Analiză

-Teorie-

Mulțimi, Relații, Funcții

Def (funcție)

S.n. funcție de la X la Y o relație binară f de la X la Y dacă $\forall x \in X$, $\exists! \; y \in Y$ a.î. xfy.

Def (familie de el.)

Fie X o mulț nevidă. S.n. familie de elemente din X orice fct $f: I \to X$, unde $I \neq \emptyset$. I s.n. mulț indicilor fam de el..

Th.1 (Legile lui de Morgan)

Fie X mulțime și $(A_i)_{i\in I}$ o fam de părți de mulț X. Avem

a) $C_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_X A_i$

b) $C_X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_X A_i$

Def (fct identică)

S.n fct identică a mulț nevide X fct $1_X : X \to X$; $1_X(x) = x, \forall x \in X$

Def. (rel de ordine)

S.n. relație de ordine pe o mulț nevidă X o rel binară $R \subseteq X \times X$ care este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

Def (minim / maxim)

O mulț X are minim dacă are cel puțin un minorant $a \in X$.

Def (total ord / bine ord / complet ord)

a) Mult ord $(X; \leq)$ s.n. total ordonată dacă orice 2 el se pot compara. $\rightarrow \forall x, y \in X \Rightarrow (x \leq y \vee y \leq x)$

b) Mult ord $(X; \leq)$ s.n. bine ordonată dacă orice submult nevidă a ei admite minim.

c) Mult ord $(X, \leq)$ s.n. complet ordonată dacă orice submult mărginită a lui X admite supremum și infimum în X.

Th 2 (Densitate a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$)

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{Q}$ a.î. $a < p < b$

Spații Topologice

Def (Topologie)

Fie $X \neq \emptyset$. O fam. de submult a ~~lui~~ mult X notată $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ s.n. topologie pe X dacă

$$\begin{cases} \bullet\ \emptyset, X \in \tau \\ \bullet\ G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau \\ \bullet\ G_i \in \tau;\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau \end{cases}$$

Def (Sp. topologic)

S.n. spațiu topologic o mult X pe care se def cel puțin o topologie. $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$

obs orice ~~X~~ nevid se pot def cel puțin 2 topologii

$$\begin{cases} \tau_1 = \{X, \emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(X) \\ \tau_2 = \mathcal{P}(X) \end{cases}$$

*Def (Mult ~~închise~~ deschisă, închisă, vecinătate)

a) $G \subseteq X$ s.n. deschisă relativ la topologia τ dacă $G \in \tau$

b) $F \subseteq X$ s.n. închisă dacă $C_X F \in \tau$

c) $V \subseteq X$ s.n. vecinătate pt elementul $x \in X$ dacă $\exists G \in \tau$ a.î. $x \in G \subseteq V$

obs

$$\left.\begin{matrix} x \in G \\ G \in \tau \end{matrix}\right\} \Rightarrow G \in \mathcal{V}_\tau(x)$$

Th 3 (Prop mulț închise)

Fie (X, τ) sp. topologic

a) $\emptyset, X$ sunt închise

b) $F_1, F_2 \subseteq X$ închise $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ închisă

c) $F_i \subseteq X$ închisă ; $\forall i \in I$, atunci $\bigcap_{i \in I} F_i$ este închisă

Th 4 (Prop vecinătăți)

Fie (X, τ) sp. topologic, $x \in X$

a) $\left.\begin{matrix} V \in \mathcal{V}_\tau(x) \\ V \subseteq W \end{matrix}\right\} \Rightarrow W \in \mathcal{V}_\tau(x)$

b) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_\tau(x) \Rightarrow \begin{cases} V_1 \cup V_2 \in \mathcal{V}_\tau(x) \\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_\tau(x) \end{cases}$

obs

1) $V_i \in \mathcal{V}_\tau(x)$; $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}_\tau(x)$

2) $V_n(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$

$V_n \in \mathcal{V}_\tau(0)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\} \notin \mathcal{V}_\tau(0)$

Def (Pct interior/de aderență/de acum/izolat)

