# Curs 9

## Transformarea de dualitate

Plan primal | Plan dual

Reguli: 1) Unui punct $p=(p_x, p_y)$ din planul primal i se asociază o dreaptă, notată $p^*$ în planul dual

$$p^*: (y = p_x \cdot x - p_y)$$ Duala lui $p$

2) Unei drepte neverticale din planul primal $d: (y = m_d x + n_d)$ i se asoc. un punct

$$d^* = (m_d, -n_d)$$ Dualul lui $d$

**Obs** Această transfm. este de fapt polaritatea față de parabola $y=\frac{x^2}{2}$

## Proprietăți

Transformarea de dualitate

1) Păstrează incidența

$p \in d \Leftrightarrow d^* \in p^*$

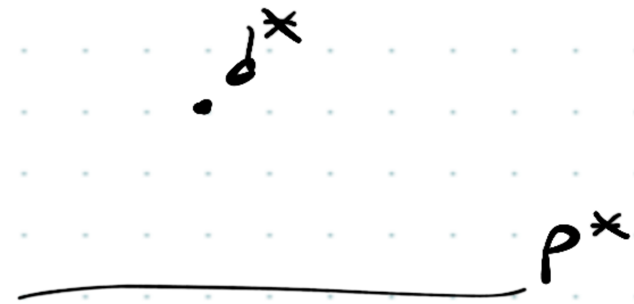
**Exp**

| | |
|---|---|
| $d: y=2x+1$ | $d^*=(2,-1)$ |
| $p=(1,3)$ | $p^*: (y=x-3)$ |
| $p \in d$ | $d^* \in p^*$ |

2) Păstrează ordinea (dr. neverticală)

Un pct $p$ este situat deasupra dr. $d \Leftrightarrow$ $d^*$ este sit. deasupra dr $p^*$


