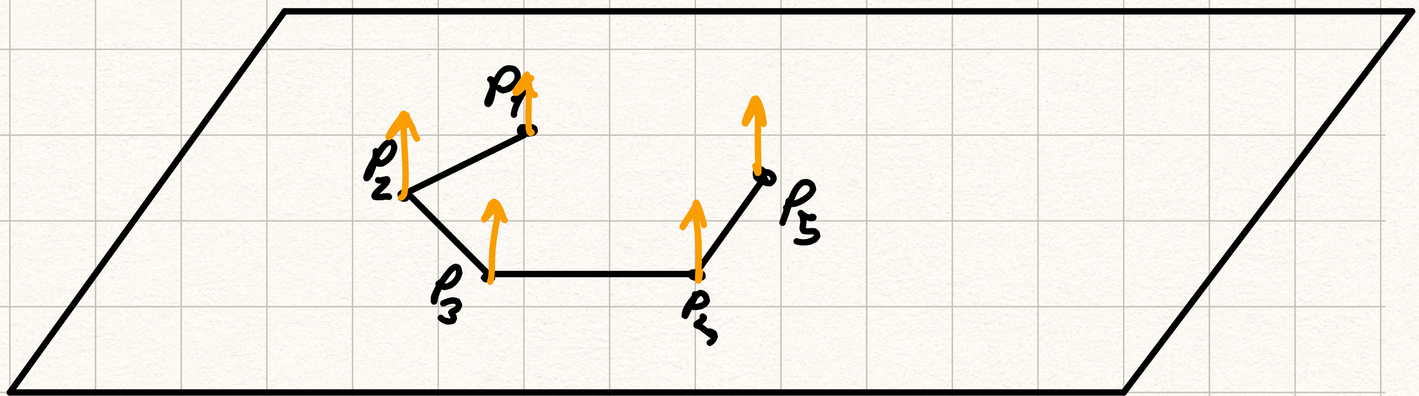
Fața și spatele poligoanelor (în $\mathbb{R}^3$)

Vector normal (normală) la planul unui poligon convex



Planul poligonului

Obs Oricum am alege 3 vf consecutive ale poligonului, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, vectorul $\overline{P_{i-1}P_i} \times \overline{P_iP_{i+1}}$ are aceeași direcție ($\perp$ pe planul polig) și același sens (polig. este convex) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Vectorul $\dfrac{\overline{P_{i-1}P_i} \times \overline{P_iP_{i+1}}}{\| \overline{P_{i-1}P_i} \times \overline{P_iP_{i+1}} \|}$ este independent de i.

D.p.v. practic: Cum se calculează

vec. de mai sus?

- Se aleg 3 vf consecutive (de ex, P_1, P_2, P_3)

- Se scrie ec. planului det. de cele 3 puncte (atenție la ordine)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_{P_1} & y_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{după } L1]{\text{Dezv.}} Ax + By + Cz + D = 0$$

Obs $\overline{P_1P_2} \times \overline{P_2P_3} = (A, B, C)$

Vectorul $n = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A, B, C)$ s.n.

vector normal la planul poligonului $P_1P_2P_3\ldots P_n$

Acest vector independent de alegerea a 3 vf. consec.

Not: Pt. un pct. $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ notăm

$$\Pi(M)=\Pi(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$$

Obs M aparține planului $\iff \Pi(M)=0$

Def $M=(x,y,z)$ se află în fața planului poligonului $\iff \Pi(M)>0$

$M=(x,y,z)$ se află în spatele planului poligonului $\iff \Pi(M)<0$

Obs Fața poligoanelor este indicată de normală

Translatăm figura a.î. planul să treacă prin punctul $O(0,0,0)$, adică $D=0$.