Fie (X, τ) un sp. topologic și $A \subseteq X$

a) $a \in X$ s.n. punct interior al mt A dacă $A \in \mathcal{V}_\tau(a)$

b) $a \in X$ s.n. pct. de aderență al mt A dacă $\forall V \in \mathcal{V}_\tau(a)$ avem $V \cap A \neq \emptyset$

c) $a \in X$ s.n. pct de acumulare al mt A dacă $\forall V \in \mathcal{V}_\tau(a)$ avem $V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

d) $a \in X$ s.n. pct izolat al mt A dacă $\exists V \in \mathcal{V}_\tau(a)$ a.î. $V \cap A = \{a\}$

Not: $\mathring{A}$ = interiorul lui A

$\bar{A}$ = aderența (închiderea) lui A

A' = mt pct de acum ale lui A

$\text{Izo}\,A$ = mt p. izo. A.

Def (Sp. top separat)

Un sp. topologic (X, τ) s.n. separat dacă $\forall x, y \in X$ cu $x \neq y$, $\exists V \in \mathcal{V}_\tau(x)$; $\exists W \in \mathcal{V}_\tau(y)$ a.î. $V \cap W = \emptyset$

Def (bază de vecinătăți)

Într-un sp. topologic (X, τ) o subm $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}_\tau(x)$ cu $x \in X$ s.n. bază de vecinătăți a lui x dacă $\forall V \in \mathcal{V}_\tau(x)$, $\exists B \in \mathcal{B}$ a.î. $B \subseteq V$

Th5 (Prop $\mathring{A}$)

Fie (X, τ) sp. top. Avem

a) $\mathring{A} \subseteq A$; $\forall A \subseteq X$

b) $\left.\begin{matrix} G \in \tau \\ G \subseteq A \end{matrix}\right\} \Rightarrow G \subseteq \mathring{A}$ | $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{G \in \tau \\ G \subseteq A}} G$ ($\mathring{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în A)

c) $A \in \tau \Leftrightarrow A = \mathring{A}$ (Pt că $\mathring{A} \in \tau$)

d) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$

e) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

f) $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$

Th. 6 (Prop $\overline{A}$)

(X, τ) sp. top. Avem:

a) $A \subseteq \overline{A}$; $\forall A \subseteq X$

b) $\left.\begin{array}{l} A \subseteq F \\ F \text{ închisă} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} \subseteq F$ | $\overline{A} = \bigcap_{\substack{C F \in \tau \\ A \subseteq F}} F$ ($\overline{A}$ e cea mai mică mulț. închisă care conț. A)

c) A închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A}$ (pt că $\overline{A}$ închisă)

d) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

e) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$; $\forall A, B \subseteq X$

f) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$; $\forall A, B \subseteq X$.

Th. 7 (Prop A')

(X, τ) sp. top. Avem:

a) $\overline{A} = A \cup A'$

b) $A' \subseteq \overline{A}$

A închisă $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

c) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

d) $A' \cup B' = (A \cup B)'$; $\forall A, B \subseteq X$

e) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$; $\forall A, B \subseteq X$

Th 8 (Prop Izo A)

(X, τ) sp. top.

$\forall A \subseteq X$, avem Izo $A \subseteq A \setminus A'$

Th 9

În (X, τ) avem: $\overline{C_X A} = C_X \mathring{A}$; $\forall A \subseteq X$

$\overset{\circ}{\widehat{C_X A}} = C_X \overline{A}$; $\forall A \subseteq X$

Def (Pct frontier)

$(X, \mathcal{T})$ sp. top. și $A \subseteq X$, $x \in X$ s.n. pct frontier al mult. A dacă x este pct. de aderență pt A și $C_X A$.

