Preț (în euro)	0,75	0,5	0,15

Pr. de optimizare

Var:
x_1 - cant. de morcovi
x_2 - cant. de varză | la o masă
x_3 - cant. de porumb

$$\begin{cases} \inf & 0{,}75x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}15x_3 \\ & 35x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \geq 0{,}5 \\ & 60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\ & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

25 Februarie 2019

Cursul 2

GEOMETRIA PROGRAMĂRII LINIARE

1) Hiperplane, semispații, poliedre

Pr. $\inf(\sup)\ c^T x$
$Ax = b$
$x \geq 0$
(forma standard)

$x, c \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ Mulțimea sol. admisibile

$f : P \to \mathbb{R} \quad f(x) = c^T x,\ x \in P$

$i = \overline{1,m}$ a_i - linia i a matricei A

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x = b_i \quad i = \overline{1,m},\ x \geq 0\}$

Def: Hiperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$

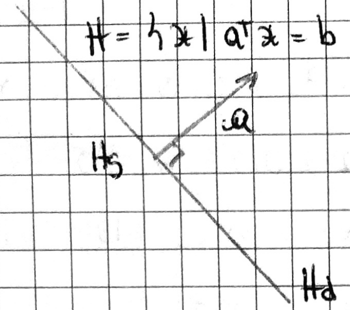
- Un hiperplan este o inters. de 2 semispații

$$H = H_S \cap H_D$$

unde $H_S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$ și $H_D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b\}$

H_S, H_D – semispații închise

$H = \{x \mid a^T x = b\}$



a – ortogonal pe H

Dacă $u, v \in H$:

$a^T(u - v) = a^T u - a^T v = b - b = 0$

Cond. de ortogonalitate a 2 vect. $x, y \in \mathbb{R}^n$

$x \perp y \Leftrightarrow x^T \cdot y = 0$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$ – intersec. de semispații închise

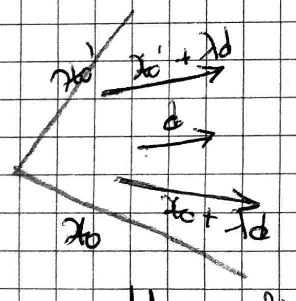
Def: Intersecția finită a unor semispații închise s.n. poliedru

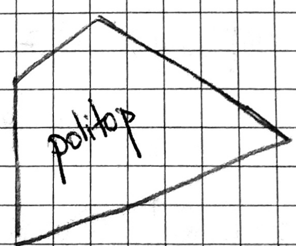
Un poliedru care este mult. nevidă și mărg. s.n. politop.

Mulțimea P a sol. admisibile pt. prob. în forma standard este poliedru.

Def: d s.n. direcție extremală (de recesiune) pt. P dacă

$\forall x_0 \in P$ $x_0 + \lambda d \in P$, $\lambda \geq 0$

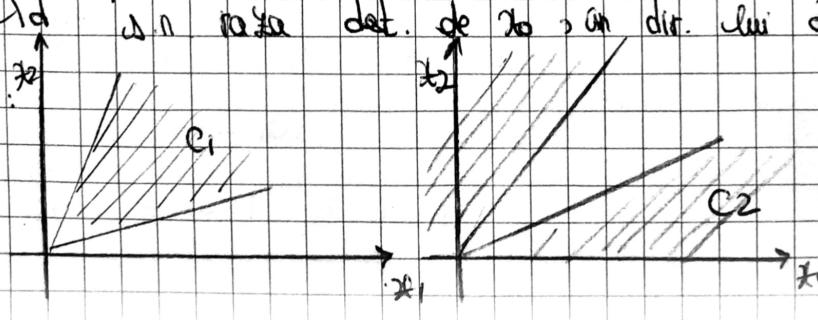




Un poliedru este nemărginit dacă are o direcție extremală

$x_0 + \lambda d$ s.n. raza det. de x_0, în dir. lui d.

Def:



C - con în $\mathbb{R}^n \iff \forall x \in C, \forall \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in C$

Obs: - $0 \in C$

- un con nu este neapărat mulțime

Mulțimi afine, mulțimi convexe

Def: Fie $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^m$

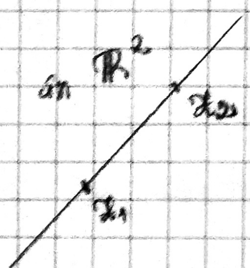
$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$ s.n.

