Analiza II - Teoreme demonstrate

Curs - P. Ilias, Latex - Chris Luntraru

June 6, 2018

1 Spatii liniare normate

Teorema 1.1. Orice spatiu liniar normat $(X, || \ ||)$ este spatiu metric.

2 Functii derivabile

Teorema 2.1. Orice functie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, || \ ||_X)$ derivabila intr-un punct $x_0 \in D \cap D'$ este continua in x_0.

3 Functii derivabile reale

Teorema 3.1 (Teorema lui Fermat)**.** Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie si $x_0 \in D^{\mathrm{O}}$ astfel incat x_0 este punct de extrem local pentru f si f este derivabila in punctul x_0. Atunci $f'(x_0) = 0$.

Teorema 3.2 (Teorema lui Rolle)**.** Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b) si $f(a) = f(b)$. Exista $c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = 0$.

Teorema 3.3 (Teorema lui Lagrange)**.** Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b). Exista un element $c \in (a, b)$ astfel incat $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Teorema 3.4 (Teorema lui Darboux)**.** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila pe I. Atunci $f' : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

4 Functii diferentiabile

Teorema 4.1. Orice functie $f : D \subseteq (X, || \ ||_X) \to (Y, || \ ||_Y)$ diferentiabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$ este continua in x_0.

5 Functii integrabile Riemann

Teorema 5.1. Orice functie monotona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a, b]$.

Teorema 5.2. Orice functie continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a, b]$.

Teorema 5.3 (Formula Leibniz-Newton)**.** Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann pe $[a, b]$ care admite primitive pe $[a, b]$. Atunci $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, unde $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o primitiva a lui f.