracție

<u>Exemple</u>

Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e derivabilă și $f' : I \to \mathbb{R}$ e mărginită, atunci f e fct LIPSCHITZ

În plus

$$|f(x) - f(y)| \le \sup_{t \in I} |f'(t)| \cdot |x - y| \quad \forall\, x, y \in I$$

<u>Teoremă</u> Orice funcție LIPSCHITZ e uniform cont pe D.

17.01.2013

ANALIZĂ
CURS 14

Funcții uniform continue

Condiții suficiente că o funcție să fie uniform continuă

Teorema 1 Fie $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție pt care $\exists F: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ai $I \subseteq J$ și $F|_I = f$. Dacă f este uniform continuă pe J atunci este unif cont pe I

Teorema 2 Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval ai $I = I_1 \cup I_2$ și $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intervale ai $\mathring{I}_1 \cap \mathring{I}_2 = \emptyset$ și $f: I \to \mathbb{R}$, o funcție ai $f|_{I_1}$ este unif cont pe I_1 și $f|_{I_2}$ este unif cont pe I_2 atunci f este unif cont pe I

Condiții suf ca o funcție să nu fie unif. cont

Teorema 3 Dacă $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ nu este cont în $x_0 \in D$ (in cel puțin un punct), atunci f nu este unif cont pe D

Teorema 4 Fie $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ și $A \subseteq D$, $A \neq \emptyset$ ai $f|_A$ nu este uniform continuă pe A, atunci f nu este unif cont pe D

Teorema 5 Fie $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$

a) Dacă $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\exists (x_n)_n, (y_n)_n \subseteq D$ ai

$d(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ și $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ at f nu este unif cont pe D

b) $\exists$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ ai $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si $d(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} l \neq 0$, atunci f nu este uniform continuă pe D

<u>Aplicații</u> (e unif cont?)

I. 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$

f este continuă pe $\mathbb{R}$

f este derivabilă pe $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ este interval

$f'(x) = \cos x$

f' este fct mărg pe $\mathbb{R}$

$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{t\in I} |f'(t)| \cdot |x-y|$ $\forall x, y \in I$

$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$ $\forall x, y \in I$

f este funcție Lipschitz pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ f unif cont pe $\mathbb{R}$

2) $f(x) = \cos x$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

f cont pe $\mathbb{R}$, f deriv, $\mathbb{R}$ int, $f'(x) = -\sin x$ f' e mărg pe $\mathbb{R}$, în rezultat $\Rightarrow$ fct $\mathcal{L}$ pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ unif cont

3) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

f cont pe $\mathbb{R}$, f deriv, $\mathbb{R}$ int, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ mărg de 0 și 1

4) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

II. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$

f cont pe $[0,\infty)$, f deriv pe $(0,\infty)$, $[0,\infty)$ interval, ~~$f'(x)=\frac{1}{2x}$~~

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in (0, \infty)$

$[0,\infty) = [0,1] \cup \underbrace{(1,+\infty)}_{I_2}$ $\overset{\circ}{I_1} \cap \overset{\circ}{I_2} = \emptyset$

Pt $x \in I_2 = (1, +\infty)$

$1 < x \Rightarrow 1 < \sqrt{x} \Rightarrow 2 < 2\sqrt{x} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)$ mărg pe I_2

$\Rightarrow f\big|_{I_2}$ este unif cont pe I_2 (1)

I_1 mt. marg. și închisă în $\mathbb{R}$ $\Rightarrow I_1$ este mult. compactă pe $\mathbb{R}$
$f\big|_{I_1}$ este continuă pe I_1

$\Rightarrow f\big|_{I_1}$ este uniform cont pe I_1 (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ f unif cont pe $[0, \infty)$

$\underline{III}$ $f(x) = x^2$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f cont, $\mathbb{R}$ interval, $f'(x) = 2x$ (e deriv)

$x_n = n + \frac{1}{n}$

$y_n = n$

$|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|(n+\frac{1}{n})^2 - n^2\right| =$

$= \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| \geq 2 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow f$ nu este unif cont pe $\mathbb{R}$

$\underline{IV}$ $f(x) = e^x$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f cont, $\mathbb{R}$ int, f der., f' nemarg (problemă!!)
Deci prin rad la absurd că f nu e unif cont
Pp că f este unif cont pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists$

$\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ a.î.
$|x-y| < \delta_\varepsilon$

Alegem $\varepsilon = 1$ $\exists \delta_1 > 0$ a.î. $|e^x - e^y| < 1$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ a.î.
$|x-y| < \delta_1$

Alegem $x \in \mathbb{R}$ și construim $y = x + \frac{\delta_1}{2}$

$|x-y| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1 \Rightarrow \left|e^x - e^{x+\frac{\delta_1}{2}}\right| < 1 \Rightarrow e^x\left|1 - e^{\frac{\delta_1}{2}}\right| < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x\left(e^{\frac{\delta_1}{2}} - 1\right) < 1 \Rightarrow e^x < \frac{1}{e^{\frac{\delta_1}{2}} - 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$e^x < \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow e^x <$ constantă ~~$\forall x$~~

$\Rightarrow f$ nu e uniform cont

V $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$

f cont pe $(0,1]$

f deriv pe $(0,1]$

$f'(x) = \sin\frac{1}{x} + x\frac{1}{x^2}\cos x = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos x$

$\forall x \in (0,1]$

f' nu e mărg pe $(0,1]$ și ? a fecu ?

$\lim\limits_{x \searrow 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

$F : [0,1] \to \mathbb{R}$ $F(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x\sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \end{cases}$

~~F este o~~ $F\big|_{(0,1]} = f \Rightarrow F$ prelungire a lui f

Domeniul de def al prelungirii e mt compactă $\Big\}$ $\Rightarrow$ F cont pe $[0,1]$.

$\Rightarrow F$ unif cont pe $[0,1]$ $\Rightarrow f$ e unif cont pe $(0,1]$

VI $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$

f cont pe $\mathbb{R}$

f deriv pe $\mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$ problemă!

f nu este deriv în 0

$f'(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$

$(-\infty,0) \cap [0,\infty) = \emptyset$

$f'\big|_{(-\infty,0)}$ este mărginită pe $(-\infty,0)$ $\Rightarrow f\big|_{(-\infty,0)}$ este unif cont pe $(-\infty,0)$ (1)

$f'\big|_{[0,\infty)}$ e mărg pe $[0,\infty)$ $\Rightarrow f\big|_{[0,\infty)}$ este unif cont pe $[0,\infty)$ (2)

(1), (2), (3) $\Rightarrow f$ e unif cont.
din

1 oră jum – 30 min teorie – 2 sub. – Def + enunț cel 1,5p enunț dem. 1,5 p
1 pct of.

curs + seminar – 2 cărți