- combinație liniară a p. $x_1, \dots, x_p$ dacă $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$
- combinație afină a p. $x_1, \dots, x_p$ dacă $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1$
- combinație convexă a p. $x_1, \dots, x_p$ dacă $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in [0, 1]$

$p = 2$ x_1, x_2

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$
- comb. afină a p. x_1, x_2 dacă $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ $(\lambda_2 = 1 - \lambda_1)$
- comb. convexă a p. x_1, x_2 dacă $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ $(\lambda_1 = 1 - \lambda_2)$ și $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$

în $\mathbb{R}^2$



- dreapta det. de x_1, x_2 - mulț. comb. afine ale p. x_1, x_2
- segm. $[x_1, x_2]$: mulț. comb. convexe ale p. x_1, x_2

Def: Mț. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ s.n. convexă dacă $\forall$ ar fi 2 pct. dist. $x_1, x_2 \in M$ segm. care unește cele 2 pct. este inclus în M.

$\iff \forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in M$, $\lambda \in [0, 1]$

Def: M este mț. afină $\iff \forall x_1, x_2 \in M$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in M$

Exemple: 1) Mt. sol. sist. $Ax = b$ este mt. afină
2) Poliedrul sol. admisibile ale pr. 1) este mt. convexă

Def: Fie C mt. conv. în $\mathbb{R}^n$ și $x \in C$.
x s.n. punctul extremal al lui C dc. nu există $x_1, x_2 \in C$, $x_1 \neq x_2$ a.î. x să se afle în int. segm. $[x_1, x_2]$. $\iff$ x e p. extremal $\iff$
$\nexists\, x_1, x_2 \in C$, $x_1 \neq x_2$, $\nexists\, \lambda \in [0,1]$ a.î.
$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

Def. Fie $x^1, x^2, \dots \in \mathbb{R}^n$, vectorii $x^1, \dots, x^p$ sunt liniar indep.
$\iff \forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ a.î. $\lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_p x^p = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1, \dots, \lambda_p = 0$

Ex: în $\mathbb{R}^3$ $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, sunt liniar indep.

$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Def: Vectorii $x^1, \dots, x^p$ form. o bază a unui subsp. liniar S din $\mathbb{R}^n \iff$
1) $x^1, \dots, x^p$ sunt lin. indep.
2) $x^1, \dots, x^p$ form. un sist. de gen. pt. S
$\forall x \in S\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ a.î.
$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$ (*)

Obs: Dacă $x_1, \dots, x_p$ formează bază $\Rightarrow$ scrierea (*) a oricărui $x \in S$ în fct. de $x_1, \dots, x_p$ este unică.

Fie sist $Ax=b$

$A^1, \dots, A^n$ - col. mat. A - vectori lin. indep. în $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \nexists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n$ nu toți nuli a.î. $\lambda_1 A^1 + \dots + \lambda_n A^n = 0$ (3)

Not. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$

$(3) \Leftrightarrow A\lambda = 0$

Obs: Sist. $Ax = b$ se scrie echivalent:

$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = b$

, unde $x = (x_1, \dots, x_n)$

Caracterizarea punctelor extremale ale poliedrului sol. admisibile

(1) $\inf (\sup)\ c^T x$ $\quad P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$

$Ax = b$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pp. $m \leq n$

$x \geq 0$

Teoremă: $x \in \mathbb{R}^n$ este pct. extremal al lui $P \Leftrightarrow$ coloanele mat. A coresp. comp. poz. ale lui x sunt lin. indep.

Dem: $\boxed{Ax = b \Leftrightarrow \bar{A}\bar{x} = b}$

Pres. $x = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)^T$

$x_1, \dots, x_p > 0$

Not. $\bar{x} = (x_1, \dots, x_p)$ și cu $\bar{A} = (A_1, \dots, A^p)$

" $\Rightarrow$ " pp. prin absurd că $A^1, \dots, A^p$ nu sunt lin. indep.

$\exists\ \bar{w} \in \mathbb{R}^p,\ \bar{w} \neq 0$ a.î. $\bar{A}\bar{w} = 0$

$(w_1 A^1 + \dots + w_p A^p) = 0$ și $w_1, \dots, w_p$ nu sunt toate nule

Fie $\bar{y_1} = \bar{x} + \delta\bar{w}$, $\bar{y_2} = \bar{x} - \delta\bar{w}$ cu δ ~~unic~~ mic

Fie $y_1 = \begin{pmatrix} \bar{y_1} \\ 0 \end{pmatrix}$

δ mic $\Rightarrow \bar{y_1}, \bar{y_2} \geq 0$

$y_2 = \begin{pmatrix} \bar{y_2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{A}\bar{y_1} = \underbrace{\bar{A}\bar{x}}_{b} + \underbrace{\delta\bar{A}\bar{w}}_{0} = b$

$y_1, y_2 \in P$

$y_1 \neq y_2$

$\bar{A}\bar{y_2} = \underbrace{\bar{A}\bar{x}}_{b} + \underbrace{\delta\bar{A}\bar{w}}_{0} = b$

și $x = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$

$\Rightarrow x$ nu e pct. ext.