Not: $Fr\, A$ = frontiera topologică a lui A

$$Fr\, A = \overline{A} \cap \overline{C_X A}$$

obs

$$Fr\, A = \cancel{\overline{A} \cap C} \; \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

$\boxed{\text{Spații metrice}}$

Def (distanță / metrică)

s.n distanță pe o mult nevidă X o fct $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ce are prop.

a) $d(x,y) = d(y,x)$; $\forall\, x, y \in X$

b) $d(x,y) \geq 0$; $\forall\, x, y \in X$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$; $\forall\, x, y, z \in X$

Def (sp. metric)

s.n. sp. metric o mult nevidă X pe care se def cel puțin o distanță d.

Def (bilă deschisă / închisă)

Fie (X, d) sp. metric, $a \in X$, $r > 0$ s.n. bilă deschisă de centru a și rază r mulțimea ~~EX~~ $B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$

— " — închisă — " — $B[a,r] = \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$

Distanțe pe $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$; $n \geq 2$

$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$d((a_1, a_2, \dots a_n)), (b_1, b_2, \dots, b_n)) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + \dots + (b_n-a_n)^2}$

↳ dist uzuală

$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$d_1((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = |b_1-a_1| + |b_2-a_2| + \dots + |b_n-a_n|$

dist pe $\mathbb{R}^n$

$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$d_\infty((a_1 \dots a_n), (b_1 \dots b_n)) = \max\{|b_1-a_1|, |b_2-a_2|, \dots |b_n-a_n|\}$ dist pe $\mathbb{R}^n$

Th.10

Orice sp. metric este și sp. topologic

Def (τ_d)

a) τ_d s.n. topologia generată de dist. d

b) $G \subseteq (X, d)$ s.n deschisă dacă $G \in \tau_d$

c) $F \subseteq (X, d)$ s.n. închisă dacă $\complement F \in \tau_d$

Th 11

a) Orice bilă desch. $B(x, r)$ este mulț deschisă

b) Orice bilă închisă $B[x, r]$ este mulț închisă

c) (X, τ_d) este sp. top. separat

Th 12

(X,d) sp. metric și $A\subseteq X$

a) $x\in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists r>0$ a.î. $B(x,r)\subseteq A$

b) $x\in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r>0$, avem $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$

c) $x\in A' \Leftrightarrow \forall r>0$ avem $B(x,r)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$

d) $x\in \mathrm{Izo}\,A \Leftrightarrow \exists r>0$ a.î. $B(x,r)\cap A=\{x\}$

Def (subșir)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din (X,d). S.n. subșir al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, șirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ unde $n_k<n_{k+1}$; $\forall k\in\mathbb{N}$

Def (convergență)

Spunem că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) este convergent dacă $\exists l\in X$ cu prop că $\forall \varepsilon>0$; $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $d(x_n,l)<\varepsilon$; $\forall n\geq n_\varepsilon$

|SAU|

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă $\exists l\in X$ cu prop. că $\forall V\in \mathcal{V}_{\tau_d}(l)$, $\exists n_V\in\mathbb{N}$ a.î. $x_n\in V$, $\forall n\geq n_V$

Def (mărginire)

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) s.n. mărginit dacă $\exists a\in X$, $\exists r>0$ a.î. $x_n\in B(a,r)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Def (pct limită)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din (X,d). Elem $a\in X$ s.n. punct limită al șirului x_n dacă $\exists$ $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subșir al acestui șir a.î. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=a$

Def (Șir Cauchy)

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) s.n. șir Cauchy (fundamental) dacă $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $d(x_n,x_m)<\varepsilon;\ \forall n,m\geq n_\varepsilon$

Th 13

Orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent din (X,d) este șir Cauchy

Def (Sp. metric complet)

S.n. ~~spațiu metric~~ complet un sp. metric (X,d) în care orice șir Cauchy este convergent

Th 14

Orice șir Cauchy din (X,d) este mărginit.

