Model TO

2p. 1. Enunțați teoremele ... Definiți noțiunile.

2p. 2. min $z = \beta x_1 - 60x_2 - 90x_3 - 90x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 \\ \alpha x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 1 \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_4 \geq 0$

a) Aduceți la forma standard pr. 1

b) Pt. ce valori ale param α coloanele matricei sist. de restricții, corespunzătoare variabilelor x_1, x_2, x_3 sunt liniar independente?

c) Fie $\alpha = 7$. Pentru ce valori ale param. β, soluția de bază corespunzătoare bazei formate din coloanele 1, 2, 3 este optimă? Dar pt. $\alpha = 5$?

d) Efectuați un pas al alg. simplex primal folosind baza formată din ~~va~~ coloanele coresp. variabilelor ecart introduse ($\alpha = 7$, $\beta = -60$)

Scrieți criteriile folosite și formulele.

2p. 3. Fie problema

min $z = 8x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 20x_4 - 2x_5$

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 25 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 20 \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5}$

a) verificați dacă $x^0 = (10, 5, 0, 0, 0)^T$ este sol. admisibilă

b) scrieți duala pr. (1)

c) verif. dacă x^0 este sol. optimă pt. (1) folosind teorema ecarturilor complementare.

2. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\ \alpha x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 1 \end{cases}$

$x_1, ..., x_7 \geq 0$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

Vectorii sunt liniar indep $\Leftrightarrow \lambda_{1,2,3} = 0$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \alpha \lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Delta \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \cancel{\exists}\ \alpha = ---$

și aflăm $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

c) $\alpha = 7$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad \det B = -6 \neq 0$

$B^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 35 & -5 & -2 \\ -61 & 7 & 14 \\ 20 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$B^{-1} b \geq 0$

$r_j = c_j - c_B^T B^{-1} a^j \geq 0, \forall j = \overline{1,7}$

$B^{-1} b = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 35 & -5 & -2 \\ -61 & 7 & 14 \\ 20 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{ceva} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \not\geq 0$

$\Rightarrow x^B = (B^{-1} b, 0, 0, 0, 0)$ nu este soluție admis.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

		-60	-60	-90	-90	0	0	0
VB	VVB	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6	y^7
x_5	☆ 15	1	1	$\boxed{1}$	1	1	0	0
x_6	1	7	5	3	2	0	1	0
x_7	$\boxed{1}$	3	5	10	15	0	0	1
✱	$z=0$	-60	-60	-90	-90	0	0	0

$x^B = B^{-1} b \quad , \quad y = B^{-1} A \qquad c^T = (-60, -60, -90, -90, 0, 0, 0)$

$r_j = c_j - c_B^T B^{-1} A^j \quad , \quad j = \overline{1,7}$

$z = c_B^T \cdot x^B = c_B^T B^{-1} b$

$r_1 = c_1 - (0,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = -60$

$r_2 = c_2 - (0,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -60$

$r_3 = c_3 - (0,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = -90$

$r_4 = c_4 - (0,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} = -90$

✱ adaugă linia $z=0$ în tabel

Criterii de intrare în bază:

