ANALIZĂ
SEMINAR 1

Șiruri de nr reale

Șiruri:
- convergente ($\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$)
- divergente
  - $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$
  - $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Șiruri:
- cu limită $\to$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$
- fără limită

Limite remarcabile

1) $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 1 & a=1 \\ 0 & a\in(-1,1) \\ +\infty & a>1 \\ \nexists & a\le -1 \end{cases}$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$ – ct lui Euler

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0}$$ știm

4) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n\right) = c \in (0,1)$$ nr lui Euler

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1!+2!+\dots+(2n)!}{(2n+1)!}$

Rez $a_n = 1!+2!+\dots+(2n)!$

$b_n = (2n+1)!$

a_n trebuie să tindă la $\pm\infty$

b_n trebuie să tindă la $+\infty$ și să $\uparrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty.$

$b_{n+1} - b_n = (2n+3)! - (2n+1)! > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ (\uparrow)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\cancel{(2n+2)!\ (2n+1)(2n+2)}}{(2n+2)!}$

$= \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+2)!-(2n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4n^2+6n+1} = 0 \Rightarrow \exists \lim$ și e 0.

2 Calc: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(C_{2n}^{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^{n}} = 4,$

3 Calc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ $a>0.$

Cazul 1 $a\in(0,1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Cazul 2 $a = 1,$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n!} = 0.$

Cazul 3 $a>1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0.$

$0<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Obs $\forall\ 0<a<b \Rightarrow \boxed{\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}}$

4) Studiați convergența șirului $x_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n$, $n\geq 1$

Studiem monotonia și mărginirea funcției

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln(n)) < 0 \quad \forall n\geq 1.$$

$a = n$

$b = n+1$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < (\ln(n+1)-\ln n) < \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ e strict descresc $\Rightarrow$ e mărg sup de x_1

$$\cancel{\ln 2}-\ln 1 < 1$$
$$\ln 3-\cancel{\ln 2} < \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$\cancel{\ln n}-\ln(n-1) < \frac{1}{n-1}$$
$$\ln(n+1)-\cancel{\ln(n)} < \frac{1}{n}$$

$$\ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} -\ln n$$

$$0<\ln(n+1)-\ln n < x_n \quad \forall n\geq 1.$$

$x_n>0 \quad \forall n\geq 1 \Rightarrow$ e mărg inf

Șir monoton și mărg $\Rightarrow$ Weierstrass: e convergent.

<u>Mulțimi ordonate. Funcții</u>

<u>Ex1</u> Exemplu de mulț ~~ord~~ total ord care nu e compactă.

<u>Rez</u>: $(\mathbb{Q}, \leq)$

Orice 2 nr $\in \mathbb{Q}$ se compară $\Rightarrow$ e total ord.

Căutăm o mulț. $A \subseteq \mathbb{Q}$ mărginită în $\mathbb{Q}$ pt care $\nexists \sup \in \mathbb{Q}$ sau $\nexists \inf A \in \mathbb{Q}$

$A = (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}$

$0 \leq a \ \forall a \in A$
$0 \in \mathbb{Q}$ — mărg inf.

$a \leq 2 \ \forall a \in A$
$2 \in \mathbb{Q}$ — măr sup

$\Rightarrow A$ mărginită

Dem că $\nexists \sup A \in \mathbb{Q}$ prin reducere la absurd.

Pp că $\exists \sup A = \alpha \in \mathbb{Q}$

$\alpha \neq \sqrt{3} \Rightarrow \alpha < \sqrt{3}$ sau $\sqrt{3} < \alpha$.

Dem că ajungem la contr în ambele cazuri
(se fol th de densitate a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$)

Caz 1 $\alpha < \sqrt{3} \Rightarrow \exists$ un $r \in \mathbb{Q}$ ai $\alpha < r < \sqrt{3}$, $r > \alpha > 0$ $\Big\} \Rightarrow r \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow r \leq \alpha$ ⨳

Caz 2 $\sqrt{3} < \alpha \Rightarrow \exists$ un $p \in \mathbb{Q}$ ai $\sqrt{3} < p < \alpha$

$\forall a \in A \quad a < \sqrt{3}$, $\sqrt{3} < p$ $\Big\} \Rightarrow \forall a \in A \quad a < p$.

$p \in \mathbb{Q} \Rightarrow p$ e majorant al lui A în $\mathbb{Q}$, α e supremum $\Big\} \Rightarrow \underline{\alpha \leq p}$ ⨳.

~~Pe a~~ $\Rightarrow$ din C_1, C_2 $\alpha = \sqrt{3}$ ⨳ $\Rightarrow$ nu există $\sup A \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow$ nu e completordonată.

EX2 Ex de mulț complet ord care nu e total ordonată.

Rez: Fie X o mt cu cel puțin 2 el.

$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$

Construim rel binară: $A \leq B \overset{def}{\iff} A \subseteq B$

Refl, Antisim, Tr (se dem) $\Rightarrow \leq$ rel de ord.

$\exists x, y \in X$ ai $x \neq y$

$A = \{x\}$ $B = \{y\}$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \not\subseteq B$ și $B \not\subseteq A \Rightarrow A \not\leq B$ și $B \not\leq A$

$\Rightarrow A, B$ nu se compară $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ nu e total ord.

Fie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mărg în $\mathcal{P}(X) \Rightarrow \exists M, N \in \mathcal{P}(X)$ ai ~~M supr~~ majorant și N minorant ai lui $\mathcal{A}$

$\forall A \in \mathcal{A}$ $A \leq M \iff \forall A \in \mathcal{A}$ $A \subseteq M$ (1)

$\forall A \in \mathcal{A}$ $N \leq A \iff \forall A \in \mathcal{A}$ $N \subseteq A$ (2)

$\forall A \in \mathcal{A}$ $A \subseteq M \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq M$ (3) $(B \subseteq M)$

$\forall A \in \mathcal{A}$ $N \subseteq A \Rightarrow$ ~~A~~ $N \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ (4) $(N \subseteq C)$

Notăm $\longrightarrow$

$B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow A \subseteq B$, $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \leq B$ $\forall A \in \mathcal{A}$

B majorant al lui $A \overset{3}{\Rightarrow} B$ supremum.

