ClusterAI

Ciencia de Datos en Ingeniería Industrial

clase_01

Análisis exploratorio de datos. Descripción estadística.

AI & Art

Obra de Robbie Barrat, artista. Imágenes creadas por una Generative Adversarial Network. https://robbiebarrat.github.io

AI & Art

Borges and AI

Léon Bottou [†] and Bernhard Schölkopf [‡]

† FAIR, Meta, New York, NY, USA

‡ Max Planck Institute for Intelligent Systems, Tübingen, Germany

Abstract

Many believe that Large Language Models (LLMs) open the era of Artificial Intelligence (AI). Some see opportunities while others see dangers. Yet both proponents and opponents grasp AI through the imagery popularised by science fiction. Will the machine become sentient and rebel against its creators? Will we experience a paperclip apocalypse? Before answering such questions, we should first ask whether this mental imagery provides a good description of the phenomenon at hand. Understanding weather patterns through the moods of the gods only goes so far. The present paper instead advocates understanding LLMs and their connection to AI through the imagery of Jorge Luis Borges, a master of 20th century literature, forerunner of magical realism, and precursor to postmodern literature. This exercise leads to a new perspective that illuminates the relation between language modelling and artificial intelligence.

agenda_clase_01

- Densidades y distribuciones de probabilidad
- Boxplot
- Outliers utilizando quantiles
- Correlaciòn Lineal (Pearson)

Lab

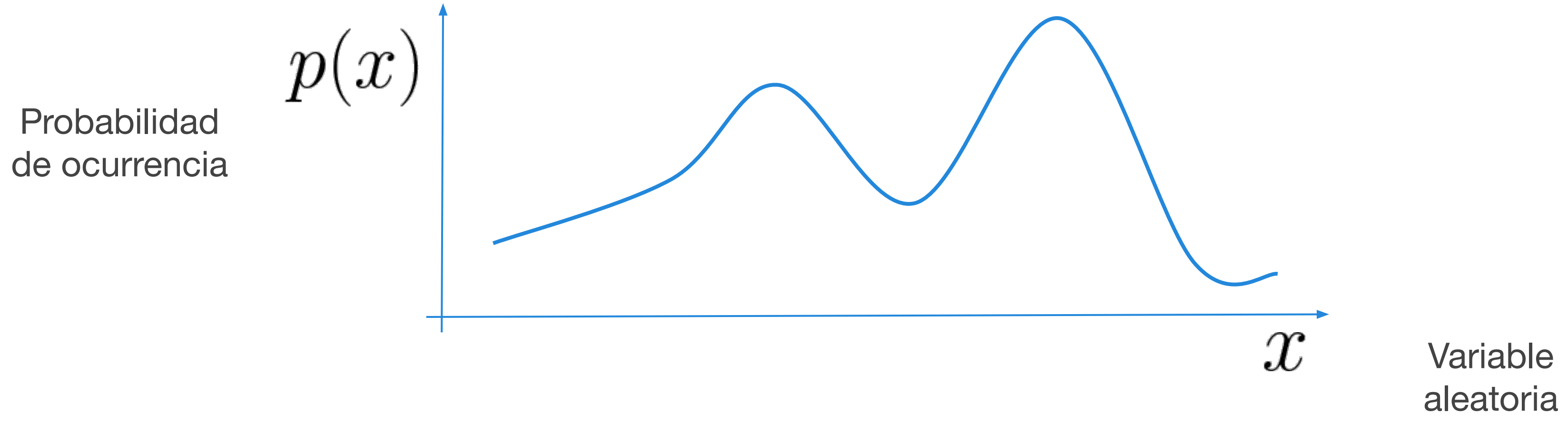
- EDA toy-example flowers
- EDA GooglePlay

Distribuciones de Probabilidad y variables aleatorias

Primer caso: univariadas

Distribución de probabilidad

La distribución de probabilidad es la **función** que asigna probabilidades de ocurrencia a distintos estados posibles de un experimento [1]. Es la **descripción** de un fenómeno **aleatorio** en términos de un espacio de muestreos y probabilidades de eventos.



[1] Ash, Robert B. (2008). *Basic probability theory* (Dover ed.). Mineola, N.Y.: Dover Publications

Funciones de densidad de probabilidad

Función de densidad de probabilidad discreta (izq) y continua (der).

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \qquad \int_{\mathcal{X}} f(x)dx = 1$$

[1] Ash, Robert B. (2008). *Basic probability theory* (Dover ed.). Mineola, N.Y.: Dover Publications

Funciones acumuladas de probabilidad

Función de densidad acumulada

$$F(x) = \quad P(X \leq x) \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Función de densidad acumulada **discreta**

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(x_k)$$

Función de densidad acumulada **continua**

$$F(b) = P(x \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

Esperanza y Varianza de una VA

Valor Esperado de una variable aleatoria discreta (izq) y continua (der)**:**

$$E(X) = \sum xP(x)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Varianza: Se utilizan para describir la variabilidad de una variable aleatoria en referencia a su esperanza.

$$var(X) = E(X - E(x))^2$$

Función de probabilidad empírica

$$P_{\text{teorica}}(x = a) = f(x = a)$$

$$P_{\text{empirica}}(x = a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta(x_i = a)}{n}$$

Ejemplo proba empírica

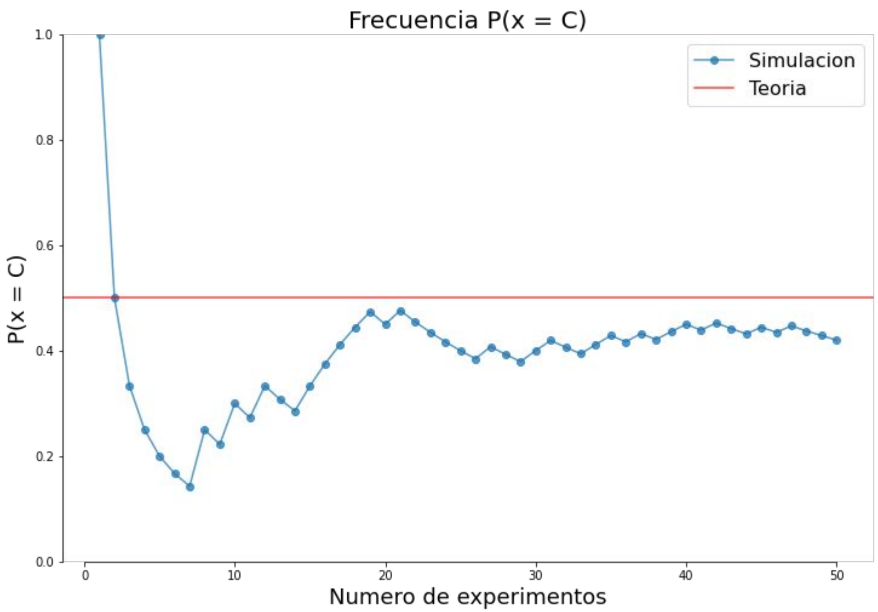
Supongamos que tenemos una moneda con 2 caras perfectamente balanceada donde la probabilidad teórica de obtener una cara es P(x = C) = 0.5.

Vamos a estimar en Python la probabilidad teórica con la probabilidad empírica mediante experimentos. En este caso n = 20.

