21.02.2018

Geometrie

- Seminar -

Sp vectoriale

Def $V \neq \emptyset$, K corp com.

$+ : V \times V \to V$ adunare vect (op internă)

$\cdot : K \times V \to V$ înm vect cu scalari (op externă)

I $(V, +)$ gr com.

II
1) $(\alpha_1 + \alpha_2) v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$
2) $\alpha (v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$
3) $(\alpha_1 \alpha_2) v = \alpha_1 (\alpha_2 v)$
4) $1 \cdot v = v$

$\forall\ v, v_1, v_2 \in V$, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in K$

$(\mathbb{R}^n_{/\mathbb{R}}, +, \cdot)$ sp. vect real

Apl

1. $(\mathbb{R}^3_{/\mathbb{R}}, +, \cdot)$ sp. vect real

$+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \overset{def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\alpha (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3$; $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^3, +)$ comutativ

1) asoc

$(x+y)+z = x+(y+z)$; $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^3$

$((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) + (z_1, z_2, z_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) +$

$= ((x_1+y_1)+z_1, (x_2+y_2)+z_2, (x_3+y_3)+z_3) = (x_1+(y_1+z_1), x_2+(y_2+z_2),$

$x_3+(y_3+z_3)) = (x_1, x_2, x_3) + (y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3) =$

$= (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)) = x+(y+z)$

2) Comutat.

$x+y = y+x$; $\forall x,y \in \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (y_1+x_1, y_2+x_2, y_3+x_3) =$

$= (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3) = y+x$

3) El. n.

$\exists e$ a.î. $x+e = e+x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) + (e_1, e_2, e_3) = (x_1, x_2, x_3)$

$\Rightarrow (x_1+e_1, x_2+e_2, x_3+e_3) = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow e_1 = e_2 = e_3 = 0 \Rightarrow \cancel{e=(0,0,0)}$ $e = 0_{\mathbb{R}^3}$

4) $\forall x$ e simetrizabil

$\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\exists x' \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\cancel{x+(-x)}$ $x+x' = x'+x = 0_{\mathbb{R}^3}$

$(x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3') = (x_1+x_1', x_2+x_2', x_3+x_3') = (0,0,0)$

$\Rightarrow$ $x' = (-x_1, -x_2, -x_3)$

(a) $(\alpha_1+\alpha_2)v = \alpha_1 v$

(b) ~~$\alpha(v_1+v_2)$~~

$(\alpha_1+\alpha_2)$

$= (\alpha$

$= (\alpha$

$= \alpha_1$

2)

$(\alpha_1+\alpha_2)V = \alpha_1 V+\alpha_2 V \quad ; \forall V \in \mathbb{R}^3; \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

~~2) $\alpha(v_1+v_2) = \alpha V_1 + \alpha V_2 ; \forall V, V_1, V_2 \in V$~~

$V=(v_1, v_2, v_3)$

$(\alpha_1+\alpha_2) V = ((\alpha_1+\alpha_2)V_1, (\alpha_1+\alpha_2) V_2, (\alpha_1+\alpha_2) V_3) =$

$= (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_1, \alpha_1 V_2 + \alpha_2 V_2, \alpha_1 V_3 + \alpha_2 V_3) =$

$= (\alpha_1 V_1, \alpha_1 V_2, \alpha_1 V_3) + (\alpha_2 V_1, \alpha_2 V_2, \alpha_2 V_3) =$

$= \alpha_1 V + \alpha_2 V$

2) $\alpha(V_1+V_2) = \alpha V_1 + \alpha V_2 ; \forall V \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha(V_1+V_2) = \alpha((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) =$

$= \alpha(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) =$

$= (\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2), \alpha(x_3+y_3)) =$

$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \alpha x_3 + \alpha y_3) =$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3)$

$= \alpha(x_1, x_2, x_3) + \alpha(y_1, y_2, y_3)$

$= \alpha V_1 + \alpha V_2$

3) $(\alpha_1 \alpha_2) V = \alpha_1(\alpha_2 V) ; \forall V \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$(\alpha_1\alpha_2)(x_1, x_2, x_3) = ((\alpha_1\alpha_2)x_1, (\alpha_1\alpha_2)x_2, (\alpha_1\alpha_2)x_3) =$

$= (\alpha_1(\alpha_2 x_1), \alpha_1(\alpha_2 x_2), \alpha_1(\alpha_2 x_3)) = \alpha_1(\alpha_2 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_2$

$= \alpha_1(\alpha_2 V)$

Teo $(M(\mathbb{R})$) es vectorial real.

-Proprietăți independență, liniar dependență

<u>Def</u> $\frac{V}{K}$ spațiu vectorial.

