la pasul 1, înlocuind B prin B .

2.12.2 Determinarea unei baze dual admisibile

Pentru a aplica algoritmul simplex dual trebuie să cunoaştem o bază dual admisibilă iniţială. Vom indica în continuare o metodă generală de obţinere a unei astfel de baze, precum şi cîteva observaţii în acest sens pentru cazuri particulare. Trebuie totuşi să remarcăm că algoritmul simplex dual se aplică de obicei în cazul cînd o bază dual admisibilă este disponibilă, fără a fi nevoie să o determinăm ad-hoc; acesta este cazul în unele probleme de post-optimizare, care vor fi prezentate mai departe.

Fie deci o bază B extrasă din matricea A a problemei de programare liniară în forma standard (2.12.1) pentru care avem îndeplinită ipoteza uzuală rang $A = m < n$. O astfel de bază este în general uşor de obţinut ; în particular, cînd restricţiile sînt iniţial inegalităţi, matricea B asociată variabilelor ecart este evident o bază.

Dacă avem $z_j^B - c_j \leq 0$ pentru toţi $j \in R$ rezultă că B este dual admisibilă. In cele ce urmează vom considera că există $j \in R$ pentru care $z_j^B - c_j > 0$.

Vom adăuga restricţiilor problemei (2.12.1) restricţia suplimentară

$$\sum_{j \in R} x_j \leq M \quad , \qquad (2.12.9)$$

unde M este un număr real arbitrar de mare. In acest mod se obţine o nouă problemă de programare liniară :

$$\begin{cases} \min c'x \\ x_0 + \sum_{j \in R} x_j = M \quad , \\ Ax = b \quad , \\ x \geq 0,\ x_0 \geq 0 \ , \end{cases} \qquad (2.12.10)$$

unde x_e este variabila ecart introdusă în restricţia suplimentară (2.12.9). Dacă notăm

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e' \\ 0 & B & R \end{pmatrix}; \quad b_1 = \begin{pmatrix} M \\ B \end{pmatrix}; \quad c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}; \quad x_1 = \begin{pmatrix} x_e \\ x \end{pmatrix},$$

(2.12.11)

unde $e \in R^{n-m}$ este un vector cu toate componentele egale cu 1 , rezultă că problema (2.12.10) se poate scrie de asemenea sub forma

$$\begin{cases} \min c_1' x_1 \\ A_1 x_1 = b_1 , \\ x_1 \geqslant 0 . \end{cases} \qquad (2.12.12)$$

Evident, matricea

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

este o bază extrasă din A_1 şi inversa sa este

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

Fie $k \in R$ un indice determinat de condiţia

$$\max_{j \in R} (z_j^B - c_j) = z_k^B - c_k \qquad (2.12.13)$$

şi fie $\widetilde{B}_1$ matricea obţinută din B_1 prin înlocuirea primei coloane din B_1 cu coloana de rang k din A_1, adică

$$\widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^k & B \end{pmatrix}$$

Evident, $\widetilde{B}_1$ este o bază extrasă din A_1. Vom arăta că $\widetilde{B}_1$ este chiar o bază dual admisibilă pentru problema (2.12.12). Intr-adevăr , ţinînd seama că

$$y_j^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_j^B \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n .$$

şi

$$y_0^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

rezultă

$$z_j^{B_1} - c_j = (0,\ c'_B)\ y_j^{B_1} - c_j = z_j^B - c_j\ ,\quad 1 \leq j \leq n$$

şi $$z_0^{B_1} - c_0 = 0$$

Din formulele de schimbare a bazei (baza $\widetilde{B}_1$ se obţine din B_1 prin înlocuirea coloanei de rang $\ell = 0$ cu coloana de rang k) rezultă

$$z_j^{\widetilde{B}_1} - c_j = (z_j^{B_1} - c_j) - (z_k^{B_1} - c_k) \leq 0\ ,\quad 1 \leq j \leq n$$

din modul de alegere al lui $k \in R$ şi

$$z_0^{\widetilde{B}_1} - c_0 = -(z_k^{B_1} - c_k) < 0\ ,$$

ceea ce arată că $\widetilde{B}_1$ este dual admisibilă.

