Seminar 6

SEMINAR 6

TEOREME $\psi(x_1, \dots x_n)$ predicat primitiv recursiv $(\Rightarrow)$

$(\Leftrightarrow)$ $C_\psi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1, & \psi(x_1, \dots x_n) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

este primitiv recursivă

Ex: $\psi(x,y) = $ "$x \le y$"

Th1 Dc P, Q pred. pr. rec. $\Rightarrow \neg P, P \vee Q, P \wedge Q$ prim. rec.

Th2 Fie $f(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} g(x_1 \dots x_n), & P(x_1 \dots x_n) \\ h(x_1 \dots x_n), & \text{altfel.} \end{cases}$

Dacă g, h, P prim. rec $\Rightarrow f$ prim. rec.

Th3 Dacă $f(t, x_1 \dots x_n)$ prim. rec.

atunci sunt prim. rec. și fct:

$$g(y, x_1 \dots x_n) = \sum_{t=0}^{y} f(t, x_1 \dots x_n)$$

$$h(y, x_1 \dots x_n) = \prod_{t=0}^{y} f(t, x_1 \dots x_n)$$

Th4 Dacă $P(t, x_1 \dots x_n)$ prim. rec.

atunci $\psi(y, x_1 \dots x_n)$ și $\theta(y, x_1, \dots x_n)$ pr. rec,

$$\psi(y, x_1, \dots x_n) = (\forall t)_{t \le y} P(t, x_1 \dots x_n)$$

$$\theta(y, x_1 \dots x_n) = (\exists t)_{t \le y} P(t, x_1 \dots x_n)$$

* ψ' — " — $(\forall t)_{t<y}$ — " — $\}$ sunt pr. rec. și ele.

θ' — " — $(\exists t)_{t<y}$ — " —

$\{ \ldots , x<y$

Th5 Dacă $\psi, f_1 \ldots f_n$ pr. rec., atunci:

$\theta(x_1 \ldots x_n) = \psi(f_1(x_1 \ldots x_n), \ldots f_n(x_1, \ldots x_n))$ pr. rec.

Th6 Minimizare mărginită:

Dacă $P(t, x_1 \ldots x_n)$ pred. pr. rec, atunci:

$f(y, x_1 \ldots x_n) = \min_{t \le y} P(t, x_1 \ldots x_n)$ pr. rec.

1) $\psi(x, y) =$ "$x \le y$" pr. rec
2) $\psi(x, y) =$ "$x = y$" pr. rec
3) $\psi(x, y) =$ "$x < y$" pr. rec.
4) $\psi(x, y) =$ "$y | x$" pr. rec
5) $\lfloor x/y \rfloor =$ "partea inferioară a câtului x/y" pr. rec.
6) $R(x, y) =$ "restul împărțirii lui x la y" pr. rec.
7) $Prime(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ prim} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$ pr. rec.
8) P_n: P_n este al n-lea nr. prim

$P_0 = 0$, $P_1 = 2$, $P_2 = 3$

REZOLVĂRI

1) Ar. că. $C_\psi(x, y) = \begin{cases} 1, & x \le y \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$ pr. rec.

a) $1 \dot{-} (x \dot{-} y) = sub(1, sub(x, y))$

b) $eg_0(sub(x, y))$

2) $C_{x=y} = eg_0(diff(x, y))$

3) a) $x \le (y-1)$

b) $x < y \equiv (x \le y) \wedge \neg(x = y)$

4) $(\exists t)_{t \le x} (y \cdot t = x)$

$\varphi(x,y) = $ "$x = y$"

$f_1(x,y) = x \cdot y = mult(x,y)$

$f_2(x,y) = P_1^2(x,y)$

<u>Th. 5</u>: $\theta(x,y) = \varphi(f_1, f_2)$

$\theta'(x,y) = (\exists t)_{t \le x} (\varphi(x,y))$

5)

$\lfloor x | y \rfloor = \min_{t \le x} ((t+1) \cdot y > x)$

---

6) $R(x,y) = x \dot{-} \lfloor x/y \rfloor \cdot y$

7) $Prime(x) = [(\forall t)_{t < x} \neg\, t | x] \wedge (t > 1)$

8) $P_0 = 0$

$P_{n+1} = \min_{t \le P_n! + 1} (Prime(t) \wedge (t > P_n))$

---

9) cmmdc (x,y) pr. rec

10) cmmmc(x,y) pr. rec.

11) $lo(x,y) =$ "cel mai mare z, $z \le y$, $x^z | y$" pr. rec.

12) $f(0) = f(1) = 1$, $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ pr. rec.

<u>REZOLVĂRI</u>

9) Folosesc "10)"

10) $\text{cmmmc}(x,y) = \min_{t \le x \cdot y} (x | t \wedge y | t)$

$$\text{cmmdc}(x,y) = \frac{x \cdot y}{\text{cmmmc}(x,y)}$$

10) $f(y, x_1, \dots x_n) = \min_{t \leq y} P(t, x_1 \dots x_n)$ – în general

$h(p, q, r) = \min_{t \leq r} (p \mid t \wedge q \mid t)$ – pr rec.

$\text{cmmmc}(x,y) = h(x, y, x \cdot y)$

11) $\text{lo}(x,y) = \min_{t \leq y} x^{t+1} \nmid y$.

12) $g(n) = 2^{f(n)} \cdot 3^{f(n+1)} \Rightarrow f(n) = \text{lo}(2, f(n))$

$g(0) = 2^1 3^1 = 0$

$g(n+1) = 2^{\text{lo}(3, g(n))} \cdot 3^{\text{lo}(2, g(n)) + \text{lo}(3, g(n))}$

$\Rightarrow g$ pr. rec $\Rightarrow f$ pr. rec.

⊛ $P(t, x_1 \dots x_n)$ pred. pr. rec.

$f(y, x_1 \dots x_n) = \min_{t \leq y} P(t, x_1 \dots x_n)$

$= \sum_{u=0}^{y} \prod_{t=0}^{u} \text{eg}_0(P(t, x_1 \dots x_n))$

$g(y, x_1 \dots x_n) = \max_{t \leq y} P(t, x_1 \dots x_n) = \min_{t \leq y} P(y-t, x_1 \dots x_n)$

$[a_1, a_2 \dots a_n] = 2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n}$