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$

S este sist de vectori liniar ~~it~~ independent dacă pt

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow$ avem $\alpha_1 = \dots \alpha_n = 0$,

$\alpha_i \in K$; $\forall\, i \in \overline{1,n}$

2. Stabiliți dacă următ sist vect. sunt liniar indep sau liniar dependente. În cazul celor liniar dep, precizați relația de dependență liniară.

a) $S = \{v_1 = (2, 2, -1), v_2 = (1, 2, 3)\}$

b) $S = \{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (2, 1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

c) $S = \{v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (-1, 2, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

d) $S = \{v_1 = (2, -1, 1), v_2 = (3, 4, -2), v_3 = (3, 2, -4), v_4 = (1, 2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

2. a) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^3$

$\alpha_1 (2, 2, -1) + \alpha_2 (1, 2, 3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ S este liniar

1.

De dezgropat din cls 12

b) $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\alpha_1 (1, 1, -1) + \alpha_2 (1, -1, 1) + \alpha_3 (2, 1, 2) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - m\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

~~det~~ Evident $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ soluție

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 (2 \cdot 3 - 4 \cdot 0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~rang A = rang Ā~~ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ soluție unică

~~det Matricea sistemului liniar omogen~~

c) $S = \{ v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (-1, 2, 1) \}$

Fie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0, 0)$

$\cancel{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - m\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$|A| = 0 \Rightarrow$ sist nu e det $\Rightarrow$ ~~det~~ S este liniar dependent

$\Delta_p = M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} A = 2$

$\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow$ nec. prime.

$\alpha_3 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ nec. secundare

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \lambda \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -2\lambda \end{cases}$$

$\alpha_2 = -3\lambda$

$\alpha_1 = 4\lambda$

$\alpha_3 = \lambda$

$4\lambda v_1 - 3\lambda v_2 + \lambda v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 v_1 - 3 v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

Reguli $\mathbb{R}^n$

$S = \{v_1, v_2, \ldots v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \right) \\ v_1 \quad v_2 \quad\quad v_m \end{array} \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$$

S este lin indep dacă $rg\, A = m \leq n$

S este lin dep dacă $rg\, A \neq m$

d) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

~~max{rg A}~~ $rg\, A \leq 3$ $\Rightarrow$ $rg\, A \neq 4$ (nr. vect din sist)

sist vect este liniar dependent

$\boxed{\text{Temă}}$ relația de dependență liniară.

3. Determinați valoarea parametrului real m a.î.

$S = \{v_1 = (1, m, 1), V_2 = (1, 2, 3), V_3 = (2, 0, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^3 \to$ a) lin dep

b) lin indep

//

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

a) lin dep. dacă $rang\, A \neq 3 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow -2 + 6m - 4 + m = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6 + 7m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{6}{7}$

b) S, este lin indep dacă $rang\, A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{7} \Leftrightarrow m \in$

Sist de generatori

Def $\frac{V}{K}$ sp vect peste K

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$

S sist de gen pt V dacă

$\forall v \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in K$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

Regula 2

$\mathbb{R}^n$

$S = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$

S - sist de gen pt $\mathbb{R}^n$ dacă rang A = ~~m~~ $n \le m$

- nu este sist de gen pt $\mathbb{R}^n$ dacă rang $A \neq n$

4. Stabiliți dacă sist. vect. urm. fm. sist de generatori în sp vect din care fac parte

a) $S = \{v_1 = (1,2,1), v_2 = (-1,3,2)\}$

b) $S = \{v_1 = (1,-1,2), v_2 = (2,1,3), v_3 = (-1,-2,-1)\}$

c) $S = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)\}$

a) $m = 2$
$n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{(3,2)}(\mathbb{R})$$

rang $A \le 2 \neq 3 \Rightarrow S$ nu este sist de generatori pt $\mathbb{R}^3$

b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ det $A = 0$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ det $A' = 3 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 2 \neq 3 \Rightarrow$ nu este sist de gen.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = 0+0+0-1-0-0 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 3 = n \Rightarrow S$ este sist de gen pt $\mathbb{R}^3$.

<u>Baze</u>

<u>Def</u> V/K - sp vectorial peste K

$B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$

B - bază dacă $\begin{cases} 1) & B \text{ sist vect lin indep} \\ 2) & B \text{ sist de gen} \end{cases}$

<u>Regula 3</u>
$\mathbb{R}^n$

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$

B bază $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ unde $A = \left(\underset{v_1}{\square}\ \underset{v_2}{\square} \dots \underset{v_n}{\square} \right) \in M_n(\mathbb{R})$

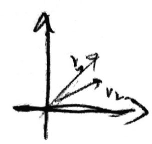
Geometrie
- Seminar -

01.03.2018

I Sisteme liniare independente. Sisteme de generatori. Baze

Def: Fie $V/_K$ un K-sp vectorial, $A = \{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq V$. S.n. sist. liniar independent dacă $\forall\, \alpha_1, \ldots \alpha_p \in K$, $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p = 0 \iff$

$\iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$.



