Criptografie și Securitate

- Prelegerea 22.2 -
Sistemul de criptare ElGamal

Adela Georgescu, Ruxandra F. Olimid

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București

Cuprins

Sistemul de criptare ElGamal

- 1976 - Diffie și Hellman definesc conceptul de criptografie asimetrică;

Sistemul de criptare ElGamal

- 1976 - Diffie și Hellman definesc conceptul de criptografie asimetrică;
- 1977 - R.Rivest, A.Shamir și Leonard Adleman introduc sistemul RSA;

Sistemul de criptare ElGamal

- 1976 - Diffie și Hellman definesc conceptul de criptografie asimetrică;
- 1977 - R.Rivest, A.Shamir și Leonard Adleman introduc sistemul RSA;
- 1985 - T.ElGamal propune un nou sistem de criptare.

Sistemul de criptare ElGamal

- Se bazează pe DLP ...

Sistemul de criptare ElGamal

- Se bazează pe DLP ...
- ... sau mai exact pe dificultatea problemei DDH...

Sistemul de criptare ElGamal

- Se bazează pe DLP ...
- ... sau mai exact pe dificultatea problemei DDH...
- ... și pe următoarea observație simplă:

Sistemul de criptare ElGamal

- Se bazează pe DLP ...
- ... sau mai exact pe dificultatea problemei DDH...
- ... și pe următoarea observație simplă:

Observație

Fie $\mathbb{G}$ un grup finit și $m \leftarrow^R \mathbb{G}$. Dacă $g \leftarrow^R \mathbb{G}$, atunci $g' = m \cdot g$ rămâne aleator în $\mathbb{G}$:

$$Pr[m \cdot g = g'] = 1/|\mathbb{G}|$$

unde probabilitatea este dată de alegerea aleatoare a lui g.

Sistemul de criptare ElGamal

- Dacă emitătorul și receptorul folosesc g drept cheie secretă, atunci un mesaj $m \in \mathbb{G}$ se criptează ca:

$$g' = m \cdot g$$

Sistemul de criptare ElGamal

- Dacă emitătorul și receptorul folosesc g drept cheie secretă, atunci un mesaj $m \in \mathbb{G}$ se criptează ca:

$$g' = m \cdot g$$

- Receptorul decriptează:

$$m = g' \cdot g^{-1}$$

Sistemul de criptare ElGamal

- Dacă emitătorul și receptorul folosesc g drept cheie secretă, atunci un mesaj $m \in \mathbb{G}$ se criptează ca:

$$g' = m \cdot g$$

- Receptorul decriptează:

$$m = g' \cdot g^{-1}$$

- Abordarea este asemănătoare cu OTP, unde se folosea grupul secvențelor de lungime fixată împreună cu operația XOR;

Sistemul de criptare ElGamal

- Dacă emitătorul și receptorul folosesc g drept cheie secretă, atunci un mesaj $m \in \mathbb{G}$ se criptează ca:

$$g' = m \cdot g$$

- Receptorul decriptează:

$$m = g' \cdot g^{-1}$$

- Abordarea este asemănătoare cu OTP, unde se folosea grupul secvențelor de lungime fixată împreună cu operația XOR;
- O astfel de construcție este deci perfect sigură (dacă g este total aleator!).

Sistemul de criptare ElGamal

- În criptografia cu cheie publică, se folosește g **pseudoaleator**, deci se pierde securitatea perfectă;

Sistemul de criptare ElGamal

- În criptografia cu cheie publică, se folosește g **pseudoaleator**, deci se pierde securitatea perfectă;
- Ideea de bază este alegerea lui g astfel încât la recepție să poată fi *calculat* pe baza cheii secrete...

