SUBIECTUL 5:

Pentru calculul complexității timp se folosește modelul mașinii Turing cu k benzi infinite la ambele capete și care se oprește pe fiecare intrare, iar capul de citire/scriere poate st

Pentru o mașină Turing vom nota $TIME_M(n) = m$, maximul de pași pe care îi face mașina M pe o intrare de lungime n.

$time(x) =$ cel mai mic nr. de pași prin care M ia o decizie pe intrarea x (M acceptă x)

$TIME_M(n) = \max\{time_M(x) \mid |x| = n\}$

$DTIME_k(f(n)) = \{L \mid \exists M$, mașină Turing deterministă, cu k benzi a.î. $L(M) = L$ și $TIME_M(n) \leq f(n)$, $\forall n \geq n_0\}$

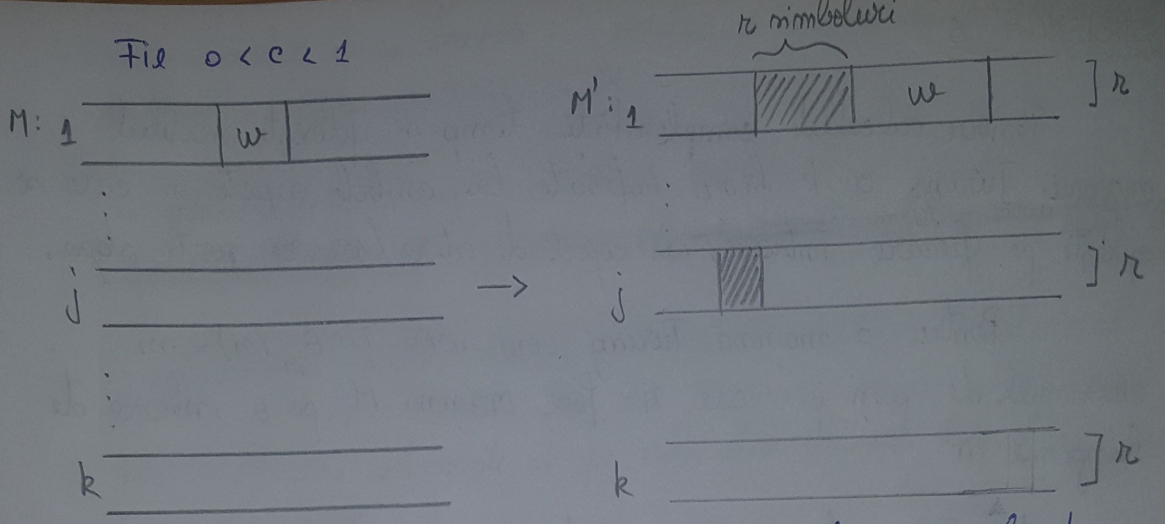
$NTIME_k(f(n)) = \{L \mid \exists M$, mașină Turing nedeterministă, cu k benzi a.î. $L(M) = L$ și $TIME_M(n) \leq f(n)$, $\forall n \geq n_0\}$

TEOREMA 1 (eliminarea constantelor):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n} = \infty \Rightarrow (N)(D)\,TIME_k(f(n)) = (N)(D)\,TIME_k(c \cdot f(n)), \ \forall k \geq 2, \ \forall c > 0$$

Dem: Fie M $\begin{cases} k \text{ benzi} \\ TIME_M(n) \leq f(n) \end{cases}$ și M se oprește

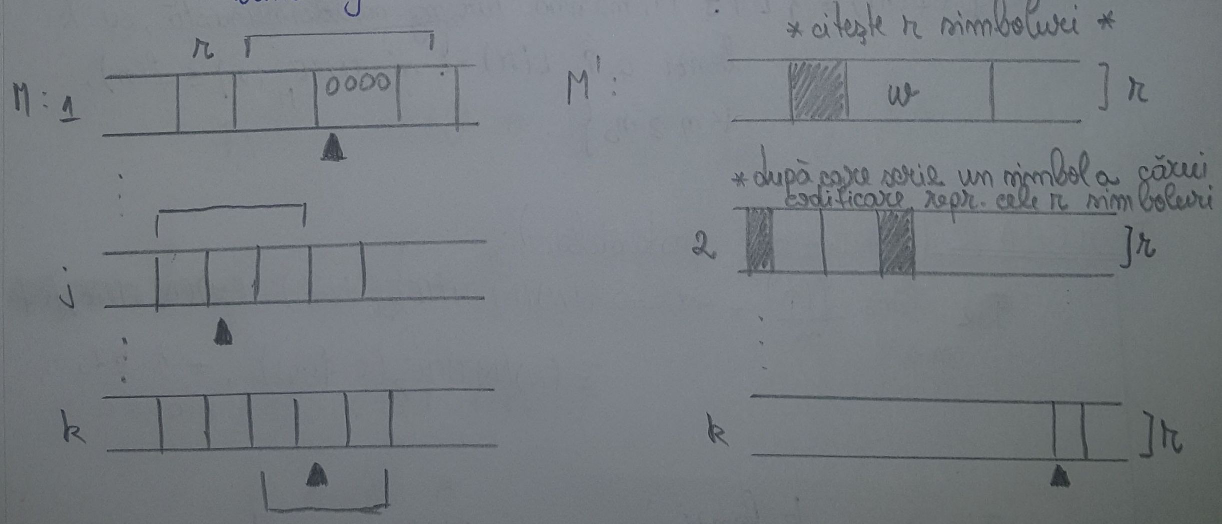
Fie $0 < c < 1$



- Copiază r simboluri de pe banda de intrare pe banda 2, ca un simbol. Timp: $n+1$;

- Se poziționează la începutul benzii 2, Timp: $\left[\frac{n}{r}\right] + 1$

- Corespondența între benzile lui M și M' este:
  - banda 1 a lui M → banda 2 a lui M'
  - banda 2 a lui M → banda 1 a lui M'
  - banda j a lui M → banda j a lui M'.



