April 2, 2020

Rezultate privind dualitatea

Sa consideram cuplul de probleme duale
1) $\min_{x \in P} \; c^T x$ si 2) $\max_{u \in D} \; b^T u$,

unde P este multimea solutiilor admisibile pentru problema primala si D este multimea solutiilor admisibile pentru problema duala:

$P = \{x \in R^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ si
$D = \{u \in R^m : A^T u \leq c, u \geq 0\}$.

Teorema slaba a ecarturilor complementare

Conditia necesara si suficienta ca $x^* \in P$ si $u^* \in D$ sa fie solutii optime ale celor doua probleme duale 1) si 2) este ca sa fie indeplinite conditiile:

$(u^*)^T (Ax^* - b) = 0$
$(x^*)^T (c - A^T u^*) = 0 \qquad (3)$

Observatii

Conditiile (3) sunt echivalente cu:

$u_i^* (a_i^T x^* - b_i) = 0$, $1 \leq i \leq m$
$x_j^* (c_j - (a^j)^T u^*) = 0$, $1 \leq j \leq n$,

unde a_i este linia i a matricei A, iar a^j este coloana j a matricei A.

Rezulta deci implicatiile:

$u_i^* > 0 \Longrightarrow a_i^T x^* - b_i = 0$
$a_i^T x^* - b_i > 0 \Longrightarrow u_i^* = 0$
$x_j^* > 0 \Longrightarrow c_j - (a^j)^T u^* = 0$
$c_j - (a^j)^T u^* > 0 \Longrightarrow x_j^* = 0$