$C = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow C \subseteq A$, $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow C \leq A$ $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow C$ minorant $\overset{4}{\Rightarrow} C$ infimum $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ complet ordonată

Funcții

Obs
1) $f(x) \in f(A) \iff x \in A$
2) ~~f~~ $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$
3) $f(A) = \operatorname{Im}(f|_A)$

Ex Fie $f: X \to Y$ fct.

a) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \ \forall B \subseteq Y$

b) $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \ \forall A \subseteq X$

Rez a) Fie $f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B$

$\Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subseteq B \ \forall B \subseteq Y$

b) fie $x \in A \Rightarrow f(x) \in \underbrace{f(A)}_{B} \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \ \forall A \subseteq X$

Ex Fie $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ def prin $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \neq \emptyset, \ \mathbb{R} \setminus A \text{ finită}\}$.

Ar. $\mathcal{T}$ topologie

Rez $\emptyset \in \mathcal{T}$

$\left.\begin{matrix} \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset \text{ finită} \\ \mathbb{R} \neq \emptyset \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{T}$

Fie $A, B \in \mathcal{T}$ $\to$ $A = \emptyset$ sau $B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$

$\to$ A, B nevide.

$C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \underbrace{C_{\mathbb{R}} A}_{\text{finită}} \cup \underbrace{C_{\mathbb{R}} B}_{\text{finită}} \Longrightarrow \text{finită} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$

Fie $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow A_i \in \mathcal{T} \ \forall i \in I$

$A_i = \emptyset$ sau $(A_i \neq \emptyset$ și $C_{\mathbb{R}} A_i$ e finită$) \ \forall i \in I$

Caz 1 $A_i = \emptyset \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Caz 2: $\exists i_0 \in I$ ai $A_{i_0} \neq \emptyset \Rightarrow C_{\mathbb{R}} A_{i_0}$ e finită

$\mathbb{R} - C_{\mathbb{R}} A_i = C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} C_{\mathbb{R}} A_i \subseteq \underbrace{C_{\mathbb{R}} A_{i_0}}_{\text{finită}} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_{\mathbb{R}}(\bigcup_{i\in I} A_i)$ finită $\} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$

$\bigcup_{i\in I} A_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow \tau$ topologie

Spații topologice, spații metrice

$d: X\times X \to \mathbb{R}_+$ dist pe X

$\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \emptyset,\ G$ deschisă$\}$

$G \subseteq X$ s.n. deschisă

Ex1 a) Ar. $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $d(a,b) = |a-b|$ e dist pe $\mathbb{R}$

b) Const. bilele deschise, închise, mț. deschisă pe $\mathbb{R}$.

Rez a) $d(a,b) = |a-b| = |-(b-a)| = |b-a| = d(b,a)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$

b) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow |a-b| = 0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$

c) $d(a,c) = |a-c|$

$|(a-b)+(b-c)| \leq |a-b| + |b-c|$

$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$

b) $x\in B(a,r) \Leftrightarrow x \in (a-r, a+r)$

$x\in B[a,r] \Leftrightarrow x \in [a-r, a+r]$.

$G \subseteq \mathbb{R}$ deschisă dacă $\forall x\in G\ \exists r>0$ a.î.

$(x-r, x+r) \subseteq G$

$\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subset \mathbb{R},\ G$ nevidă, G deschisă$\} \overset{not}{=} \tau_{\mathbb{R}}$

top uzuală pe $\mathbb{R}$.

Ex 2 Arătați că

a) $(a,b), (a,+\infty), (-\infty,b) \in \tau_{\mathbb{R}}$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$

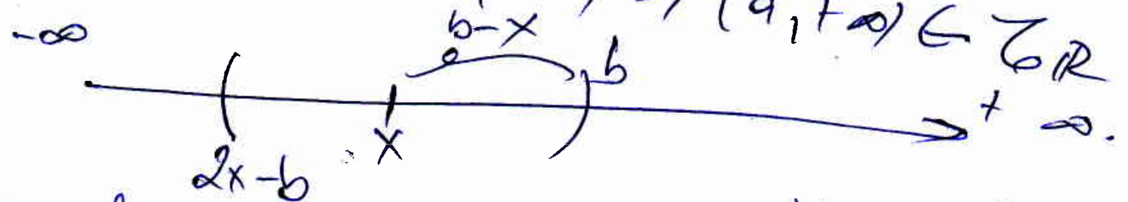
b) $[a,b], [a,+\infty), (-\infty,b]$ sunt mulț închise

c) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ mulț închise

Rez Dacă $a \geq b$ $(a,b) \in \tau_{\mathbb{R}}$

Dacă $a<b$ $(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) \in \tau_{\mathbb{R}}$

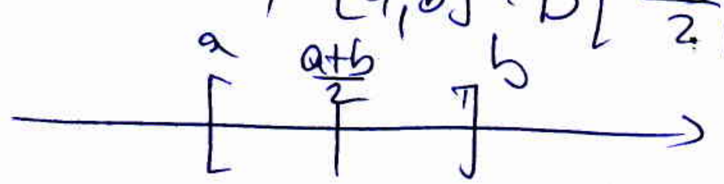
Se observă că pt $\forall x \in (a,\infty)$ $\exists r = x-a > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subseteq (a,+\infty) \Rightarrow (a,+\infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$



Se observă că pt $\forall x \in (-\infty, b)$ $\exists r = b-x > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subseteq (-\infty, b) \Rightarrow (-\infty,b) \in \tau_{\mathbb{R}}$

b) • $a>b$ $[a,b] = \emptyset$ mulț închisă în $\mathbb{R}$

• $a \leq b \Rightarrow [a,b] = B\left[\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right] \Rightarrow [a,b]$ închisă



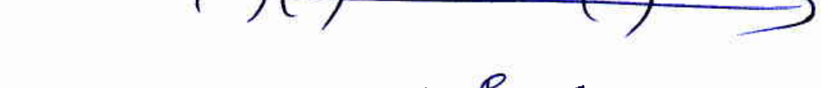
$b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$.

