SUBIECTUL 4:

RE

Def. 1: O mulțime X se numește recursiv enumărabilă, dacă funcția ei caracteristică este Turing calculabilă.

Def. 2: O mulțime X se numește recursivă dacă funcția caracteristică este Turing calculabilă, iar mașina Turing se oprește pe fiecare intrare.

$L_u = \{ w \$ \#(M) \mid w \in \{0,1\}^*, w \in L(M) \} \in RE$ și $L_u \notin REC$

↓

limbajul universal

$L_d = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \notin L(M), \hat{w} = \hat{M} \} \notin RE$

↓

limbajul diagonal

TEOREMA LUI RICE: Orice proprietate netrivială pe RE este nedecidabilă.

$P\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ problemă de decizie

$L_p = \{ \#(a_1, \dots, a_m) \mid P\langle a_1, \dots, a_m \rangle = 1 \}$

Dacă $P \leadsto \mathcal{L}_P = \{ \#(M) \mid L(M)$ are proprietatea $P)$

O proprietate P este trivială dacă $P \neq \emptyset$ și $P \neq RE$

Dem: Cazul 1: $\emptyset \notin P$ (mulțimea vidă nu are proprietatea P)

⇓

Există $L \in P$ adică există o mașină M_L a.î. codul lui $(M_L) \in \mathcal{L}_P$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{P}$ este decidabilă $\Leftrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ este recursiv, deci există $M_{\mathcal{P}}$ a.î. $L(M_{\mathcal{P}}) = \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$.

Construim o mașină Turing M a.î. :

$$\begin{cases} M_u \text{ se oprește pe fiecare intrare} \\ L(M_u) = L_u = \{ w\$\#(M) \mid w \in L(M) \}, \ L_u \in RE \setminus REC. \end{cases}$$

Fie w și M o mașină Turing ($w\$\#(M)$) arbitrar fixat.

Construim M' (depinde de $w\$\#(M)$):

$$L(M') = \begin{cases} L, & \text{dacă } w \in L(M) \\ \emptyset, & \text{altfel} \end{cases}$$

$\underline{M'}$: input - x

Ignorăm x și testăm dacă $w \in L(M)$ (simulăm M pe intrarea w).

Dacă $w \in L(M)$, testăm $x \in L$ (simulăm M_L pe intrarea x)

Dacă $x \in L$ atunci acceptăm.

$\underline{M_u}$: input - $w\$\#(M)$

Găsim M' asociat $w\$\#(M)$.

Simulăm $M_{\mathcal{P}}$ pe intrarea $\#(M')$.

Acceptă dacă $M_{\mathcal{P}}$ acceptă.

$\underline{w\$\#(M) \in L(M_u)} \Leftrightarrow \#(M') \in L(M_{\mathcal{P}}) = \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L(M')$ are proprietatea $\mathcal{P} \Leftrightarrow L(M') = L \Leftrightarrow \underline{w \in L(M)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L(M_u) = L_u$

Caz 2: $\emptyset \in \mathcal{P}$

! Nu știu sigur dacă trebuie scrise și demonstrațiile:

$L_d \notin RE$:

Presupunem prin reducere la absurd că $L_d \in RE \Rightarrow$ există M a.î. $L_d = L(M)$.

$\hat{M'} = k$

Fie w a.î. $\hat{w} = k$

$w \in L_d \Leftrightarrow w \notin L(M) \Leftrightarrow w \notin L_d$

$\hat{M} = \hat{w} = k$

$\Downarrow$

$M = M'$

$L_u \notin REC$:

Presupunem prin reducere la absurd că $L_u \in REC$.

M_u — $L_u = L(M_u)$; se oprește

M_d : input w

găsește $\hat{w}$

găsește M a.î. $\hat{M} = \hat{w}$

pornește M_u pe intrarea $w\$\#(M)$

acceptă dacă M_u respinge

$w \in L_d \Leftrightarrow w\$\#(M) \notin L_u \Leftrightarrow w \notin L(M)$