$M=(x,y,z)$ este în fața polig $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Pi(M)>0 \Leftrightarrow \underbrace{Ax+By+Cz}_{\text{produs scalar între } (A,B,C) \text{ și } (x,y,z)}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle (A,B,C),(x,y,z)\rangle > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle n, \overline{OM}\rangle > 0 \Leftrightarrow$ Proiecția pct M pe dr. det. de n are același sens cu $n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ n și $\overline{OM}$ sunt de aceeași parte a planului

Făcând leg. cu def. prod. vectorial

- din față, un poligon este văzut parcurs în sens trigonometric
- din spate, un poligon este văzut parcurs în sens orar

Exp $A_1=(100,-100,100)$

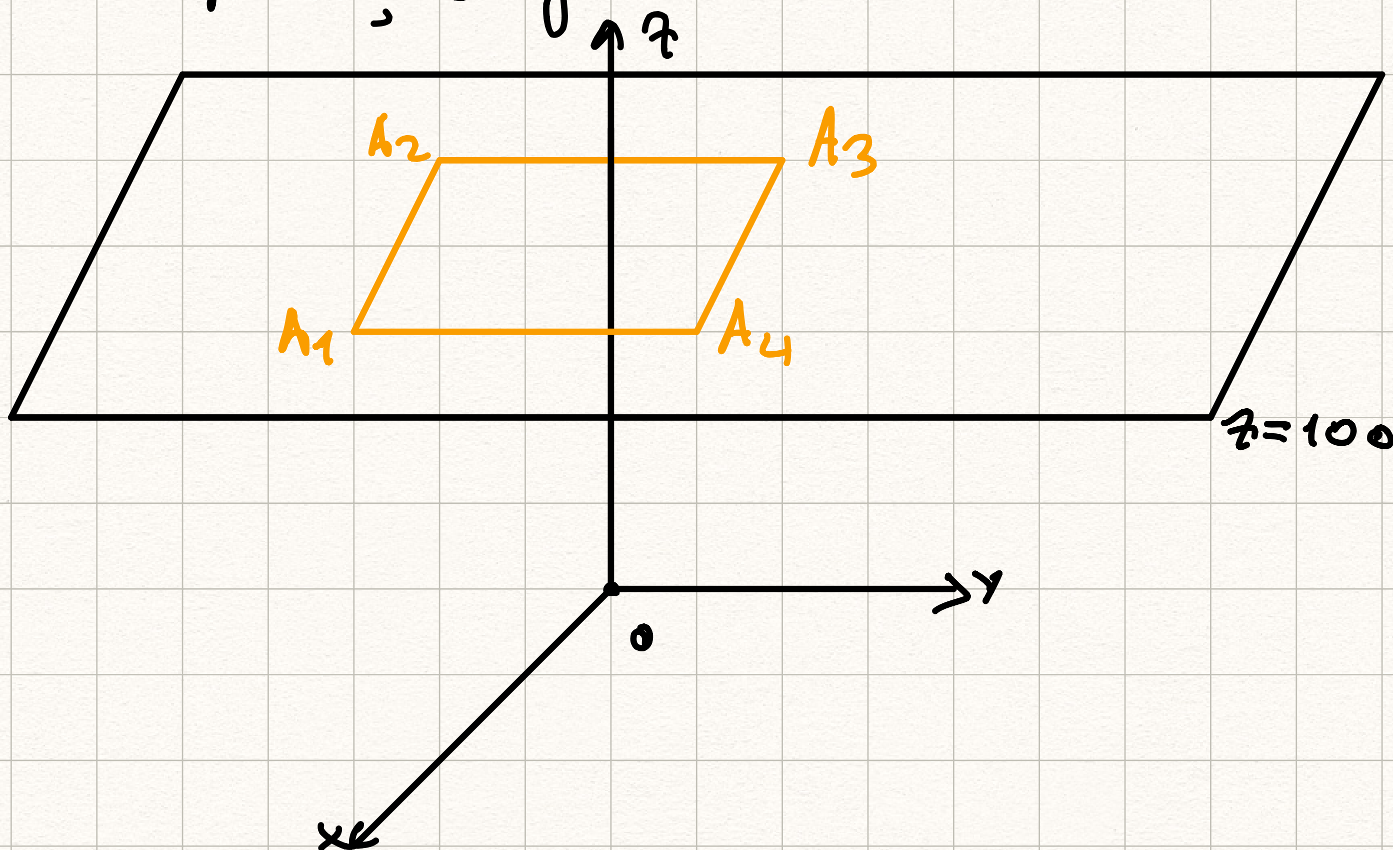
$A_2=(-100,-100,100)$

$$\left.\begin{aligned} A_3&=(-100,100,100)\\ A_4&=(100,100,100)\end{aligned}\right\} A$$

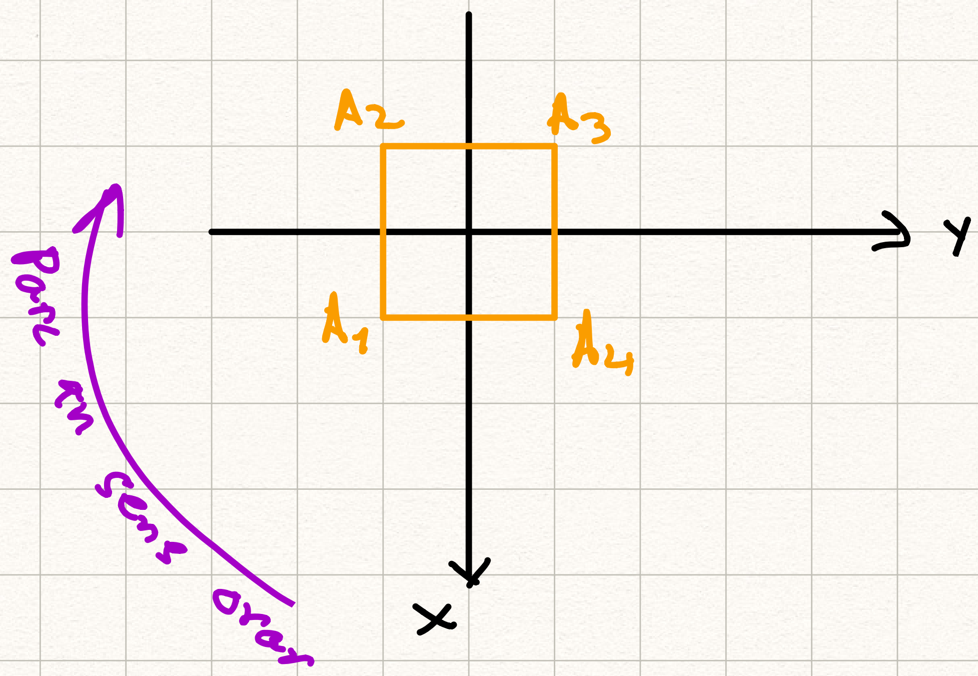
$$\left.\begin{aligned} B_1&=(50,50,300)\\ B_2&=(-50,50,300)\\ B_3&=(-50,-50,300)\\ B_4&=(50,-50,300)\end{aligned}\right\} B$$