Sistemul de criptare ElGamal

- În criptografia cu cheie publică, se folosește g **pseudoaleator**, deci se pierde securitatea perfectă;
- Ideea de bază este alegerea lui g astfel încât la recepție să poată fi *calculat* pe baza cheii secrete...
- ... dar g să *pară aleator* pentru un adversar;

Sistemul de criptare ElGamal

- În criptografia cu cheie publică, se folosește g **pseudoaleator**, deci se pierde securitatea perfectă;
- Ideea de bază este alegerea lui g astfel încât la recepție să poată fi *calculat* pe baza cheii secrete...
- ... dar g să *pară aleator* pentru un adversar;
- Pentru aceasta se folosește prezumția DDH, construcția fiind imediată din schimbul de chei Diffie-Hellman.

Sistemul de criptare ElGamal

- Definim sistemul de criptare *ElGamal* pe baza ideii prezentate anterior;

  1. Se generează $(\mathbb{G}, q, g)$, se alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și se calculează $h = g^x$;
     - Cheia publică este: $(\mathbb{G}, q, g, h)$;
     - Cheia privată este $(\mathbb{G}, q, g, x)$;

  2. **Enc**: dată o cheie publică $(\mathbb{G}, q, g, h)$ și un mesaj $m \in \mathbb{G}$, alege $y \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și întoarce $c = (c_1, c_2) = (g^y, m \cdot h^y)$;

  3. **Dec**: dată o cheie secretă $(\mathbb{G}, q, g, x)$ și un mesaj criptat $c = (c_1, c_2)$, întoarce $m = c_2 \cdot c_1^{-x}$.

Securitate - Problema 1

Problema 1: Determinismul

- Întrebare: Este sistemul ElGamal determinist?

Securitate - Problema 1

Problema 1: Determinismul

- Întrebare: Este sistemul ElGamal determinist?
- Răspuns: NU! Sistemul este nedeterminist, datorită alegerii aleatoare a lui y la fiecare criptare.

Securitate - Problema 1

Problema 1: Determinismul

- Întrebare: Este sistemul ElGamal determinist?
- Răspuns: NU! Sistemul este nedeterminist, datorită alegerii aleatoare a lui y la fiecare criptare.
- Un același mesaj m se poate cripta diferit, pentru $y \neq y'$:

$$c = (c_1, c_2) = (g^y, m \cdot h^y)$$

$$c' = (c'_1, c'_2) = (g^{y'}, m \cdot h^{y'})$$

Securitate - Problema 1

Problema 1: Determinismul

- Întrebare: Este sistemul ElGamal determinist?
- Răspuns: NU! Sistemul este nedeterminist, datorită alegerii aleatoare a lui y la fiecare criptare.
- Un același mesaj m se poate cripta diferit, pentru $y \neq y'$:

$$c = (c_1, c_2) = (g^y, m \cdot h^y)$$

$$c' = (c_1', c_2') = (g^{y'}, m \cdot h^{y'})$$

- În caz contrar, sistemul NU ar putea fi CPA-sigur.

Securitate - Problema 2

Problema 2: Dificultatea DLP

- Întrebare: Rămâne ElGamal sigur dacă problema DLP este simplă?

Securitate - Problema 2

Problema 2: Dificultatea DLP

- Întrebare: Rămâne ElGamal sigur dacă problema DLP este simplă?
- Răspuns: NU! Se determină x a.î. $h = g^x$, apoi se decriptează orice mesaj pentru că se cunoaște cheia secretă.

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;
- Atunci:
  $c_1 \cdot c_2 = (c_{11} \cdot c_{21}, c_{12} \cdot c_{22}) = (g^{y_1} \cdot g^{y_2}, m_1 h^{y_1} \cdot m_2 h^{y_2})$

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;
- Atunci:
  $c_1 \cdot c_2 = (c_{11} \cdot c_{21}, c_{12} \cdot c_{22}) = (g^{y_1} \cdot g^{y_2}, m_1 h^{y_1} \cdot m_2 h^{y_2})$
- Întrebare: Dacă un adversar cunoaște c_1 și c_2 criptările lui m_1, respectiv m_2, ce poate spune despre $c_1 \cdot c_2$?