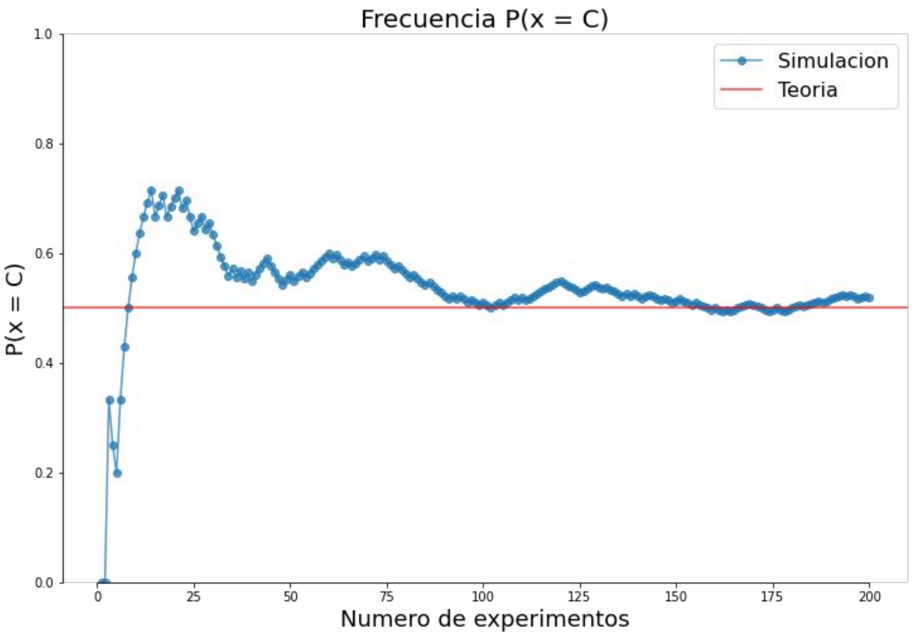
```
Experimentos: C C S C S S C S C C C S S S S S S S S C
Numero de caras: 8
P(x=C) = 0.4 (Numero de caras/Total experimentos)
```

Luego de 20 iteraciones/sampleos del fenómeno a estudiar (moneda) observamos que la probabilidad empírica P(x = C) = 0.4. Que sucedio?

Ejemplo proba empírica



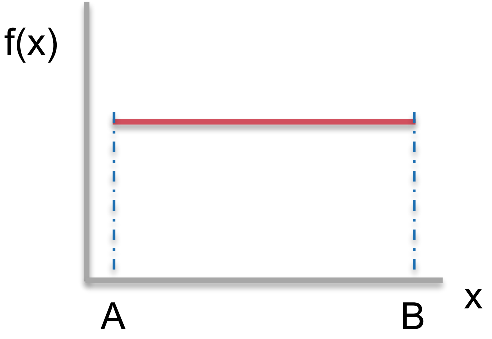
Proba empirica luego de 50 iteraciones



Proba empírica luego de 200 iteraciones

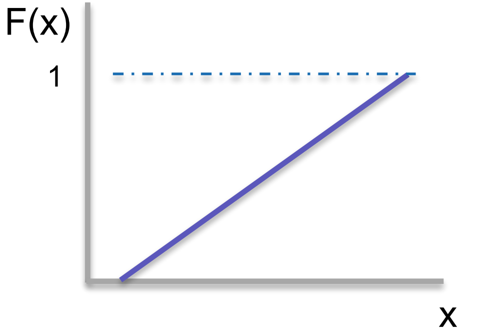
distribución uniforme

Distribución de densidad de probabilidad.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Distribución de probabilidad acumulada.



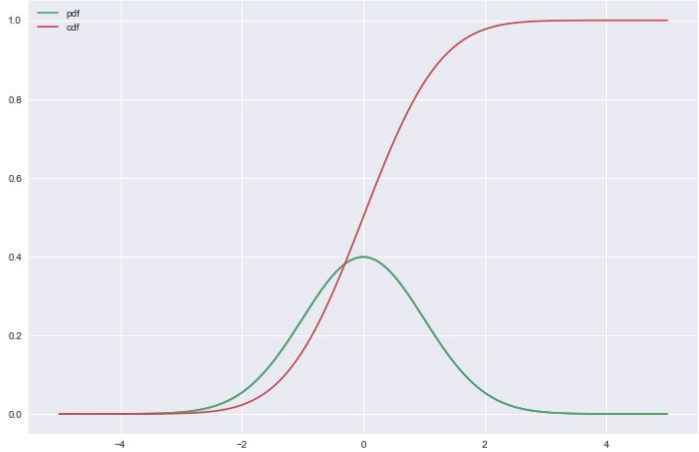
Rango de valores posibles.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if} \ a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if} \quad x > b \end{cases}$$

La distribución de probabilidad uniforme asigna la misma probabilidad de ocurrencia a cada valor dentro del rango que puede generar una variable aleatoria.

Distribución gaussiana - normal

Distribución de densidad (verde) y acumulada (roja) de probabilidad.



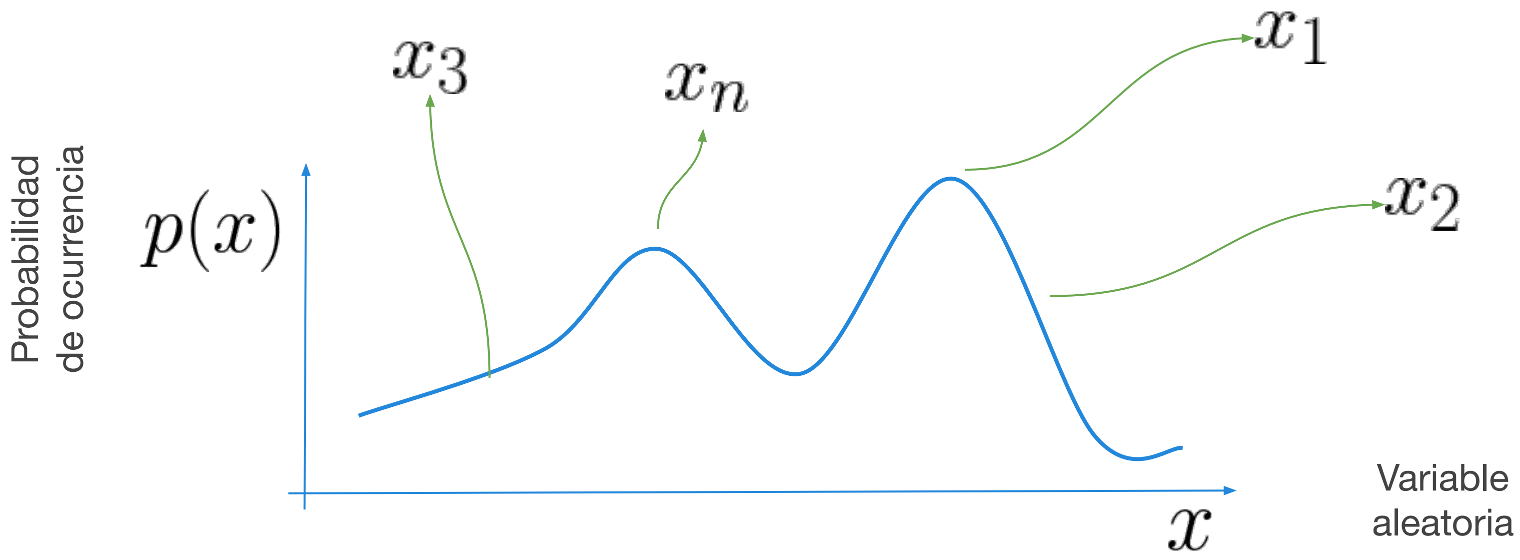
Rango de valores posibles de la VA.