Def: $S = \{w_1, \ldots w_n\}$ s.n. sist de generatori dacă $\forall v \in V$, $\exists \alpha_1, \ldots \alpha_p$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$

Def B se numește bază dacă e SLI și SG

Exc (Temă): $\forall v \in V$, $\exists!\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a.î. $v = \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_n t_n$

$$B \text{ este } \overset{\text{Spoc}}{\iff} \text{SLI și SG}$$

Obs: Baza canonică în $\mathbb{R}^n = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$$

Exc: În $\mathbb{R}^3$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ Sunt SLI, SG, Bază?

Pp că $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_3 v_3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} \{v_1, v_2, v_3\} \text{ lin indep.} \\ \cancel{\text{sist de gen - din condiț}} \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3 \\ \text{rang } A = 3 \end{array}\right\} \overset{\text{Th.}}{\Rightarrow} \text{bază}$$

Exc Fie $V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (5, -1, 2)$, $v_3 = (3, 0, 1)$, $v_4 = (4, 0, -1)$

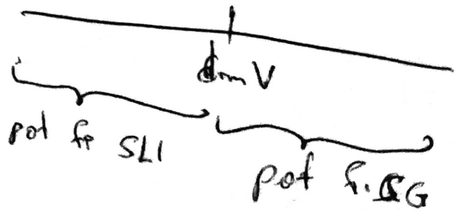
1) SLI, SG, Bază ?

2) Dacă este S.G., extrageți o bază.

Rez

1) Nu e bază, $|S| = 4 \neq 3$

Nu e SLI pt că $|S| = 4 \not> 3$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ sunt SLI, sunt $3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ fiind o bază, deci sunt ~~sg~~ SG $\Rightarrow$ $\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4\}$ SG $\Rightarrow$ $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq S$

$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot \end{pmatrix}$

Exc: Fie $V = \mathbb{R}^4$

$v_1 = (1, 0, -1, 2)$

$v_2 = (2, -3, 0, 2)$

a) S.sa c. $A = \{v_1, v_2\}$ e SLI

b) Completați A la o bază a lui $\mathbb{R}^4$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ fm. SLI

Fie B_0 baza canonică

Folosind lema ~~s~~ schimbului înlocuim 2 el din B_0 cu V_1 și V_2.

Cum?

Î obs că
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \{V_1, V_2, e_3, e_4\}$ e bază

$\underline{\text{r}}$ $v_1 = 1e_1 + 0e_2 - 1e_3 + 2e_4$

$V_2 = 2e_1 - 3e_2 + 0e_3 + 2e_4$

V_1 poate înlocui e_1, e_3 sau e_4

Coordonate

$V/_K$ sp. vect. și $B = \{v_1, \dots v_n\}$

$\forall w \in V$, $\exists! \alpha_1, \dots \alpha_n$ a.î. $w = \alpha_1 V_1 + \dots \alpha_n v_n$

$w \xrightarrow{B} (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in K^n$ coordonatele lui w în baza B

$V = \mathbb{R}^2$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$w \overset{B_1}{\rightsquigarrow} (1, 2)$

V .. $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$

$v \in V$, $[v] \in K^n$ coord în B_1

$[v]_{B_1} = (a_1, \ldots, a_n)$

$[v]_{B_2} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n = v$ ← rel în V

$\alpha_1 [w_1]_{B_1} + \ldots + \alpha_n [w_n]_{B_1} = [v]_{B_1}$ ← rel în K^n

$\Rightarrow$ $\left(\underline{[w_1]_{B_1} \ldots [w_n]_{B_1}} \right) [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$

$M_{B_1}^{B_2}$ sn matricea de trecere de la B_1 la B_2

B_1, B_2, B_3 baze

$M_{B_1}^{B_3} = M_{B_1}^{B_2} \cdot M_{B_2}^{B_3}$

Ex: Fie $V = \mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{Temă}}$

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$M_{B_1}^{B_2} = M_{B_1}^{B_0} \cdot M_{B_0}^{B_2} = \left(M_{B_0}^{B_1}\right)^{-1} \left(M_{B_0}^{B_2}\right)$

Subspații vectoriale

Def. V/K s.n. subsp. vectorial, $W \subseteq V$, W s.n. subsp. vectorial

dacă $\forall u, v \in W$, $u+v \in W$

$\forall u \in W$, $\forall \alpha \in K$, $\alpha u \in W$

Ex: $V = \mathbb{R}^3$. Fie $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+z=0; x-y=0; 5x+9y-6z=0\}$

Dem că

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $u, v \in W$, $u = (x_1, y_1, z_1)$

$v = (x_2, y_2, z_2)$

$\alpha u + \beta v = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2) =$

$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) =$

$2 \cdot (\alpha x_1 + \beta x_2) - 3(\alpha y_1 + \beta y_2) + \alpha z_1 + \beta z_2 =$