A este văzut din față
B este văzut din spate

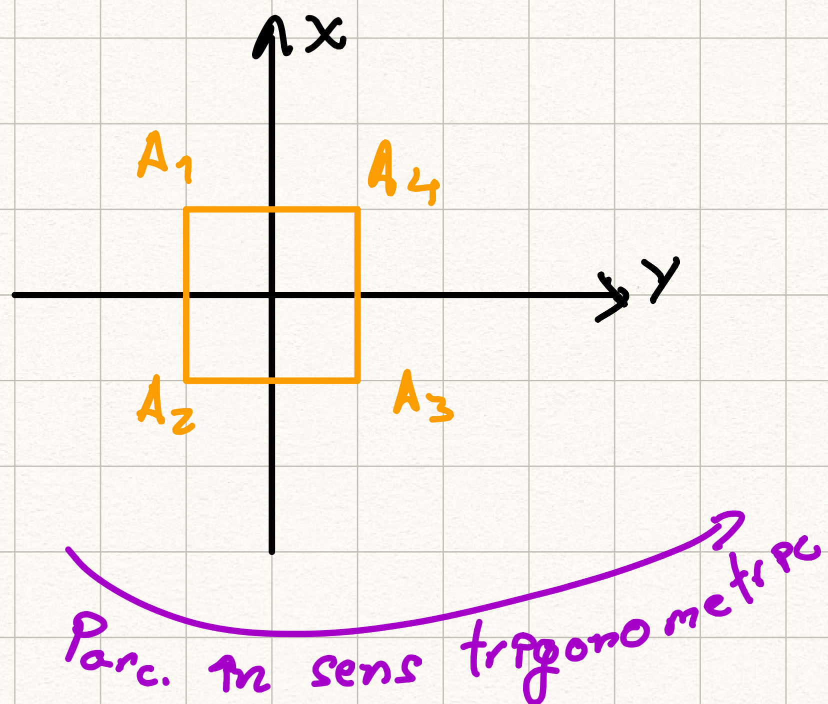
Explicație geometrică



Privind de sus



Privind de jos



Intuitiv, punctul $O=(0,0,0)$ se află în fața polig, deoarece dat un pct din fața poligonului, vârfurile acestuia sunt văzute ca fiind parcurse în sens trigonometric

Explicație algebrică

Determinăm ec. planului poligonului, apoi stabilim unde se află pct $O=(0,0,0)$

$$
\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}
\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 100 & -100 & 100 & 1 \\ -100 & -100 & 100 & 1 \\ -100 & 100 & 100 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Lin } 1}{\overset{\text{dezv. după}}{=\!=\!=}}
$$

$$
= \underbrace{\begin{vmatrix} -100 & 100 & 1 \\ -100 & 100 & 1 \\ 100 & 100 & 1 \end{vmatrix}}_{0} \cdot x - 0 \cdot y + \begin{vmatrix} 100 & -100 & 1 \\ -100 & -100 & 1 \\ -100 & 100 & 1 \end{vmatrix} z
$$

$$
+ \underbrace{\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}}_{D}
$$

$$
\begin{vmatrix} 100 & -100 & 1 \\ -100 & -100 & 1 \\ -100 & 100 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{L_3 \to L_3 + L_1} \begin{vmatrix} 100 & -100 & 1 \\ -100 & -100 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =
$$

$= 2(-20\,000) = -40\,000 < 0 \Rightarrow$ ec. planului este $0 \cdot x + 0 \cdot y - 40\,000 z + 4 \cdot 10^6 = 0$

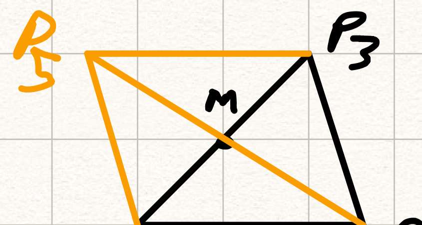
→ Înlocuind $(0,0,0)$ obținem >0, deci O e în fața polig.

→ Se deduce că normala la planul polig. este $(0,0,-1) \Rightarrow$ fața polig este „în jos" $\Rightarrow (0,0,0)$ în față

Exp (Cod sursă 03-02)

Fie $P_1 = (6,2,0)$
$P_2 = (-4,4,8)$
$P_3 = (0,0,8)$
în planul de ecuație $x+y+z=8$

a) Să se det. P_4 și P_5 a.î. $P_1P_2P_3P_4$ să fie concav, iar $P_1P_2P_3P_5$ să fie convex



$M = \frac{P_1+P_3}{2} = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_5 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_5 = P_1 + P_3 - P_2$

P_1 P_2

b) Să se det punctele O_1 și O_2 a.î. polig. $P_1P_2P_3P_5$ să fie văzut din față, resp din spate

$$O_1 = (3,1,4) + (10,10,10)$$