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;
- Atunci:
  $c_1 \cdot c_2 = (c_{11} \cdot c_{21}, c_{12} \cdot c_{22}) = (g^{y_1} \cdot g^{y_2}, m_1 h^{y_1} \cdot m_2 h^{y_2})$
- Întrebare: Dacă un adversar cunoaște c_1 și c_2 criptările lui m_1, respectiv m_2, ce poate spune despre $c_1 \cdot c_2$?
- Răspuns: $c_1 \cdot c_2$ este criptarea lui $m_1 \cdot m_2$ folosind $y = y_1 + y_2$:
  $$c_1 \cdot c_2 = (g^{y_1+y_2}, m_1 m_2 h^{y_1+y_2})$$

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;
- Atunci:
  $c_1 \cdot c_2 = (c_{11} \cdot c_{21}, c_{12} \cdot c_{22}) = (g^{y_1} \cdot g^{y_2}, m_1 h^{y_1} \cdot m_2 h^{y_2})$
- Întrebare: Dacă un adversar cunoaște c_1 și c_2 criptările lui m_1, respectiv m_2, ce poate spune despre $c_1 \cdot c_2$?
- Răspuns: $c_1 \cdot c_2$ este criptarea lui $m_1 \cdot m_2$ folosind $y = y_1 + y_2$:
  $$c_1 \cdot c_2 = (g^{y_1+y_2}, m_1 m_2 h^{y_1+y_2})$$
- Un sistem de criptare care satisface $Dec_s k(c_1 \cdot c_2) = Dec_{sk}(c_1) \cdot Dec_{sk}(c_2)$ se numește sistem de criptare **homomorfic**.
  (homomorfismul este deseori o proprietate utilă în criptografie)

Securitate - Problema 4

Problema 4: Utilizarea multiplă a parametrilor publici

- Este comun în practică pentru un administrator să fixeze parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$, apoi fiecare utilizator să își genereze doar cheia secretă x și să publice $h = g^x$;

Securitate - Problema 4

Problema 4: Utilizarea multiplă a parametrilor publici

- Este comun în practică pentru un administrator să fixeze parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$, apoi fiecare utilizator să își genereze doar cheia secretă x și să publice $h = g^x$;
- Întrebare: Este corect să se utilizeze de mai multe ori aceiași parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$?

Securitate - Problema 4

Problema 4: Utilizarea multiplă a parametrilor publici

- Este comun în practică pentru un administrator să fixeze parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$, apoi fiecare utilizator să își genereze doar cheia secretă x și să publice $h = g^x$;
- Întrebare: Este corect să se utilizeze de mai multe ori aceiași parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$?
- Răspuns: Se consideră că DA. Cunoașterea parametrilor publici pare să nu conducă la rezolvarea DDH.

Securitate - Problema 4

Problema 4: Utilizarea multiplă a parametrilor publici

- Este comun în practică pentru un administrator să fixeze parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$, apoi fiecare utilizator să își genereze doar cheia secretă x și să publice $h = g^x$;
- Întrebare: Este corect să se utilizeze de mai multe ori aceiași parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$?
- Răspuns: Se consideră că DA. Cunoașterea parametrilor publici pare să nu conducă la rezolvarea DDH.
- Atenție! Acest lucru nu se întâmpla și la RSA, unde modulul NU trebuie utilizat de mai multe ori.

Securitate - teoremă

Teoremă

Dacă problema decizională Diffie-Hellman (DDH) este dificilă în grupul $\mathbb{G}$, atunci schema de criptare ElGamal este CPA-sigură.

Securitate - teoremă

Teoremă

Dacă problema decizională Diffie-Hellman (DDH) este dificilă în grupul $\mathbb{G}$, atunci schema de criptare ElGamal este CPA-sigură.

