18 Martie 2019

Curs 5

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5 & A^6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \underbrace{0 & 0 & 1}_{B} \end{pmatrix} \end{array}$$

$B = \{4, 5, 6\}$ $\quad R = \{1, 2, 3\}$

$x = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T$

$\quad\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3$

$$d^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to i=4 \\ \to i=5 \\ \to i=6 \\ \} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -B^{-1}A^1 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

alegem $x_1$ să intre în bază

Criteriul de ieșire din bază:

$$\alpha = \min_{k \in \{4,5,6\}} \left\{ -\frac{x_k}{d^1_k} \right\} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} = -\frac{x_4}{d^1_4}$$

$B' = \{1, 5, 6\}$, $R' = \{2, 3, 4\}$

$$x^{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to x_1 \\ \to x_5 \\ \to x_6 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Met II: $d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} e_j \\ -B^{-1}A^j \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to x_1 \\ \\ \\ \\ \to x_5 \\ \to x_6 \end{matrix}$$

Enunțul ar putea fi:

Fie problema ....

Găsiți o bază primal admis. și efectuați un pas al alg. simplex primal.

$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + \alpha d^j \\ \text{Lema subst: } B \xrightarrow{i \to j} B' \\ B^{-1} \to (B')^{-1} \end{array} \right.$

## DETERMINAREA UNEI BAZE PRIMAL ADMISIBILE

EX: $\left\{ \begin{array}{l} \min (2x_1 + 3x_2) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \quad + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + \ldots + x_5 = 1 \end{array} \right.$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Metoda celor 2 faze:

Faza I: $x_1^a, x_2^a, x_4^a$

Rez. pt inf $x_1^a + x_2^a + x_4^a$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_1^a = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_2^a = 1 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + x_4^a = 2 \\ x_1, \dots, x_5, x_1^a, \dots, x_4^a \geq 0 \end{cases}$$

$$c' = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)^T$$

Aplicăm alg. simplex

$x_1^a \to x_1$ v. b $x_1, x_2^a, x_5, x_4^a$

$x_2^a \to x_2$ v. b. $x_1, x_2, x_5, x_4^a$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Baza inițială pt prob de opt.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (A^1, A^2, A^5)$$

$$x_B = B^{-1} b$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Am vrea să scoatem $x_4^a$ din bază și o înlocuim cu o var. init. $x_3$ sau $x_4$. criteriu de intrare: $x_4^a$

$$d^{4a} = \begin{pmatrix} -B^{-1} A^{4a} \\ e_{4a} \end{pmatrix}$$

criteriu de ieșire din bază:

$$\alpha = \min_{k \in \{3,4\}} \left\{ \frac{-x_k}{d^{4a}}, d_k^{4a} < 0 \right\}$$

- se dem. că ec. coresp. v. artif. $x^{4a}$ este o comb. lin. a celorlalte ec. și se elim.

$$d = \begin{pmatrix} -B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 1 \\ \to 2 \\ \to 3 \\ \to 4 \\ \to 5 \\ \to 6 \\ \to 7 \\ \to 8 \end{matrix}$$

Teoretic: Fie pr. min $c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

rang $A = m \leq n$

$b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Putem pp. $b \geq 0$

Faza I:

Rez. pr (2)

$$(2) \left| \begin{array}{l} \min x_1^a + x_2^a + \dots + x_m^a \\ Ax + x^a = b \\ x, x^a \geq 0 \end{array} \right.$$

Rez. pr. 2 cu alg. simplex.

baza init. coresp v. artif. $x_1^a, x_2^a, \dots$

$$B_1 = I_m$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1^a \\ \vdots \\ x_m^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B^{-1} b \\ I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b \\ b \end{pmatrix} \geq 0$$

sol. admis. de bază

Obținem o sol. de forma:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ x^{a*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_m^* \\ x_1^{a*} \\ \vdots \\ x_n^{a*} \end{pmatrix}$$

Cazul I:

$x^{a*} \neq 0 \Rightarrow$ pr. init. nu are sol. admis.

