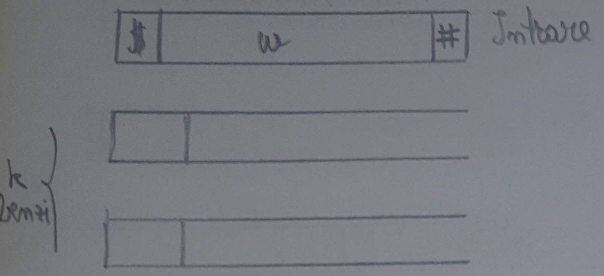
SUBIECTUL 6:

Pentru calculul complexității spațiu se folosește modelul mașinii Turing offline care are o bandă de intrare și k benzi auxiliare. Banda de intrare este doar pentru citire, iar benzile auxiliare sunt mărginite la unul dintre capete. Mașina se oprește pe fiecare intrare. Capul de citire/scriere poate staționa.



$space_M(x, c)$ = nr. maxim de celule pe o bandă auxiliară prin care M acceptă x, prin calculul c.

$space_M(x) = \min \{ space_M(x,c) \mid c \text{ este un calcul pt. } x \}$

$SPACE_M(n) = \max \{ space_M(x) \mid |x| = n \}$

$DSPACE_k(f(n)) = \{ L \mid \exists$ o mașină Turing deterministă cu k benzi a.î. $L = L(M)$ și $SPACE_M(n) \leq f(n), \forall n > n_0 \}$

$NSPACE_k(f(n)) = \{ L \mid \exists$ o mașină Turing nedeterministă cu k benzi a.î. $L = L(M)$ și $SPACE_M(n) \leq f(n), \forall n > n_0 \}$

$$(N)(D)SPACE(f(n)) = \bigcup_{k \geq 1} (N)(D)SPACE_k(f(n))$$

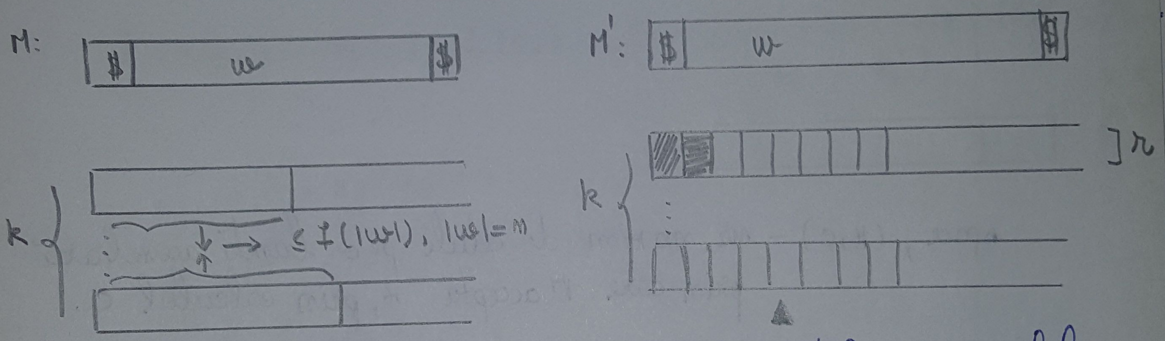
TEOREMA 1 (eliminarea constantelor):

$(N)(D)SPACE_k(f(n)) = (N)(D)SPACE_k(c \cdot f(n))$, $\forall k \geq 1, c > 0$

Dem: Suficient $NSPACE_k(f(n)) \subseteq NSPACE_k(c \cdot f(n))$, $\forall 0 < c < 1$.

Fie $r \geq 1$ a.î. $rc \geq 2$.

Fie M a.î. $SPACE_M(n) \leq f(n)$, k benzi și M se oprește



- Fiecare simbol de pe benzile auxiliare codifică r simboluri adiacente de pe banda corespunzătoare în M;

- Presupunem inductiv că M' satisface condiția de mai sus, la un pas anume (la configurația i)

Fie i' o configurație a lui M care se obține din i

$i \to i' : q \to q'$

$\delta(q, a_1, \ldots, a_k) \ni (q', b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_k)$

$x_i \in \{-1, 0, 1\}$

M' se găsește în starea $\langle q, i_1, \ldots, i_k \rangle$

$\delta'(\underbrace{\langle q, i_1, \ldots, i_k \rangle}_{\text{o stare curentă}}, [a_1], [a_2], \ldots, [a_k])$

a_1 se găsea pe poziția i_1, pe banda 1 a lui M în segmentul 2

a_2 —— —— i_2 pe banda 2 a lui M

$\vdots$

a_k —— " —— i_k pe banda k a lui M în segmentul 5

$$Q \times \underbrace{\{1, 2, \ldots, r\} \times \ldots \times \{1, \ldots, r\}}_{\text{de } k \text{ ori}}$$

$$\delta'(\langle q, i_1, \ldots, i_k\rangle, [a_1], [a_2], \ldots, [a_k]) \ni (\langle q', i_1', \ldots, i_k'\rangle, [b_1], \ldots, [b_k], x_1', \ldots, x_k')$$

$$i_j' \to i_j + x_j \pmod r$$

$$x_j' = \begin{cases} 0, & i_j + x_j \in \{1, \ldots, r\} \\ 1, & i_j + x_j > r \\ -1, & i_j + x_j < 1 \end{cases}$$

