Analiză

-Teoreme-

Th 1.1. Orice spațiu liniar normat $(X, \|\ \|_X)$ este spațiu metric

Dem

Definim fct $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ prin formula $d(u,v) = \|u-v\| \geq 0; \forall u,v \in X$ (1)

unde $\|\ \|: X \to \mathbb{R}_+$ normă.

Ca d să fie metrică trebuie să avem

i) $d(u,v) \geq 0; \forall u,v \in X$ [Adv]

ii) $d(u,v) \leq d(u) + d(v); \forall u,v \in X$

iii) $d(u,v) = d(v,u)$

iv)

$d(u,v) = 0 \iff \|u-v\| = 0 \iff u - v = 0_X \iff u = v; \forall u,v \in X$ (2)

$d(u,v) = \|u-v\| = \|-(v-u)\| = \|v-u\| = d(v,u); \forall u,v \in X$ (3)

$d(u,v) = \|u-v\| = \|u-w+(w-v)\| \leq \|u-w\| + \|w-v\| = d(u,w) + d(w,v);$ (4)

$\forall u,v,w \in X$

(1),(2),(3),(4) $\Rightarrow d$ metrică $\Rightarrow (X,d)$ sp metric.

Th. 2.1: Orice funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\ \|_X)$ derivabilă într-un punct $x_0 \in D \cap D'$ este continuă în x_0.

Dem: f dvb în $x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in X$

Alegem $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din D a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

Trebuie arătat că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = x_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$ (1) $\Rightarrow$

$0 \leq \| f(x_n) - f(x_0) \| = \left\| (x_n-x_0) \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \right\| = |x_n-x_0| \left\| \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} - f'(x_0) + f'(x_0) \right\| \leq$

$\leq |x_n-x_0| \left\| \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} - f'(x_0) \right\| + \| f'(x_0) \| \, |x_n-x_0|$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n-x_0| = 0$

Crit. cleștelui $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f(x_n)-f(x_0)\| = 0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = x_0 \xRightarrow{\text{Def cont}} f$ cont în x_0 ||

<u>Th 3.1 (Fermat)</u>: Fie $D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o fct și $x_0 \in \mathring{D}$ a.î. x_0 este pct de extrem local pt f și f este derivabilă în pct x_0. Atunci $f'(x_0)=0$

<u>Dem</u>: $x_0 \in \mathring{D} \Leftrightarrow \exists R_1 > 0$ a.î. $(x_0-R_1, x_0+R_1) \subseteq D$

x_0 pct de ext local pt $f \Rightarrow$ Putem presupune că x_0 este pct de maxim local fără a restrânge generalitatea. $\Rightarrow$

$\exists R_2 > 0$ a.î. $\forall x \in (x_0-R_2, x_0+R_2) \cap D$, avem $f(x) \leq f(x_0)$

Fie $R = \min\{R_1, R_2\} \Rightarrow \forall x \in (x_0-R, x_0+R)$ avem $f(x) \leq f(x_0)$

$\left.\begin{array}{l}\exists f'(x_0) \\ x_0 \in \mathring{D}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Pt $\exists \lim\limits_{\substack{x\in(x_0-R,x_0),\, x\to x_0 \\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_s(x_0) \geq 0$

Pt $x \in (x_0, x_0+R)$ $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0) \leq 0$

$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$. [qed]

Th. 3. 2. (Rolle)

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o fct cont pe $[a,b]$ derivabilă pe (a,b) și $f(a) = f(b)$. ~~Atunci~~ $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$.

Dem: $\left.\begin{array}{l}[a,b] \text{ compactă} \\ f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ continuă}\end{array}\right\} \Rightarrow f$ mărg. și își atinge marginile

~~Dem~~ Fie $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \Rightarrow \exists\, u \in [a,b]$ a.î. $f(u) = m$

$M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \Rightarrow \exists\, v \in [a,b]$ a.î. $f(v) = M$

$f(u) \leq f(v)$

Avem cazurile:

I $\left.\begin{array}{l} u, v \in \{a,b\} \\ f(u) \leq f(v) \\ f(a) = f(b)\end{array}\right\} \Rightarrow f(u) = f(v) \Rightarrow$ fct este ct pe $[a,b] \Rightarrow f'(c) = 0$; $\forall\, c \in [a,b]$.
[qed]

II $u \in \{a,b\}$
$v \in (a,b) = \mathring{[a,b]}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq f(v);\ \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow v \text{ pct de max global pt } f \\ f \text{ dub în } v \end{array}\right\} \Rightarrow$

Th Fermat
$\Rightarrow f'(v) = 0$ [qed]

III $v \in \{a,b\}$
$u \in (a,b) = \mathring{[a,b]}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq f(u);\ \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow u \text{ p de min global pt } f \\ f \text{ dub în } u \end{array}\right\}$ ~~$\Rightarrow f$ dub în~~ $\Rightarrow f'(u) = 0$

IV $u, v \in (a,b)$, Analog cu III.

