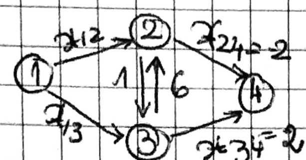
$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cancel{\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

Aplicatie : Problema fluxului de cost minim

Ex 1 :



Grafuri orientate : $\Gamma = \{N, A\}$, N - noduri

A - arce

15. Aprilie 2019

Curs 9

Optimizare în rețele

Graf orientat $G = (N, A)$, $|N| = n$

flux $x = (x_{ij})$ $i, j \in N$

$$y = (y_i)\ i \in N,\quad y_i = \sum_{\{j \in N \mid (i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j \in N \mid (j,i) \in A\}} x_{ji}$$

conservarea fluxului : $y_i = 0$, $\forall i \in N$, $i \neq 1, n$

pp. 1 sursă, n destinație

$0 \le x_{ij} \le k_{ij}$, $\forall (i,j) \in A$

k_{ij} - capacitatea arcului (i,j)

$$f = \sum_{j \in N} x_{1j} - \sum_{j \in N} x_{j1} = \text{valoarea fluxului } x$$

$$-f = \sum_{j \in N} x_{nj} - \sum_{j \in N} x_{jn}$$

Obs 1) $x_{ji} = -x_{ij}$, $\forall i, j \in N$

antisimetrie

2) $x_{ij} = 0$ dc. $(i, j) \notin A$

Problema fluxului maxim

$\max f$

$$\sum_{j\in N} x_{1j} - \sum_{j\in N} x_{j1} = f$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij} - \sum_{j\in N} x_{ji} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in N} x_{mj} - \sum_{j\in N} x_{jm} = -f$$

$$x_{ij} \le K_{ij} \ \forall i,j \in N$$

A - matricea de incidență nod-arc

$e = (1, 0, \dots, 0, -1)^T$, $\dim e = n$

$K = (K_{ij})_{i,j}$

$x = (x_{i,j})$

$(1) \Leftrightarrow 2)$
$$\begin{cases} \max f \\ Ax - fe = 0 \\ x \le K \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \max f \\ -Ax + fe = 0 \to u \qquad (3) \\ x \le K \to w \end{cases}$$

Duala pr. (3):

$\max w^T K$

$$(4) \quad \begin{cases} -A^T u + w = 0 \\ e^T u = 1 \\ w \ge 0 \end{cases}$$

(5) $\min \sum_{i,j\in N} w_{ij} K_{ij}$

$$\begin{cases} u_i - v_j = w_{ij}, & i,j \in N \\ u_1 - u_m = 1 \\ w_{ij} \ge 0, & \forall i,j \in N \end{cases}$$

Fie S, $\overline{S}$ două submt. disjuncte de noduri ale lui N

$1 \in S$, $m \in \overline{S}$

O sol. admis. pt. (5):

$u = (u_i)_{i \in N}$ cu $u_i = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \in \overline{S} \end{cases}$

$w_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \text{ muchie a.î. } i \in S, j \in \overline{S} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

Def: 1) Fie $S, \overline{S}$ submt. de noduri ale grafului, astfel încât să fie disj ($S \cap \overline{S} = \emptyset$ și $S \cup \overline{S} = N$), iar $1 \in S$ și $m \in \overline{S}$.

2) Se numește tăietură suma capacităților arcelor (i,j) cu $i \in S$, $j \in \overline{S}$.

