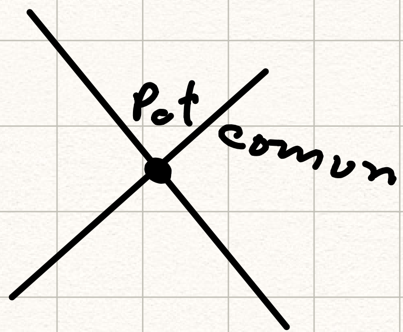
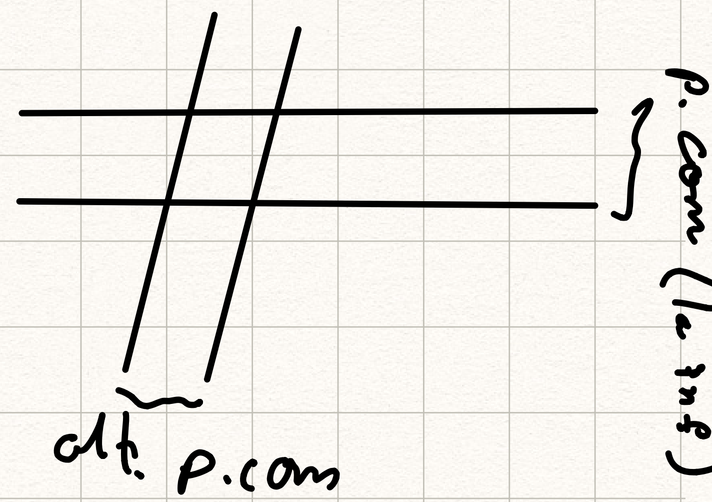
Geometrie proiectivă plană

Construcția 1 Geometric





$\Rightarrow$ **dreapta la infinit**

Planul geometric ($\mathbb{R}^2$) $\cup$ dr de la infinit $\Rightarrow$ planul proiectiv real notat cu $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$

$\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ dreapta proiectivă reală

$\simeq$

S^1

$\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ dr. proiectivă complexă

$\simeq$

S^2

Constructia 2 Algebrică

$\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ poate fi descris algebric, folosind coordonate omogene

$\mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$: definim relația "$\sim$" prin $(x_1, x_2, x_0) \sim (y_1, y_2, y_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha \neq 0$ a.î. $(y_1, y_2, y_0) = \alpha (x_1, x_2, x_0)$

Obs "$\sim$" este o rel de echivalență

Not: Clasa de echivalență a unui el. (x_1, x_2, x_0) se not. $[x_1 : x_2 : x_0]$

Exp $[1:2:5] = [-2:-4:-10] =$
$= [3:6:15] \neq [5:2:1]$

Terminologie Pt. $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\sim$ clasa de echivalență $\xi = [x_1 : x_2 : x_0]$, (x_1, x_2, x_0) s.n. coordonatele omogene ale lui ξ

Obs Coordonatele omogene sunt

unice până la înmulțirea cu un scalar nenul

Ce legătură există între cele 2 construcții?

$\mathbb{P}^2\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \cup$ (dreapta la infinit)

– Avem o aplicație injectivă naturală

$$i : \mathbb{R}^2 \to \{[x_1:x_2:x_0] \mid (x_1,x_2,x_0)\neq(0,0,0)\}$$

definită de

$$(x_1,x_2)\to[x_1:x_2:1]$$

Fie (x_1,x_2) și (y_1,y_2) a.î.

$i(x_1,x_2)=i(y_1,y_2) \Rightarrow [x_1:x_2:1]=[y_1:y_2:1]$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha\neq 0 \text{ a.î. } \left.\begin{cases} x_1=\alpha y_1 \\ x_2=\alpha y_2 \\ 1=\alpha\cdot 1 \Rightarrow \alpha=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=y_1 \\ x_2=y_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x_1,x_2)=(y_1,y_2) \Rightarrow i$ injectivă

– Fie $[\delta]$ pct de la infinit al unei drepte δ (de fapt $[\delta]$ este clasa (de fapt ...) este clasa de echivalență a lui Δ, mod relația de paralelism $\equiv$ direcție)

Alegem (v_1, v_2) vector dir al lui Δ

- ! nu este unic
- ! vector director și pentru o altă dreaptă paralelă cu Δ

$$(v_1, v_2) \longrightarrow [v_1 : v_2 : 0]$$

Obs i) $\overline{v_1 v_2}$ vector director $\Rightarrow (v_1, v_2) \neq (0,0)$

$\Rightarrow [v_1 : v_2 : 0]$ are sens

ii) Def. este coerentă

$\Leftrightarrow$ și $(\lambda v_1, \lambda v_2)$ $(\lambda \neq 0)$ este vector director al lui Δ și avem

$$[\lambda v_1 : \lambda v_2 : 0] = [v_1 : v_2 : 0]$$

iii) Se dem că asoc este inj.