$C_{\mathbb{R}}[a,+\infty) = \mathbb{R} \setminus [a,\infty) = (-\infty, a) \in \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$\Rightarrow [a,+\infty)$ închisă

La fel pt $(-\infty, b]$

c) $C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,2) \ldots \cup (n,n+1) \cup \ldots$



$= \underbrace{(-\infty,0)}_{\in\tau_{\mathbb{R}}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n,n+1)\right)}_{\in\tau_{\mathbb{R}}}$ e o reuniune inf. de deschise $\Rightarrow \in \tau_{\mathbb{R}}$.

$\Rightarrow \mathbb{N}$ e închisă

$C_{\mathbb{R}}\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n,n+1) \in \tau_{\mathbb{R}}$ ....

3) Arătați că

a) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nu sunt mulț. deschise în $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nu sunt mulț. închise în $\mathbb{R}$.

a) R. la absurd

Pp că $\mathbb{Q}\in\tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{Q}\ \exists r>0$ a.î. $(x-r,x+r)\subseteq\mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ în intervalul $(x-r,x+r)$ sunt numai nr. raționale

Se știe că în orice interval de nr. reale $\exists$ al puțin un nr. irațional și el putem cu un nr. x_0

$\Rightarrow \mathbb{Q}\notin\tau_{\mathbb{R}}$.

Pp că $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\in\tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. ... la fel.

b) $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nu e deschisă $\Rightarrow \mathbb{Q}$ nu e închisă —

$C_{\mathbb{R}}\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ — — —

<u>Ex 4</u> Fie $a<b\in\mathbb{Q}$. Arătați că $[a,b)$ nu e mulț. deschisă în $\mathbb{R}$ și nici închisă

<u>Obs</u> $G\neq\emptyset$ nu e mulț. deschisă $\Leftrightarrow \exists x_0\in G$ a.î. $\forall r>0\ (x_0-r,x_0+r)\not\subseteq G$

Se obs. că $\exists a\in[a,b)$ pt. a $r>0$ $(a-r,a+r)\not\subseteq[a,b)$

$\Rightarrow$ nu e deschisă

$C_{\mathbb{R}}[a,b) = (-\infty,a)\cup[b,\infty)$

. . .

Analiza topologică a unei mulțimi dintr-un spațiu metric.

$A \subseteq (X, d)$

Analiza top $\Leftrightarrow$ $\mathring{A} = ?$ $\bar{A} = ?$, $A' = ?$ $\mathrm{Fr}\,A = ?$

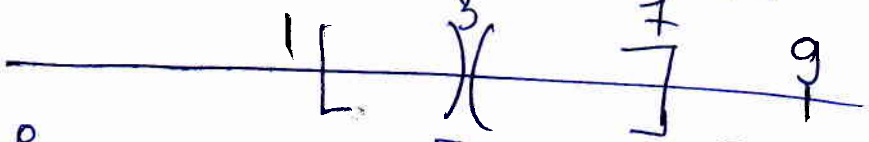
Izo A

Ex 1. $A = ([1,7] \setminus \{3\}) \cup \{9\} = [1,3) \cup (3,7] \cup \{9\}$

P1 $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}_d(x) \Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B(x,r) \subseteq A$

$x \notin \mathring{A} \Leftrightarrow \forall\, r > 0 \ B(x,r) \not\subseteq A$



$\mathring{A} \subseteq A \Rightarrow \mathring{A} \subseteq [1,3) \cup (3,7] \cup \{9\}$.

$\mathring{A} = (1,3) \cup (3,7)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (1,3) \in \tau_{\mathbb{R}} \\ (1,3) \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow (1,3) \subseteq \mathring{A} \\ \left.\begin{array}{l} (3,7) \in \tau_{\mathbb{R}} \\ (3,7) \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow (3,7) \subseteq \mathring{A} \end{array}\right\} \Rightarrow (1,3) \cup (3,7) \subseteq \mathring{A}$$

$(1,3) \cup (3,7) \subseteq \mathring{A} \subset [1,3) \cup (3,7] \cup \{9\}$.

1, 3, 7 sunt pct (interioare)

Obs că $\forall\, r > 0 \ B(1,r) \not\subseteq A \Rightarrow 1 \notin \mathring{A}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Obs că } \forall\, r > 0 \ B(7,r) \not\subseteq A \\ \forall\, r > 0 \ B(9,r) \not\subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow 7, 9 \notin \mathring{A}.$$

$\Rightarrow \mathring{A} = (1,3) \cup (3,7)$

$\mathring{A} \subsetneq A \Rightarrow A \notin \tau_{\mathbb{R}}$???

(verificați că da)

P2 $\bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

$x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \ B(x, r) \cap A = \emptyset$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow [1,3) \cup (3,7] \cup \{9\} \subseteq \bar{A}$?

$[1,7] \cup \{9\} = \underbrace{[1,7]}_{\text{închisă}} \cup \underbrace{[9,9]}_{\text{închisă}} \Rightarrow$ închisă

$A \subseteq [1,7] \cup \{9\}$

$\Big\} \ \bar{A} \subseteq [1,7] \cup \{9\}$

$[1,3) \cup (3,7] \cup \{9\} \subseteq \bar{A} \subseteq [1,7] \cup \{9\}$.

$3 \in \bar{A}$?