Distribución simétrica de VA continua. El parámetro mu define la esperanza y el sigma el desvío standard.

Suele utilizarse para modelar procesos reales en ciencias naturales, sociales, etc.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Muestreo desde una función de densidad de probabilidad



Suponiendo que **conocemos** la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria, vamos a **muestrear** multiples veces dicha funcion y obtener distintos valores de la variable aleatoria a simular. En el caso contrario si solo tenemos los datos y no conocemos la funcion de densidad que los genero se abordaran estrategias de maxima verosimilitud o metodos de estimacion no parametrica de la densidad [2]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood_estimation
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_density_estimation .

Distribuciones de Probabilidad y variables aleatorias

Segundo caso: multivariadas

Variables aleatorias multivariadas

$$p(x = \text{cancer}) = f(???) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$p(x = +\ \text{covid}) = f(???) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

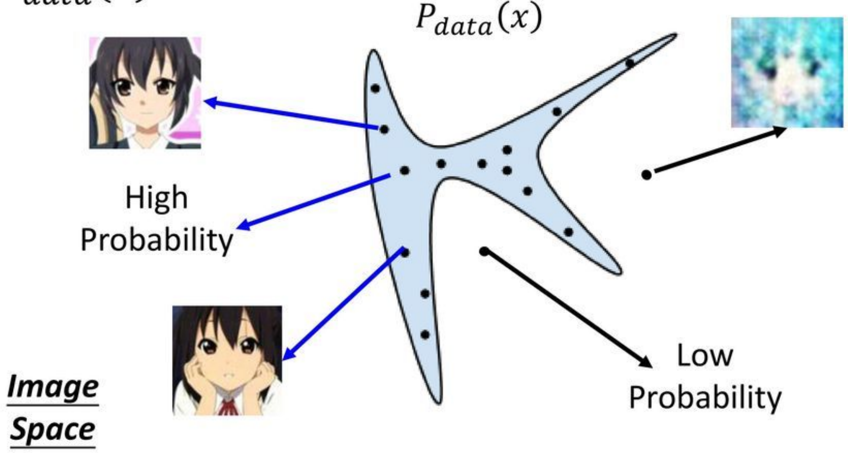
$$p(x = \text{cruzarte a un conocido}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

En los problemas reales existen variables aleatorias multi-variadas con distribuciones de densidad de probabilidad complejas.

Variables aleatorias multivariadas

Basic Idea of GAN

- The data we want to generate has a distribution $P_{data}(x)$



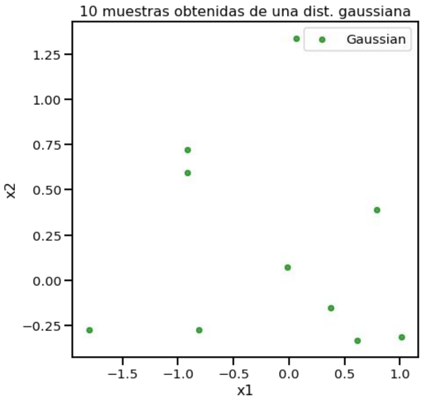
Distribución gaussiana bivariada

$$p(X) \sim (2\pi)^{-d/2}|\Sigma^{-1/2}|\mathbf{exp}\left[-\frac{1}{2}(X - M)^t \Sigma^{-1} (X - M)\right]$$

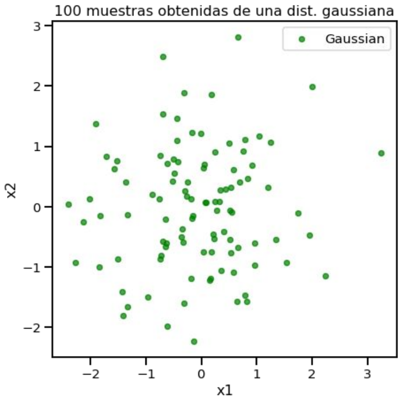
$$X = [x_1, x_2] \qquad M_1 = [\mu_1, \mu_2] \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 \end{bmatrix}$$

Muestreando una PDF gaussian bi-variada

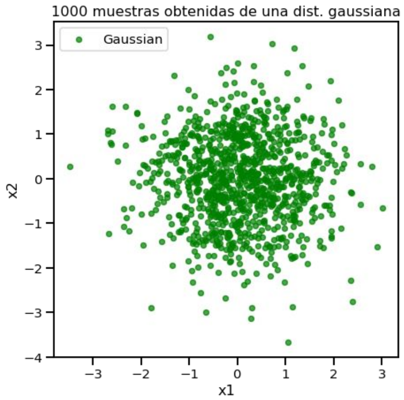
$n = 10$



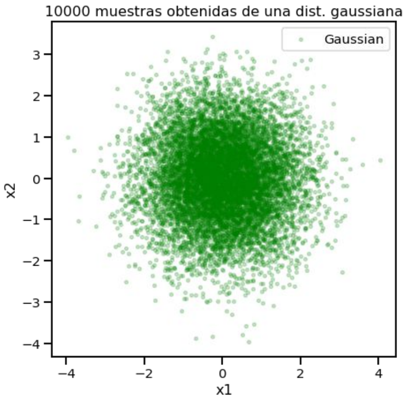
$n = 100$



$n = 1000$

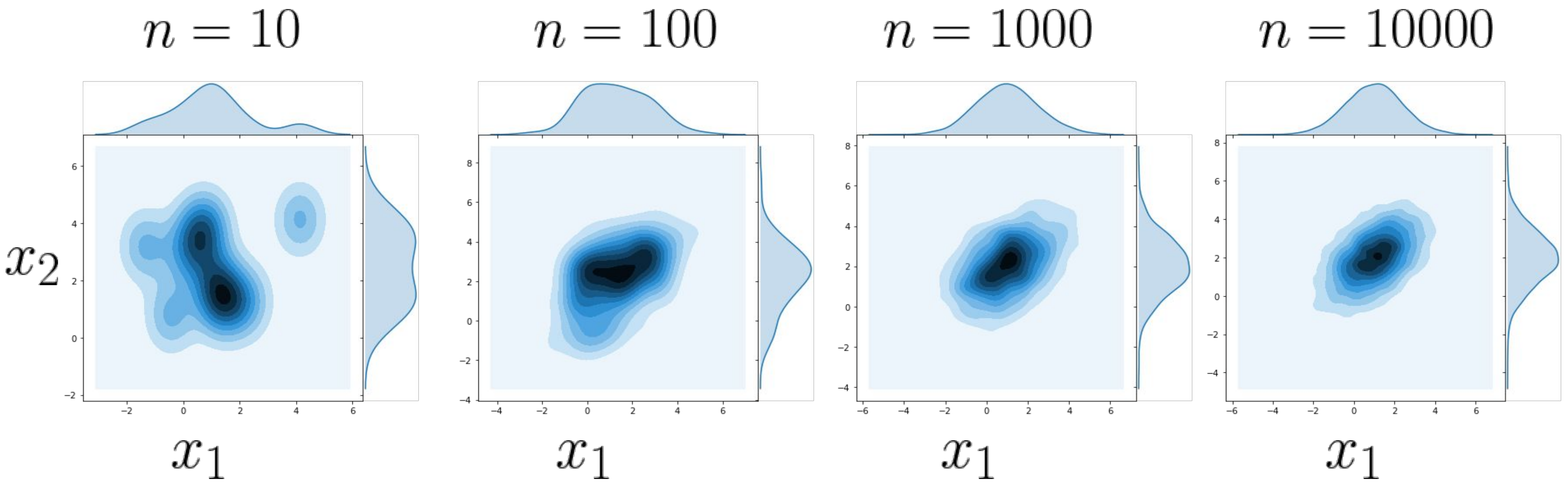


$n = 10000$



Scatterplot para visualizar las muestras/instancias obtenidas de una distribución de probabilidad gaussiana bivariada (d =2) para distintos valores de n.