- Notăm cu Π schema de criptare ElGamal. E suficient să arătăm că schema este sigură la interceptare simplă;

Securitate - teoremă

Teoremă

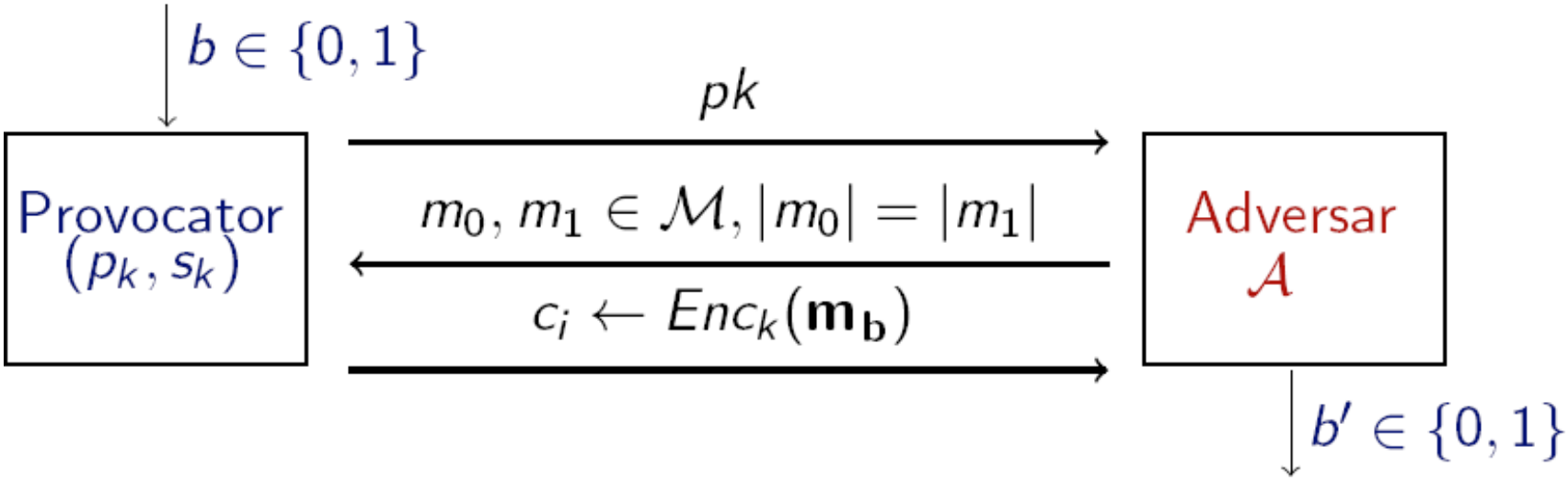
Dacă problema decizională Diffie-Hellman (DDH) este dificilă în grupul $\mathbb{G}$, atunci schema de criptare ElGamal este CPA-sigură.

- Notăm cu Π schema de criptare ElGamal. E suficient să arătăm că schema este sigură la interceptare simplă;
- Fie $\mathcal{A}$ un adversar PPT; notăm cu

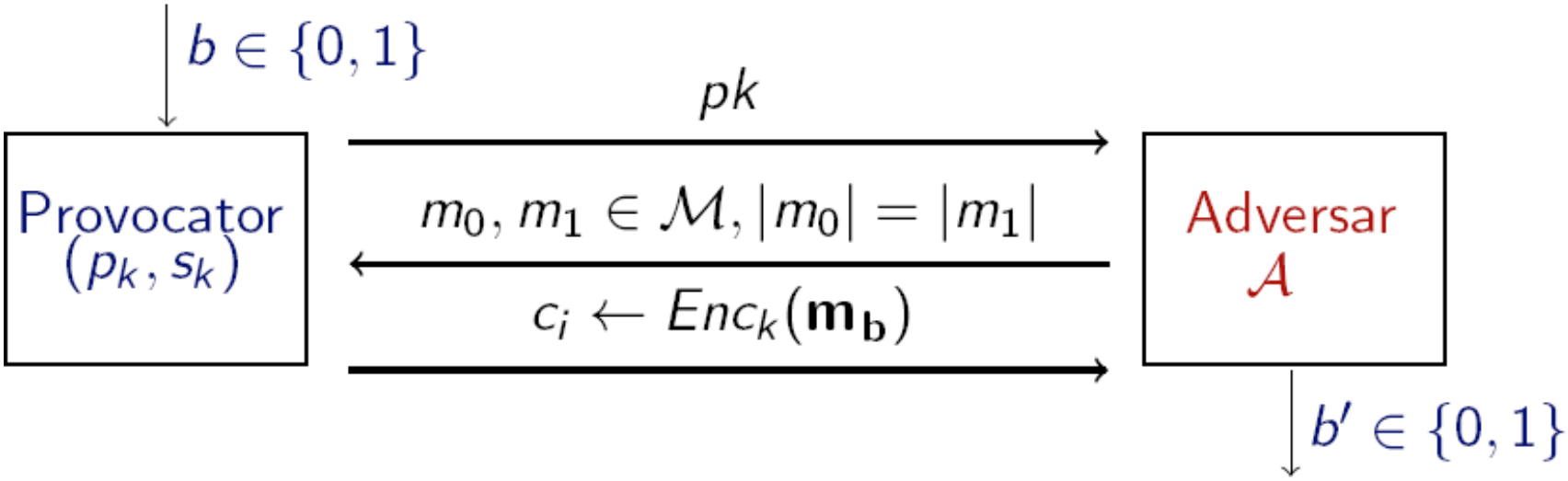
$$\epsilon(n) = Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1]$$