$x_n = 3 + \frac{1}{n} \ n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} x_n = 3$

$x_n \in (3,4] \Rightarrow x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Big\} \Rightarrow 3 \in \bar{A}$

Obs că $\forall r > 0 \ B(3, r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow 3 \in \bar{A}$

$\bar{A} = [1,7] \cup \{9\}$

$A \subset \bar{A} \Rightarrow A$ nu e mulț închisă

$\mathrm{Fr}\, A = \bar{A} - \mathring{A} = \{1, 3, 7, 9\}$

$A' \subseteq \bar{A}$

P3: $A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B(x, r) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

$x \notin A' \Leftrightarrow \exists r > 0 \ B(x, r) \cap (A - \{x\}) = \emptyset$

$x \in A' \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ cu $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$

$x_n \neq x \ \forall n \in \mathbb{N}$

$A' \subseteq \bar{A} = \bar{A} \subseteq [1,7] \cup \{9\}$

$1 \in A'$

Se obs că $\forall r>0$ $B(1,r) \cap (A \setminus \{1\}) \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \in A'$

Se obs că $\forall r>0$ $B(7,r) \cap (A \setminus \{7\}) \neq \emptyset$ (e ok) $\Rightarrow$
$\Rightarrow 7 \in A'$?

Obs că $B(9,1) \cap (A \setminus \{9\}) = \emptyset \Rightarrow 9 \notin A'$

Obs că pt $(1,7)$ $\exists r \geq 0$ $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow (1,7) \subseteq A'$

$A' = [1,7]$.

<u>P4</u> Izo A

$x \in \text{Izo}\,A \Leftrightarrow \exists r_0$ a.î. $B(x,r) \cap A = \{x\}$

$\text{Izo}\,A \subseteq A \setminus A' = \text{Izo}\,A = \{9\}$.

Obs că $B(9,1) \cap A = \{9\} \Rightarrow 9 \in \text{Izo}\,A \Rightarrow \text{Izo}\,A\,9$

<u>Prop</u> $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
a.î. $x_n \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n \to \infty} x_n =$
$= \lim\limits_{n \to \infty} y_n = x$

a) Anal top a lui $\mathbb{Q}$

Rez: $\mathring{\mathbb{Q}}$

R la abs. ~~$\mathring{\mathbb{Q}}$~~

Pp că $\mathring{\mathbb{Q}} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathring{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow \exists r>0$ a.î.
$B(x,r) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \exists r \geq 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subseteq \mathbb{Q}$. ..... Abs.

$\overline{\mathbb{Q}} = ?$ Dem $\overline{\mathbb{Q}} \overset{1''\subseteq}{\underset{2''}{=}} \mathbb{R}$

2'' Fie $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ a.î. $x_n \neq x \ \forall n \in \mathbb{N}$

și $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in \mathbb{Q}' \Rightarrow x \in \overline{\mathbb{Q}}$

$\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}' \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

Serii

Ex 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

$x_n = \frac{1}{n(n+2)}$

$s_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{4} \Rightarrow$ e conv. . . .

Natura lui $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

$\lim_{n\to\infty} s_n = ?$

Folosim criterii:

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ nu merge

R. Altul:

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{n} - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha$

I $\alpha < 1 \Rightarrow$ seria div. cu suma $+\infty$

II $\alpha > 1 \Rightarrow$ seria conv.

III $\alpha = 1$. (În cazul în care punerea ar fi altă seriem nu merge aici.)

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \Rightarrow$ div.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{conv pt } \alpha > 1 \\ \text{div pt } \alpha \leq 1 \end{cases}}$$ seria ~~conv~~ armonică

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \begin{cases} \text{absolut conv pt } |a| < 1 \quad (a \in (-1,1)) \\ \text{div pt } |a| \geq 1 \end{cases}$$

Începeți până

Restul primăvară !!!

3.10.2012

ANALIZĂ

S1

Şiruri de numere reale

Def Sn. şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ este convergent dacă $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x_n - x| < \varepsilon}_{x_n \in (x-\varepsilon,\, x+\varepsilon)\ \forall n \geq n_\varepsilon}$

• $\forall V \in \mathcal{V}_x\ \exists n_V \geq 1$ a.î. $\forall n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$

$x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n > \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n < \varepsilon$

• $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$x_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1$

$x = 0$

Fie $\varepsilon > 0$, ? $n_\varepsilon \geq 1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon\ \ |x_n| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

$n = n_\varepsilon\ \ \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \to n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

pt $\varepsilon > 0$

$\exists\ n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

aî $\underline{\forall n \geq n_\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$(x_n)_n$ e conv și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Șiruri
- cu limită
  - ∞
  - $-\infty$
  - finită $\rightarrow$ convergent
- fără limită

<u>Criteriul raportului</u> pentru șiruri cu termeni pozitivi

$x_n > 0\ \forall n$.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty]$ atunci:

1) $l < 1 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
2) $l > 1 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$
3) $l = 1$ nu se știe nimic despre convergența lui $(x_n)_{n\geq 1}$

ex: $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a^n$

$x_n = n \cdot a^n$ $\quad a > 0,\ n \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{n\, a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot a = a$$

Dacă $a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $\quad (x_n)_{n\geq 1}$ convergent

$a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ $\quad (x_n)_{n\geq 1}$ divergent

$a = 1 \Rightarrow \cancel{(x_n)_n \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty}$

$\Rightarrow x_n = n \cdot 1^n = n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Concluzie!

Criteriul radicalului

$x_n > 0 \ \forall \ n \geq 1$

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0,+\infty]$ atunci $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

Ex $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Criteriul Stolz - Cesaro

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ a.î.

i) y_n strict crescator și nemărginit

ii) $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Ex $(x_n)_{n\geq 0}$ șir convergent la x.

Cât este $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$

fie $a_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad n \geq 1$

fie $b_n = n$

i) b_n strict crescator și nemărginit

$(b_{n+1} > b_n \Leftrightarrow n+1 > n)$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{1} = x$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\dots+x_n}{n} = x$

$a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $n \geq 1$ $\longrightarrow a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

$$x(U) \begin{cases} x_n = \sqrt[n]{n!} \\ y_n = n \text{ — } ~~eres~~ \text{ strict crescător și nemărginit} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \text{ NU!} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{-n}{n+1}} = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$

ALTF

- Criteriul clestelui

- Weierstrass

Ip $(n+1)x_{n+1}^2 - n x_n^2 < 0$ $n \geq 1$

C $\exists \lim n\to\infty\ x_n$?