Muestreando una PDF gaussian bi-variada

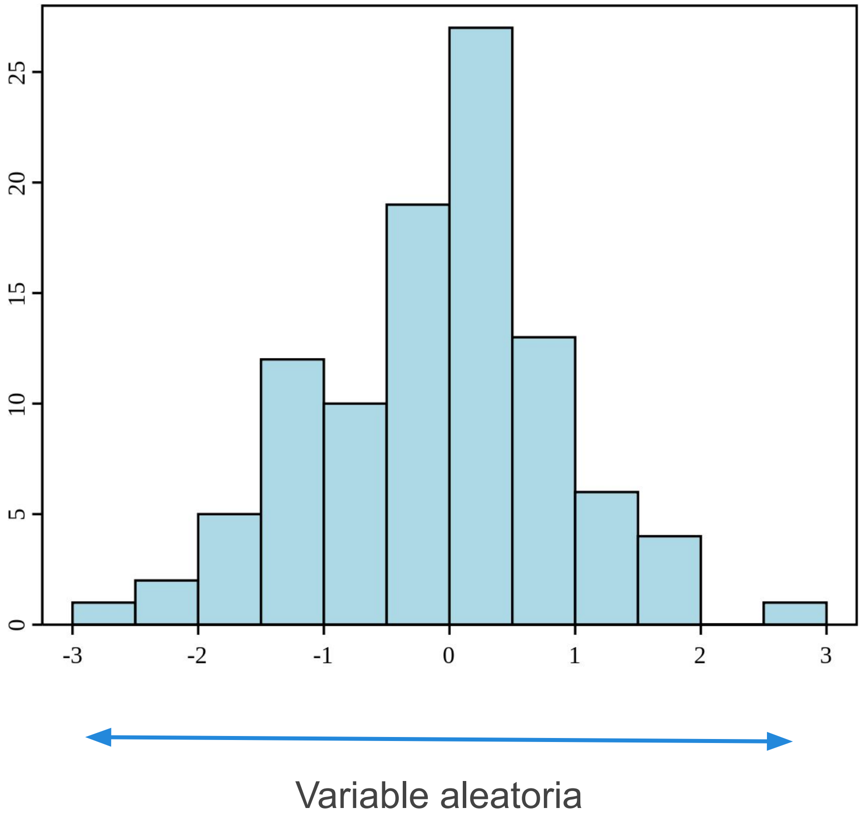


Density map realizado a partir de muestras obtenidas de una distribución de probabilidad gaussiana bivariada (d =2) con distintos valores de n.

Histograma de frecuencias

Herramienta para estimar densidad empírica

Histograma de frecuencias



El histograma representa la frecuencia relativa de aparición de un valor de la variable aleatoria mediante la altura de las barras.

En el eje X tendremos los distintos valores que puede tomar una variable aleatoria a observar. En vez de contar valores únicos contamos todos los valores que caigan en un rango, es decir, la primer barra por ejemplo cuenta la cantidad de veces que la VA tomo los valores entre 100 y 125. La segunda barra cuenta la cantidad de veces que la VA tomo valores entre 125 y 150, etc.

Entonces al tomar muchas muestras (muestrear, samplear) una variable aleatoria podemos empíricamente entender cómo se distribuye los valores que la VA puede tomar. Entonces podemos decir que con un histograma podemos aproximar empíricamente la distribución de probabilidad.

Histograma de frecuencias

Cantidad de muestras por bin/caja

$$n_k = \sum \delta(x_{(kj)})$$

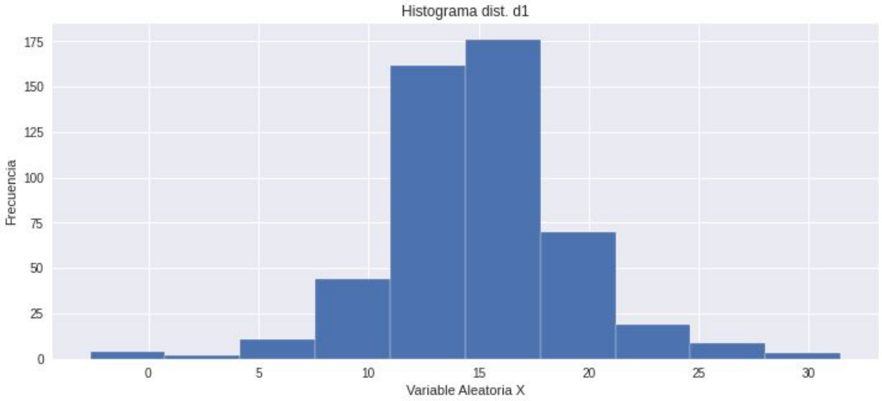
Funcion delta (contador)