Aplicînd algoritmul simplex dual pentru rezolvarea problemei (2.12.12), pentru care dispunem de baza dual admisibilă $\widetilde{B}_1$, şi presupunînd că nu este posibilă ciclarea (vezi § 2.12.3), rezultă că într-un număr finit de paşi ajungem la una dintre următoarele două situaţi

(a) Problema (2.12.12) nu are programe. Rezultă în acest caz că nici (2.12.1) nu are programe. Intr-adevăr, în caz contrar, dacă $\widetilde{x}$ este un program al problemei (2.12.1) rezultă că $x = \widetilde{x}$ şi $x^0 = M - \sum_{j \in R} \widetilde{x}_j$ este, pentru M suficient de mare, un program al problemei (2.12.12), ceea ce este absurd.

(b) Problema (2.12.12) are program optim, corespunzător unei baze B_1^{*} extrasă din A_1. Vom deosebi două subcazuri, după cum $0 \in B_1^{*}$ sau nu.

(b_1) Avem $0 \in B_1^{*}$. Rezultă că B_1^{*} este de forma

$$B_1^{*} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha' \\ 0 & B^{*} \end{pmatrix}$$

unde B^{*} este o bază extrasă din A. Inversa bazei B_1^{*} este evident

$$(B_1^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha'(B^*)^{-1} \\ 0 & (B^*)^{-1} \end{pmatrix}$$

şi deci programul optim pentru (2.12.12) este

$$\bar{x}^{B_1^*} = (B_1^*)^{-1} b_1 = \begin{pmatrix} M - \alpha'(B^*)^{-1} b \\ \bar{x}^{B^*} \end{pmatrix}$$

adică $x_o = M - \alpha'(B^*)^{-1} b$ şi $x^{B^*} = \bar{x}^{B^*}$.

Pentru M suficient de mare rezultă că x_o are valoare strict pozitivă şi deci restricţia suplimentară (2.12.9) este inactivă pentru programul optim şi deci poate fi neglijată (vezi teorema 2.3.2). Cu alte cuvinte, $\bar{x}^{B^*}$ este un program optim al problemei (2.12.1).

(b_2) Avem $0 \notin B_1^*$. In acest caz restricţia suplimentară (2.12.9) este satisfăcută cu semnul egal pentru programul optim şi variabilele asociate bazei optime B_1^* sînt funcţii de M.

Dacă valoarea optimă $z_1^* = c'_{B_1^*} \bar{x}^{B_1^*}$ este în mod explicit o funcţie de M pentru M suficient de mare rezultă că $z_1^* \to \infty$ cînd $M \to \infty$ şi deci problema (2.12.12) are optim infinit. Rezultă atunci că problema iniţială (2.12.1) are de asemenea optim infinit, deoarece orice program al problemei (2.12.12) este un program al problemei (2.12.1), iar funcţiile obiectiv coincid.

Dacă valoarea optimă z_1^* este independentă de M pentru M suficient de mare, rezultă că hiperplanul $c_1' x_1 = z_1^*$ şi hiperplanul $\sum_{j \in B} x_j = M$ conţin programul optim. Deoarece hiperplanul $\sum_{j \in B} x_j = M$ se deplasează paralel cu el însuşi cînd M variază, rezultă că programul optim se deplasează pe o muchie infinită (semidreaptă) a tronsonului programelor ; originea acestei muchii constituie un program optim al problemei (2.12.1), care se poate obţine făcînd să descrească M pînă în momentul cînd una dintre variabilele care sînt funcţii de M devine nulă.

Observaţia 1 . Este clar că raţionamentul de la (b_1) nu necesită ipoteza de optimalitate a bazei B_1^* . Cu alte cuvinte, îndată ce x_o devine variabilă (şi deci restricţia (2.12.9)devine inactivă pentru M suficient de mare), rezultă că variabilele de bază diferite de x_o nu depind de M şi deci B^* constituie o bază dual admisibilă pentru problema iniţială (2.12.1). Putem deci să trecem din acest moment la rezolvarea problemei iniţiale, eliminînd prima linie a tabelului simplex ; forma lui $(B_1^*)^{-1}$ ne arată că restul tabelului nu trebuie modificat.

<u>Observaţia 2</u> . Rezolvarea problemei (2.12.12) pune în evidenţă cazul cînd problema iniţială (2.12.1) are optim infinit, aşa cum metoda celor două faze (vezi § 2.6) pune în evidenţă cazul cînd problema nu are programe.