- $x_n = \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ $\frac{(n+1)}{(n+1)^2} - \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} =$

$$= \frac{n - n - 1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} < 0$$

- $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

Notăm $n x_n^2 = y_n$

Din ip: $y_{n+1} - y_n < 0$ $\forall n \geq 1$ $\Rightarrow y_n$ strict descrescător

$y_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\left.\begin{matrix} n \geq 0 \\ x_n^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Uparrow \quad \Rightarrow \text{ e mărg inf. } \Big\} \xrightarrow{\text{Weierstrass}} y_n \text{ conv.}$$

și din $\downarrow$ $\Rightarrow$ e mărg sup

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l \in \mathbb{R}$

$$0 \leq x_n^2 = \frac{y_n}{n} < \frac{y_1}{n}$$

$y_n < y_1$

$\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

<u>Ex</u> $(x_n)_{n\geq 0}$ $x_n = \frac{10}{1} + \frac{11}{3} + \ldots + \frac{10+n}{2n+1}$ e convergent?

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{10+k}{2k+1}$$

~~$x_{n+1} - x_n$~~

$$\frac{10+n}{2n+1} > \frac{1}{2} \quad \left(\frac{10}{1} > \frac{10+n}{2n+1}, \ \frac{11}{3} > \frac{10+n}{2n+1}, \ldots \right)$$

$x_n > \frac{n+1}{2} \to \infty \Rightarrow x_n \to \infty \Rightarrow$ e divergent

<u>Ex</u> $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1$, $x_0 \in (0,1)$ $(x_n)_{n\geq 0}$ e convergent?

Inducție dem că $0 < x_n < 1 \quad \forall n \geq 0$

Vf. $x_0 \in (0,1)$ ~~verifica~~ adevărat

Pp adev P_k $x_k \in (0,1)$

Dem $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ $x_{k+1} = x_k^2(x_k - 1) + 1 \quad \in (0,1)$

$x_k^2 < 1$, < 0 $\Rightarrow x_k^2(x_k - 1) > -1$

$\Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ monoton (1)

$x_{n+1} - x_n = x_n^3 - x_n^2 + 1 - x_n = x_n^2(x_n - 1) - (x_n - 1) =$

$= (x_n^2 - 1)(x_n - 1) > 0 \Rightarrow \cancel{x_{n+1}}$

$(x_n)_{n\geq 1} \nearrow (2)$

(1), (2) $\xrightarrow{W}$ $(x_n)_{n\geq 0}$ convergent $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \quad l \in [0,1]$

$l = l^3 - l^2 + 1 \Rightarrow 0 = (l-1)^2(l+1)$

$\Rightarrow l = 1 \quad \underline{l = -1 \text{ Nu}}$

17.10.2012

ANALIZĂ

S2

$\{A_i\}_{i\in I}$

1) $A\cap\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(A_i\cap A)$

2) $A\cup\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$

3) $A\cap\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$

$X\neq\emptyset$

$(A_i)_{i\in I}\subset\mathcal{P}(X)$

1) Fie $x\in A\cap\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\Leftrightarrow x\in A$ și $x\in\bigcap_{i\in I}A_i\Rightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A$ și ~~ot~~ or. $i\in I$ $x\in A_i\Leftrightarrow$ or. $i\in I$ $x\in A$ și $x\in A_i\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$ or. $i\in I$ $x\in A\cap A_i\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}(A\cap A_i)$

2) Fie $x\in A\cup\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\Leftrightarrow x\in A$ sau $x\in\bigcap_{i\in I}A_i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A$ sau ~~or~~ $i\in I$ ai $x\in A_i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ~~or~~ $i\in I$ $x\in A$ sau $x\in A_i\Leftrightarrow$ or. $i\in I$ $x\in A\cup A_i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$

3) Fie $x\in A\cap\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\Leftrightarrow x\in A$ și $x\in\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A$ și $\exists\, i\in I$ ai $x\in A_i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\exists\, i\in I$ ai $x\in A$ și $x\in A_i\Leftrightarrow\exists\, i\in I$ ai $x\in A\cap A_i$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$

Legile lui de Morgan

$$A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \setminus A_i)$$

Fie $x \in A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$ și $x \in A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ~~ex~~ $i \in I$ a.î. $x \notin A_i$ și $x \in A \Rightarrow$ ~~ex $i \in I$~~ $\Rightarrow$
$\Leftrightarrow \forall i \in I \ x \in A \setminus A_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I}(A \setminus A_i)$

$$A \setminus B = A \cap C_X B$$

- $X, Y \neq \emptyset$

Ex Fie $f: X \to Y$, $(B_i)_{i\in I} \subset Y$ o fam de submulț. Atunci:

i) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

(T.) ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

i) Fie $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists i \in I$ a.î. $f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I$ a.î. $x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)\right) \Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

Ex Fie $f: X \to Y$, $(A_i)_{i\in I} \subseteq X$ o fam de m.

i) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

ii) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

iii) Dacă f e inj $\Rightarrow f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

iv) reciproc

1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

$\underline{A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i} \Rightarrow f(A_i) \subset f(\bigcup_{i\in I} A_i) \ \forall i\in I \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\bigcup_{i\in I} f(A_i) \subset f(\bigcup_{i\in I} A_i)}$

Reciproc: Fie $\underline{y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i)} \Rightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ a.î. $f(x)=y$

$\Rightarrow \exists i \in I$ a.î. $x \in A_i$ a.î. $f(x)=y \Rightarrow \exists i\in I$ a.î. $\underbrace{f(x)}_{y} \in f(A_i)$

$\Rightarrow \underline{y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)}$

ii) $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_i \ \forall i\in I \Rightarrow f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset f(A_i) \ \forall i\in I \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

iii) $\underline{f \text{ inj}}$

Vrem $\bigcap_{i\in I} f(A_i) \subset f(\bigcap_{i\in I} A_i)$

~~$x \in \bigcap_{i\in I} f(A_i) \Rightarrow \forall i\in I \ x \in f(A_i)$~~

Fie $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i) \Rightarrow \forall i\in I \ y \in f(A_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i\in I \ \exists x_i \in A_i$ a.î. $f(x_i) = y \xrightarrow{f \text{ inj}} y = f(x_i) = f(x_j)$