$= \alpha(2x_1 - 3y_1 + z_1) + \beta(2x_2 - 3y_2 + z_2) = 0$

MII $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\}$

$u, v \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v = 0$

Th: În $\mathbb{R}^n$ toate subsp sunt de tipul

$W = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot v = 0\}$ pt m. $A \in M_n(\mathbb{R})$

Ex: $V = \mathbb{R}^3$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 5y - z = 0\}$

Găsiți o bază în W. Aflați $\dim_{\mathbb{R}} W$

$\begin{cases} 2x+5y-z=0 \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\beta - 5\alpha}{2} \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

$W = \{(-\frac{5}{2}\alpha + \frac{\beta}{2}, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-\frac{5}{2}, \ldots$

sist ve

3 sist

$V = \mathbb{R}^4$

$W = \{(x, y, z, m) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+5y-z-m=0,\ y+m+z=0,\ 3x-2y=0\}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ rang A

$\dim_{\mathbb{R}^4} W = 4 - \text{rang}\, W$

$\begin{cases} 2x+5y-z-m=0 \\ y+m+z=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \iff$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = 0+0+15+3+4-0 = 20 \neq 0$

$\begin{cases} 2x+5y-z-m=0 \\ y+z+m=0 \\ 3x-2y=0 \\ m = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{19y}{3} + y + \alpha - \alpha = 0 \\ z = -y-\alpha \\ x = \frac{2y}{3} \\ m = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z = \alpha \\ x = 0 \\ m = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

$W = \{(0, 0, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(0,0,-1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(Lema schimbului cod

21.03.2018

Geometrie
– seminar –

Subspații în $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n$) $W = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot v = 0 \}$, $A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$

Dat W, găsim baza în W

Ex1: Fie $V = \mathbb{R}^4$

$$V_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y=0 \\ z+t=0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$V_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+z=0 \\ y+t=0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

a) Arătați V_1, V_2 subspații ale lui $\mathbb{R}^4$

b) Găsiți baze și det ~~ale subsp.~~ dim pt: V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$

c) Sunt V_1 și V_2 în sumă directă?

Rez

a) $$V_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Fie $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$

$v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$

$A_1(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A_1 v_1 + \beta A_1 v_2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1$ subsp.

Analog V_2 subsp.

b) $V_1 = \{ (-\alpha, \alpha, -\beta, \beta) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(0, 0, -1, 1)$

$V_1 = \{ \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(0, 0, -1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Avem $B = \{ (-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1) \}$ bază a lui V_1.

$V_2 = \{(\alpha, \beta, -\alpha, -\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$

$= \{\alpha(1,0,-1,0) + \beta(0,1,0,-1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow B_2 = \{(1,0,-1,0), (0,1,0,-1)\}$ bază a lui V_2.

pt $V_1 \cap V_2$:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \\ x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$$

$x = t$ ~~$(-\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha)$~~

$y = z$

$x = -y = -z$

$x = -\alpha$

$y = \alpha$

$t = -\alpha$

$V_1 \cap V_2 = \{(-\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1,1,1,-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Avem $B = \{(-1,1,1,-1)\}$ bază pt $V_1 \cap V_2$

Th Grassmann: $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

$3 = 2 + 2 - 1$

$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

$S = B_1 \cup B_2 = \{(-1,1,0,0), (0,0,-1,1), (1,0,-1,0), (0,1,0,-1)\}$ – SG pt. V_1+V_2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow B = \{(-1,1,0,0), (0,0,-1,1), (1,0,-1,0)\}$ bază pt V_1+V_2.

c) Nu sunt în sumă directă

$(V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\})$

Ex 2

Fie

0

Ex 2

Fie 2 plane care trec prin origine în $\mathbb{R}^3$. Arăt că intersecția lor conține o dreaptă.

V_1, V_2 - două subsp. de dim 2 ale $\mathbb{R}^3$. Dem că $\dim(V_1 \cap V_2) \geq 1$

$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 4 - \dim(V_1\cap V_2) \leq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(V_1 \cap V_2) \geq 1$

Ex 3

Fie $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$V_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$

Găsiți baze în V_1, V_2 și arăt că $V_1 \oplus V_2 = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = {}^tA \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}e_{11} + a_{12}(e_{12}+e_{21}) + \cdots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}e_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij}(e_{ij}+e_{ji})$$

Not $e_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \boxed{1} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ (cu j sub coloana lui 1)

$\Rightarrow$ baza $B_1 = \{e_{ii} \mid i = \overline{1,n}\} \cup \{e_{ij}+e_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$

$\Rightarrow \dim V_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & & & \\ & & & \\ -a_{1n} & & & 0 \end{pmatrix}$$

$B_2 = \{e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$

$\dim \cancel{B_2}\, V_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$V_1 \cap V_2 = \{0\} \overset{\text{Grassmann}}{\Longrightarrow} \dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow V_1 \oplus V_2 =$

Aplicații liniare

Def: O funcție $f: V_1 \to V_2$ (V_1, V_2 sunt K-spații) s.n. **aplicație liniară** dacă $f(ax+by) = af(x)+bf(y), \forall a,b \in \mathbb{R}$, $\forall x,y \in V_1$

Exp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f((x,y)) =$ a) $(x,y,0)$

$=$ b) $(x+y, x-y, x)$

Exc 3: Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y,z)) = (x+y-z, 2x-5y)$.
Să se arate că f e liniară.