"$\Leftarrow$" trivial

Punem cond. ca rang A - maxim

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \leq n$ și $A^1, \dots, A^m$ col. liniar indep. în acest caz $A_1, \dots, A^m$ form. baza B

- putem forma cel mult C_n^m baze cu col. mat. A

Ex. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

rang A = 2

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

B_1, B_3 - baze

pt. B_1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 = 5 - 2x_3 \end{cases}$ $B_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x_3 \\ 5 - 2x_2 \end{pmatrix}$

pt. B_2 $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 4 - x_1 \\ x_2 + 2x_3 = 5 - 2x_1 \end{cases}$ $B_3 \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x_1 \\ 5 - 2x_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B_1^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ - am făcut $x_3 = 0$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B_3^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $(x_1 = 0)$

Am obț. sol. de bază $x^{B_1} = \begin{pmatrix} B_1^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$

În plus $B_1^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$ $x^{B_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_3^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$B_3^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$

Def: x^B este sol. de bază coresp. bazei B dc. $x^B = (B^{-1}b, 0)$

Dacă în plus $B^{-1}b \geq 0$, x^B s.n. sol. admisibilă de bază coresp. bazei B.

Def: Dacă $B^{-1}b \geq 0$, baza B s.n. primal admisibilă pt. prob (1).

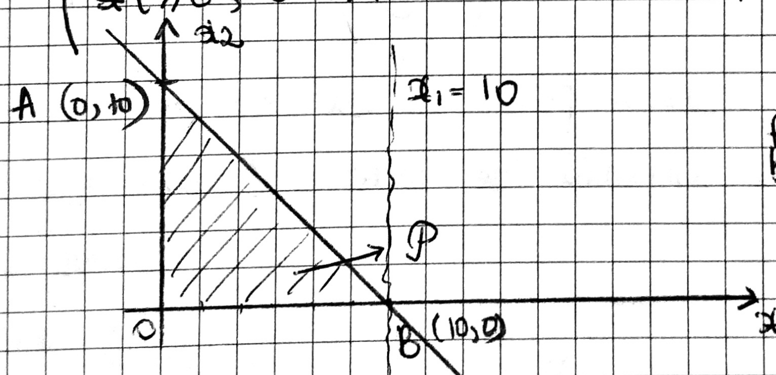
Cazul rang $A = m \leq n$

Corolar 1: $x \in P$ este p. extremal al lui $P \iff$ este sol. adm. de bază prob (1)

Corolar 2: P are cel mult C_n^m pct. extremale

Nedegenerarea și adiacența

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_4 = 10 \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,4} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



O (0,0)
A (10, 0)
B (0, 10)
în $\mathbb{R}^2$

în $\mathbb{R}^4$:

O (0, 0, 10, 10)

$\boxed{B(10, 0, 0, 0)}$ p extremal $\mathbb{R}^4$

A (0, 10, 0, 10)

O coresp. sol. de bază cu x_3, x_4 - var. de bază

A x_2, x_4 - — " —

B cu x_1, x_2 var de bază $\Rightarrow$

x_1, x_3 — " —

x_1, x_4 — " —

→ sunt 3 baze pt. că $x = (10, 0, 0, 0)$ este sol. degenerată

are $< m-2$ comp. nenule

Degenerare și adiacență

Ex: $P = \{x \in \mathbb{R}^7 \mid Ax = b, x \geq 0\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sol. de bază $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$

B - baza form cu col. mat. A

sol. admisibilă de bază $B^{-1} b \geq 0$ (în ac caz spunem că B este primal admisibilă)

în gen. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \leq n$ rang $A = m$

x - sol. de bază → nedegenerată ⟺ nr. comp. nenule $= m$

→ degenerată nr. comp. nen. $< m$

a) $B = (A^4, A^5, A^6, A^7) = I_4$

$x^1 = (0, 0, 0, \underbrace{8, 12, 4, 6}_{\geq 0})$ - sol admisibilă de bază

$B^{-1} \cdot b = I_4 \cdot b = b$

b) $B = (A^3, A^5, A^6, A^7)$

$B^{-1} \cdot b = (4, -12, 4, 6)$

$x^2 = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)$ - e sol.
- nu e sol. admis.

