25.03.2019

Tehnici de optimizare

Curs 6

Teoria dualității

Pt. examen → un pas al alg. simplex dual
→ aplicație a teoremei ecarturilor complementare

Obs: de formulat corect duala de optimizare liniară

Formularea dualei

(1) $\min c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ $\longleftrightarrow$ (2) $\max b^T w$, $A^T w \leq c$

(3) $\min c^T x$, $Ax \geq b$, $x \geq 0$ $\longleftrightarrow$ (4) $\max b^T w$, $A^t w \leq c$, $w \geq 0$

Ex: A) $\max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$$1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \rightarrow w_1$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \rightarrow w_2$$
$$x_1 - x_4 \geq 0$$

duala:

B) - duala lui A): $\min 20w_1 + 20w_2$

$$w_1 + 2w_2 \geq 1$$
$$2w_1 + w_2 \geq 2$$
$$2w_1 + 3w_2 \geq 3$$
$$3w_1 + 2w_2 \geq 4$$
(adăugat var extra ?)
$$w_1, w_2 \geq 0$$

Obs: $x = (1,1,1,1)^T$ sol. admis. pr. A)
$w = (1,1)^T$ sol. dualei B)

pt. A) fct. obiectiv coresp. lui x^0

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 10$

pt. B) fct. obiectiv coresp. lui w^0:

$20 \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 40$

Problema de maximizare B) se rezolvă grafic $\longleftrightarrow$ w^* sol. optimă $= (1,2 ; 0,2)$, fct. obiectiv: $20 \cdot 1{,}2 + 20 \cdot 0{,}8 = 28$

Dacă $x = (0,0,4,4)^T$ în pr. A): fct. obiectiv: $1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 28$

Avem EGALITATE. Vom demonstra că $x^* =$ sol. optimă pt. A) și w^* sol. optimă pt. B)

EX:

C) $\max\ x_1 + x_2$ $\xleftrightarrow{\text{duala}}$ D) $\min\ 2w_1 + w_2$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &\le 2 \to w_1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &\le 1 \to w_2 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -w_1 - 2w_2 &\ge 1 \\ w_1 + w_2 &\ge 1 \\ w_1 - w_2 &\ge 0 \\ w_1, w_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Pr. D) nu are sol. admisibile $\Rightarrow$ Pr. C) are optim inf.

Reguli de formare a problemei duale

PROB. PRIMALĂ		PROBLEMA DUALĂ
pr. de minimizare	$\longrightarrow$	pr. de maximizare
pr. de maximizare	$\longrightarrow$	pr. de minimizare
term. liberi b	$\longrightarrow$	coef. f. obiectiv c
coef. fct. obiectiv c	$\longrightarrow$	termeni liberi b
A	$\longrightarrow$	A^T
ineg. concordante	$\longrightarrow$	var. nenegative
var. nenegative	$\longrightarrow$	ineg. concordante

Teorema 1 (slabă de dualitate)

(1) $\min\ c^T x$, $Ax = b$, $x \ge 0$ $\longleftrightarrow$ (2) $\max\ b^T w$, $A^T w \le c$

Fie x^0 sol. admisibilă a pr. (1) și w^0 sol. admisibilă a pr. de maximizare (2) $\Rightarrow c^T x^0 \geq b^T w^0$

Demonstrație: $c \geq A^T w^0$

$$\left.\begin{array}{l} c^T \geq (w)^T A \\ x^0 \geq 0 \end{array}\right| \to c^T x^0 \geq (w^0)^T A x^0 = (w^0)^T \cdot b = b^T w^0$$

$$c^T x^0 \geq b^T w^0$$

Corolar 1: Fie x^0 sol. admisibilă pt. (1), w^0 sol. admisibilă pt. (2), $c^T x^0 = b^T w^0$ $\Rightarrow$ x^0 - sol. opt. pt. (1), w^0 - sol. opt. pt. (2)

Demonstrație: Presupunem prin absurd că x^0 nu e sol. opt. pt. (1)

$\Rightarrow \exists\, x^* \neq x^0$ a.î. $c^T x^* < c^T x^0$

Dar din ip. avem $c^T x^0 = b^T w^0$

$\Rightarrow c^T x^* < b^T w^0$ contrazice T1

$\Rightarrow x^0$ sol. opt. pt. pr. (1)

Analog w^0 sol. opt. pt. (2)

Corolar 2: Dacă una dintre prob. are f. obiectiv nemărginită, atunci cealaltă prob. nu are sol. admisibilă.

Dem: Pp. că pr. (1) $f(x) = c^T x \to -\infty$

$x \in \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b, x \geq 0\}$

Pp. prin absurd că pr. (2) are sol. admis.:

Fie w^0 sol. admisibilă pt. (2):

$\underbrace{c^T x}_{-\infty} \geq b^T w^0 \Rightarrow -\infty \geq b^T w^0$

$\Rightarrow$ pr. (2) nu are sol. admis.