$$\delta(x_{(ij)}) = 1$$

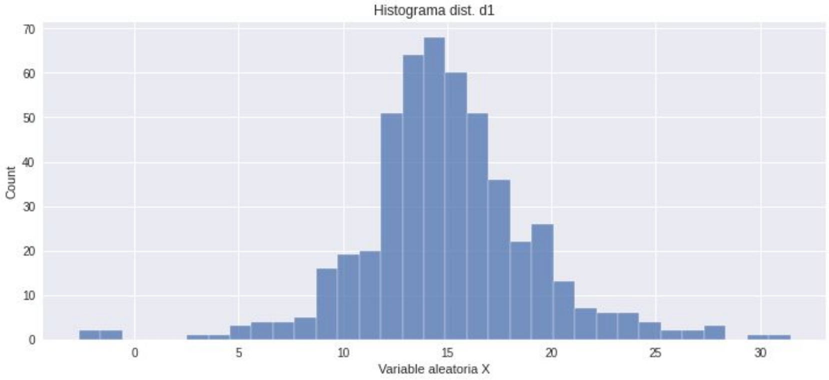
Muestras totales en los K bins

$$n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n_k} \delta(x_{(kj)})$$

Histograma de frecuencias

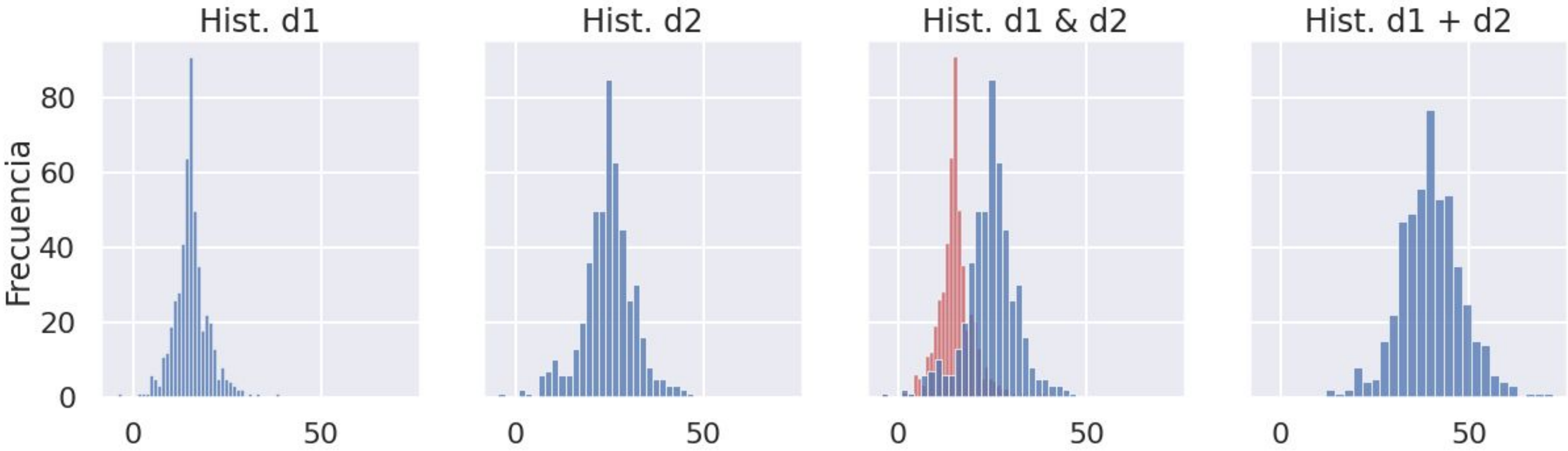


Histograma con bins = 10



Histograma con bins = 40

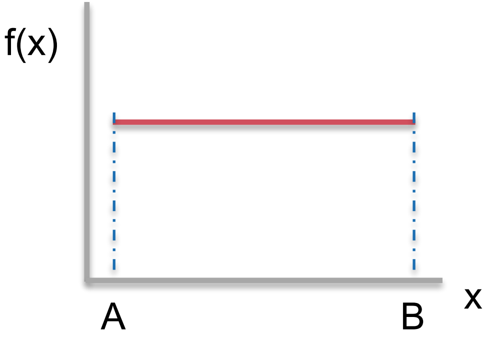
Histogramas



Histograma sobre 500 muestras de una distribución d1 normal mu = 15, sigma = 3	Histograma sobre 500 muestras de una distribución d2 normal mu = 25, sigma = 5	Los dos histogramas en simultáneo.	Histograma realizado sobre la suma de las 2 muestras obtenidas de las distribuciones d1 y d2.

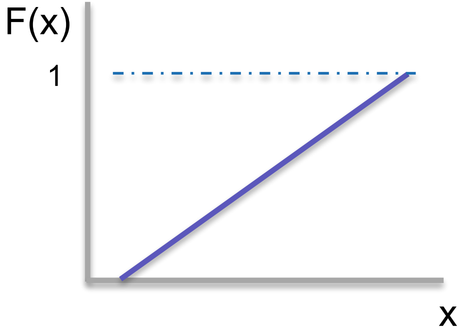
distribución uniforme

Distribución de densidad de probabilidad.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Distribución de probabilidad acumulada.



Rango de valores posibles.

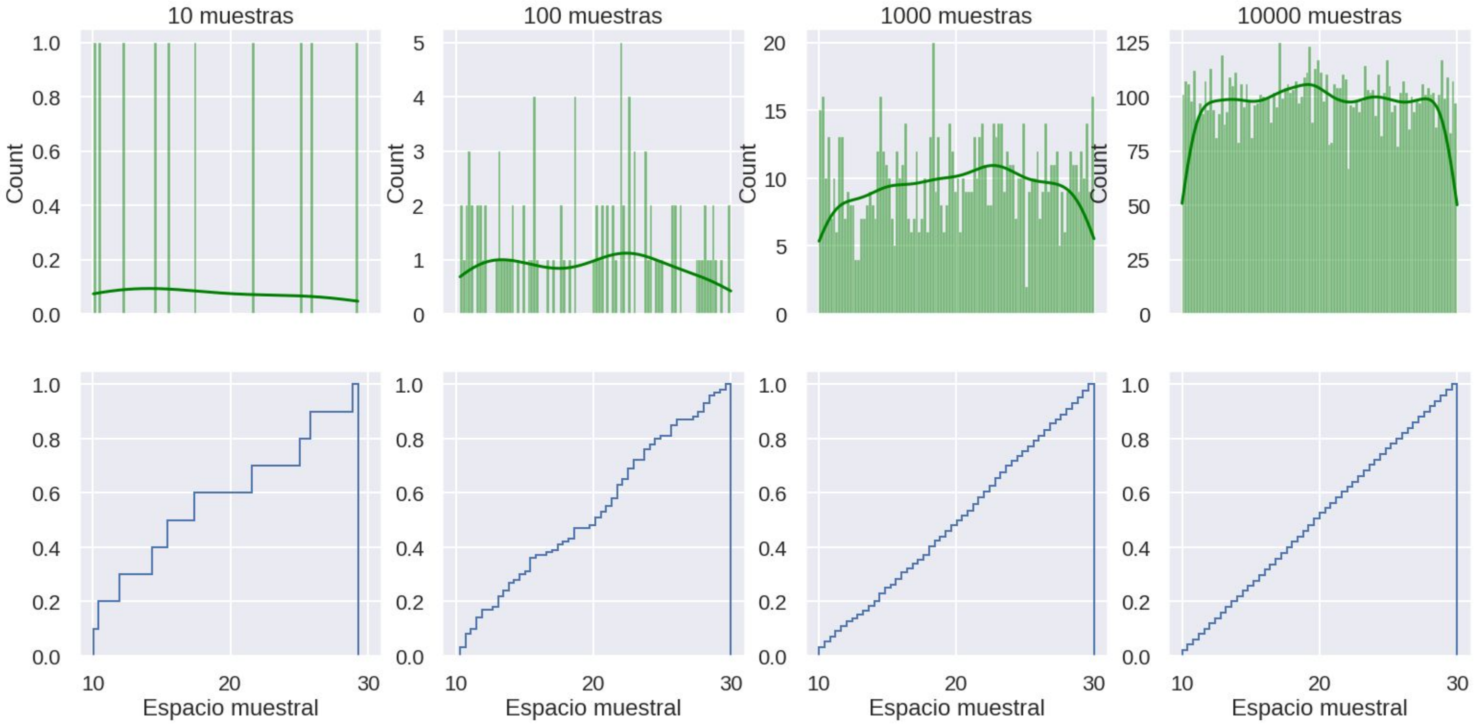
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if} \; a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if} \quad x > b \end{cases}$$

La distribución de probabilidad uniforme asigna la misma probabilidad de ocurrencia a cada valor dentro del rango que puede generar una variable aleatoria.

muestreo desde distribución uniforme

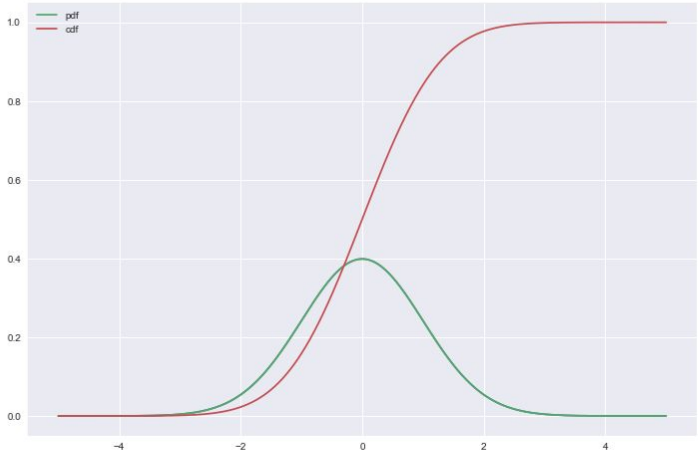
Probabilidad
Empirica
De ocurrencia

Probabilidad
Acumulada de
Ocurrencia



distribución gaussiana - normal

Distribución de densidad (verde) y acumulada (roja) de probabilidad.