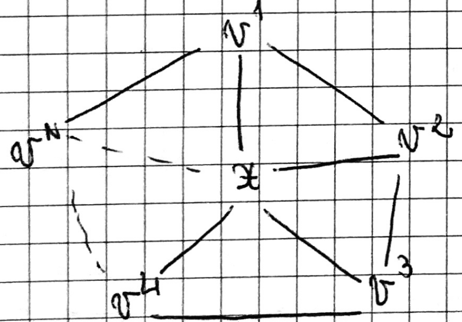
$x_5 = -12 < 0$

c) $B = (A^1, A^2, A^3, A^7)$

$x^3 = (4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)$ sol. degenerată x_2 = var de bază $= 0$

Def: x^1 și $x^2 \in P$ sunt sol. de bază adiacente dacă coresp unor baze care au în comun $m-1$ col. identice.

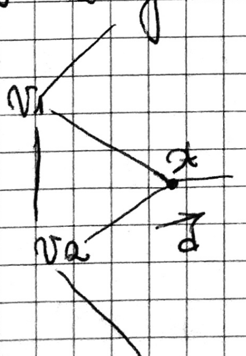
I. P - politop



$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^i$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$\lambda_i \geq 0, \forall i = \overline{1,n}$

II. P - nemărginit



$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^i + \alpha d$

Reprezentare unui poliedru

Fie $\{v^i : i \in I\}$ mt. pct. extremale ale poliedrului $\mathcal{P}$ unde I este finită. Atunci orice $x \in \mathcal{P}$ se scrie sub forma $x = \sum \lambda_i v^i + \alpha d$, unde $\lambda_i \geq 0 \ \forall i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ și $d = 0$ sau este dir. extremală.

Fie pr. (1) $\min z = c^T x$

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$

rang $A = m \leq n$

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

Teorema fundamentală a optimizării liniare

Pr. de opt. lin (1) are optim ∞ sau $\exists$ sol optime care sunt p. extremale ale poliedrului $\mathcal{P}$ (sunt sol. admisibile de bază ptr. pr. (1))

Căutăm sol. optime de forma $x = (B^{-1}b, 0)$

Dem: TF

$x \in \mathcal{P}$ se scrie $x = \sum \lambda_i v^i + \alpha d \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$

i) $c^T d < 0$

$$c^T x = c^T \Big(\sum_{i \in I} \lambda_i v^i\Big) + \alpha \underbrace{c^T d}_{<0} \xrightarrow{\alpha \to \infty} -\infty$$

ii) $c^T d \geq 0$

v^{min} p. de min $\{c^T v^i : i \in I\}$

$$c^T x = c^T \Big(\sum_{i \in I} \lambda_i v^i\Big) + \alpha c^T d \geq$$

$$\geq \sum_{i \in I} \lambda_i c^T v^{min} + \alpha c^T d$$

f obiectiv își atinge min în v^{min}

Metoda simplex

condiția — optim stopare a alg.
optim infinit

plecăm cu un pct. extremal oarecare $x \in P$
- căutăm p extremal adiacent $x + \alpha y^j$
a.î. $f(x + \alpha y^j) < f(x)$

Pt. găsirii unei baze primal admisibile init. $B^{-1} b \geq 0$
- Metoda celor 2 faze
- Metoda „Big M"

Ptr. examen: 1 pas alg. simplex
1 pr. cu param. în care să aplic cond de op

Condiția de optim

(1) $\inf c^T x$
$Ax = b, x \geq 0$ $\quad$ rang $A = m \leq n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

Fie B - baza primal admisibilă $B^{-1} b \geq 0$
x^* - sol admisibilă de bază coresp bazei B $\quad x^* = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$

x - sol admisibilă a pr. (1) $\quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix}$

$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad A = (B \ R)$

$Ax = b \iff (B \ R) \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix} = B x_B + R x_R = b$

$Ax = b \iff x_B = B^{-1} b - B^{-1} R x_R$

$x^* \to z^* = c^T x^*$ $\quad$ Dar $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_R \end{pmatrix}$ $\quad x^* = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$

$z^* = c_B^T B^{-1} b$ - val. fcției obiectiv coresp. sol. de bază $\begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$

$x \rightarrow z = c^T x$

$$z = \begin{pmatrix} c_B^T & c_R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix} = c_B^T x_B + c_R^T x_R$$