Obs. că $f((x,y,z)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$A_f = [f]$

A_f = matricea lui f (în baza canonică)

$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = A_f \cdot (\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \underbrace{A_f v_1}_{f(v_1)} + \beta \underbrace{A_f v_2}_{f(v_2)} = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$

Th. Orice apl. liniară $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e de forma ~~f(v) este~~
$f(v) = A_f \cdot v$, unde $A_f \in \mathcal{M}_{m,n}(\cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{K})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$[g \circ f] = [g] \cdot [f]$

Dată $f: V \to W$ liniară

- $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \leq V$
- $\operatorname{Im} f = \{w \in W \mid \exists v \in V, f(v) = w\} = f(V) \leq W$

$$\left(f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = 0 \right)$$

Dat $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \rightsquigarrow [f]$, $\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^n \mid [f] v = 0\}$

Th rang-defect: $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\text{defectul lui } f} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\operatorname{rang} f = \operatorname{rang}[f]} = \dim V$

Ex 4: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $f(x, y, z) = (x + y + z, -x - y - z)$

Găsiți baze cu $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, f inj?, f surj?

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang}[f] = 1 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 1 \xRightarrow{\text{Th R-D}} \dim(\operatorname{Ker} f) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Nu e inj} \\ \text{Nu e surj} \end{cases}$

$\text{Sol} = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

~~Imaginea unei baze~~

Obs. Imaginea unei baze a lui V prin f este SG. pt $\operatorname{Im} f$

$S = \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \{(1, -1), (1, -1), (1, -1)\} \Rightarrow B = \{(1, -1)\}$

Geometrie

04.04.2018

- Seminar -

Diagonalizarea aplicațiilor liniare

Recap: V, B_1, B_2 baze
$B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$

$$M_{B_1}^{B_2} [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$M_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [w_1]_{B_1} & \dots & [w_n]_{B_1} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$f : V \to V$ aplicație liniară

Exp $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \ f(z) = |z| \\ \qquad f(z) = \operatorname{Im} z, \ f(x,y) = y \\ |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \end{cases}$

$f : \underset{\mathbb{R}}{V} \to \underset{\mathbb{R}}{V}$

Dacă avem o bază $\mathcal{B}$ a lui V, $[f]_{\mathcal{B}}$ = matricea lui f în baza $\mathcal{B}$
$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(e_1)]_{\mathcal{B}} & \dots & [f(e_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$[f]_{B_1} = M_{B_1}^{B_2} [f]_{B_2} M_{B_2}^{B_1} = \boxed{M_{B_1}^{B_2} [f]_{B_2} \cdot \left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}}$$

sunt conjugate

Ideea diagonalizării e să găsim o formă „simplă" într-o bază

$$[f]_{B} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \xrightarrow{B_1 ?} [f]_{B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>Ex 1</u>: $f: V_{/K} \to V_{/K}$ apl lin.

Atunci f injectivă $\Leftrightarrow$ f surj $\Leftrightarrow$ f izomorfism $\Leftrightarrow$ $\det(f) \neq 0$
(1) (2) (3) (4)

<u>Dem</u>

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$

f e inj $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V \Leftrightarrow f$ surj

$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang}(f)$

nu dep de bază

f e surj $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V \Leftrightarrow \operatorname{rang} f = \dim V \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

maxim

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liniar

<u>Scopul</u>: Găsirea unei baze B în care $[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow f(v_i) = (0, \dots, \lambda_i, \dots, 0) = \lambda_i v_i$

<u>Def 1</u>: $\lambda \in \mathbb{R}$ s.n. valoare proprie a lui f dacă $\exists v \in \mathbb{R}^n$ $v \neq 0$ a.î. $f(v) = \lambda v$

<u>Def 2</u> În acest caz, un $v \in V$ pt care $f(v) = \lambda v$ s.n. vector propriu asociat valorii proprii λ.