Concluzie

puncte reale $x_0 \neq 0$

$\mathbb{P}^2\mathbb{R}$

$[x_1 : x_2 : 0] = \left[\frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : 1\right]$

(pct. real)

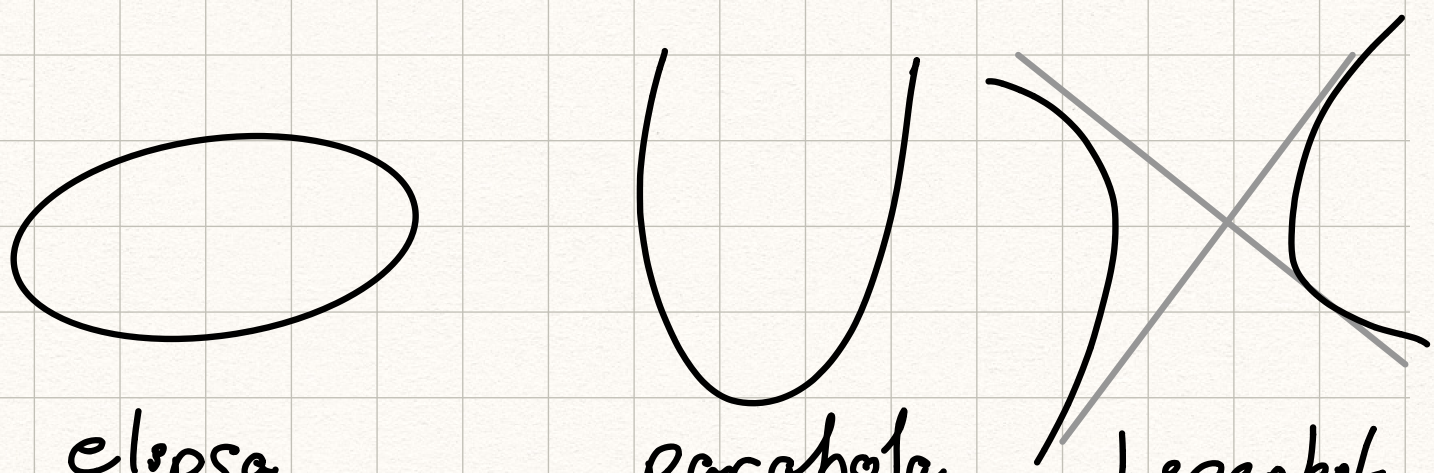
puncte la infinit: $x_0 = 0$

ec. dr. la infinit

Exp (cod sursă 05_01)

$[100:100:0,5] = \left[\frac{100}{0,5} : \frac{100}{0,5} : 1\right] = [200:200:1]$

Omogenizarea ecuațiilor unor locuri geometrice



elipsa parabola hiperbola

Var. algebrice

Principiu: oricărui loc geometric din $\mathbb{R}^2$ descris printr-o ec. polinomială îi coresp. unui loc. geometric din $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ descris printr-o ecuație ce se obține „omogenizând" ec. inițială

Exp

i) $x_1^2+x_2^2-1=0$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{X_1}{X_0} \\ x_2 = \dfrac{X_2}{X_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{X_1^2}{X_0^2}+\frac{X_2^2}{X_0^2}-1=0 \Rightarrow X_1^2+X_2^2-X_0^2=0$$

↳ Polinom omogen de gr. 2

Intersecția cu dr. la infinit

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} X_1^2+X_2^2-X_0^2=0 \\ X_0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1=0 \\ X_2=0 \end{array} \\ \text{dar } (X_1,X_2,X_0)\neq(0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Intersecția este $\emptyset$

ii) hiperbola

$$x_1^2-x_2^2-1=0 \xrightarrow{\text{omogenizare}} X_1^2-X_2^2-X_0^2=0$$

Intersecția cu dreapta de la infinit

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = t \,;\ t \neq 0 \\ x_1 = -x_2 = t \,;\ t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [t : t : 0] = [1 : 1 ; 0] \\ [t : -t : 0] = [1 : -1 : 0] \end{cases}$$

2 pct la inf

iii) Parabolă (exercițiu)

iv) $\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{omogenizare}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1 x_0 = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_2 x_0 = 0 \end{cases}$$

Matriceal $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicație afină

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Cum se descrie această aplicație în coordonate omogene?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 x_0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

omogenizare

nu se schimbă dr de la inf.

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

mat 3×3 asoc. lui φ

Obs În cazul 3D, se obține o rep. asemănătoare