T. fund. a optim. liniare $\exists$ sol. optime de forma $\begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{z^* \leq z} \qquad c_B^T \cdot B^{-1} b \leq c_B^T x_B + c_R^T x_R$$

Dar $x_B = B^{-1} b - B^{-1} R x_R$

Atunci $z^* \leq z \iff c_B^T B^{-1} b \leq c_B^T (B^{-1} b - B^{-1} R x_R) +$

$+ c_R^T x_R$

$\cancel{c_B^T B^{-1} b} \leq \cancel{c_B^T B^{-1} b} - c_B^T B^{-1} R x_R +$

$+ c_R^T x_R$

$(c_R^T - c_B^T B^{-1} R) x_R \geq 0$

$x_R \geq 0$ c. optim $\boxed{c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0}$

$R = (A^j)_{j \in \mathcal{R}}$,

$\mathcal{R}$ - indicii col. nebazice

$\boxed{\forall j \in \mathcal{R}} \quad \underbrace{c_j - c_B^T B^{-1} A^j}_{r_j} \geq 0$

Teorema 1: (condiția de optim)

Fie B o bază primal admisibilă a pr. 1 $(B^{-1} b \geq 0)$

Dacă $c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0 \Rightarrow$ soluție de bază $\begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$,
$(r_j \geq 0, \forall j \in \mathcal{R})$

coresp. bazei B este optimă

Ex Aflați α și β a.î. urm. pr. de prog. lin are sol. optime cu var de bază x_1 și x_4.

$$\min \; x_1 + \beta x_2 - x_3 - x_4$$

$$x_1 + \beta x_3 + x_4 = 4 + \alpha$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 2 + 2\alpha$$

$$x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,4}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad c = (1 \;\; \beta \;\; -1 \;\; -1)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4+\alpha \\ 2+2\alpha \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad x_R = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c_R = \begin{pmatrix} \beta \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} B^{-1} b \geq 0 & (A) \\ c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0 & (B) \end{cases}$$

(A): $B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+\alpha \\ 2+2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\alpha-2-2\alpha \\ 2+2\alpha \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 2+2\alpha \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2-\alpha \geq 0 \\ 2+2\alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \alpha \leq 2 \\ \alpha \geq -1 \end{matrix} \Rightarrow \alpha \in [-1, 2]$$

sol. de bază $x = \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 2+2\alpha \end{pmatrix}$ sol. de bază coresp. bazei B e admis.

(B): $(\beta \;\; -1) - (1 \;\; -1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (\beta \;\; -1) - (1 \;\; -2)\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= (\beta \;\; -1) - (-2 \;\; \beta-2) = (\beta+2 \;\; -\beta+1) \geq (0 \;\; 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta + 2 \geq 0 \\ -\beta + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta \geq -2 \\ \beta \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta \in [-2, 1]$$

11. Martie 2019

Curs 4 - Metoda Simplex

$\inf c^T x$

(1) $\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$

$\text{rang } A = m$

cond. de optim:

$A = (B \ R)$ $\qquad x_B = (B^{-1} b, \ 0)$ → (vector de 0)

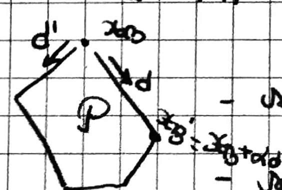
x_B - sol. opt. pt (1) $\Leftrightarrow c_j - c_B^T B^{-1} A^j \geq 0$, $\forall j \in R$

$\mathcal{B} = \{ i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid A \text{ face parte din bază} \}$

Mt. indicilor bazici. $\mathcal{R} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$

Obs: $c_i - c_B^T B^{-1} A^i = 0$ $\quad i \in \mathcal{B}$

c_i $\quad i \in \{1, \dots, n\}$ s.n. costuri reduse



- sol admis. de bază adiacentă vf. corresp. lui x_B
- sol. coresp. unei baze B' care are în comun cu B $m-1$ coloane

Vrem să înlocuim col. i a lui B cu col j, $j \in \mathcal{R}$ și să obținem B'.

Cum alegem $i \in \mathcal{B}$ și $j \in \mathcal{R}$?

- căutăm $x_{B'} = ((B')^{-1} b, 0)$ de forma $x_{B'} = x_B + \alpha d$, unde $\alpha \geq 0$, d - direcția de translație pe o muchie a lui $\mathcal{P}$ a.î. $x'_{B'} \in \mathcal{P}$

Obs: $A = (B \quad R)$

$\qquad\quad B^{-1}b \qquad 0$