Curs 2

Prop: Fie $P=(p_1, p_2)$
$Q=(q_1, q_2)$ două pct distincte în $\mathbb{R}^2$

Fie $R=(r_1, r_2)$ un pct arbitrar și

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

Atunci R este situat

i) Pe dreapta $PQ \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) = 0$

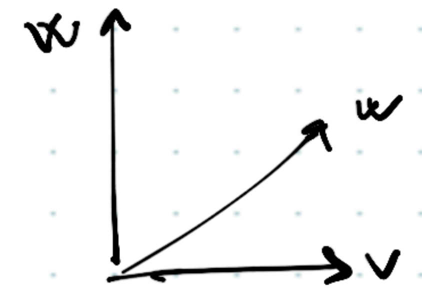
ii) „în dreapta" dreptei $PQ \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) < 0$

iii) „în stânga" dreptei $PQ \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) > 0$

Produs vectorial (cross product):

• geometric: date u și w necoliniari produsul vectorial $u \times w$ este un vector

- perpendicular pe u și w
- are sensul dat de regula șurubului drept



- are lungimea dată de o anumită formulă (aria paralelogramului det de v şi w)

• <u>numeric</u>: în $\mathbb{R}^3$

$$v=(v_1, v_2, v_3)\in\mathbb{R}^3$$
$$w=(w_1, w_2, w_3)\in\mathbb{R}^3$$
$$v\times w = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

det. formal

! Deosebire față de produsul scalar (dot product)

$$\langle v, w\rangle = v\cdot w = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$$

Exp: $v=(0,1,2)$ $w=(4,1,0)$

$$\langle v, w\rangle = v\cdot w = 0\cdot 4 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 = 1$$

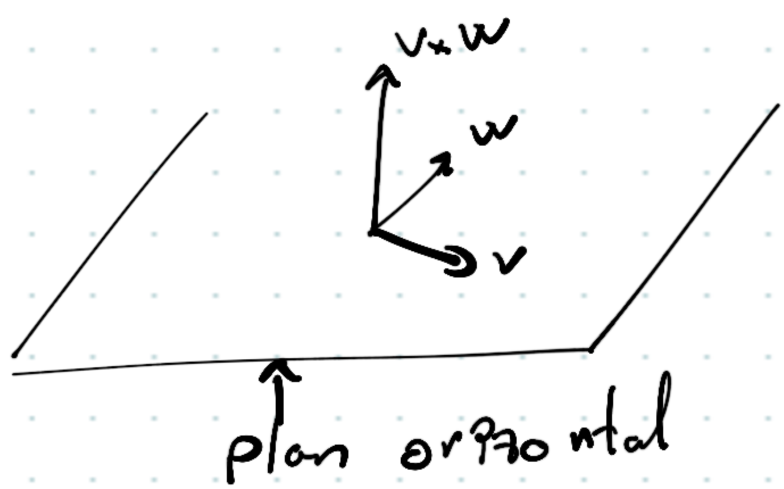
$$v \times w = \begin{vmatrix} 0 & 4 & e_1 \\ 1 & 1 & e_2 \\ 2 & 0 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_3$$

$$= -2e_1 + 8e_2 - 4e_3 = (-2, 8, -4)$$

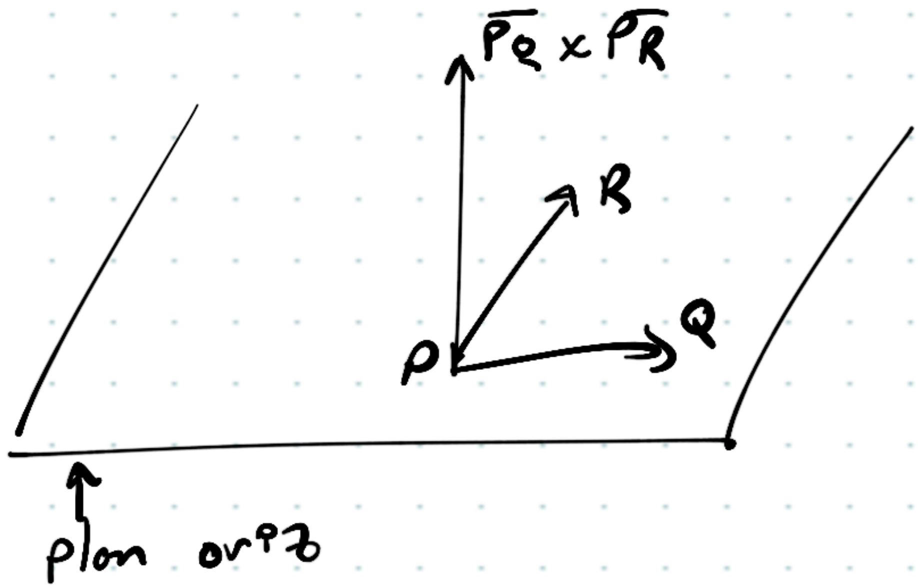
Obs: Cum se calculează prod. vectorial și ce rezultat se obține pt 2 vect. orizontale?