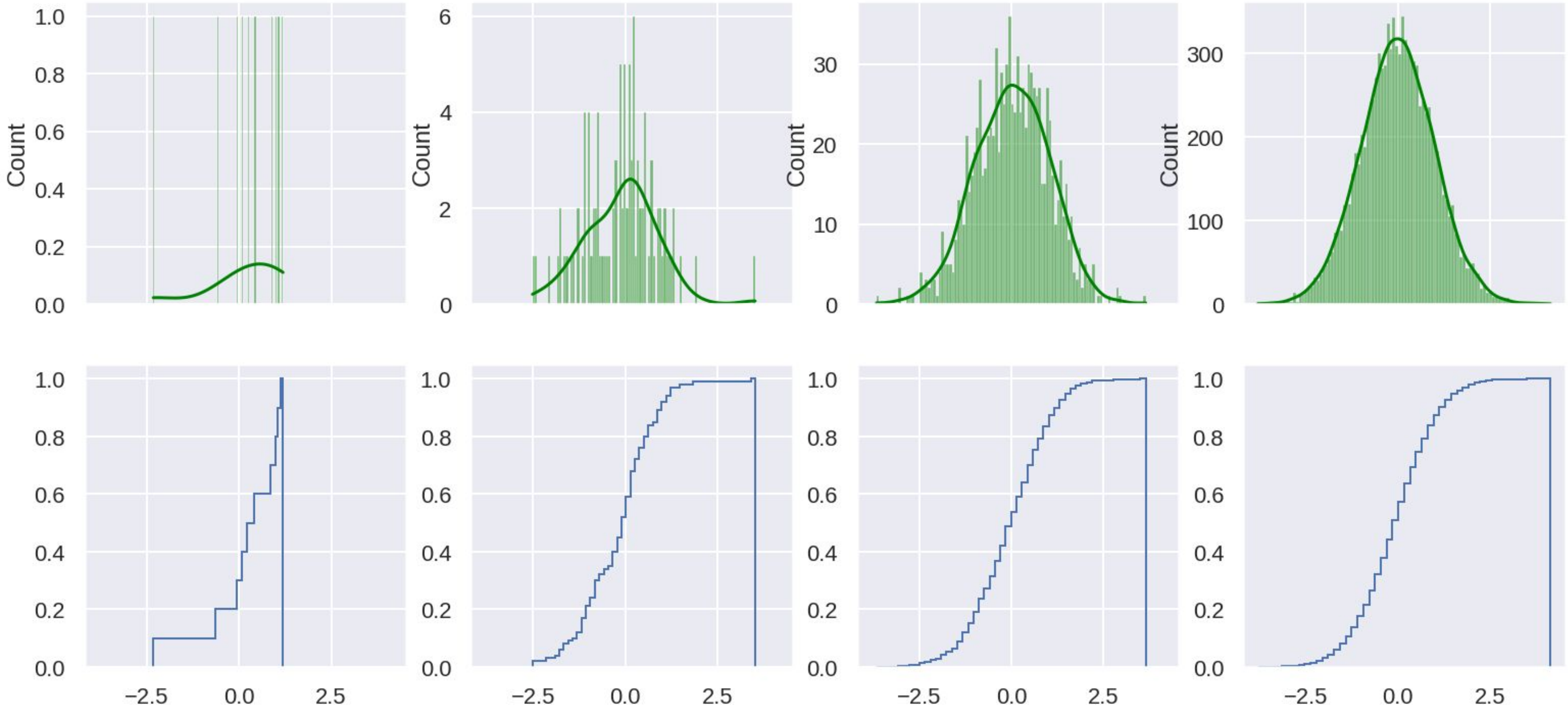
Rango de valores posibles de la VA.

Distribución simétrica de VA continua. El parámetro mu define la esperanza y el sigma el desvío standard.

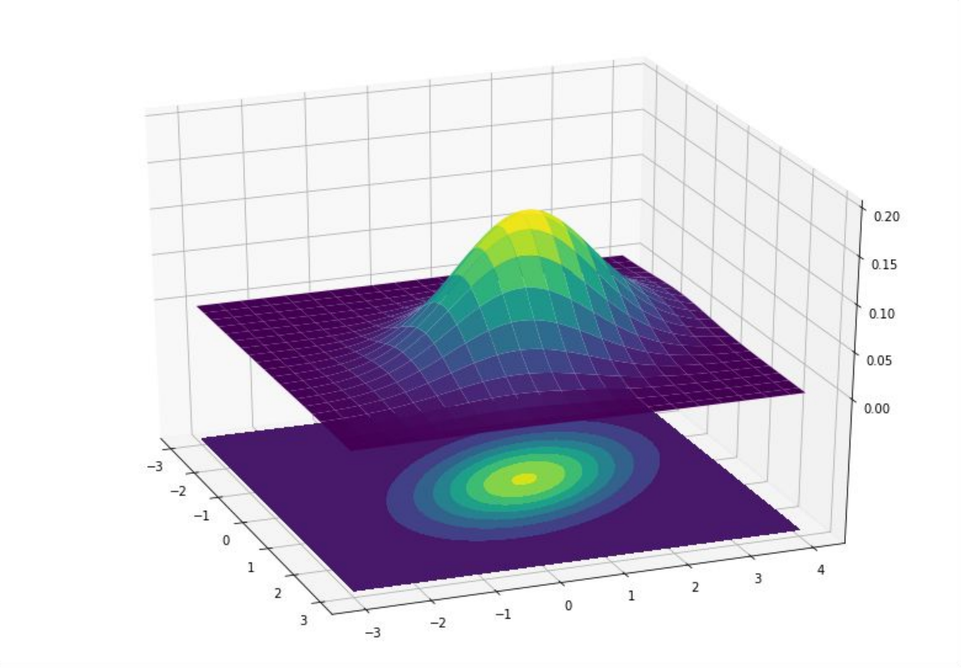
Suele utilizarse para modelar procesos reales en ciencias naturales, sociales, etc.

$$p(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathbf{exp}\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Muestreo de una distribución normal



Histograma 2D para gaussiana bivariada



$$p(X) \sim (2\pi)^{-d/2}|\Sigma^{-1/2}|\mathbf{exp}\left[-\frac{1}{2}(X-M)^t\,\Sigma^{-1}\,(X-M)\right]$$

Boxplot

Herramienta para estimar densidad empírica

Quantiles

Los cuantiles suelen usarse como límites entre los grupos que dividen la distribución de **<u>una</u>** variable aleatoria en partes iguales; entendidas estas como intervalos que comprenden la misma proporción de valores.