<u>Def 3</u> $\operatorname{Spec}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda$ e val proprie$\}$ spectrul lui f

Def/Exc: $\lambda \in \mathbb{R}$ val pr. a lui $f(x)$ det $(f-\lambda I_n)=0$

Fie $v \in \mathbb{R}^n$

$f\lambda \ (f-\lambda I)(v) = f(v) - \lambda(v)$

$\det(f-\lambda I_n)=0 \Leftrightarrow f-\lambda I_n$ nu e inj $\Rightarrow \ker(f-\lambda I_n) \neq 0 \Leftrightarrow \exists v_0 \in \mathbb{R}^n$ a.î. $(f-\lambda I_n)(v_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(v_0) = \lambda \cdot v_0 \Leftrightarrow \lambda$ val prop

Reformulat

$Spec(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \det(f-\lambda I_n) = 0\}$

$|Spec(f)|$ cu multiplicitate $\leq n$

$\uparrow$

$"=" \Leftrightarrow \det(f-\lambda I_n)$ are răd în $\mathbb{R}$

obs: f e diagonalizabil (i.e. $\exists B$ bază a.î. $[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$)

$\Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} V_{f\lambda} = \mathbb{R}^n$

Consecință: Dacă dau o bază B în care f e diagonalizabilă = reuniune unor baze ale lui V_λ urilor

Ex. 3 V_λ sunt în sumă directă: $Spec(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ atunci $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$ sunt în sumă dir., i $\forall i = \overline{1,m}$, $\left(\sum_{\substack{i \neq j \\ j=\overline{1,m}}} V_{\lambda_j}\right) \cap V_\lambda = \{0\}$

Dem: Ppobs că $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ a.î. $\left(\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} V_{\lambda_j}\right) \cap V_{\lambda_i} \neq \{0\}$ *)

$\Rightarrow \exists v \in \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m}$

f diag $\iff \bigoplus V_\lambda = \mathbb{R}^n$
$\lambda \in Spec(f)$ sunt în sumă directă acum

Temă: $m_g(\lambda) \le m_a(\lambda), \forall \lambda \in Spec(f)$

Deci

Algo

0. Scrieți $A_f = [f]_{B_0}$
1. Rez det $(A_f - \lambda I_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots \lambda_m$ val prop

Dacă $\exists \lambda_i \notin \mathbb{R}$ f nu e diagonalizabil

2. pt fiecare $i = \overline{1,m}$, Calc V_{λ_i}

$V_{\lambda_i} = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid A_f \cdot v = \lambda_i v \} \Rightarrow$ o bază a lui B_i și $m_g(\lambda_i)$

3. $B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ este o bază în care f e diagonală

$$[f]_B = M_B^{B_0} [f]_{B_0} (M_B^{B_0})^{-1} = (M_{B_0}^{B})^{-1} [f]_{B_0} M_{B_0}^{B}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ex: Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (2x+3y-z, -x+2y+z, -3x+3y+2z)$

Decideți dacă f e diagonalizabil și ~~diagonalizați~~ găsiți o bază în care e diagonală și o mat între $[f]_{B_0}$ și fm diag.

Geometrie 25.04.2018

- Seminar -

Diagonalizare

Fie ~~$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$~~ a) Scrieți matricea lui f în baza canonică

b) Decideți dacă f e diagonalizabilă

c) Dacă da, găsiți forma diagonală, o bază în care apl e diagonală, o rel între $[f]_{B_0}$ și forma diagonală.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (2x,\ x+2y+z,\ -x+z)$

a) $[f]_{B_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\det([f]_{B_0} - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (2-\lambda)^2(1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \cdot 0 = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad m_a(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = 1 \quad m_a(\lambda_2) = 1$

Fie $\lambda = 2$ avem $V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$\left.\begin{matrix} x + z = 0 \\ -x - z = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \operatorname{rang} A = 1 \Rightarrow \operatorname{rang} \lambda_1 = 2 = m_a\, \lambda_1 \Rightarrow f$ dg.

$x = -\alpha$

$z = \alpha$

$y = \beta$

b) $V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$\operatorname{rang} A = 2 \Rightarrow m_g \lambda_2 = m_a \lambda_2 = 1$

$\begin{cases} x = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_2} = \{ \alpha(0,-1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

$B_2 = \{(0,-1,1)\}$ b.z. în V_{λ_2}

$\Rightarrow B = \{(-1,0,1), (0,1,0), (0,-1,1)\}$ bază în care f e diagonală

$[f]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$[f]_{B_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{B_0}^{B} \cdot [f]_{B_0} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M_{B_0}^{B}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Formă biliniară

Def: $V/_K$ sp. vect $w: V \times V \to K$ s.n. fm biliniară dacă

e liniară în fiecare argument: $- w(\alpha x + \beta y, z) = \alpha w(x,z) + \beta w(y,z)$

$- w(x, \alpha y + \beta z) = \alpha w(x,y) + \beta w(x,z)$

Exp. $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ - produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$

Def: $w: V\times V \to K$ biliniară. Spunem că

- w simetrică dacă $w(x,y) = w(y,x)$; $\forall x,y \in V$
- w antisimetrică dacă $w(x,y) = -w(y,x)$
- w nedegenerată dacă $w(x,y) = 0$; $\forall x \in V \Rightarrow y = 0$ $(\Leftrightarrow)$

$(\Leftrightarrow \forall x \in V\setminus\{0\}, \exists y \in V$ a.î. $w(x,y) \neq 0)$

Obs: $w: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\exists A_w \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $w(x,y) = \langle x, Ay\rangle = {}^t x A y$