Th 15

Orice șir Cauchy din (X,d) ce are cel puțin un punct limită în X este șir convergent

Corolar

Orice șir convergent din (X,d) este mărginit

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c\in(0,1)$

~~Th 16~~

~~Orice șir convergent [illegible]~~

Th. 16

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir din $\mathbb{R}^k$, $x_n=(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, \dots, x_{kn})$

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este mărginit $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (x_{1n})_{n\in\mathbb{N}} \dots (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sunt şiruri} \\ \text{mărginite din } \mathbb{R} \end{cases}$

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este Cauchy $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (x_{1n})_{n\in\mathbb{N}} \dots (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sunt şiruri Cauchy} \\ \text{din } \mathbb{R} \end{cases}$

c) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (x_{1n})_{n\in\mathbb{N}} \dots (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sunt convergente} \\ \text{în } \mathbb{R} \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_{1n}, \lim_{n\to\infty} x_{2n}, \dots, \lim_{n\to\infty} x_{kn}\right)$$

Def (şir crescător/descrescător)

a) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ se numeşte crescător dacă $x_{n+1}\geq x_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$.
strict dacă $x_{n+1}>x_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ se numeşte descrescător dacă $x_{n+1}\leq x_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$
strict dacă $x_{n+1}<x_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

c) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte monoton strict dacă este crescător strict sau descrescător strict

Def (limita unui şir $=\pm\infty$)

a) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $x_n>\varepsilon$; $\forall n\geq n_\varepsilon$

b) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $x_n<\varepsilon$; $\forall n\geq n_\varepsilon$

c) Spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită dacă $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in\overline{\mathbb{R}}$

Lema lui Cesaro

Din orice șir mărginit de numere reale se poate extrage cel puțin un șir convergent.

Def. echiv.

Orice șir mărginit din $\mathbb{R}$ are cel puțin un punct limită în $\mathbb{R}$

Criteriul lui Cauchy pt șiruri de nr. reale

Un șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir Cauchy $\Leftrightarrow$ este șir convergent

Def echiv

$\mathbb{R}$ este spațiu metric complet.

Corolar

$\mathbb{R}^k$ este sp. metric complet

Th. Weierstrass

Orice șir monoton și mărginit din $\mathbb{R}$ este convergent

Lema Stolz - Cesaro $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ cu urmat. prop

a) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ str $\nearrow$

sau

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ str $\searrow$

b) ~~$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ și~~ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

Lema Stolz-Cesaro ($\frac{0}{0}$)

Se cons şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ cu urmat. prop.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este str. monoton

c) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

Crit. rap pt şiruri cu term. str. pozitivi

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}_+^*$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l<1$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Dacă $l>1$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Crit rad pt şiruri cu term str. pozitivi

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}_+^*$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. At. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

Def (pct limită)

Spunem că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct limită al unui şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$

Not. $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{def}{=} \{l \in \overline{\mathbb{R}} \mid l$ punct limită al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$

Lema lui Cesaro (generalizare)

Din orice șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se poate extrage un subșir care are limita în $\overline{\mathbb{R}}$

Def echiv

Orice șir de nr. reale are cel puțin un punct limită.

Limit

Def. (Lim sup, lim inf)

- S.n. limită superioară a unui șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numărul

$\inf_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \in \overline{\mathbb{R}}$, unde $u_n = \sup_{k\geq n} x_k = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \in \overline{\mathbb{R}}$

- S.n. limită inferioară a unui șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numărul

$\sup_{n\in\mathbb{N}}(v_n) \in \overline{\mathbb{R}}$, unde $v_n = \inf_{k\geq n} x_k = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \in \overline{\mathbb{R}}$

Th. 17

Pt orice șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt adev. următ. egalități

$\overline{\lim} x_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\underline{\lim} x_n = \inf_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

Th 18

a) Un șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită $\Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$. Atunci,

$\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$.

b) Un șir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior $\Leftrightarrow \overline{\lim} x_n \in \mathbb{R}$

c) Un șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit inferior $\Leftrightarrow \underline{\lim} x_n \in \mathbb{R}$

d) Un șir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit $\Leftrightarrow \underline{\lim} x_n \in \mathbb{R}$ și $\overline{\lim} x_n \in \mathbb{R}$

Def (serie de nr reale)

Perechea de șiruri de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește <u>seria de nr. reale</u> asociată șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și se not $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

x_n s.n. termenul general de rang n al seriei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