Metoda de determinare a unei baze dual admisibile este o metodă generală de obţinere a unei astfel de baze. In cazul cînd în problema (2.12.1) avem $c \geq 0$, şi putem pune în evidenţă o bază B cu proprietatea că $c_B = 0$, rezultă imediat că B este o bază dual admisibilă :

$$c_B' B^{-1} a^j - c_j = 0 - c_j \leq 0$$

pentru toţi $j \in R$. O bază B cu proprietatea $c_B = 0$ este baza asociată variabilelor ecart introduse în cazul cînd iniţial, restricţiile problemei (2.12.1) sufoat toate inegalităţi.

2.12.3 <u>Exemplu numeric</u> . Să considerăm problema de programare liniară

$$\begin{cases} \min(-x_3 + x_4 + x_5) \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

O bază iniţială este $B_0 = (a^1, a^2)$. Avem $c_{B_0} = 0$, dar nu toţi coeficienţii din funcţia obiectiv sînt nenegativi, ceea ce arată că B_0 nu este dual admisibilă.

Pentru a obţine o bază dual admisibilă introducem restricţia suplimentară

$$x_3 + x_4 + x_5 \leq M ,$$

unde M este un număr real suficient de mare. Rezolvăm deci mai întîi problema

$$\begin{cases} \min(-x_3 + x_4 + x_5) \\ x_0 + x_3 + x_4 + x_5 = M \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0 \ , \ 0 \leq i \leq 5 , \end{cases}$$

unde x_0 este variabila ecart introdusă în restricţia suplimentară.

Primul tabel simplex corespunzător variabilelor de bază x_0,

x_1, x_2 este următorul :

	V.B.	V.V.B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			0	0	0	-1	1	1
0	x_0	M	1	0	0	1	1	1
0	x_1	-2	0	1	0	1	1	-1
0	x_2	1	0	0	1	-1	-1	1
	z	0	0	0	0	1	-1	-1

Deoarece max (1, -1, -1) = 1 = $z_3 - c_3$, rezultă k = 3, adică x_3 intră în bază . Evident, x_0 părăsește baza. Noul tabel simplex este deci

	V.B.	V.V.B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			0	0	0	-1	1	1
-1	x_3	M	1	0	0	1	1	1
0	x_1	-M-2	-1	1	0	0	0	-2
0	x_2	M+1	1	0	1	0	0	2
	z	-M	-1	0	0	0	-2	-2

Baza actuală este dual admisibilă și deci putem începe aplicarea algoritmului simplex dual problemei completate. Este clar că min ($\bar{x}_i^B$) = - M - 2 = $\bar{x}_1^B$ și deci x_1 părăsește baza. Criteriul de intrare în bază este :

$$\min_{j \,!\, y_{1j}^B < 0} \frac{(z_j^B - c_j)}{y_{1j}^B} = \min\left(\frac{-1}{-1} , \frac{-2}{-2}\right) = 1$$

Pentru a face o alegere vom introduce x_0 în bază , adoptînd drept pivot pe y_{10} = -1. Noul tabel simplex este deci

	V.B	V.V.B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_3	-2	0	1	0	1	1	-1
0	x_0	M+2	1	-1	0	0	0	2
0	x_2	-1	0	1	1	0	0	0
	z	2	0	-1	0	0	-2	0

Deoarece x_0 are valoare strict pozitivă, rezultă că, pentru M suficient de mare, restricția suplimentară este inactivă și se poate neglija. Eliminînd linia și coloana lui x_0 obținem un tabel simplex pentru problema inițială :

V.B	V.V.B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	-2	1	0	1	1	-1
x_2	-1	1	1	0	0	0
z	2	-1	0	0	-2	0

Deoarece $\bar{x}_2^B = -1 < 0$ și $y_{2j}^B \geqslant 0$ rezultă că problema inițială nu are programe. Dacă nu facem uz de eliminarea lui x_0, atunci rezultă ca mai sus că problema modificată nu are programe și deci nici problema inițială nu are programe.

2.13 Complemente privind algoritmul simplex dual.

2.13.1 Forma lexicografică a algoritmului simplex dual.

Ca și pentru algoritmul simplex primal (vezi § 2.10.3) putem da o variantă lexicografică a algoritmului simplex dual . Vom utiliza în acest sens formatul explicit al problemei (vezi § 2.10.1), care este mai convenabil decît cel obișnuit pentru algoritmul simplex dual în forma lexicografică. Așa cum am văzut, dacă dispunem de o bază B, forma explicită a problemei