planul primal

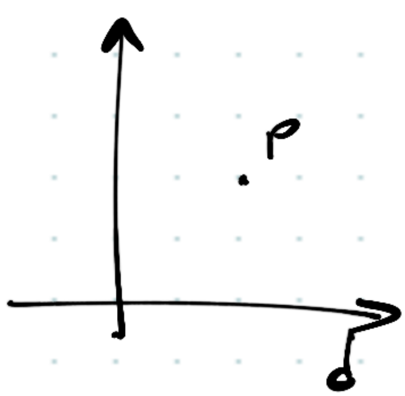



planul dual

Exp

$p = (1, 1)$

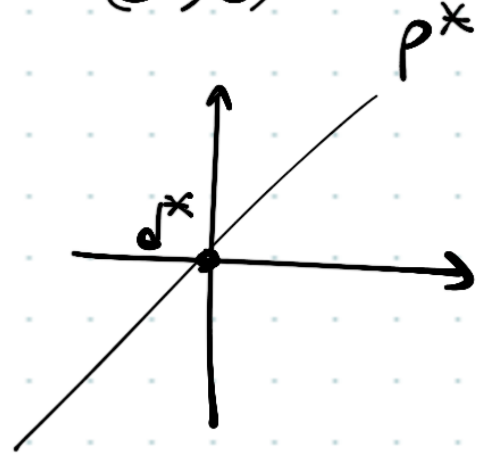
$d : (y = 0)$




planul primal

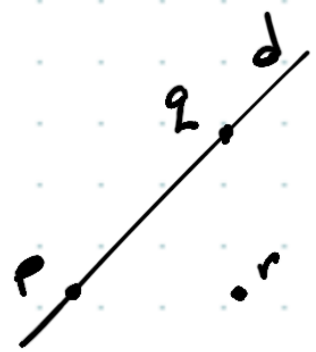
$p^* : (y = x - 1)$

$d^* = (0, 0)$



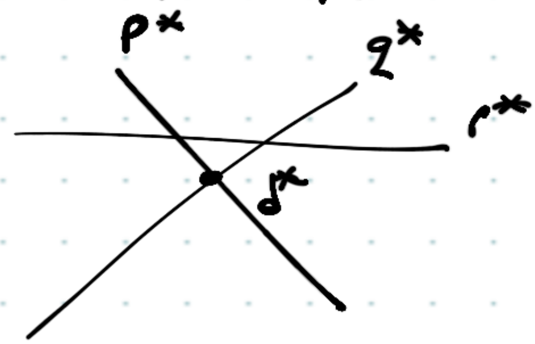

planul dual

**Obs** 1) Fie $p, q$; $p \neq q$. Fie $r$ un pct situat dedesubtul dreptei $pq = d$. Config. duală?




planul primal

$r$ este sub $pq$



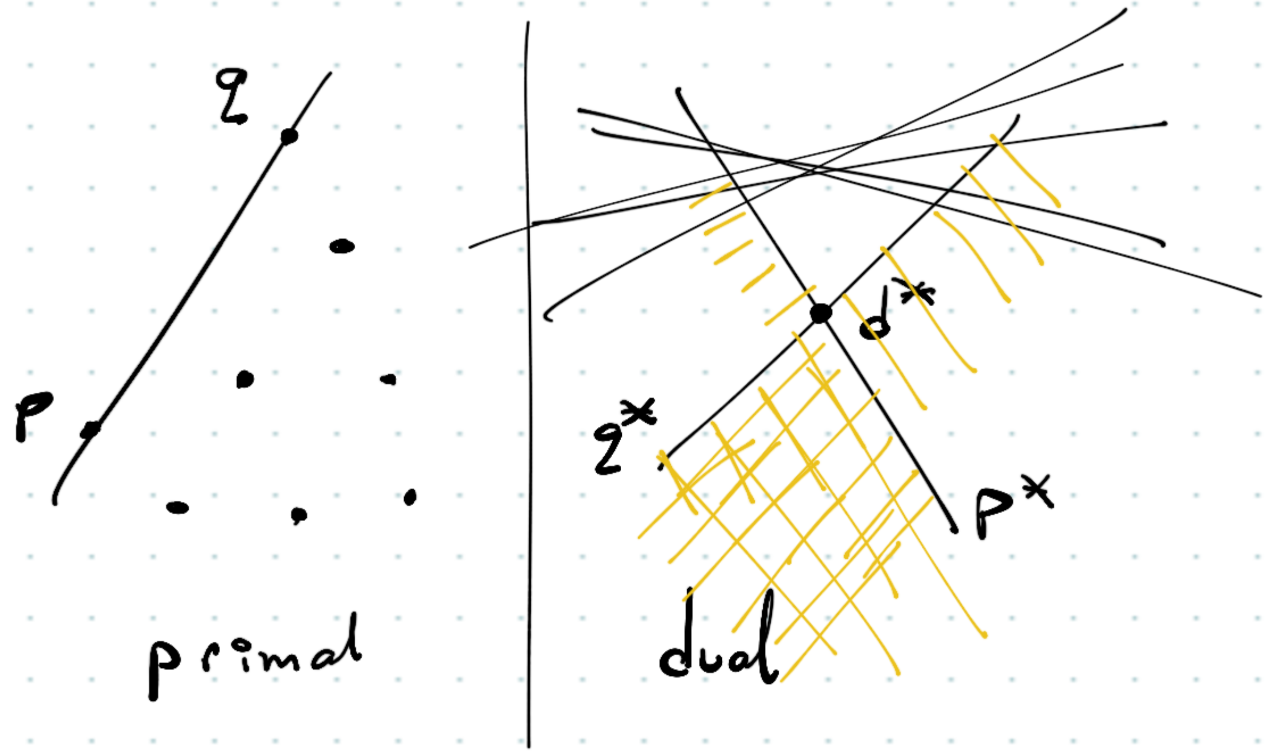

planul dual

$d^*$ este sub $r^*$

2) Fie $P$ o mulț. de puncte. Ce îns. că un segment $[pq]$, $p, q \in P$, participă la frontiera superioară a lui $Conv(P)$?

$\Leftrightarrow$ Toate celelalte puncte sunt sub dreapta $pq$

**Dual** de considerat dreptele $p^*$ și $q^*$ și pct de inters $d^*$ $\xRightarrow[\text{cont.}]{\text{p. abs.}}$ $d^*$ este sit. sub dr. duale coresp. celorlalte pct.