S_n s.n. suma parțială de rang n a seriei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

Def (serie conv / div / suma seriei / abs conv)

a) Seria de nr. reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ s.n. <u>convergentă</u> dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent. În acest caz, $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ s.n. <u>suma seriei</u> $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

b) Seria de nr. reale $\sum_{0}^{+\infty} x_n$ s.n. <u>divergentă</u> dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

c) Seria de nr. reale are sumă în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită. În acest caz, $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$

d) Seria de nr. reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ s.n. <u>absolut convergentă</u> dacă seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ este convergentă

Th 19

Dacă seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Exp de serii remarcabile

1. Seria armonică: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ — conv dacă $\alpha > 1$; div dacă $\alpha \le 1$
2. Seria putere: $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$ — abs conv dacă $|a| < 1$; div dacă $|a| \ge 1$
3. Seria exponențială: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ — abs. conv. $\forall a \in \mathbb{R}$ și are suma e^a

Crt. Cauchy pt serii de nr. reale

a) Seria de nr ~~..~~ reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă (=)

(=) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon$; $\forall n \geq n_\varepsilon$; $\forall p \in \mathbb{N}$

b) Seria de nr. reale este abs. conv (=)

(=) $\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n| + |x_{n+1}| + \ldots |x_{n+p}| < \varepsilon$; $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$

Th 20

Orice serie de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut convergentă este convergentă

Def (serie semiconv./alternată)

a) Seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este semiconvergentă dacă este o serie convergentă care nu este absolut convergentă

b) Seria de nr. reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este alternată dacă $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $x_n \cdot x_{n+1} < 0$

~~Crt. Raabe - Duhamel~~

Crt Leibniz

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+$ a.î. $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = 0$. At. seriile alternate de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ sunt convergente

Crt Abel

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri din $\mathbb{R}$ care vf următ. ipoteze

a) $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

b) $\exists M > 0$ a.î. $|b_0 + b_1 + \ldots + b_n| < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Atunci seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ este conv.

Crt Dirichlet

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri din $\mathbb{R}$ care verif următ. ipot:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton şi mărginit

b) Seria de nr. reale $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ este conv.

Atunci seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ este conv.

Prop. seriei cu term. poz.

Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi

1. Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este abs. conv $\Leftrightarrow$ este conv.

2. Şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir crescător din $\mathbb{R}_+$

3. Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este conv. $\Leftrightarrow$ şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

4. Orice serie de nr. reale pozitive $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este fie conv, fie div cu suma $+\infty$

Crt rap. pt serii cu term. poz

Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ o serie cu term. poz. a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l<1$, seria este conv.

Dacă $l>1$, seria este div.

Crt. rad. pt serii cu term poz

Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ o serie cu term poz. a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l<1$ seria este conv.

Dacă $l>1$ seria este div.

Crit Raabe-Duhamel

Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ o serie de nr reale pozitive a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l<1$, seria este div.

Dacă $l>1$, seria este conv.

Crit condensare al lui Cauchy

Fie $(x_n)_n$ un șir din $\mathbb{R}_+$ a.î. $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ și $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Atunci seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură

Crit comparare cu inegalități

Se cons 2 serii de nr. ~~nat~~ reale pozitive $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ a.î.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ pt care $y_n \geq x_n, \forall n \geq n_0$

Dacă $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Dacă $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este divergentă

Crit. comp cu limite

Se cons 2 serii cu term poz a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Dacă $l \in (0,\infty)$, seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ au aceeași natură

Dacă $l=0$ și seria $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este conv. atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este conv.

Dacă $l=\infty$ și seria $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este div, at. $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este div.