$$v = (v_1, v_2, 0)$$
$$w = (w_1, w_2, 0)$$
$$v \times w = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}\right)$$

Intuitiv:

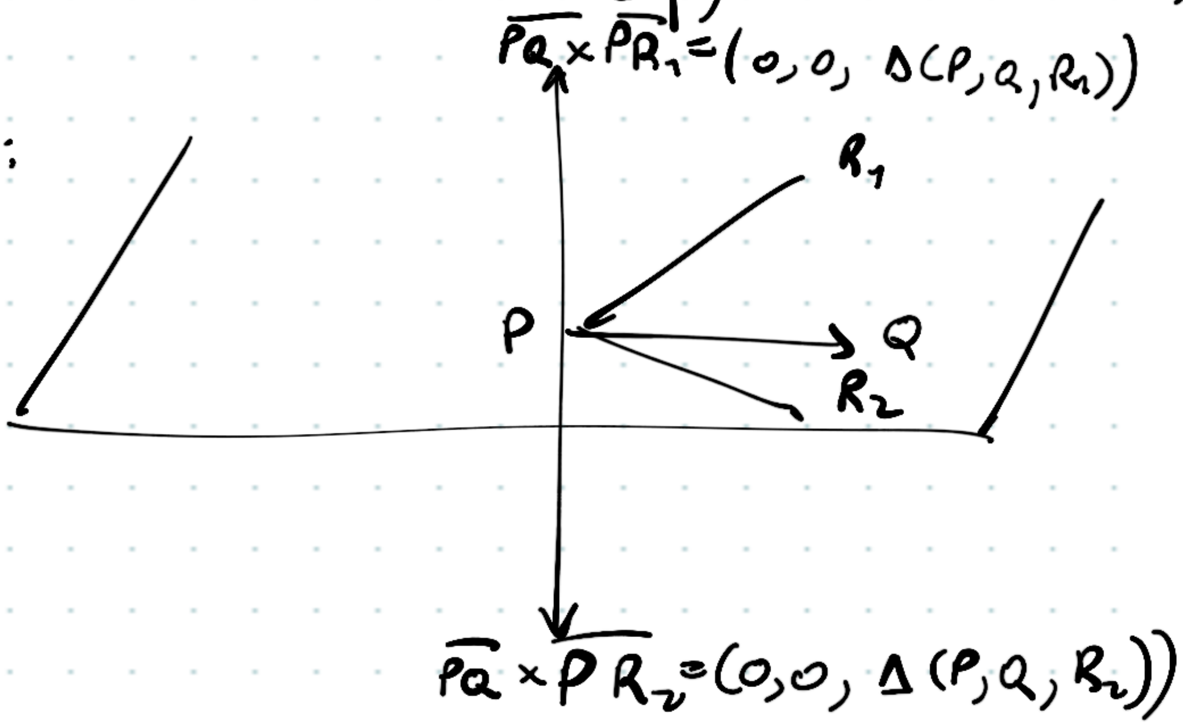


Lemă: Fie $P = (p_1, p_2, 0)$, $Q = (q_1, q_2, 0)$, $R = (r_1, r_2, 0)$ (pct. din planul orizontal).



$$\overline{PQ}\times\overline{PR} = (q_1-p_1,\ q_2-p_2,\ 0)\times(r_1-p_1,\ r_2-p_2,\ 0) \overset{obs}{=} \left(0,\ 0,\ \begin{vmatrix} q_1-p_1 & r_1-p_1 \\ q_2-p_2 & r_2-p_2 \end{vmatrix}\right) = (0,0,\Delta(P,Q,R))$$