**Primal** Pentru partea superioară a frontierei acoperirii convexe „contează" doar p și q

**Dual** Pt inters. de semiplane inf, „contează" doar $p^*$ și $q^*$

**Obs** A determina frontiera superioară a acop. convexe pt. mulț de puncte P este echivalent cu a det $\mathcal{LE}$ pt semiplanele inferioare det. de dreptele duale.

(Analog frontiera inf / $\mathcal{UE}$)

## Aspecte calitative - inters. de semiplane

### Programare liniară

**Exp** Problema de prog. lin 1-dimensională ($d=1$)

coordonata $x_1 \overset{not}{=} x$

maximizează $(cx)$ ← fct obiectiv

$\{ a_1 x \leq b_1$

$$\begin{cases} a_2 x \le b_2 \\ \dots \\ a_n x \le b_n \end{cases}$$

constrângeri

Exp: maximizează $(2X)$

| | |
|---|---|
| $3x \le 6$ | $x \le 2$, $x \in (-\infty, 2]$ |
| $-2x \le 4$ | $x \ge -2$, $x \in [-2, \infty)$ |
| $6x \le 6$ | $x \le 1$, $x \in (-\infty, 1]$ |


Maximul funcției obiectiv se atinge pt $x=1$ și este egal cu 2

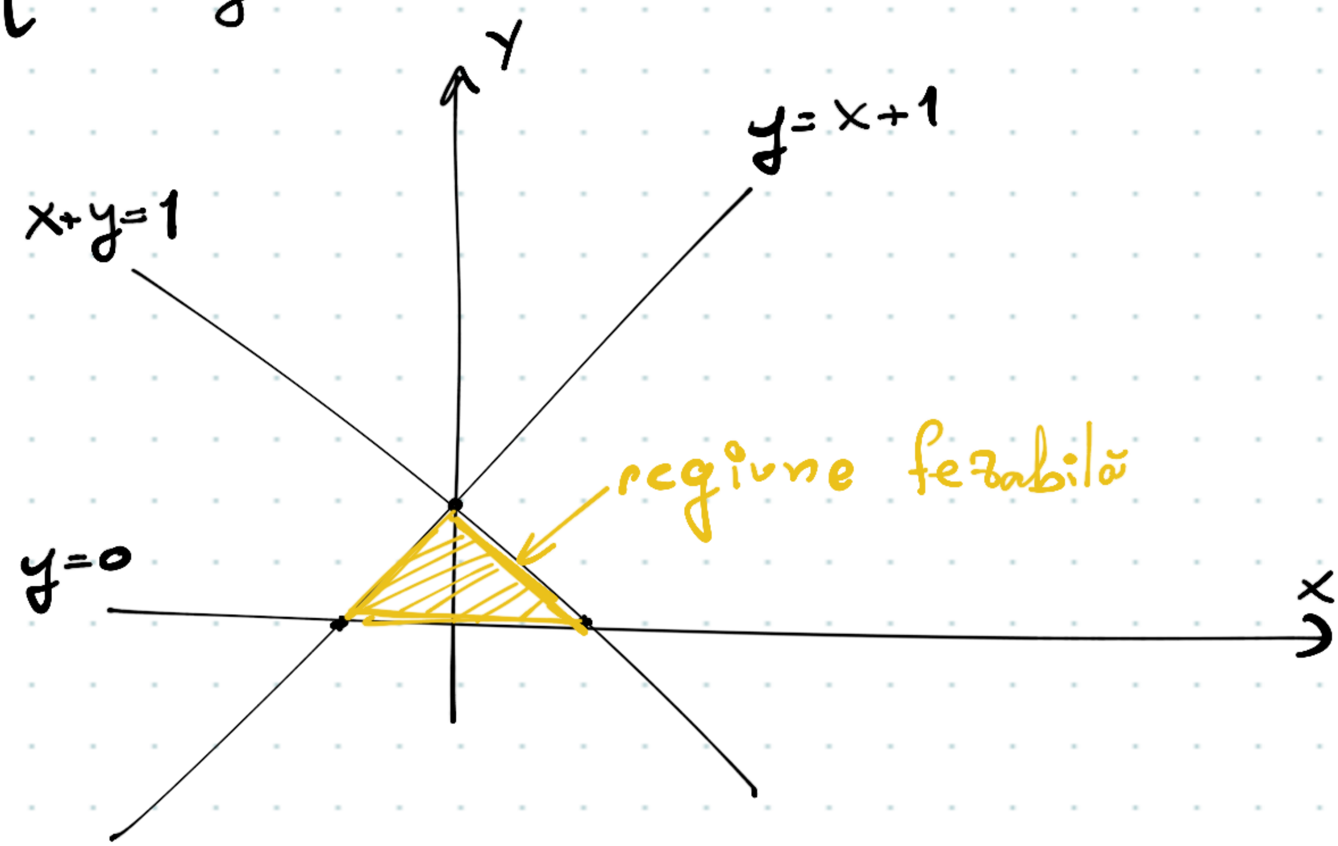
**Prop** Pt $d=1$, un program liniar 1-dimensional → rez. în timp liniar