~~Def (Produsul a 2 serii)~~

~~Def (Seria produs)~~

~~S.n seria produs~~

Def (seria produs)

S.n. <u>seria produs</u> pt seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ seria de nr. reale $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, unde $z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \dots + x_n y_0$

$$= \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} \quad (\forall) n \in \mathbb{N}$$

Th lui Cauchy

Dacă seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ sunt abs. conv., atunci seria produs $\sum_{n=0}^{+\infty}$ este abs. conv. În plus $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right)$

Th. Mertens

Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ convergentă și seria $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ absolut convergentă, atunci seria produs $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ este convergentă. În plus $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right)$

Mulțimi compacte și conexe

Def. (mulț compactă)

O mulțime $K \subseteq (X, \tau)$ s.n. <u>compactă</u> dacă din orice acoperire cu mulțimi deschise a mulțimii K se poate extrage o subacoperire finită.

Dem.: ~~Fie (X,τ) un sp. top. separat și $K \subseteq X$ o mult compactă~~

$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \\ G_i \in \tau, \forall i \in I \end{array}\right\} \Rightarrow \exists i_1, i_2, \dots, i_p \in I \text{ a.î. } K \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_p}$$

Th 21

Fie (X, τ) un sp. topologic separat și $K \subseteq X$ o mulț. compactă. Sunt adev. următoarele afirmații:

a) K este mulț. închisă

b) Dacă $F \subseteq K$ este o mulțime închisă, atunci F este compactă.

Th 22

O mulțime $K \subseteq (X, d)$ este compactă $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din K, $\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ un subșir convergent al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a.î. $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in K$

Def (mulțime mărginită)

~~Th. Heine-Borel~~

O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ s.n. mărginită dacă $\exists a \in \mathbb{R}^n$, $\exists r > 0$ a.î. $A \subseteq B(a, r)$

Th. Heine-Borel

O mulț $K \subseteq \mathbb{R}^n$ este compactă $\Leftrightarrow$ K este mulț închisă și mărginită

Def (mulț neconexă / conexă)

a) O mulț $A \subseteq (X, \tau)$ s.n. neconexă dacă $\exists G_1, G_2 \in \tau$ a.î.

1) $G_1 \cap A \neq \emptyset$, $G_2 \cap A \neq \emptyset$

2) $(G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \emptyset$

3) $(G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A) = A$

b) O mulț $A \subseteq (X, \tau)$ s.n. conexă dacă nu este neconexă.

Def (interval)

O mulțime $I \subseteq \mathbb{R}$ se numește interval dacă $\forall x, y \in I$ cu $x \leq y$ și $\forall z \in \mathbb{R}$ cu $x \leq z \leq y$, $z \in I$

Th. caract. mult conexe din $\mathbb{R}$

O mult $I \subseteq \mathbb{R}$ este conexă (=) $I = \emptyset$ sau 1 interval.

Funcții cont în sp. metrice

Def (fct cont într-un punct)

O funcție $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ s.n continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă $\forall W \in \mathcal{V}_{\tau_{d_2}}(f(x_0))$, $\exists V \in \mathcal{V}_{\tau_{d_1}}(x_0)$ a.î. $f(V \cap D) \subseteq W$

Def (fct cont pe o mulțime)

O funcție $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este cont pe mult $A \subseteq D$ dacă f este cont în orice pct $x_0 \in A$

Def echival (fct cont într-un punct)

a) Funcția $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este cont în pct. $x_0 \in D$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in D$ cu $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

b) Fct. $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este cont în pct $x_0 \in D$ dacă $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din D cu $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Th. 23

Fie $D \subseteq (X, d_1)$ și $x_0 \in \text{Izo}\, D$. Orice funcție $f: D \to (Y, d_2)$ este cont în $x_0 \in D$.

Th 24 (Prop fct cont)

Fie $f: (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o fct cont pe X. Sunt adv. următoarele prop.:

a) $\forall G \in \tau_{d_2} \Rightarrow f^{-1}(G) \in \tau_{d_1}$

b) $\forall F \subseteq Y$ închisă $\Rightarrow f^{-1}(F) \subseteq X$ mult închisă

c) $\forall K \subseteq X$ mult compactă $\Rightarrow f(K) \subseteq Y$ mult compactă

d) $\forall A \subseteq X$ mult conexă $\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ mult conexă.

