Teorie

- Teorema lui Peano
- Funcții Lipschitz
- Lema Bellman - Gronwall. Th. Lipschitz
- Ec. dif. de ordin superior. Existența și unicitatea globală a sol.
- Teorema asupra prelungirii sol.

c5 - Existența și unicitatea sol maximale

- Existența soluțiilor globale
- Ecuații liniare pe $\mathbb{R}^n$
  - → spațiul soluțiilor
  - → matrice de soluții
  - → teorema lui Liouville
  - → soluții matriceale

c7 - Rezolvanta unei ecuații liniare pe $\mathbb{R}^n$

- Rezolvanta ec. liniare pe $\mathbb{R}^n$ cu coef constanți
- Exponențiala unei ec. liniare

c8 - Structura soluțiilor pe $\mathbb{R}^n$
  - → în cazul general distincte
  - → valori proprii

- Ecuații afine pe $\mathbb{R}^n$, principiul

variației constantelor
- Ecuații liniare de ordin superior
- Structura soluțiilor ecuațiilor liniare de ordin superior cu coef const.
- Ec. afine de ordin superior
  Principiul var. constantelor
- Integrale prime. Criteriu. Det. soluțiilor

c12 - Proprietăți ale sistemului caracteristicilor

Teorie modele

Th. Cauchy-Lipschitz

Fie $f(,) : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cont, local Lipschitz(II), $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$.

Atunci $f(,)$ admite EUL pe D
$(\forall (t_0, x_0) \in D$, $\exists I_0 = [t_0 - a, t_0 + a] \in \mathcal{V}(t_0)$
$\exists! \varphi() : I_0 \to \mathbb{R}^n$ sol cu $\varphi(t_0) = x_0)$

Th. Cauchy–Lipschitz pt ec. de ordin superior

Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cont, local Lipschitz (II), $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$

Atunci ($\forall$ $t_0, (x_0, \dots x_0^{(n-1)}) \in D$
$\exists !$ $\varphi(): I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbb{R}$ sol a ec
$\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi'(t_0) = x_0'$, $\varphi''(t_0) = x_0''$, ...
$\varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$

Prop $f(,): D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $C^1(\mathrm{II}) \Rightarrow f$ local $Lz(\mathrm{II})$

Ecuații afine de ordin superior.

Th. variației constantelor.

Fie $\{\overline{\varphi}_1() \dots \overline{\varphi}_n()\}$ sistem fundamental de sol pt ec. liniară asociată $\overline{x}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\, \overline{x}^{(n-j)}$. Atunci $\varphi() \in S_{a_1(), \dots, a_n(), b()} \Leftrightarrow \exists c() = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ primitivă a fct.

$$t \longrightarrow \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_1(t) & \dots & \overline{\varphi}_n(t) \\ \overline{\varphi}_1'(t) & \dots & \overline{\varphi}_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\varphi}_1^{(n-1)}(t) & & \overline{\varphi}_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

aî $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, \overline{\varphi}_i(t)$

Ecuații afine pe $\mathbb{R}^n$

Tb variației constantelor

Fie $x(\cdot) : I \to M_n(\mathbb{R})$ mat. fundam de sol pt ec. liniară asoc. $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$.

$\varphi(\cdot) \in S_{A(\cdot), b(\cdot)} \Leftrightarrow \exists c(\cdot)$ primitivă a fct. $t \to x(t)^{-1} b(t)$ a.î. $\varphi(t) = x(t)\, c(t)$

Tb Peano

Existența locală

Fie $f(\cdot) : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cont, $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$. Atunci f admite prop. de EL pe D ($\forall (t_0, x_0) \in D$, $\exists I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$, $\exists \varphi(\cdot) : I_0 \to \mathbb{R}^n$ sol cu $\varphi(t_0) = x_0$)

Th. Peano pt. ec. de ordin superior

Fie $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cont., def $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots x^{(n-1)})$

Atunci $f(\,,)$ admite EL. pe D $(\forall (t_0, (x_0, x_0', \dots x_0^{(n-1)})) \in D \dots)$

Lema Bellman - Gronwall

Fie $M \geq 0$, $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, $u(\cdot), v(\cdot) : I \to \mathbb{R}_+$ cont

Dacă $u(t) \leq M + \left| \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds \right|; \forall t \in I$

atunci $u(t) \le M \cdot e^{\left|\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right|}$; $\forall t \in I$

Integrale prime

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

$$f(\,,\,): D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$f(\,,\,) = (f_1(\,,\,), f_2(\,,\,), \dots f_n(\,,\,))$$