Aleg x_j $j = \overline{1,4}$ a.î. $r_j = \min\limits_{r_k < 0} \{r_k\}$

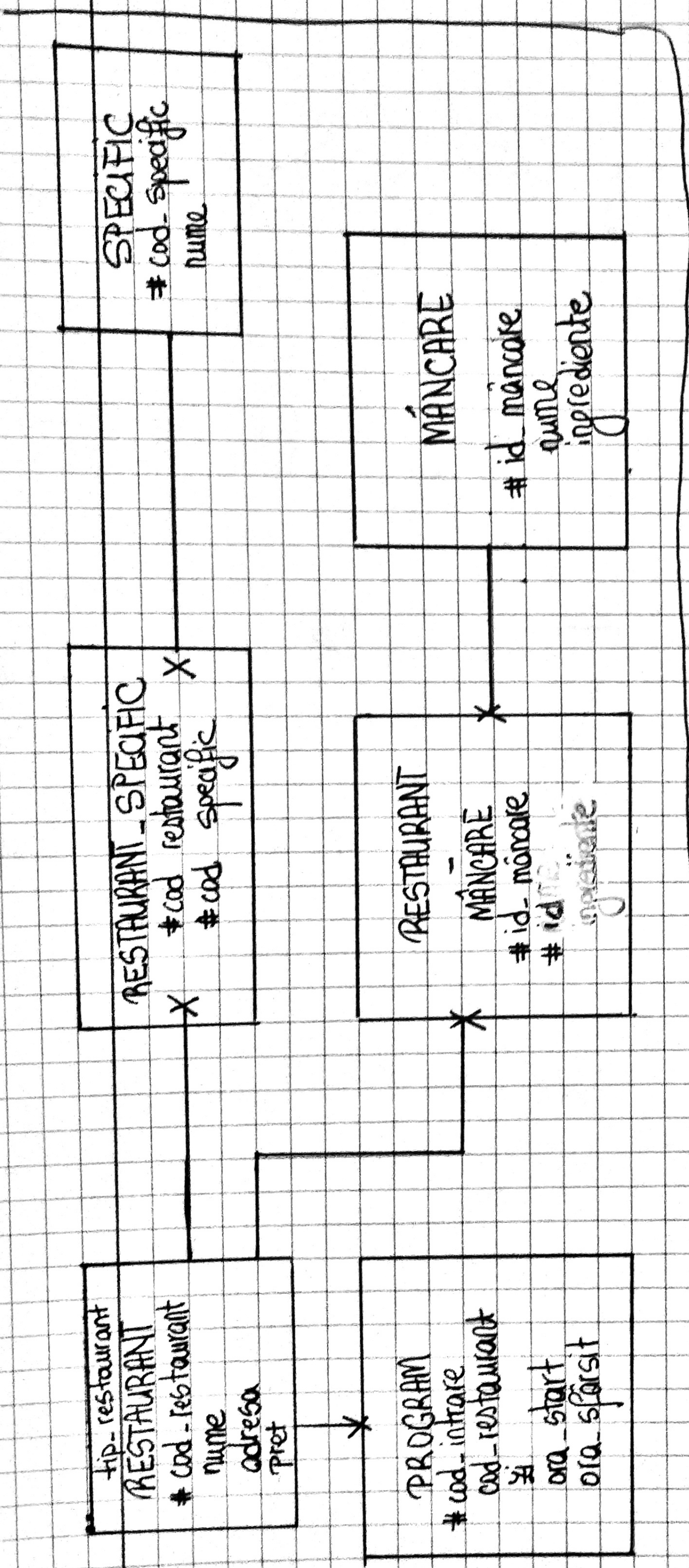
$r_j = \min(-60, -60, -90, -90, 0, 0, 0) = -90$

$r_j = 3, 4$

Aleg $j = 3 \Rightarrow x_3$ intră în bază

Criteriul de ieșire din bază:

$$\min_{y_{k3}>0} \frac{x_k}{y_{k3}} = \min\left\{\frac{15}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}\right\} = \frac{1}{10} = \frac{x_7}{y_{73}}$$



⇒ x_7 iese din bază

pivot $= y_{73} = 10$

VB	VVB						
x_5				0		1	0
x_6				0		0	1
x_3	1/10	3/10	5/10	1	15/10	0	0

$x_5 = \frac{15\cdot 10 - 1\cdot 1}{10}$ ★ (facem un □ în tabelul precedent)

$z = \frac{0\cdot 10 - (1\cdot 90)}{10}$

10 ↪ y_{73}

3) $\min z = 8x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 20x_4 - 25x_5$

$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 25$

$2x_1 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 20$

$x_i \geq 0$

a) $x^0 = (10, 5, 0, 0, 0)^T$

$2\cdot 10 + 5 - 0 + 2\cdot 0 + 0 = 25$ A

$2\cdot 10 - 2\cdot 0 - 0 + 3\cdot 0 = 20$ A

b) Duala

$\max\ 25u_1 + 20u_2$

$2u_1 + 2u_2 \leq 8$

$u_1 \leq 6$

$-u_1 - 2u_2 \leq -10$

$2u_1 - u_2 \leq 20$

$u_1 + 3u_2 \leq 25$