A

Th. 3.3 (Lagrange): Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o fct cont pe $[a,b]$, dvb pe (a,b)

$\exists c\in(a,b)$ a.î. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

Dem: Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu $g(x)=f(x)-\alpha x$

g cont pe $[a,b]$

g dvb pe (a,b)

$g(a)=g(b) \Leftrightarrow f(a)-\alpha a=f(b)-\alpha b \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Th Rolle pt $g \Rightarrow \exists c\in(a,b)$ a.î. $g'(c)=0$

$g'(x)=f'(x)-\alpha$, $\forall x\in[a,b] \Rightarrow g'(c)=f'(c)-\alpha \Rightarrow f'(c)-\alpha=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c)=\alpha=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ [q.e.d]

Th. 3.4 (Darboux): Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval ~~neg~~ nedegenerat

și $f:I\to\mathbb{R}$ o fct dvb pe I. Atunci $f':I\to\mathbb{R}$ are prop lui Darboux.

Dem: Fie $\alpha,\beta\in \operatorname{Im} f' \Rightarrow \exists a,b\in I$ a.î. $\begin{cases}\alpha=f'(a)\\ \beta=f'(b)\end{cases}$

Pp. că $\alpha\le\beta$ și alegem $\lambda\in[\alpha,\beta]$. Avem cazurile:

I $\alpha=\beta \Rightarrow \lambda=\alpha=\beta$

$\lambda=\alpha=f'(a)\Rightarrow c=a$

II $\alpha<\beta \Rightarrow f'(a)<f'(b)\Rightarrow a\ne b$

Pp că $\left.\begin{matrix}a<b\\ a,b\in I\end{matrix}\right\} \Rightarrow [a,b]\subseteq I$

$\lambda\in[\alpha,\beta]$

Dacă $\lambda = \alpha \Rightarrow \lambda = f'(a) \Rightarrow c = a$

Dacă $\lambda = \beta \Rightarrow \lambda = f'(b) \Rightarrow c = b$

Dacă $\lambda \in (\alpha, \beta)$

Alegem $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ def prin $g(x) = f(x) - \lambda x$

g dvb pe $[a,b]$

$g'(x) = f'(x) - \lambda$; $\forall x \in [a,b]$

$g'(a) = f'(a) - \lambda = \alpha - \lambda < 0$

$g'(b) = f'(b) - \lambda = \beta - \lambda > 0$

g cont pe $[a,b]$

$[a,b]$ închisă și mărg $\Rightarrow [a,b]$ compactă $\Big\} \Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$ a.î. $g(c) = \min\limits_{x \in [a,b]} g(x)$

Pp că $c = a \Rightarrow \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$; $\forall x \in (a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0 \Rightarrow g'(a) \geq 0$

Dar $g'(a) < 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow c \neq a$

Pp că $c = b \Rightarrow \dfrac{g(x) - g(b)}{x - b} \leq 0$; $\forall x \in [a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \dfrac{g(x) - g(b)}{x - b} \leq 0 \Rightarrow g'(b) \leq 0$

Dar $g'(b) > 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow c \neq b$.

Deci $c \in (a,b) = \overset{\circ}{[a,b]}$

c minim global pt g

g dvb în c $\Big\} \xRightarrow{\text{Th Fermat}} g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \lambda$ cu $c \in (a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'$ are prop Darboux

Th 4.1.: Orice funcție $f: D \subseteq (X, \|\ \|_X) \to (Y, \|\ \|_Y)$ diferențiabilă în pct. $x_0 \in D \cap D'$ este cont în x_0

Dem: f diferențiabilă în $x_0 \Rightarrow \exists T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a.î.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X} = 0. \quad (1)$$

$T \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow \exists M > 0$ a.î. $\| T(x) \|_Y \leq M \| x \|_X, \forall x \in X$ (2)

$$\| f(x) - f(x_0) \|_Y = \| (f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)) + T(x - x_0) \|_Y \leq$$

$$\leq \| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|_Y + \| T(x - x_0) \|_Y \overset{(2)}{\leq}$$

$$\overset{(2)}{\leq} \| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|_Y + M \| x - x_0 \|_X = \| x - x_0 \|_X \left(\frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X} + M \right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \| f(x) - f(x_0) \|_Y \leq \underbrace{\| x - x_0 \|_X}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} \left(\underbrace{\frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X}}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} + M \right) \xrightarrow{\text{c. clește}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \| f(x) - f(x_0) \|_Y = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ cont în } x_0 \quad \text{[qed]}.$$

Th. 5.1: Orice fct monotonă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Dem: Presupunem f crescătoare fără a restrânge generalitatea.