25

Fie $K \subseteq (X, d_1)$ o mulț compactă. Orice fcț continuă $f: K \to \mathbb{R}$ este mărginită și își atinge marginile.

Def (Prop. Darboux)

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. O funcție $f: I \to \mathbb{R}$ are prop Darboux dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 \neq x_2$ și $\lambda \in \mathbb{R}$ situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, $\exists c \in I$ situat între x_1 și x_2 a.î. $f(c) = \lambda$.

obs

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o fcț cu prop lui Darboux

a) Dacă $\exists a, b \in I$ a.î. $f(a) f(b) < 0$, $\exists c \in I$ situat între a și b a.î. $f(c) = 0$

b) Dacă $f(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, fcț f are semn constant pe I

Th. 26

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Orice fcț cont. $f: I \to \mathbb{R}$ are Prop Darboux

Th 27

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o fcț continuă și injectivă. Atunci f este strict monotonă.

Def (fcț uniform cont)

O funcție $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numește uniform continuă pe mulțimea D dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$; $\forall x, y \in D$, cu $d_1(x, y) < \delta_\varepsilon$

obs

$f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ unif cont pe $D \Rightarrow f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ cont pe D

Th 28

O funcție $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este uniform continuă pe $D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri din D cu $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$, avem

$\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0$

Corolar

O funcție $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ nu este uniform cont.

pe $D \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri din D a.î.

$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$ și $\nexists \lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) \neq 0$

Def (fct Lipschitz)

O fct $D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ s.n. funcție Lipschitz dacă $\exists \alpha > 0$ a.î. $d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d_1(x, y), \forall x, y \in D$

~~Th 29~~

Obs

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Orice fct derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ care are f' funcție mărginită este funcție Lipschitz.

Th 29

a) Orice fct Lipschitz $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este unif cont pe D.

b) Fie $K \subseteq (X, d_1)$ o mulțime compactă. Orice fct cont. $f : K \to (Y, d_2)$ este unif. cont. pe K

Th 30

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
$g : (a,b] \to \mathbb{R}$ și
$h : [a,b) \to \mathbb{R}$
continue

Funcția h este unif cont pe $[a,b) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} h(x) \in \mathbb{R}$

Funcția g este unif cont pe $(a,b] \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} g(x) \in \mathbb{R}$

Funcția f este unif cont pe $(a,b) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) \in \mathbb{R}$ și $\lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) \in \mathbb{R}$

Th 31

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nemărginit. O funcție $f : I \to \mathbb{R}$ este unif. cont. pe $I \Leftrightarrow \exists c \in I$ a.î. $f|_{I \cap (-\infty, c]}$ și $f|_{I \cap [c, \infty)}$ sunt unif cont

Șiruri de funcții

Def (convergență simplă)

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplu pe $A \subseteq D$ dacă $\forall x \in A$, șirul de nr. reale $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

Not : $\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x)$

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția limită a șirului de fct $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$f_n \xrightarrow[A]{s} f$

Def (converge uniform)

- Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe $A \subseteq D$ către funcția $f: A \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$; $\forall x \in A$

Not $f_n \xrightarrow[A]{u} f$

Obs $f_n \xrightarrow[A]{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[A]{s} f$

Th 32 (Criteriul practic de convergență uniformă)

~~Crit~~ Șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe mulț. $A \subseteq D$ către funcția $f: A \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$

Th Weierstrass pt șiruri de funcții

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții care converge uniform pe $A \subseteq D$ către $f: A \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in A$ a.î. f_n este fct cont în x_0, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci f este cont în x_0.

Th lui Dini

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de fct cu $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ și o fct $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ care v.f. următ. cond:

a) f_n fct cont pe $[a,b]$; $\forall n \in \mathbb{N}$

b) f fct cont pe $[a,b]$

c) $f_n \xrightarrow[[a,b]]{s} f$

d) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$; $\forall x \in [a,b]$; $\forall n \in \mathbb{N}$

sau $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall b \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Atunci $f_n \xrightarrow[[a,b]]{u} f$