$= (x_1, \dots, x_n)(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$A_{ij} = w(e_i, e_j)$

Ex1: $w: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$w(x,y) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 + x_2y_2 - 5x_1y_2 + 6x_3y_3$

$w \rightsquigarrow A_w = ?$

$A_w = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow w = ?$

$w(x,y) = x_1y_1 - 5x_1y_2 + 3x_2y_2 + 6x_2y_3 + x_3y_1 +$

$+ x_3y_2 - x_3y_3$

Prod scalar $\langle\ \rangle$
- sim ✓
- antisim ✗
- nedeg ✓ $\langle x,x\rangle = \|x\|^2 > 0, x \neq 0$

$\langle x,y\rangle = {}^t x y$

Ex2 a) $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$; $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\langle x, Ay\rangle = {}^t x A y \ \boxed{=}\ {}^t A x y = \langle {}^t A x, y\rangle$

b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\underbrace{\langle x, Ay\rangle}_{w_A(x,y)} = 0$; $\forall x,y \Rightarrow A = 0$

$a_{ij} = w(e_i, e_j) = 0$

c) w sim $\Leftrightarrow A = {}^t A$

VI $w(e_i, e_j) = w(e_j, e_i) \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = {}^t A$

VII $w(x,y) = \langle x, Ay\rangle = \langle {}^t A x, y\rangle = \langle y, {}^t A x\rangle$

$w(y,x) = \langle y, Ax\rangle$; $\forall x,y$

$\Rightarrow \langle y, (A - {}^tA)x \rangle = 0 \overset{b)}{\Rightarrow} A = {}^tA$

"$\Leftarrow$" analog

c) ω antisim $\Leftrightarrow A = -{}^tA$ | Temă
d) ω nedeg $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ |

<u>Def</u>: $Q: V \to K$ s.n. fm pătratică dacă $\exists\, \omega: V \times V \to K$ formă ~~pătratică~~ bilin simetrică cu $Q(x) = \omega(x,x)$

$\omega = \langle , \rangle$ pe $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow Q(x) = \langle x, x\rangle = \sum x_i^2 \,(= \|x\|^2)$

<u>obs</u>: Matricea formei pătratice este matricea formei bilin din care provine.

<u>Ex</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Q_A(x) \underset{{}^tx A x}{=} x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$

$Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3 \rightsquigarrow A_Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Th</u>: Pt orice fm pătratică, $\exists$ o bază în care are fm diag
$Q(z) = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$; $\lambda_i \in K$

<u>Dem</u>: (metoda Gauss) - Formare de pătrate

$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

Pt fiecare x_i, o etapă

x_1: $Q(x) = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}^2 x_1^2 + a_{11} \sum a_{1j} x_1 x_j \right) + \text{restul} =$
(nu are x_1)

$= \frac{1}{a_{11}} \left(a_{11} x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{2} x_j \right)^2$ - a se adăuga + restul

Dacă la etapa pt x_j, $a_{jj} = 0$

$\begin{cases} \text{Dacă } x_j \text{ nu apare, se trece peste} \\ \text{Dacă apare } a_{pj} x_p x_j \text{, schimbare de var, nol } x_j = y_j + y_p \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_p = y_j - y_p \end{cases}$

Exp: $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^2 x_1^2 - 2\cdot 2 x_1 x_2 - 2 \cdot 2 x_1 x_3\right) + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x_1 - x_2 - x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - x_2x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - 3x_2x_3 + \frac{3}{2}x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{2}{3}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 x_2^2 - \frac{3}{2}\cdot 3\, x_2x_3\right) + \frac{3}{2}x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 x_3^2 + \frac{3}{2}x_3^2$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2$$

Temă: $Q(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_2x_3$ fm diag

~~Seminar~~
Geometrie
- Seminar -

1. $Q(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_2x_3$
Aduceți la f.m. diag

~~$Q(x) = \frac{1}{4}(4^2 x_1^2$~~

$Q(x) = 4(x_1+x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2 = \frac{1}{4}y_1^2 - y_2^2 = \left(\frac{1}{2}y_1\right)^2 - y_{12}^2 = z_1^2 - z_2^2$

Forma canonică (în $\mathbb{R}$): $Q(z) = \sum_{i=1}^{r} z_i^2 + \sum_{j=r+1}^{p+r+1} - z_j^2$

[Th. Sylvester: Nr. de + și - e invariant.