- Fiecare simbol de pe benzile M' codifică r simboluri adiacente de pe banda corespunzătoare în M;

- M' calculează conținutul blocului curent de dimensiune r de pe fiecare bandă și conținutul blocurilor adiacente. Timp: 4 mișcări

- M' actualizează celulele curente și vecinele acestora când unul din capetele de citire/scriere al lui M încearcă să depășească cele 3 blocuri adiacente de pe una din benzile lui M.
Timp: 4 mișcări.

$$T_{M'} \le n + 1 + \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{8 f(n)}{r} \right\rceil \le n + 3 + \frac{n}{r} + \frac{8 f(n)}{r} \le$$

$$\le \frac{8 f(n)}{r} + \frac{f(n)}{d} + \frac{f(n)}{rd} + 3 \le f(n) \underbrace{\left(\frac{8}{r} + \frac{1}{d} + \frac{1}{rd} + \frac{1}{d} \right)}_{\le c}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n} = \infty$, $\forall d > 0$, $\exists n_0$ a.î. $\frac{f(n)}{n} \ge d$, $\forall n \ge n_0$

$n \ge 3$

Trebuie arătat că $\frac{8}{r} + \frac{1}{d} + \frac{1}{rd} + \frac{1}{d} \le c$.

$$\frac{8}{r} + \frac{1}{d} + \frac{1}{rd} + \frac{1}{d} \le \frac{8c}{16} + \frac{2}{d} + \frac{c}{16d} = \frac{8cd + 32 + c}{16d} \le c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8cd + c + 32 \le 16cd$$

$$32 \le 8cd - c$$

$$32 \le c(8d - 1) \Leftrightarrow 8d - 1 \ge \frac{32}{c}$$

$$8d \ge \frac{32}{c} + 1 \Rightarrow d \ge \left(\frac{32}{c} + 1 \right) / 8$$

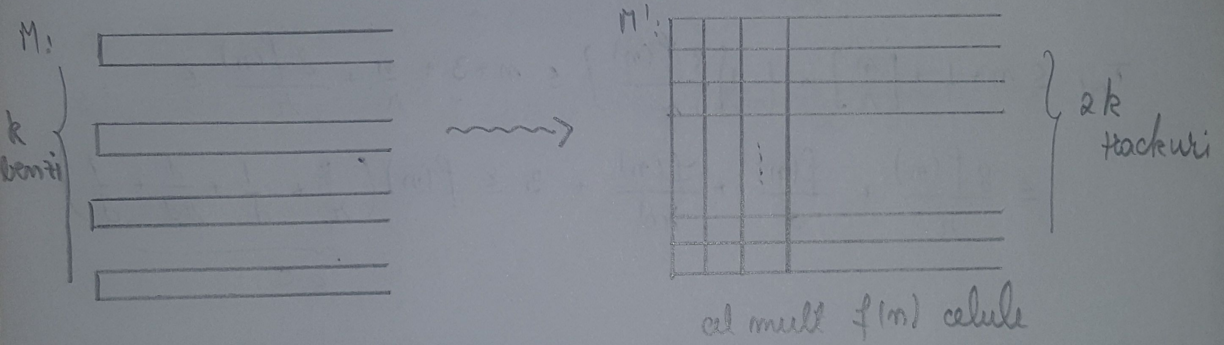
Alegem $d > \left(\frac{32}{c} + 1\right) / 8 \Rightarrow \exists\, n_0$ a.î. dacă $n \geq n_0$ și $n \geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \geq \max(n_0, 3) \Rightarrow TIME_{M'}(n) \leq c \cdot f(n)$

TEOREMA 2 (comprimarea benzilor):

$$(N)(D)TIME_k(f(n)) \subseteq (N)(D)TIME_1(f^2(n))$$

Dem: Procedăm la fel ca la transformarea unei mașini Turing cu mai multe benzi într-o mașină Turing cu o singură bandă d.p.d.v. al construcției.



1 tranziție $\Rightarrow f(n) + f(n) + 2f(n) \leq 4f(n)$

$(N)(D)TIME_k(f(n)) \subseteq (N)(D)TIME_1(f^n(n)) =$

$= (N)(D)TIME_k\left(\frac{1}{2} f(n)\right) \subseteq (N)(D)TIME_1\left(4 \cdot \left(\frac{1}{2} f(n)\right)^2\right)$

Ierarhii de clase de complexitate:

1) $(N)(D)\ TIME_k(f(n)) \subseteq (N)(D)\ TIME_2(f(n) \cdot \log_2(f(n)))$, $k \geq 3$;

2) $(N)(D)\ TIME(f(n)) \subseteq (N)(D)\ SPACE(f(n))$;

3) $(N)(D)\ TIME_k(f(n)) \subseteq (N)(D)\ TIME_1(f^2(n))$, $k \geq 2$;

Relații între clase de complexitate:

1) $\forall L \in NTIME(f(n))\ \exists\ c(L)$ a.î. $L \in DTIME(c^{f(n)})$;

2) Dacă $f(n) \geq \log_2 n \Rightarrow \forall L \in DSPACE(f(n))\ \exists\ c(L)$ a.î. $L \in DTIME(c^{f(n)})$.