F' (finale pentru M') $= F \times \{1, \ldots, r\}^k$

$L(M) = L(M')$ $\qquad SPACE_{M'}(n) \leq c \cdot f(n)$

• $SPACE_{M'}(n) \leq \left\lceil \dfrac{SPACE_M(n)}{r} \right\rceil \leq \dfrac{f(n)}{r} + 1 \leq f(n) \cdot \dfrac{c}{2} + 1 \leq c \cdot f(n)$

$\Leftrightarrow c \cdot f(n) + 2 \leq 2 \cdot c \cdot f(n) \Leftrightarrow c \cdot f(n) \geq 2.$

Dacă $c \cdot f(n) \geq 2 \Rightarrow SPACE_{M'}(n) \leq c \cdot f(n)$

Dacă $c \cdot f(n) < 2 \Rightarrow f(n) < \frac{2}{c} \Rightarrow SPACE_{M'}(n) = 1$

TEOREMA 2 (comprimarea benzilor):

$$(N)(D)SPACE_k(f(n)) = (N)(D)SPACE_1(f(n))$$

Ierarhii de clase de complexitate:

O funcție $f(n)$ s.m. spațiu construibilă dacă există o mașină Turing a.î. $SPACE_M \leq f(n)$, $\forall n \; \exists w_n$ a.î. $SPACE_M(w_n) = f(n)$.

O funcție $f(n)$ s.m. spațiu construibilă complet dacă există o mașină Turing a.î. $SPACE_M(n) = f(n)$, $\forall n$

1) Fie $S_1(n), S_2(n)$ sp. c. complet, $S_1(n), S_2(n) \geq \log n$ și
$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{S_1(n)}{S_2(n)} = 0 \Rightarrow (N)(D)SPACE(S_2(n)) \setminus (N)(D)SPACE(S_1(n)) \neq \emptyset$

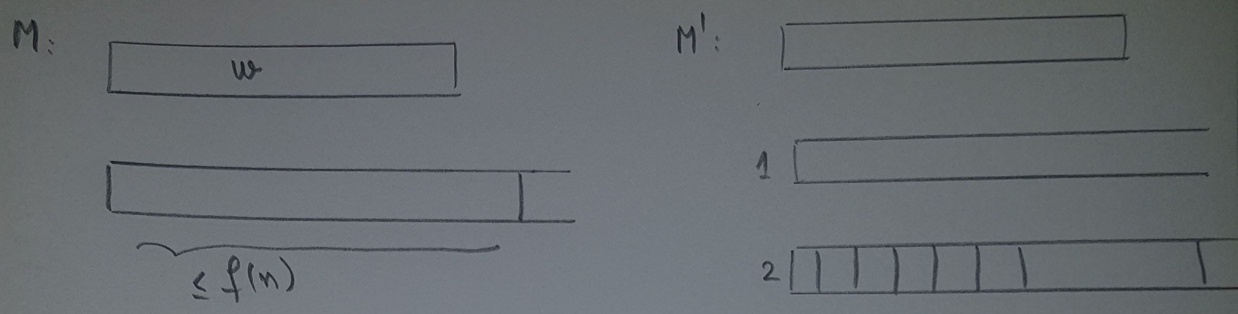
2) $f(n) \geq \log n$ și f sp. c. complet $\Rightarrow NSPACE(f(n)) \subseteq DSPACE(f^2(n))$

Relații între clase de complexitate:

$\left.\begin{array}{l} L \in DSPACE(f(n)) \\ f(n) \geq \log n \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c(L)$ a.î. $L \in DTIME(c^{f(n)})$

Dem: Fie M o mașină Turing $\left\{\begin{array}{l} \text{deterministă} \\ space_M(n) \leq f(n) \\ L = L(M) \end{array}\right. \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow M' \left\{\begin{array}{l} \text{deterministă} \\ Time_M(n) \leq c^{f(n)} \; ? \\ L = L(M') \end{array}\right.$



$|w| = n$

s - stări

t - simboluri

Nr. configurațiilor lui M: $s(n+2)\cdot t^{f(n)}\cdot(f(n)+1) \overset{?}{\le} c^{f(n)}$

$f(n) \ge \log n \Rightarrow n \le 2^{f(n)} \Rightarrow (n+2) \le c_1^{f(n)}$

$s < kn \Rightarrow s \le c_2^{f(n)}$

$f(n)+1 < 2f(n) \le c_3^{f(n)}$

$c = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot t$

- M' marchează $c^{f(n)}$ celule pe banda 2
- Simulează M pe banda 1

$$\left.\begin{array}{l} Time_{M'}(n) \le 2 \cdot c^{f(n)} \\ \lim \frac{c^{f(n)}}{n} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$ M' se poate "accelera la $c^{f(n)}$