$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 =$

$= y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 9x_3^2$

$\left.\begin{array}{l} y_1 = z_1 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) = z_2 \\ 3x_3 = z_3 \end{array}\right| \Rightarrow Q(z) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$
nedegenerat (apartenență)

Pb

2. $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

$\hookrightarrow$ $Q(z) = z_1^2 + z_2^2$ fm canonică

Dar $Q(x) = (x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + (x_2-x_3)^2 \overset{y_1 = x_1 - x_2,\ y_2 = x_1 - x_3,\ y_3 = x_2 - x_3}{=} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

nu e sch de variabile
sch de var = transf m nedegenerată

Spații vect euclidiene

Def.: Un spațiu vect V înzestrat cu un produs scalar ($g: V \times V \to \mathbb{R}$) un sp. vect euclidian.

g produs scalar formă bilin, simetrică, pozitiv definită

În general, $V = \mathbb{R}^n$, $g = \langle\ ,\ \rangle$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$ norma lui x

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Def 2: O bază $B = \{f_1, \dots f_n\}$ a lui V s.n.

1) ortogonală dacă $\forall i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, $\langle f_i, f_j\rangle$ $\Rightarrow$ $\{f_1, \dots f_n\}$ e SLI

Pp că $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0 \,|\, \langle\ , f_j\rangle$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle f_i, f_j\rangle = 0$, $\forall j = \overline{1,n}$

$\alpha_j \|f_j\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$

β ortonormală dacă $\forall i,j = \overline{1,n}$ $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

<u>Th (Algo Gram-Schmidt)</u>

$(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle) / (V, \text{ produs scalar})$

Fie $\{b_1, \dots b_n\}$ bază în $\mathbb{R}^n$. Atunci $\exists \{f_1, \dots f_n\}$ o bază ortonormală în $\mathbb{R}^n$ și $\langle b_1, \dots b_k \rangle = \langle f_1, \dots f_k \rangle$; $\forall k = \overline{1,n}$

<u>Dem:</u> $\{b_1, \dots b_n\} \rightsquigarrow \{f_1', \dots f_n'\}$ ortogonală $\underset{f_i = \frac{f_i'}{\|f_i'\|}}{\rightsquigarrow}$ $\{f_1, \dots f_n\}$ ortonormală

<u>Exp:</u> $f_1' = b_1$

$f_2' = b_2 - \alpha f_1'$ cu $\langle f_2', f_1' \rangle = 0 \Rightarrow \langle b_2, f_1' \rangle - \alpha \langle f_1', f_1' \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\langle b_2, f_1' \rangle}{\langle f_1', f_1' \rangle}$

$$f_2' = b_2 - \frac{\langle b_2, f_1' \rangle}{\langle f_1', f_1' \rangle} f_1$$

$$f_3' = b_3 - \frac{\langle b_3, f_1' \rangle}{\langle f_1', f_1' \rangle} f_1' - \frac{\langle b_3, f_2' \rangle}{\langle f_2', f_2' \rangle} f_2'$$

În general, $f_{k+1}' = b_{k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\langle b_{k+1}, f_j' \rangle}{\langle f_j', f_j' \rangle} f_j'$

<u>Ex 3:</u> Fie $B = \{(1,2,0), (1,-2,1), (1,2,1)\}$ bază în $\mathbb{R}^3$

$f_1' = (1,2,0)$

$f_2' = (1,-2,1) - \dfrac{\langle (1,-2,1), (1,2,0) \rangle}{\|(1,2,0)\|^2} (1,2,0) =$

$= (1,-2,1) - \frac{1-4}{5}(1,2,0) = (1,-2,1) - (\frac{-3}{5}, \frac{-6}{5}, 0) = (\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}, 1) = f_2'$

$f_3' = b_3 - \frac{\langle b_3, f_1'\rangle}{\langle f_1', f_1'\rangle} = \frac{\langle b_3, f_2'\rangle}{\langle f_2', f_2'\rangle} f_2' = (1,2,1) - (1,2,0) - \frac{5}{27}\cdot\left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}, 1\right) =$

$= (0,0,1) - \left(\frac{+8}{27}, \frac{-4}{27}, \frac{5}{27}\right) = \left(\frac{-8}{27}, \frac{4}{27}, \frac{16}{27}\right)$

$\|(1,2,0)\| = \sqrt{5} \Rightarrow f_1 = \frac{f_1'}{\sqrt{5}}$

<u>Def 3:</u> $W \leq (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$, $W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in W\}$

$W \rightsquigarrow W^\perp$?

$W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$

De ex, $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow W^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} \langle (5,-2,0),(x,y,z)\rangle = 0 \\ \langle (1,1,1),(x,y,z)\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow W^\perp = \langle (5,-2,0), (1,1,1)\rangle_{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \{\alpha(5,-2,0)+\beta(1,1,1) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

bază a lui $W^\perp$

$W \in \mathbb{R}^n$ are 2 prezentări
- sol. unui sist de ec $W = \{v \in \mathbb{R}^n / A\cdot v = 0\}$
- printr-o bază $W = \langle b_1 \dots b_r\rangle_{\mathbb{R}}$

<u>Temă:</u> 1) Aplic. algo G-S pt două baze ale lui $\mathbb{R}^3$

2) Dacă $W \leq_{\mathbb{R}}$ printr-o bază. Găsiți
- $W^\perp$
- W cu ambele prezentări