$\Rightarrow \underset{\in A_i}{x_i} = \underset{\in A_j}{x_j}$ ~~din~~ $\in \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists x_i = x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ a.î. $f(x)=y$

ARHITECTURĂ
~~CURS~~ 3

$\Rightarrow y \in f(\bigcap_{i \in I} A_i)$

iv) Pp că $I = \{1,2\}$ și $A_1, A_2 \subseteq X$

$A_1 = \{x_1\}$

$A_2 = \{x_2\}$

Din ip: $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

$f(A_1) = f(x_1)$

$f(A_2) = f(x_2)$

~~Dacă $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset \overset{(1)}{\Rightarrow} f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow f\ A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow x_1 \neq x_2$~~

Dacă $x_1 \neq x_2 \Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset \rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \Rightarrow f$ inj ?

(t.) Ex. Fie $f: X \rightarrow Y$ atunci $\quad$ (f^{-1} - preimagine)

a) $\forall A \subset X \Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$

b) f inj $\Leftrightarrow A = f^{-1}(f(A))$

Fie $f: X \rightarrow Y$

a) $\forall B \subset X \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B$

b) f surj $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B \ \forall B \subset Y$

/

ANALIZĂ

S3

Def. $X \neq \emptyset$ $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$

$\tau \subset \mathcal{P}(X)$ s.n. topologie dacă: 1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $G_i \in \tau \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in G$

3) $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

Perechea (X, τ) s.n. spațiu topologic

$D \in \tau$ s.n. mulțimi deschise

$F \subseteq X$ s.n. închisă dacă $C_X F = X \setminus F \in \tau$

• $x \in X$

$V \subseteq X$ s.n. vecinătate a lui x, dacă $\exists G$ a.î. $x \in G \subset V$

$X = \mathbb{R}$

$\tau_{\mathbb{R}} = \{\emptyset\} \cup \{G \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in G \ \exists \varepsilon > 0$ a.î. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G\}$

i) $\tau_{\mathbb{R}}$ e topologie pe $\mathbb{R}$ – se numește topologia uzuală pe $\mathbb{R}$

~~ii)~~ $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ s.t.

Dem Vrem $\tau_{\mathbb{R}}$ topologie pe $\mathbb{R}$

1) $\emptyset \in \tau$ evident

$\mathbb{R} \in \tau_{\mathbb{R}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists \varepsilon_x > 0$ a.î. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ ok

2) Dacă $G_i = \emptyset$ $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau_{\mathbb{R}}$

Dacă $\exists i_0 \in I$ a.î. $G_{i_0} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \neq \emptyset$

Fie $x \in \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \exists i \in I$ a.î. $\left.\begin{matrix} x \in G_i \\ G_i \in \tau_{\mathbb{R}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ a.î. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_i$

$\Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau_{\mathbb{R}}$

3) Dacă $G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau_{\mathbb{R}}$

Dacă $G_1 \cap G_2 \neq 0 \Rightarrow$

Fie $x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow x \in G_1 \wedge x \in G_2$

$x \in G_1 \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0$ a.î. $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subset G_1$

$x \in G_2 \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0$ a.î. $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset G_2$

Alegem $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0 \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (G_1 \cap G_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau_{\mathbb{R}}$

• Dacă $a < b$, arătați că $(a, b) \in \tau_{\mathbb{R}}$

Fie $x \in (a, b) \Rightarrow a < x < b$

Fie $\varepsilon = \min(x-a, b-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a, b)$

$C_{\mathbb{R}}[a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ închise în $\tau_{\mathbb{R}}$

$C\mathbb{Z} = \mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$

$C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} = (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ mulțimi rare

1) $[a,b)$ – nu e ~~desca~~ deschisă, nu e închisă

a [ ) b

$\exists\ x = a$ a.î. $\forall\ \varepsilon > 0\ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \not\subset [a,b) \Rightarrow$

$\underline{a-\varepsilon \notin}$

$\Rightarrow$ nu e deschisă.

2) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ – nu sunt nici deschise, nici închise

Pp $\mathbb{Q}$ mul deschisă $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}\ \exists\ \varepsilon > 0$ a.î.

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{Q}$

$\exists\ y \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ a.î. $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \Rightarrow y \notin \mathbb{Q}$ ✗

MRA

Pp $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \in \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \exists\ \varepsilon > 0$ a.î. $(x-\varepsilon$

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}-\mathbb{Q}$

$\exists\ y \in \mathbb{Q}$ a.î. $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \Rightarrow y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ✗

Spații metrice

Def. $X \neq \emptyset$

$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ s.n. distanță (metrică)

pe X dacă

1) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall \; x, y, z \in X$

31.10.2012

ANALIZĂ
S5
Relații de ordine

Def. Fie $X \neq \emptyset$
S.n. rel de ordine pe X o mț $\rho \subset X \times X$ cu prop $\forall x, y, z \in X$
1) $x \rho x$ $\forall x \in X$ (refl)
2) $x \rho y$ și $y \rho x \Rightarrow x = y$ $\forall x, y \in X$ (antisim)
3) $x \rho y$ și $y \rho z \Rightarrow x \rho z$ (tranz)

$(X, \leq)$ - mț ordonată

Def. Dacă $\forall x, y$ $x \rho y$ și $y \rho x$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x \Rightarrow$ rel de ordine totală

Def. $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, A majorată dacă are majoranți

• $\alpha \in X$ s.n. majorant pt A dacă $\forall x \in A$, $x \leq \alpha$
$A^* = \{\alpha \in X \mid \alpha$ majorant pt $A\} \Rightarrow A$ s.n. majorată

• $\sup A = \min A^*$

$(X, \leq)$ mț ord.
$A \neq \emptyset$
$a = \min A$ ~~dacă~~ dacă $a \in A$ și $\forall x \in A \Rightarrow a \leq x$

Def. $(X, \leq)$ complet ordonată $\Leftrightarrow$ Orice parte nevidă majorată are marg sup.