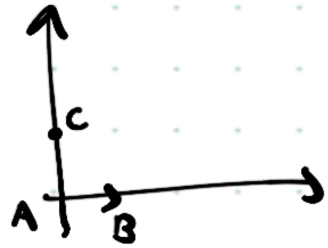
Concluzie:



Pt R_1 (st. lui $\overline{PQ}$), $\Delta(P,Q,R_1)>0$

R_2 (dr lui $\overline{PQ}$), $\Delta(P,Q,R_2)<0$

Exp: $A=(0,0)$ $B=(1,0)$ $C=(0,1)$



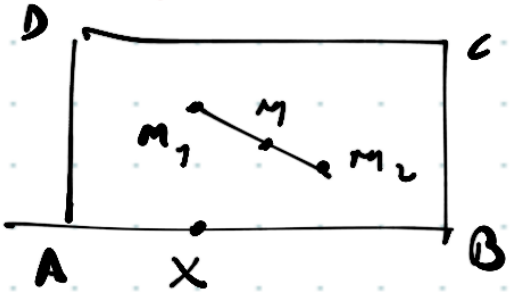
$$\Delta(A,B,C)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1>0$$

(în st)

Acoperiri convexe

Exp

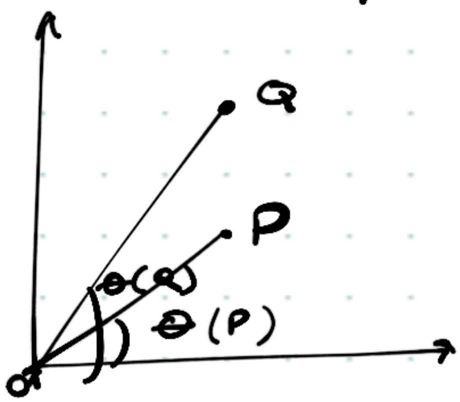
1)



- X nu e pct extrem
  $x \in (AB)$
- M nu e pct extrem
  (găsim M_1, M_2 a.î. $M \in (M_1 M_2)$)
- A, B, C, D sunt pct extreme

Comentariu

- Ordonarea după unghiul polar

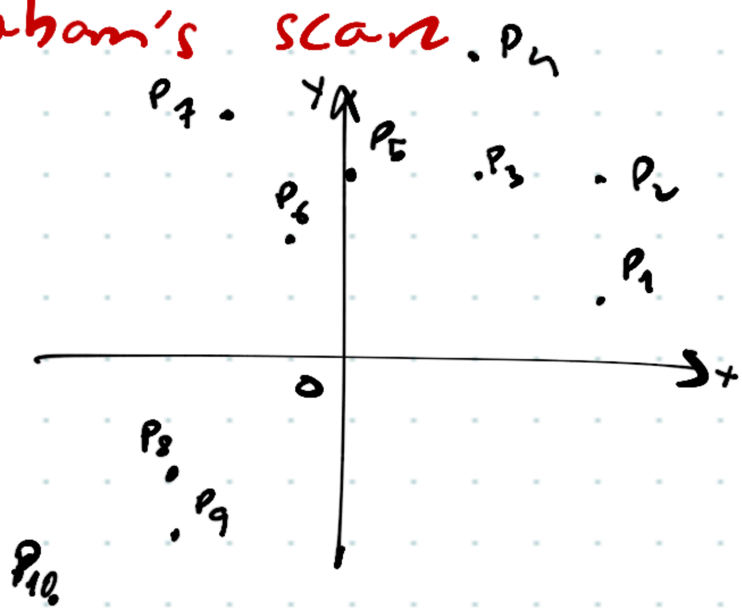


$\theta(Q) > \theta(P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Q este situat la st. muchiei orientate $\overline{OP}$

- Apartenența pct la triunghi
  - suma ariilor
  - orientare față de muchii

Graham's scan



P_1 P_2 $\cancel{P_3}$ P_4 $\cancel{P_5}$ $\cancel{P_6}$ P_7 $\cancel{P_8}$ $\cancel{P_9}$ P_{10}

- 1
- 2
- 3
- 4

$\boxed{P_1 \quad P_2 \quad P_4 \quad P_7 \quad P_{10}}$

↳ Frontiera acop. convexe