probabilitatea ca $\mathcal{A}$ să câstige experimentul de mai jos folosit pentru a defini securitatea la interceptare simplă.

Demonstrație



Demonstrație



- Considerăm schema modificată $\tilde{\Pi}$ care diferă de schema Π prin faptul că algoritmul de criptare alege aleator $y, z \leftarrow \mathbb{Z}_q$ și întoarce textul criptat

$$(g^y, g^z \cdot m)$$

Demonstrație

- A doua componentă a textului criptat din $\tilde{\Pi}$ este un element uniform distribuit din $\mathbb{G}$ și independent de m;

Demonstrație

- A doua componentă a textului criptat din $\tilde{\Pi}$ este un element uniform distribuit din $\mathbb{G}$ și independent de m;
- Prima componentă este și ea independentă de m; rezultă că

$$Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n) = 1] = \frac{1}{2}$$

Demonstrație

- A doua componentă a textului criptat din $\tilde{\Pi}$ este un element uniform distribuit din $\mathbb{G}$ și independent de m;
- Prima componentă este și ea independentă de m; rezultă că

$$Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n) = 1] = \frac{1}{2}$$

- Deși $\tilde{\Pi}$ nu e o schemă de criptare (nu se poate decripta), experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n)$ este bine-definit pentru că folosește doar algoritmul de criptare;

Demonstrație

- A doua componentă a textului criptat din $\tilde{\Pi}$ este un element uniform distribuit din $\mathbb{G}$ și independent de m;
- Prima componentă este și ea independentă de m; rezultă că

$$Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n) = 1] = \frac{1}{2}$$

- Deși $\tilde{\Pi}$ nu e o schemă de criptare (nu se poate decripta), experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n)$ este bine-definit pentru că folosește doar algoritmul de criptare;
- Arătăm că $\mathcal{A}$ poate fi folosit de un algoritm $\mathcal{D}$ ca o subrutină pentru a rezolva problema DDH cu probabilitate $\epsilon(n)$;

Demonstrație

- Algoritmul $\mathcal{D}$ primește la intrare tuplul $(\mathbb{G}, q, g, g_1, g_2, g_3)$, unde $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^{xy}$ sau $g_3 = g^z$ pentru x, y, z aleatoare, după care:

Demonstrație

- Algoritmul $\mathcal{D}$ primește la intrare tuplul $(\mathbb{G}, q, g, g_1, g_2, g_3)$, unde $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^{xy}$ sau $g_3 = g^z$ pentru x, y, z aleatoare, după care:
  1. Alege $pk = (\mathbb{G}, q, g, g_1)$ și execută $\mathcal{A}(pk)$ și obține două mesaje m_0 și m_1;