Def. $(X, \leq)$
~~Spunem că~~ Spunem că $(X, \leq)$ este complet ordonată dacă „Orice parte $(A \subseteq X)$, nevidă majorată are marg sup"

Ex

$X \neq \emptyset$

$(\mathcal{P}(X), \leq)$ $\quad A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$

1) Refl.

$\forall A \in \mathcal{P}(X)$ $A \subseteq A$ evident

2) Antisim

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$ evident

3) Tranzitivitate

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq C$ evident

$\Rightarrow$ e rel de ordine.

Complet ordonată?

1) Fie $\cancel{A \in} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}$

$\mathcal{F}$ este majorată: $\forall A_i \in \mathcal{F}$ $\exists X$ a.î. $A_i \subseteq X$
$X \in \mathcal{P}(X)$

2) Vrem să arătăm că $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{P}(X)$

i) $\forall A_i \in \mathcal{F}$ avem că $A_i \subseteq A_0$, unde $A_0 = \sup \mathcal{F}$

ii) $\cancel{\forall C \in \mathcal{P}(X)}$
$\forall B \in \mathcal{P}(X)$ a.î. $A_i \subseteq B$ $\forall i \in I$ $\Rightarrow A_0 \subseteq B$

i) Fie $A_0 = \bigcup_{i \in I} A_i$ $\quad A_0 \in \mathcal{P}(X)$

Evident $\forall A_i \in \mathcal{P}(X)$ $A_i \subseteq A_0$

ii) Fie $B \in \mathcal{P}(X)$ a.î. $A_i \subseteq B$ $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B \Rightarrow$
$\Rightarrow A_0 \subseteq B$

$\left.\begin{array}{l} \forall (\mathcal{F}(X), \subseteq) \text{ parte nevidă majorată își are} \\ \Rightarrow \sup \mathcal{F} = A_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(\mathcal{P}(X), \leq)$ complet ordonată

Ex. $Card(X) \geq 2$ atunci $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ nu este total ord. Pp total ord.

Fie $A = \{a\} \subset \mathcal{P}(X)$ $B = \{b\} \subset \mathcal{P}(X) \Rightarrow$
nici $A \not\leq B$, nici $B \not\leq A \Rightarrow$ nu e tot ord.

Ex: 1) $(\mathbb{Q}, \leq)$ este mult total ord.
2) $(\mathbb{Q}, \leq)$ nu este complet ord.

1) $(\mathbb{N}, \leq)$ e total ordonata
$\mathbb{Z} = \{-x, x \mid x \in \mathbb{N}\}$
Fie $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $b, d \in \mathbb{N}^*$ și $a, c \in \mathbb{Z}$

Vrem $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ sau $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$
$\Updownarrow$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \leq 0$ sau $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \leq 0$

$\left.\begin{array}{l} \frac{ad - cb}{bd} \leq 0 \text{ sau } \frac{cb - ad}{bd} \leq 0 \\ bd \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \underset{\in\mathbb{Z}}{ad} \leq \underset{\in\mathbb{Z}}{cb} \text{ sau } \underset{\in\mathbb{Z}}{cb} \leq \underset{\in\mathbb{Z}}{ad} \\ (\mathbb{Z}, \leq) \text{ total ord} \end{array}\right\} \Rightarrow$ sunt comp.

$\Rightarrow (\mathbb{Q}, \leq)$ total ordonată

2) $\forall A \subseteq \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$, A majorată, $\exists \sup A \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}$ nu e complet ordonată dacă $\exists A \subseteq \mathbb{Q}$ nevidă, majorată, dar $\sup A \notin \mathbb{Q}$
Fie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$ $1 \in A$
A majorată de 3, $\forall x \in A$ $x \leq 3$
MRA: $(\mathbb{Q}, \leq)$ - complet ord $\Rightarrow \exists M = \sup A \in \mathbb{Q}$
1°) $M^2 < 2$ $M^2 = 2$ imposibil deoarece $M \in \mathbb{Q}$
2°) $M^2 > 2$

$\left(M + \frac{1}{n_0}\right)^2$??? $\in A$

Happy H!!!! :D Trick or treat?

1°) Fie $b = \frac{2-M^2}{2(M+1)^2} \in \mathbb{Q}$ $\quad M^2 < 2 \Rightarrow b > 0$

Arătăm $M+b \in A \Leftrightarrow (M+b)^2 < 2$

$b < \frac{1}{(M+1)^2} < 1$

$b \cdot (M+1)^2 = \frac{2-M^2}{2} < 1$

$(M+b)^2 = M^2 + 2bM + b^2 =$
$= M^2 + 2bM + b =$
$= M^2 + 2bM + b + M^2 b =$
$= M^2 + b(M+1)^2 = \cancel{M^2+b}$
$= M^2 + \frac{2-M^2}{2} =$
$= \frac{2+M^2}{2} < \frac{2+2}{2} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (M+b)^2 < 2 \Rightarrow M+b \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow M+b \leq M \Rightarrow b \leq 0$ $\not>0$

2°) Fie $c = \frac{M^2-2}{2(M+1)^2} \in \mathbb{Q}$ $\quad c > 0$

Arătăm $(M-c)^2 > 2 \Rightarrow M-c$ este majorant pt A ($\forall x \in A$, $x \leq M-c$) $\forall x \in A$ avem $x^2 < 2 < (M-c)^2$

Obs că $\cancel{(M-c)^2}$ $c < 1$ pt că $\frac{M^2-2}{2(M+1)^2} < 1 \Rightarrow$
$\Leftrightarrow M^2 - 2 < 2(M+1)^2 \Leftrightarrow M^2 - 2 < 2M^2 + 4M + 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 < \underbrace{M^2 + 4M + 4}_{(M+2)^2}$ A