Cazul II:

$x^{a*} = 0$

II. 1. în baza curentă $\nexists$ var. artif. $\Rightarrow$ ac. bază poate fi luată ca pct. de plecare pt. pr. 1.

II. 2. în baza cur. $\exists$ v. artif.

Fie $x_k^a$ v. artif. de bază pe care vrem să o înlocuim cu o var. init. $x_j$, $j \in R$

dc. $e_j^T B^{-1} A^k \neq 0$
$\Rightarrow$ înlocuim $x_k^a$ cu $x_j$

$e_j^T B^{-1} A^k = 0$, $\forall j \in R$

ec. coresp. var. $x_k^a$ este comb. lin. a celorlalte ec. și se elimină

Degenerare și ciclare

(1) $\inf c^T x$

$Ax = b$
$x \geq 0$

$B$, $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$

Dacă $B^{-1} b$ are comp. nule $x$ s.n. sol. degenerată.

Ex: Min $-\frac{3}{4} x_4 + 20 x_5 - \frac{1}{2} x_6 + 6 x_7$

$x_1 + \frac{1}{4} x_4 - 8 x_5 - x_6 + 9 x_7 = 0$

$x_2 + \frac{1}{2} x_4 - 12 x_5 - \frac{1}{2} x_6 + 3 x_7 = 0$

$x_3 + x_6 = 1$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,7}$

Pr. are sol. optimă:

$x_1 = 3/4$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0$

val. optimă a f. obiectiv $= -\frac{5}{4}$

Dacă începem cu baza $\{x_1, x_2, x_3\}$

$\{x_4, x_2, x_3\}$

$\{x_4, x_5, x_3\}$

$\{x_6, x_5, x_3\}$

$\{x_6, x_7, x_3\}$

$\{x_1, x_7, x_3\}$

$\{x_1, x_2, x_3\}$

O regulă de evitare a ciclării : (regula lui Bland)

Crit. de intrare în bază:

I. $j \in R$: $r_j = \min_{k \in R} \{r_k : r_k < 0\}$

II. Bland: $j \in R$, $j = \min \{k \in R : r_k < 0\}$

Crit. de ieșire din bază:

I. $i \in B$ a.î. $-\frac{x_i}{d_i^j} = \min_{k \in B} \left\{ -\frac{x_k}{d_k^j}, d_k^j < 0 \right\} = \alpha$

II. Bland: se ia indicele minim pt. care $\alpha = -\frac{x_k}{d_k^j}$

TEORIA DUALITĂȚII ÎN OPTIMIZAREA LINIARĂ

(1) $\inf \{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

$c, x \in \mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$b \in \mathbb{R}^m$

$\text{rang } A = m \leq n$

Fie $x$ - sol. de bază coresp. bazei $B$

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$x$ e sol. opt $\iff$ $c_j - c_B^T B^{-1} A^j \geq 0, \forall j \in R$

Obs. $c_j - c_B^T B^{-1} A^j = 0, \forall j \in B$

$\Longleftrightarrow$ $c_B^T B^{-1} A^j \le c_j, \quad \forall j \in R$

$c_B^T B^{-1} A^j = c_j, \quad \forall j \in B$

$$\boxed{\text{Notăm } w^T = c_B^T \cdot B^{-1}}$$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} w^T A^j \le c_j, & j \in R \\ w^T A^j = c_j, & j \in B \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $w^T A \le c^T \Longleftrightarrow A^T w \le c$ (w nu are restr de semn)

Dc. $x = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$, $c^T x = \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{w^T} b + c_R^T \cdot 0 = c_B^T B^{-1} b = w^T b$

Pt. $x$ - sol. admis pt. (1)

$c^T x = c_B^T B^{-1} b + c_R^T x_R \ge c_B^T B^{-1} b = w^T b = b^T w$

Atașăm pr. (1), prob. duală (2):

(2) $\begin{cases} \max b^T w \\ A^T w \le c \\ w \text{ arbitrar ca semn} \end{cases}$ $w \in \mathbb{R}^m$

$\to$ ineg. concordante

(1) $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}^n$

Ex: min $2x_1 + 3x_2$

(1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \to w_1$

$x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 5 \to w_2$

$x \ge 0$

~~unde~~ Duala: (2) $\max 10w_1 + 5w_2$

$1w_1 + 1w_2 \le 2$

$2w_1 - 5w_2 \le 3$

$3w_1 - 7w_2 \le 0$

$4w_1 + 2w_2 \le 0$

$w_1, w_2$ arbitrar ca semn