Demonstrație

- Algoritmul $\mathcal{D}$ primește la intrare tuplul $(\mathbb{G}, q, g, g_1, g_2, g_3)$, unde $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^{xy}$ sau $g_3 = g^z$ pentru x, y, z aleatoare, după care:
  1. Alege $pk = (\mathbb{G}, q, g, g_1)$ și execută $\mathcal{A}(pk)$ și obține două mesaje m_0 și m_1;
  2. Alege un bit aleator b și notează $c_1 = g_2$ și $c_2 = g_3 \cdot m_b$;

Demonstrație

- Algoritmul $\mathcal{D}$ primește la intrare tuplul $(\mathbb{G}, q, g, g_1, g_2, g_3)$, unde $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^{xy}$ sau $g_3 = g^z$ pentru x, y, z aleatoare, după care:
  1. Alege $pk = (\mathbb{G}, q, g, g_1)$ și execută $\mathcal{A}(pk)$ și obține două mesaje m_0 și m_1;
  2. Alege un bit aleator b și notează $c_1 = g_2$ și $c_2 = g_3 \cdot m_b$;
  3. Îi dă textul criptat (c_1, c_2) lui $\mathcal{A}$ și obține de la el un bit b'. Dacă $b' = b$, $\mathcal{D}$ întoarce 1, altfel întoarce 0.

Demonstrație

- Algoritmul $\mathcal{D}$ primește la intrare tuplul $(\mathbb{G}, q, g, g_1, g_2, g_3)$, unde $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^{xy}$ sau $g_3 = g^z$ pentru x, y, z aleatoare, după care:
  1. Alege $pk = (\mathbb{G}, q, g, g_1)$ și execută $\mathcal{A}(pk)$ și obține două mesaje m_0 și m_1;
  2. Alege un bit aleator b și notează $c_1 = g_2$ și $c_2 = g_3 \cdot m_b$;
  3. Îi dă textul criptat (c_1, c_2) lui $\mathcal{A}$ și obține de la el un bit b'. Dacă $b' = b$, $\mathcal{D}$ întoarce 1, altfel întoarce 0.
- În continuare, analizăm comportamentul lui $\mathcal{D}$ considerând două cazuri:

Demonstrație

- **Cazul 1:** Să presupunem că tuplul pe care $\mathcal{D}$ îl primește la intrare este generat alegând aleator $x, y, z \leftarrow \mathbb{Z}_q$ și calculând $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^z$.

Demonstrație

- **Cazul 1:** Să presupunem că tuplul pe care $\mathcal{D}$ îl primește la intrare este generat alegând aleator $x, y, z \leftarrow \mathbb{Z}_q$ și calculând $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^z$.
- Atunci $\mathcal{D}$ execută $\mathcal{A}$ cu cheia publică $pk = (\mathbb{G}, q, g, g^x)$ și textul criptat construit $(c_1, c_2) = (g^y, g^z \cdot m_b)$;

Demonstrație

- **Cazul 1:** Să presupunem că tuplul pe care $\mathcal{D}$ îl primește la intrare este generat alegând aleator $x, y, z \leftarrow \mathbb{Z}_q$ și calculând $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^z$.
- Atunci $\mathcal{D}$ execută $\mathcal{A}$ cu cheia publică $pk = (\mathbb{G}, q, g, g^x)$ și textul criptat construit $(c_1, c_2) = (g^y, g^z \cdot m_b)$;
- În acest caz, $\mathcal{A}$ nu poate distinge între cele două situații: atunci când este executat ca o subrutină a lui $\mathcal{D}$ interacționând cu el sau atunci când efectuează experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n)$