Alegem $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$, $\Delta=\{a=x_0, x_1, \dots x_n=b\}$

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$$

$$\left.\begin{array}{l} M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \\ m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\end{array}\right\} \Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))(x_i-x_{i-1})\leq$$

$$\leq \|\Delta\|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\|\Delta\|(f(x_n)-f(x_0))=\|\Delta\|(f(b)-f(a))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)\leq\|\Delta\|(f(b)-f(a)); \forall\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$$

Fie $\varepsilon>0$. Alegem $\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$

Fie $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)\leq\|\Delta\|(f(b)-f(a))<\delta_\varepsilon(f(b)-f(a))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}(f(b)-f(a))=$$

$$=\varepsilon\frac{f(b)-f(a)}{f(b)-f(a)+1}<\varepsilon\Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon;\forall\Delta\in\mathcal{D}([a,b]) \text{ cu } \|\Delta\|<\delta_\varepsilon\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Cf crit integr. Darboux avem f integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Th. 5.2: Orice fct continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$

Dem: $\left.\begin{array}{l}[a,b] \text{ mulț compactă} \\ f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ fct cont}\end{array}\right\} \Rightarrow f$ cont pe $[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $|f(x)-f(y)|<\varepsilon; \forall x,y\in[a,b]$ cu $|x-y|<\delta_\varepsilon$ (1)

Fie $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ și $\Delta=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i-x_{i-1}<\delta_\varepsilon; \forall i\in\{1,\dots,n\}$

$\left.\begin{array}{l} f|_{[x_{i-1},x_i]} \text{ fct cont pe } [x_{i-1},x_i] \\ [x_{i-1},x_i] \text{ mulț compactă}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists u_i, v_i\in[x_{i-1},x_i]$ a.î.

$M_i=f(u_i)$ și $m_i=f(v_i)$, unde $\begin{cases} M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \\ \text{și} \\ m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\end{cases}$

$|u_i-v_i|\le|x_i-x_{i-1}|\le\|\Delta\|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |u_i-v_i|<\delta_\varepsilon$ $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow |f(u_i)-f(v_i)|<\varepsilon \Rightarrow |M_i-m_i|<\varepsilon \Rightarrow M_i-m_i<\varepsilon; \forall i=\overline{1,n}$

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(M_i-m_i)}_{<\varepsilon}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=$$

$=\varepsilon(x_n-x_0)=\varepsilon(b-a); \forall\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$. Cf crit de integr. Darboux avem f integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Th. 5.3 (Fm Leibniz-Newton): Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o fct integrabilă Riemann pe $[a,b]$ care admite primitive pe $[a,b]$. Atunci $\int_a^b f(x)\,dx =$

$= F(b) - F(a)$ unde $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f.

Dem: Pasul 1: Arătăm că $\forall\ \Delta\in\mathcal{D}([a,b])$, $\exists\ t_\Delta$ un sist de pct interm a.î.

$\boxed{\sigma_\Delta(f,t_\Delta) = F(b)-F(a).}$ ~~Fie $\Delta\in\mathcal{D}$~~

Fie $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$, $\Delta=\{a=x_0, \ldots, x_n=b\}$

$$F(b)-F(a) = \left(F(x_n)-\cancel{F(x_{n-1})}\right)+\left(\cancel{F(x_{n-1})}-\cancel{F(x_{n-2})}\right)+\cancel{\ldots}+\left(F(1)-F(0)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right).$$

Aplicăm Th Lagrange pt $F|_{[x_{i-1},x_i]} \Rightarrow \exists\ t_i\in(x_{i-1},x_i)$ a.î.

$$\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i) \Rightarrow F(x_i)-F(x_{i-1}) = f(t_i)(x_i-x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1}) = \sigma_\Delta(f,t_\Delta) \text{ cu } t_\Delta=\{t_1,\ldots,t_n\}$$

Pasul 2: Fie $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathcal{D}([a,b])$ cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$

~~Arătăm că~~ ~~Pt~~ Pt orice diviz Δ_n, $\exists\ t_{\Delta_n}$ un sist de pct interm a.î. $\sigma_{\Delta_n}(f,t_{\Delta_n}) = F(b)-F(a)$.

$$\left.\begin{array}{l} f\in\mathcal{R}([a,b]) \\ \lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,t_{\Delta_n}) = \int_a^b f(x)\,dx\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$