Atunci $(M-c)^2 = M^2 - 2Mc + c^2 > M^2 - 2Mc - c >$
$> M^2 - 2Mc - c - M^2 c = M^2 - c(2M + 1 + M^2) = M^2 - c(M+1)^2 =$
$= M^2 - \frac{M^2-2}{2} = \frac{M^2+2}{2} > \frac{2+2}{2} = 2$
$M^2 > 2$

Concluzii $(M-c)^2 > 2$

$\left.\begin{array}{l} (M-c) \in \mathbb{Q} \\ M-c > 0 \\ M>1,\ c>1 \end{array}\right\} \Rightarrow M-c \notin A$

$M-c$ este maj pt A

$\forall x \in A \Rightarrow x^2 < 2 < (M-c)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M-c \geq M$ imposibil

Pe $\mathbb{C}$ definim $z_1 \leq z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 \leq \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 \leq \operatorname{Im} z_2 \end{cases}$ și

1) Dem că $\leq$ rel de ord

2) $(\mathbb{C}, \leq)$ complet ord.

3) $(\mathbb{C}, \leq)$ nu e total ord.

1) Refl. se vede
Antisim. la fel
Tranz. se vede

2) temă

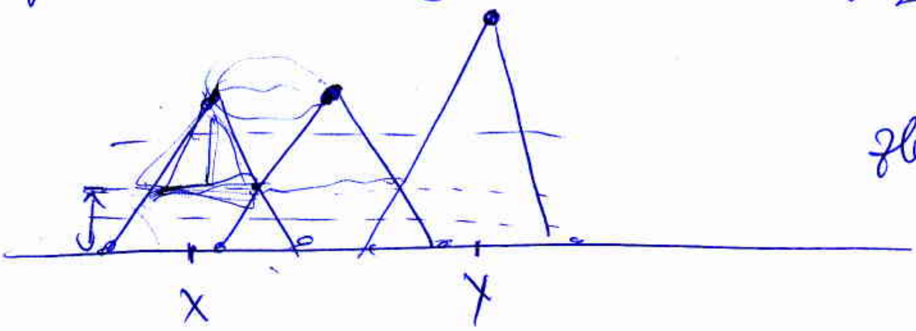
3) trivial (se vede că $2+3i$ și $3+2i$ nu sunt comp)

2) Fie $A \subset \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$, A maj $\Rightarrow \sup A \in \mathbb{C}$

$\exists M \in \mathbb{C}$ a.î. $\forall z \in A$ $z \leq M \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} M \\ \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} M \end{cases}$

$N \le 50000$

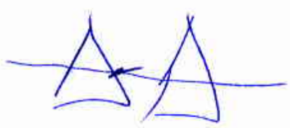
puncte – triunghiuri isoscele   9 zecimale

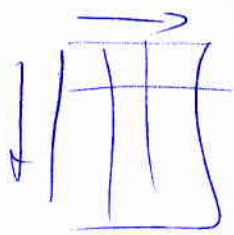


Acu ai să nu fii niciodată în afara Δ

$N \le 100000$ Discuri de tip turnuri din Hanoi

Se primesc succesiv discuri





$O(m+n)$

sortate pe linii și pe coloane

caut un element

~~stg~~ caut binar

1 2 3 4 5 6 7

1 3 7 10 14 22 30 Vreau să găsesc ~~elementele~~ care dau suma x

$O(n \log n)$ e evident

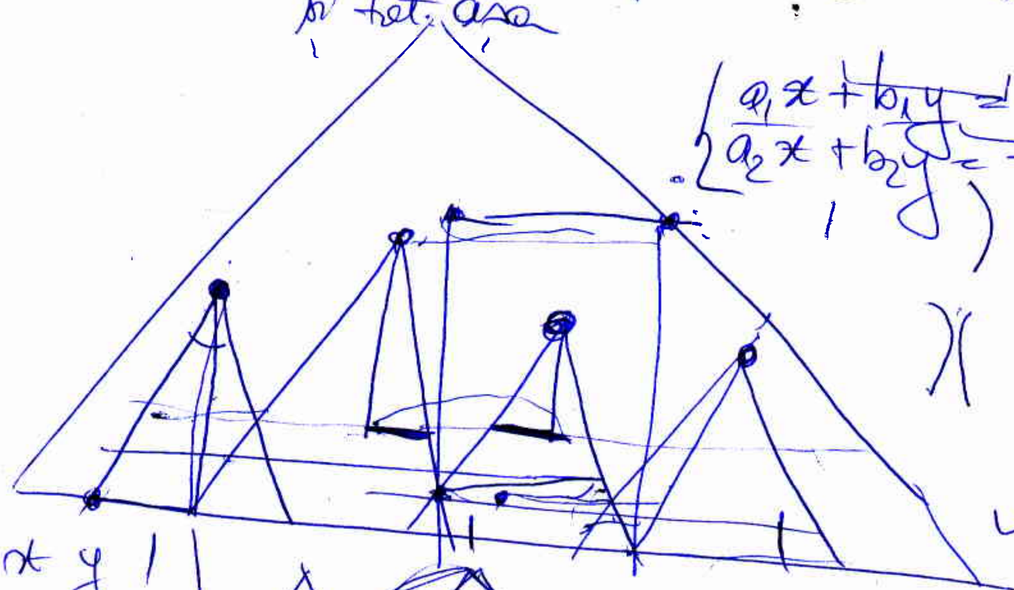
$O(n)$

ex 21. pt un a[i] caut ~~dun~~ complementare

Pt 1 ----> $k = 5$

pt 3 caut mai la st k

și tot așa



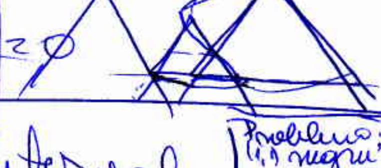
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = -c_1 \\ a_2 x + b_2 y = -c_2 \end{cases}$$

$O(n \log dn)$

$\le$

www.codechef.com

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Intervale | Problema: Tablă de șah 5x5 (1,1) negru Se întreabă

transport2

Factorial

Loto

Bete