Analog invers.

Teorema 2 (Teorema tare de dualitate)

Considerăm pr. duale (1) și (2).

I) Dacă una dintre prob. are sol. opt. finită, atunci și cealaltă pr. are sol. optimă finită și fct. obiectiv au valori optime egale

II) Dacă una dintre prob. are opt. infinit, atunci cealaltă pr. nu are sol. admisibile

Dem: I) consecința corolarului 2

II) Pp. că x^* e sol. opt. a pr. (1). Fie B baza primal admis. ce duce la formarea lui x^*.

$$x^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad w^T = c_B^T B^{-1}, \quad w^T \text{ - sol. admis. a}$$

pr. (2) $(A^T w = c)$

(cu testul de optim pt. x^*)

- $c^T x^* = b^T w \Rightarrow c^T x^* = c_B^T B^{-1} b = w^T b$

Din corolar 1 $\Rightarrow$ w sol. opt. pt. (2)

Algoritmul simplex dual: rezolvă pb. primală (1) folosind (2) și relațiile dintre acestea

PAS 1: Fie B o bază dual admisibilă $(\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j \geq 0$ $\forall j \in R)$

Fie $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ sol. de bază

Dacă $x_i \geq 0$, $\forall i \in B \Rightarrow x$ e sol. optimă pt. pr. (1)

PAS 2: Fie $i \in B$ a.î. $x_i < 0$

Dacă $y_i = B^{-1} A^i \geq 0 \Rightarrow$ pr. (1) nu are sol. admis.

PAS 3: Aleg $j \in B$ a.î. $x_j = \min\{x_i, x_i < 0\} \Rightarrow k$

Aleg $j \in R$ a.î. $\varepsilon = \min\{-\frac{\bar{c}_j}{y_{kj}}, y_{kj} < 0\}$

$B' = B \cup \{k\} \setminus \{j\}$, $R' = R \cup \{j\} \setminus \{i\}$

GOTO PAS 1

Exemplu: $\min -2x_1 - x_2$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,4}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \{1, 4\}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$c = (-2, -1, 0, 0)^T$

$c_B^T = (-2, 0)$

$w^T = c_B^T B^{-1} = (-2 \;\; 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} = (-2 \;\; 0)$

$r_1 = r_4 = 0$

$r_2 = c_2 - c_B^T B^{-1} A^2 = 1 - (-2 \;\; 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

$= -1 - (-2 \;\; 0)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

$= -1 + 2 = 1$

$r_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} A^3$

$= 0 - (-2 \;\; 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = 2$

$r_2, r_3 > 0 \Rightarrow B$ e dual admisibilă

$x_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

$x_4 = -1 < 0 \Rightarrow x$ nu e sol. optimă

x_4 iese din bază

$y^2 = B^{-1} A^2 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \not\geq 0$

$y^3 = B^{-1} A^3 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \not\geq 0$

care var. intră în bază? r_2 sau r_3?

$\varepsilon = \min\left\{ \frac{r_2}{y_{42}}, \frac{r_3}{y_{43}} \right\}$ $\quad y_{42} < 0$, $y_{43} < 0$

$= \min\left\{ \frac{1}{-1}, \frac{2}{-1} \right\} = -1$

i va fi 2 sau 3. Alegem 2

$B \to B \setminus \{4\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \to B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Determinarea unei baze duale admisibile

Se adaugă o restricție la pr. inițială.

$\sum_{i \in R} x_i \le M$ cu M mare

unde $\mathcal{B}, \mathcal{R}$ sunt mt. de indici corup. unei baze care nu e dual admisibilă

$\Rightarrow \sum_{j\in \mathcal{R}} x_j + x_{m+1} = M, \; x_{m+1} \geq 0$

introducem în bază: x_j pt. care $r_j = \min\{r_k, r_k < 0\}$

iese din bază: x_{m+1}

<u>Ex</u>: inf $-2x_1 - 3x_2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + \ldots + x_4 = 1$

$x_i \geq 0$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Ex</u>: $x_2 + x_5 = M$

inf $-2x_1 - 3x_2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + \ldots + x_4 = 1$

$x_2 + x_5 = M$

$\sum_{j\in \mathcal{R}} x_j \leq M$

$r_j < 0$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iese x_5 din bază
intră x_2

$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$

r

Curs 7

01 Aprilie 2019

DETERMINAREA UNEI BAZE DUAL ADMISIBILE

(1) inf $c^T x$

$Ax = b$

$x \geq 0$

rang $A = m \leq n$

Fie B baza care nu e dual admisibilă