Seminar 7

Ex

$\langle x, y \rangle = 2^x(2y+1) - 1$ fct. prim recursivă

$z = 2^x(2y+1) - 1$, soluții unice x, y

$l(z) = \min_{x \le z} ((\exists y)_{\le z} (z = \langle x, y \rangle))$

$r(z) = \min_{y \le z} ((\exists x)_{\le z} (z = \langle x, y \rangle))$

l, r prim recursive

Codificare Gödel

$[a_1, \dots, a_n] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}$; $p_i =$ al i-lea

$[2, 1, 0, 3, 7] = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^3 \cdot 11^7$

obs 1) $[a_1, \dots, a_n] = [b_1, \dots, b_n]$ dacă $a_i = b_i$, $\forall i \in \overline{1,n}$

2) $[a_1, \dots, a_n, 0] = [a_1, \dots, a_n]$

3) pt n fixat, fct $[a_1, \dots, a_n]$ prim. rec.

4) Dacă $x = [a_1, \dots, a_n]$

$(x)_i = a_i$

$lt(x) = n \Leftrightarrow a_n \neq 0$

$(x_?)_i = \min_{t \le x} (p_i^{t+1} \nmid x)$ prim. rec.

$lt(x) = \min_{t \le x} ((x)_t \neq 0, (\forall j)_{\le x} ; j \le t \vee (x)_j = 0)$

Ex 1) S. s. a. c. f definită prin $f(0) = 0$,

$f(1) = 1$

$f(n+2) = f(n) + f(n+1)$

Dem Fie $g(n) = [f(n), f(n+1)]$

$g(0) = [f(0), f(1)] = 2^0 3^1 = 3$

$g(n+1) = [f(n+1), f(n+2)] =$

$= [(g(n))_2, (g(n))_1 + (g(n))_2]$

$\Rightarrow g$ primitiv recursivă $\Rightarrow f(n) = (g(n))_1$ pr. rec.

2) Fie $h_1(x,0) = f_1(x)$, $h_2(x,0) = f_2(x)$

$$h_1(x,t+1) = g_1(x, h_1(x,t)), h_2(x,t))$$

$$h_2(x,t+1) = g_2(x, h_1(x,t), h_2(x,t))$$

Ssac. dacă f_1, f_2, g_1, g_2 pr. rec., at.

h_1, h_2 sunt pr. rec.

Dem: $\omega(x,t) = [h_1(x,t), h_2(x,t)]$

$$\omega(x,0) = [h_1(x,0), h_2(x,0)] = 2^{h_1(x)} 3^{h_2(x)}$$

$$\omega(x,t+1) = [g_1(x, (\omega(x,t))_1, (\omega(x,t))_2),$$

$$g_2(\text{-----})] \Rightarrow \omega \text{ pr. rec} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h_1, h_2$ pr. rec.

3) Fie $f(n)$ o fcț oarecare și $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

def prin $\bar{f}(0) = 1$, $\bar{f}(n) = [f(0), \ldots f(n-1)]$, $n \neq 0$

Dacă $f(n) = g(\bar{f}(n))$, unde g pr. rec., at.

f este pr. rec.

$$\bar{f}(n+1) = [f(0), \ldots, f(n-1), f(n)] =$$
$$= \bar{f}(n) \cdot p_{n+1}^{g(\bar{f}(n))} \Rightarrow \bar{f}(n) \text{ prim. rec.} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f \text{ pr. rec.}$$

4) Fie $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 6$

$$f(x+3) = f(x) + f^2(x+1) + f^2(x+2)$$

Să se arate că f pr. rec.

$$w(x) = [f(x), f(x+1), f(x+2)]$$
$$w(0) = [f(0), f(1), f(2)] = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^6$$
$$w(x+1) = [f(x+1), f(x+2), f(x+3)] =$$
$$= [(w(x))_2, (w(x))_3, (w(x))_1 + (w(x))_2^2 + (w(x))_3^2] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow w \text{ pr. rec.}$$

$$\Rightarrow f(x) = (w(x))_1 \text{ pr. rec.}$$

Limbajul standard $\mathcal{S}$

Var de intrare x_1, x_2, x_3

Var de ieșire Y (init cu 0)

Var locale z_1, z_2, z_3 (init cu 0)

Etichete $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, A_2, B_2, \dots$

Instr. neetichetată

$V \leftarrow V+1$

$V \leftarrow V-1$ $\qquad$ V variabilă

$V \leftarrow V$ $\qquad$ L etichetă

if $V \neq 0$ goto L

Instr. etichetată

[L] instr. neetichetată

1) $[A]$ $x \leftarrow x-1$

$Y \leftarrow Y+1$

IF $x \neq 0$ Goto A

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \begin{cases} 1; & x=0 \\ x; & x \neq 0 \end{cases}$

2) Prog care copiază val. lui X în Y

```
IF X≠0 GOTO A
GOTO E
[A]: X← Y-1
     Y← Y+1
     GOTO B
```

MACRO pt GOTO L

```
Z← Z+1
IF Z≠0 GOTO L
```

3) copiază val lui X în Y și lasă X nemodificat

```
[B]  IF X≠0 GOTO A
     GOTO C
[A]  X←X-1
     Y← Y+1
     Z← Z+1
     GOTO B
[C]  IF Z ≠0 GOTO D
     GOTO E
```

[D] $z \leftarrow z-1$

$x \leftarrow x+1$

GOTO C

4) MACRO pt $V \leftarrow 0$

[A] $V \leftarrow V-1$

IF $V \neq 0$ GOTO A

5) MACRO pt $V \leftarrow V'$

$V \leftarrow 0$

etc.

6) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$Y \leftarrow x_1$

[B] IF $x_2 = 0$ GOTO A

[A] $x_2 \leftarrow x_2$

$Y \leftarrow Y+1$

$Z \leftarrow Z+1$

Goto B

[C] If $z \neq 0$ GOTO D

GOTO E

[D] $z \leftarrow z-1$

$x_2 \leftarrow x_2+1$

GOTO C

7) $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$z \leftarrow x_1$

[B] IF $z \neq 0$ GOTO A

GOTO E

[A] $z \leftarrow z-1$

$y \leftarrow y + x_2$

GOTO B