Los mas populares son:

- Cuartiles, dividen la distribuciòn en 4 partes iguales (0.25, 0.5, 0.75)
- Quintiles, dividen la dist. en 5 partes iguales (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)
- Deciles, dividen la dist. en 10 partes iguales (0.1,0.2…...0.9)
- Percentiles, dividen la dist. en 100 partes iguales (0.01…….0.99)

Quantiles, Cuartil

Datos Originales de una variable aleatoria

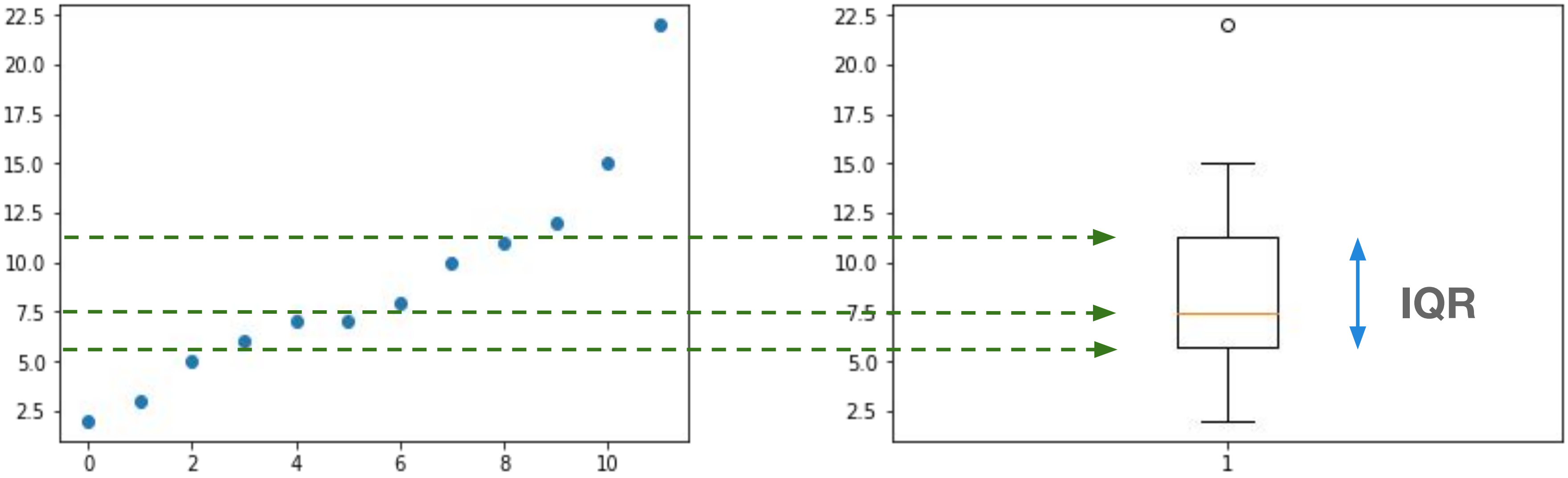
X = [15, 7, 3, 22, 10, 8, 6, 7, 2, 11, 5, 12]

Datos ordenados

[2, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 10, 11, 12, 15, 22]

Min 1Q 2Q 3Q Max

Boxplot



En este caso por ejemplo tenemos una variable/feature que se mide en un lapso de 11 segundos. Queremos entender cómo se distribuyen los valores de la variable en cuestión.

Cuantiles y Boxplots

Si ordenamos los datos de menor a mayor:

- El 25% de los datos será menor al 1er cuartil
- El 50% de los datos serà menor al 2do cuartil (mediana)
- El 75% de los datos serà menor al 3er cuartil
- Los valores que esten sobre el percentil 0.01 y 0.99 podrian considerarse outliers.

Mean, median & outliers

Mean, median & outliers

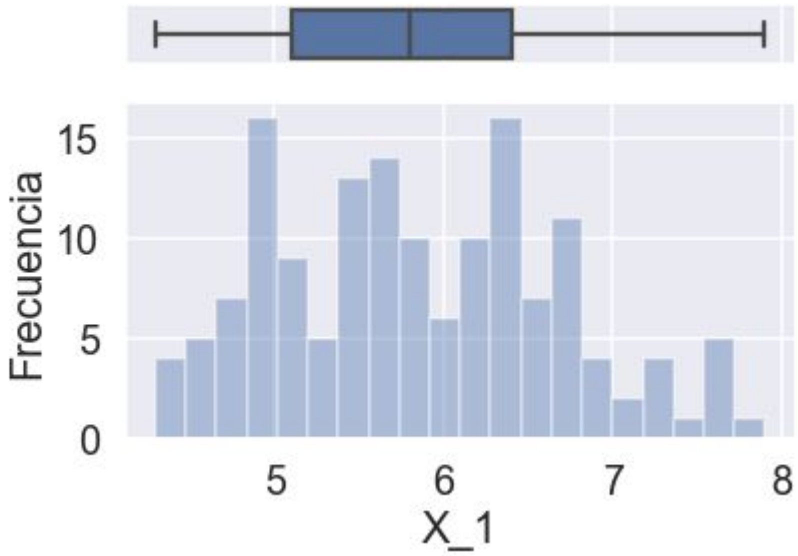
Filtrar por Cuantiles

Muchas veces, con el fin de quitar outliers de la distribuciòn de datos que deseamos analizar, lo que podemos realizar es:

- Quitar todos los datos que estén por encima del Percentil 99
- Quitar todos los datos que estén por debajo del Percentil 1
- Quitar todos los datos que estén por fuera del 1.5 * IQR (Inter Quartile Range).

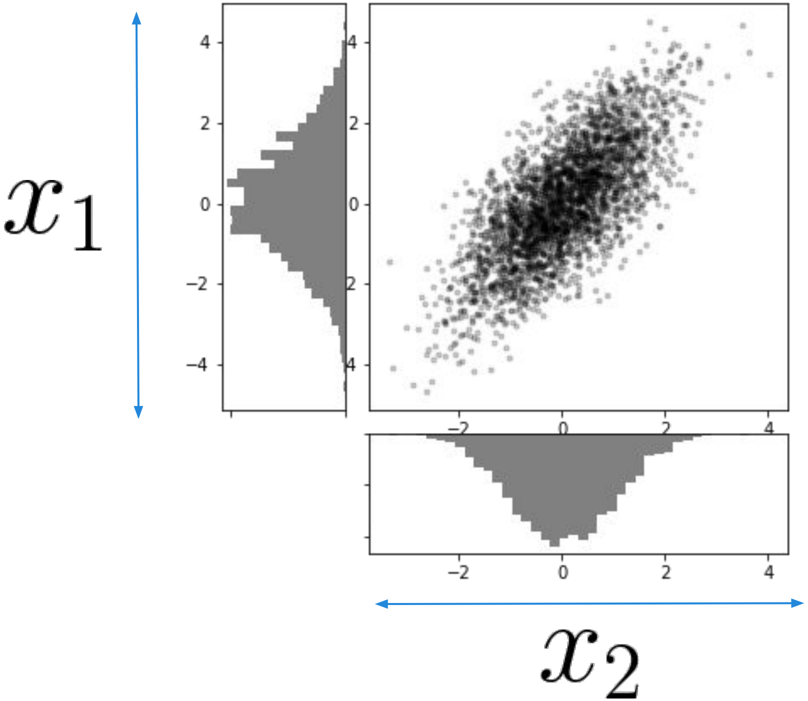
Cuidado! Quitar datos del dataset dependerá de cada caso, es importante entender las consecuencias de quitar instancias consideradas anomalías.