Demonstrație

- **Cazul 1:** Să presupunem că tuplul pe care $\mathcal{D}$ îl primește la intrare este generat alegând aleator $x, y, z \leftarrow \mathbb{Z}_q$ și calculând $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^z$.
- Atunci $\mathcal{D}$ execută $\mathcal{A}$ cu cheia publică $pk = (\mathbb{G}, q, g, g^x)$ și textul criptat construit $(c_1, c_2) = (g^y, g^z \cdot m_b)$;
- În acest caz, $\mathcal{A}$ nu poate distinge între cele două situații: atunci când este executat ca o subrutină a lui $\mathcal{D}$ interacționând cu el sau atunci când efectuează experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n)$
- Cum $\mathcal{D}$ întoarce 1 exact atunci când output-ul b' al lui $\mathcal{A}$ este egal cu b, rezultă că:

Demonstrație

$$Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^z) = 1] = Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n) = 1] = \frac{1}{2}$$

Demonstrație

$$Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^z) = 1] = Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n) = 1] = \frac{1}{2}$$

- **Cazul 2:** Să presupunem că tuplul pe care $\mathcal{D}$ îl primește la intrare este generat alegând aleator $x, y \leftarrow \mathbb{Z}_q$ și calculând $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^{xy}$.

Demonstrație

$$Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^z) = 1] = Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n) = 1] = \frac{1}{2}$$

- **Cazul 2:** Să presupunem că tuplul pe care $\mathcal{D}$ îl primește la intrare este generat alegând aleator $x, y \leftarrow \mathbb{Z}_q$ și calculând $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^{xy}$.
- Atunci $\mathcal{D}$ execută $\mathcal{A}$ cu cheia publică $pk = (\mathbb{G}, q, g, g^x)$ și textul criptat construit

$$(c_1, c_2) = (g^y, g^{xy} \cdot m_b) = (g^y, (g^x)^y \cdot m_b)$$

Demonstrație

$$Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^z) = 1] = Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\tilde{\Pi}}(n) = 1] = \frac{1}{2}$$

- **Cazul 2:** Să presupunem că tuplul pe care $\mathcal{D}$ îl primește la intrare este generat alegând aleator $x, y \leftarrow \mathbb{Z}_q$ și calculând $g_1 = g^x, g_2 = g^y$ și $g_3 = g^{xy}$.
- Atunci $\mathcal{D}$ execută $\mathcal{A}$ cu cheia publică $pk = (\mathbb{G}, q, g, g^x)$ și textul criptat construit

$$(c_1, c_2) = (g^y, g^{xy} \cdot m_b) = (g^y, (g^x)^y \cdot m_b)$$

- În acest caz, $\mathcal{A}$ nu poate distinge între următoarele două situații: atunci când este executat ca o subrutină a lui $\mathcal{D}$ sau atunci când efectuează experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\Pi}(n)$

Demonstrație

- Cum $\mathcal{D}$ întoarce 1 exact atunci când output-ul b' al lui $\mathcal{A}$ este egal cu b, rezultă că:

$$Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^{xy}) = 1] = Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] = \epsilon(n)$$

Demonstrație

- Cum $\mathcal{D}$ întoarce 1 exact atunci când output-ul b' al lui $\mathcal{A}$ este egal cu b, rezultă că:

$$Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^{xy}) = 1] = Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] = \epsilon(n)$$

- Dar cum problema DDH este dificilă, rezultă că există o funcție neglijabilă negl a.î.

$$\mathrm{negl}(n) \geq$$
$$|Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^z) = 1] - Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^{xy}) = 1]|$$

$$= \left|\frac{1}{2} - \epsilon(n)\right|$$

Demonstrație

- Cum $\mathcal{D}$ întoarce 1 exact atunci când output-ul b' al lui $\mathcal{A}$ este egal cu b, rezultă că:

$$Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^{xy}) = 1] = Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\Pi}(n) = 1] = \epsilon(n)$$

- Dar cum problema DDH este dificilă, rezultă că există o funcție neglijabilă negl a.î.

$$\mathrm{negl}(n) \geq$$
$$|Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^z) = 1] - Pr[D(\mathbb{G}, q, g, g^x, g^y, g^{xy}) = 1]|$$

$$= \left|\frac{1}{2} - \epsilon(n)\right|$$

- Adică $\epsilon(n) \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$ □.

Important de reținut!

- Sistemul de criptare ElGamal
- Proprietatea de homomorfism