Exp Problemă de prog liniară 2-dim
(d=2)

Not coord x și y

maximizează(y) $(c=(0,1))$

$$\begin{cases} x+y \le 1 \\ -y \le 0 \\ -x+y \le 1 \end{cases}$$



În pct $(0,1)$ este maximizată fct obiectiv

## Revenind la cazul general d-dimensional

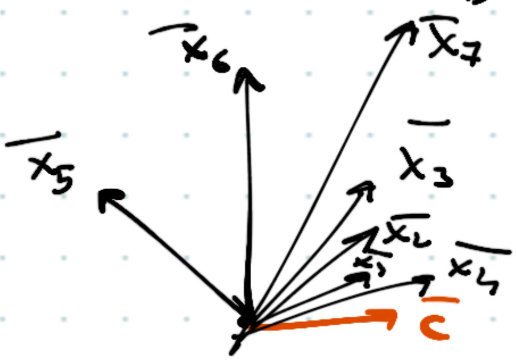
Ce interpretare are cerința de maximizare?

maximizează $(c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_dx_d)$

$c_1x_1+\dots+c_dx_d=\langle\bar{c},\bar{x}\rangle=\bar{c}\cdot\bar{x}$,

unde $\bar{c}=(c_1,c_2,\dots,c_d)$

$\bar{x}=(x_1,\dots,x_d)$




Fixat $\bar{c}$, a maximiza acea fct revine la a maximiza proiecția lui $\bar{x}$ pe dir. dată de vectorul $\bar{c}$, în sensul indicat de acesta.

## În continuare: $d=2$

### Convenții și terminologie

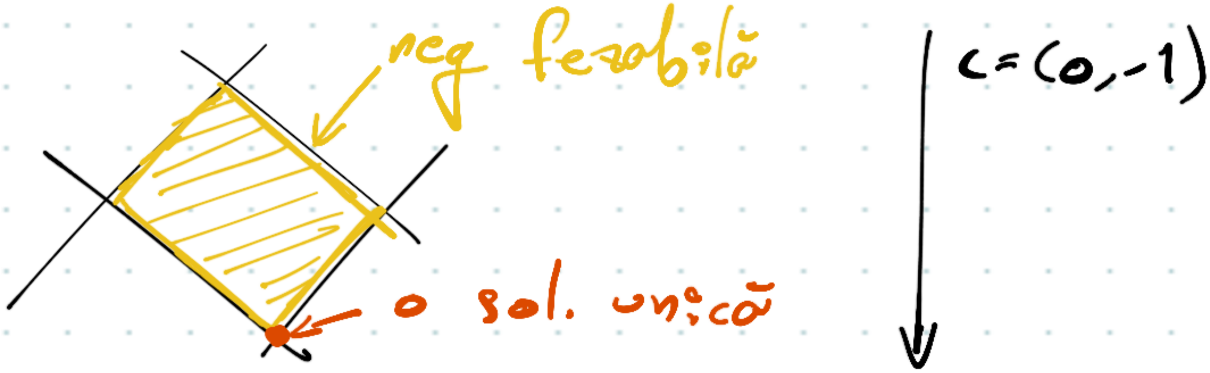
- Coordonatele: $x$ și $y$
- Funcția obiectiv: $f_{\bar{c}}(p) = c_x \cdot x + c_y \cdot y$
- Constrângerile: $h_1, h_2, \dots, h_n$ (semiplane)
- $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$
- Program liniar: $(H, \bar{c})$
- Regiunea fezabilă: $C = h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_n$

Se caută $p \in C$ a.î. $f_{\bar{c}}(p)$ să fie maximă.