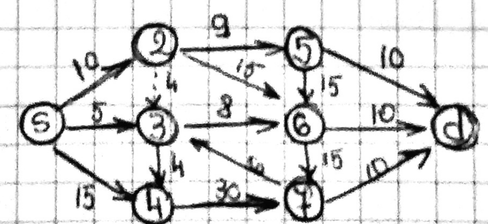
Not $(S, \overline{S})$ $\quad \sum_{\substack{i \in S \\ j \in \overline{S}}} (k_{ij})$

Din th. de dualitate de la opt. liniară: dacă x - sol. opt. a pr. 2) $\rightarrow \max f = \min \sum_{i,j \in N} k_{ij} w_{ij}$

Adică: fluxul maxim coincide cu tăietura minimă a grafului

Exemplu:

1)



$K_{12} = 10$
$K_{13} = 5$

1) $S_1 = \{1\}$, $\overline{S_1} = \{2, 3, \dots, 8\}$

$10 + 5 + 15 = 30$ tăietura

2) $S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad \overline{S_2} = \{5, 6, 7, 8\}$

tăietura $= 9 + 15 + 8 + 30 = 62$

3) $S_3 = \{1, 3, 4, 7\}$

$\overline{S_3} = \{2, 5, 6, 8\}$

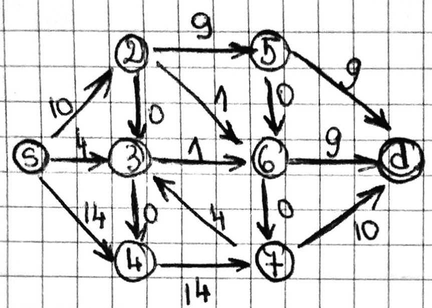
tăietura $= 10 + 8 + 10 = 28$ (tăietura minimă)

$\min_{S \subset N} (S, \bar{S}) = 28$

tăietura minimă $= (S_3, \bar{S}_3)$

La examen: definiții / enunțuri de teoreme (fără dem).

2)



$f = x_{12} + x_{13} + x_{14} = 28$

$-f = x_{58} + x_{78} = 28$

$x_{12} = x_{23} + x_{26} + x_{25}$

$10 = 0 + 1 + 9$

flux maximă = tăietură minimă = 28

Def: Arcul (i,j) s.n. <u>saturat</u> (în rap. cu fluxul x) dc. $x_{ij} = K_{ij}$.

<u>Ex</u> $(1,2)$ saturată

$(1,3)$ nu e sat.

Un drum s.n. <u>sat</u> dacă are cel puțin o muchie sat.

Dacă $x_{ij} < k_{ij}$ $\quad K_{ij} - x_{ij}$ s.n. capacitatea reziduală

Dacă G este o rețea, notăm G_f rețeaua reziduală

dacă $(i,j) \in A$ și $x_{ij} < K_{ij} \Rightarrow$ în G_f capac. arcului (i,j) este $x_{ij} - k_{ij}$

<u>Obs</u>: G_f are arce în plus față de G.

Obs: 1) Dacă x este flux în G cu val. f.

x^* —— " —— Gf —— " —— f^*.

$\Rightarrow x^+ = x + x^*$ este flux în G cu val. $f^+ = f + f^*$

2) x este flux în G de val. max. dc. nu există flux x^* în Gf de val. poz. (echivalent; nu $\exists$ drum de la sursă la dest. în Gf)

Algoritm Ford

Fie G rețeaua

Pas 1 $x_{ij} = 0$, $\forall i,j$ $f = 0$

Pas 2 Det. rețeaua reziduală Gf

Pas 3 atât timp cât $\exists$ flux de val. > x^* în Gf: a) det. x^* ....

b) det. în G $x + x^*$

c) det Gf

pt. fluxului maxim se poate rez. cu simplex

Ideea - alg. gen. un drum de la s la t (date de ...) cu val. de alg. anterior

- etichetează nodurile și acceptă etichetele

$j \rightarrow$ eticheta (i, g_j) i - predecesorul lui j

g_j - capac. nodului j

Dacă: $\exists$ arcul (i,j) cu $x_{ij} < k_{ij}$

$g_j = \min(e_i, k_{ij} - x_{ij})$

$\exists$ arcul (j,i) cu $x_{ji} > 0$

$g_j = \min(e_i, x_{ji})$

alg. ... fluxul ... pe muchia (i,j) cu $k_{ij} - x_{ij}$ și pe muchia opusă pune $-x_{ij}$