$F(\,,\,): D_0 \subset D \to \mathbb{R}$ s.n. integrală primă dacă $\forall \varphi(\,,\,)$ sol cu graph $\varphi() \subset D_0$, $\exists\, c_\varphi \in \mathbb{R}$ a.î. $F(t, \varphi(t)) \equiv c$

Criteriu integrale prime

$D = \mathring{D}$ $\quad D_0 = \mathring{D}$, $f(\,,\,)$ cont, F dvb, integrală primă $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot f_i(t,x) \equiv 0 \text{ pe } D_0$$

Th. Existență globală

$f(\,,\,): \mathring{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cont cu (D), $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$

Atunci $\forall (t_0, x_0) \in \mathring{I} \times \mathbb{R}^n$; $\exists\, \varphi(): \mathring{I} \to \mathbb{R}^n$ sol cu $\varphi(t_0) = x_0$

Disipativitate

Dacă $\exists\, r>0,\ \exists\, a(\,):I\to\mathbb{R}_+$ cont
$|\langle x, f(t,x)\rangle| \le a(t)\,\|x\|^2;\ \forall t\in I;\ \forall x\in\mathbb{R}^n,$
$\|x\|>r$

Tipuri de ec

Ec. cu var. sep

$$\frac{dx}{dt}=a(t)\cdot b(x)$$

$a(\,):I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont
$b(\,):J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont

1. Rez $b(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$
   Scriem $\varphi_1(t)=x_1, \dots, \varphi_n(t)=x_n$ sol staționare

2. Se separă var $\frac{dx}{b(x)}=a(t)dt$

   Se integrează $\int\frac{dx}{b(x)}=\int a(t)dt$

   $B(x)=A(t)+c;\ c\in\mathbb{R}$
   ↳ Sol gen sub fm. implicită

   Se inversează $x=\varphi(t,c); c\in\mathbb{R}$
   $\left(=B^{-1}(A(t)+c)\right);\ c\in\mathbb{R}$
   ↳ Sol gen sub fm explicită

Ec. liniare scalare

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \ ; \ a(\,) : \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ cont}$$

Sol. generală $x(t) = c \cdot e^{A(t)}$

A primitivă a lui a

Ec. afine scalare

$$\frac{dx}{dt} = a(t) \cdot x + b(t) \ ; \ a(\,), b(\,) : \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

cont

Var const

1. Ec. lin. asociată $\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t) \cdot \bar{x}$

Sol gen : $\bar{x}(t) = c \cdot e^{A(t)}$

2. Căutăm sol. de fm. $x(t) = c(t) e^{A(t)}$

Ec. Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^{\alpha} \ ; \ a(\,), b(\,) : \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

cont

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

1. Ec. lin. asoc. $\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x}$

Scriem sol gen: $\bar{x}(t) = c \cdot e^{A(t)}$

2. Caut sol de fm. $x(t) = c(t)e^{A(t)}$

$x()$ sol $\Rightarrow \frac{dc}{dt} = e^{(\alpha-1)A(t)} b(t) c^{\alpha}$ ec.

Var. sep.

Ec. Riccati

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t);$$

$a(), b(), c(): I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont

$\exists\ \varphi_0()$ sol

1. S.V. $y = x - \varphi_0(t) \Rightarrow$ Ec. Bernoulli în y

Ec. de ordin superior care admit reducerea ordinului

1. $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)}) = 0;\ k \geq 1$

S.V. $y = x^{(k)} \Rightarrow F(t, y, y', \dots y^{(n-k)}) = 0$

2. $F(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}, \dots \frac{x^{(n)}}{x}) = 0;$ Ec. omogenă

S.V. $y = \frac{x'}{x} \Rightarrow G(t, y, y', \dots y^{(n-1)}) = 0$

3. $F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$; Ec. autonomă

S.V. $y = \frac{x'}{x} \Rightarrow G(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$

4. Ec. Euler

$F(x, t \cdot x', t^2 x'', \dots, t^n x^{(n)}) = 0$
S.V. $|t| = e^s \Rightarrow G(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$

Ec. de ordin 2 cu coef. const

$x'' + ax' + b = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$
Ec. caracteristică: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \left\langle \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right.$

Dacă $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Sol gen: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$;
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Sol gen $x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} \cdot t$

Dacă $\lambda_1 = \alpha + i\beta$; $\beta > 0 \Rightarrow$
$\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$\Rightarrow$ Sol gen $x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos\beta t +$
$+ c_2 e^{\alpha t} \sin\beta t$