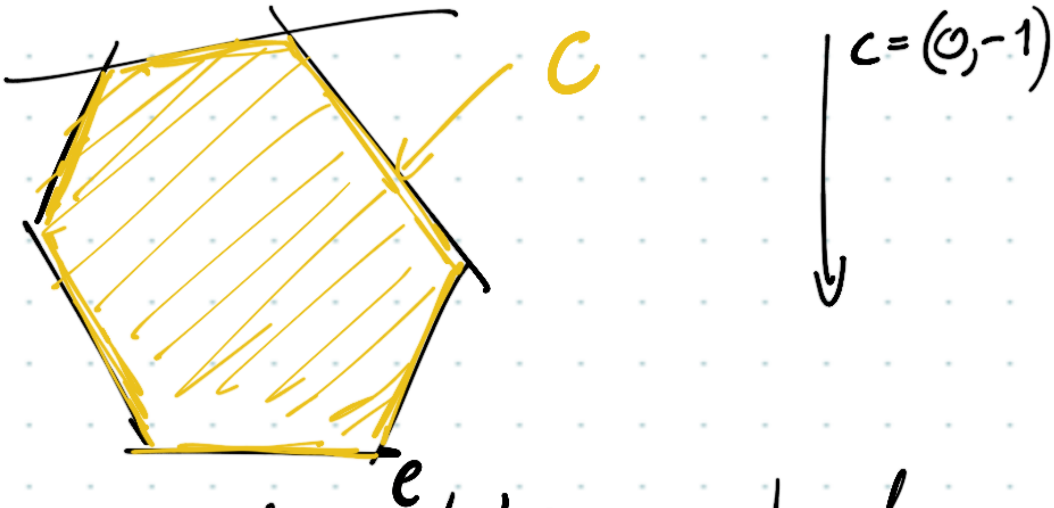
## Situații

În desene: $\bar{c} = (0,-1)$

i)



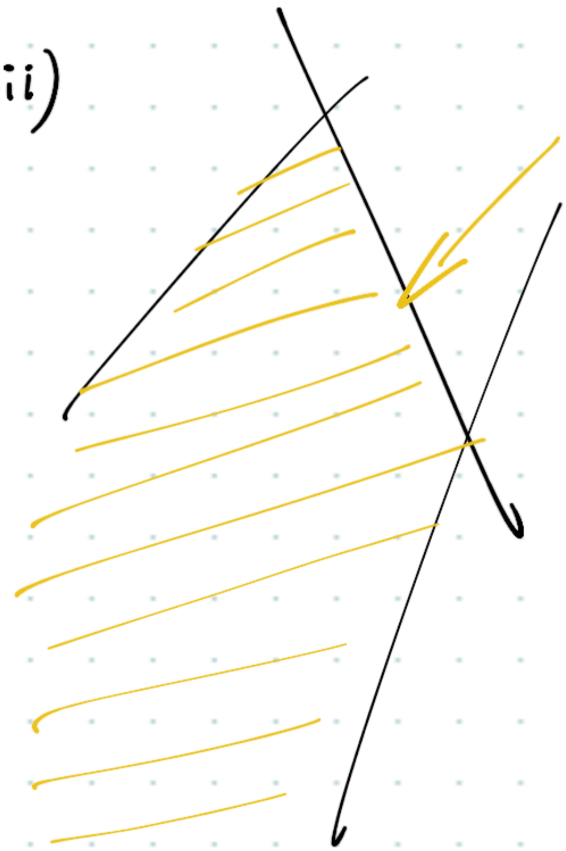
ii)




Toate pct lui e sunt sol

Convenție: cea mai mică lexicografic

iii)



C nemărginită

Se caută sol de-a lungul unei raze

iv)