Boxplot & histograma



Un boxplot y un histograma en 1D son sinónimos y complementos para visualizar la densidad de probabilidad empírica de una variable.

Scatterplot + Histograma



$x \in \mathbb{R}^2$

Es es posible visualizar muestras en dos dimensiones con un scatterplot y simultáneamente histogramas en cada una de las variables que caracterizan a cada muestra. De igual manera en lugar de los histogramas podría haber un boxplot.

Correlación Lineal

Herramienta para entender si dos variables aleatorias co-varian linealmente.

Correlación lineal (Pearson)

Es una forma de medir cuán cercanas están dos variables x e y (features) a tener una relación lineal entre ellas.

$$r = \frac{\sum_i^n (x_{1i} - \bar{x_1})(x_{2i} - \bar{x_2})}{[\sum_i^n (x_{1i} - \bar{x_1})^2 (x_{2i} - \bar{x_2})^2]^{1/2}}$$

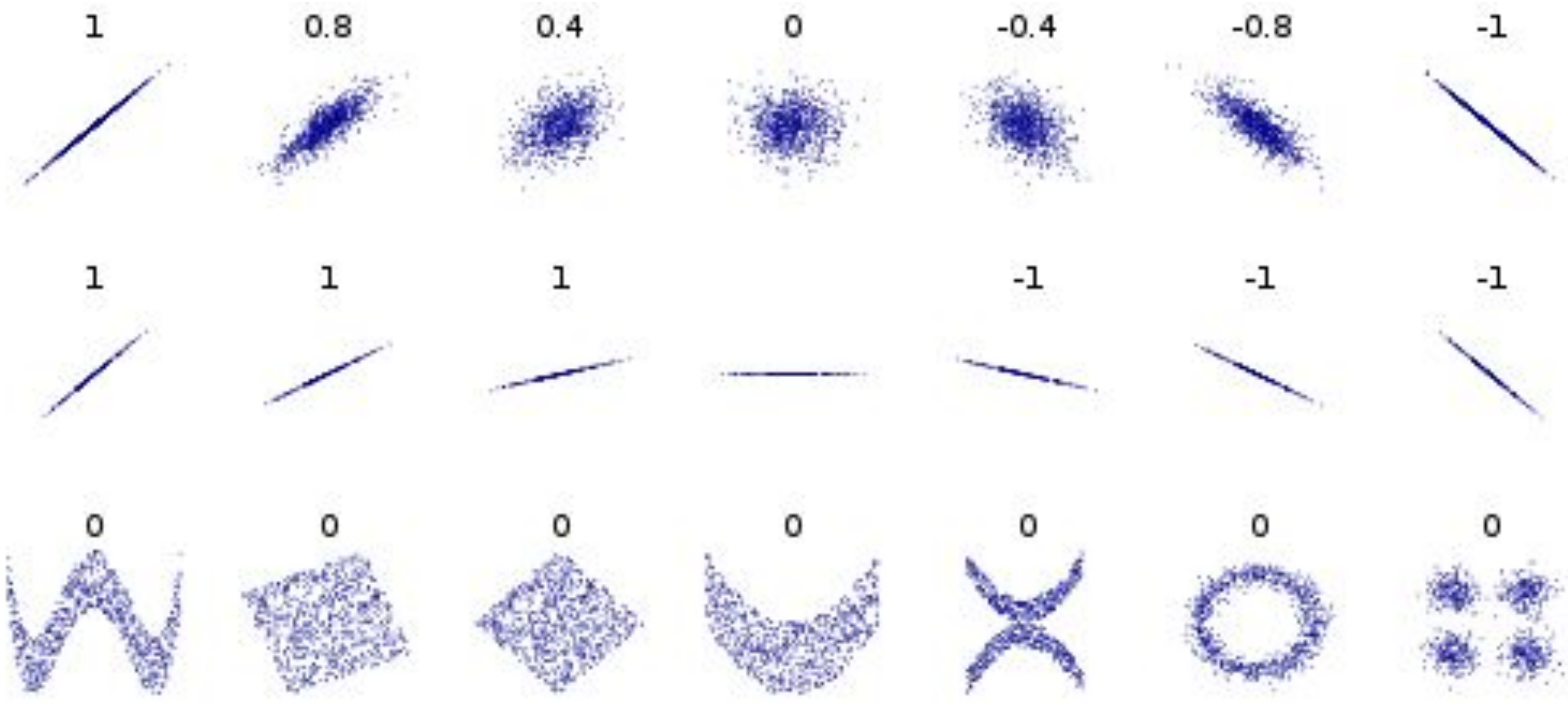
Matriz de correlación

$$R = \begin{array}{cc} \overset{d}{\longleftrightarrow} & \\ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} \end{bmatrix} & \updownarrow d \end{array}$$

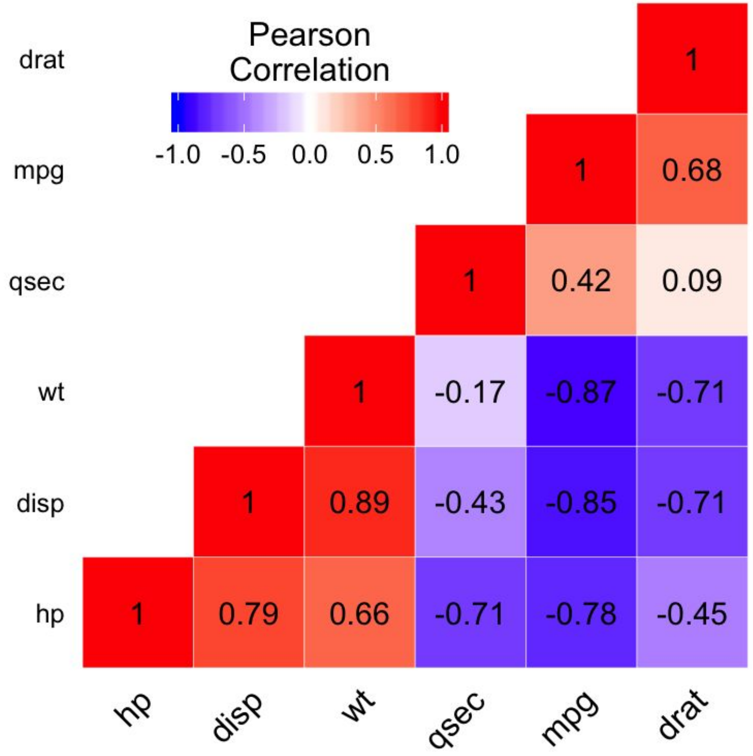
$$r = \frac{\sum_i^n (x_{1i} - \bar{x_1})(x_{2i} - \bar{x_2})}{[\sum_i^n (x_{1i} - \bar{x_1})^2 (x_{2i} - \bar{x_2})^2]^{1/2}}$$

$$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^d$$

Correlaciòn lineal (Pearson)



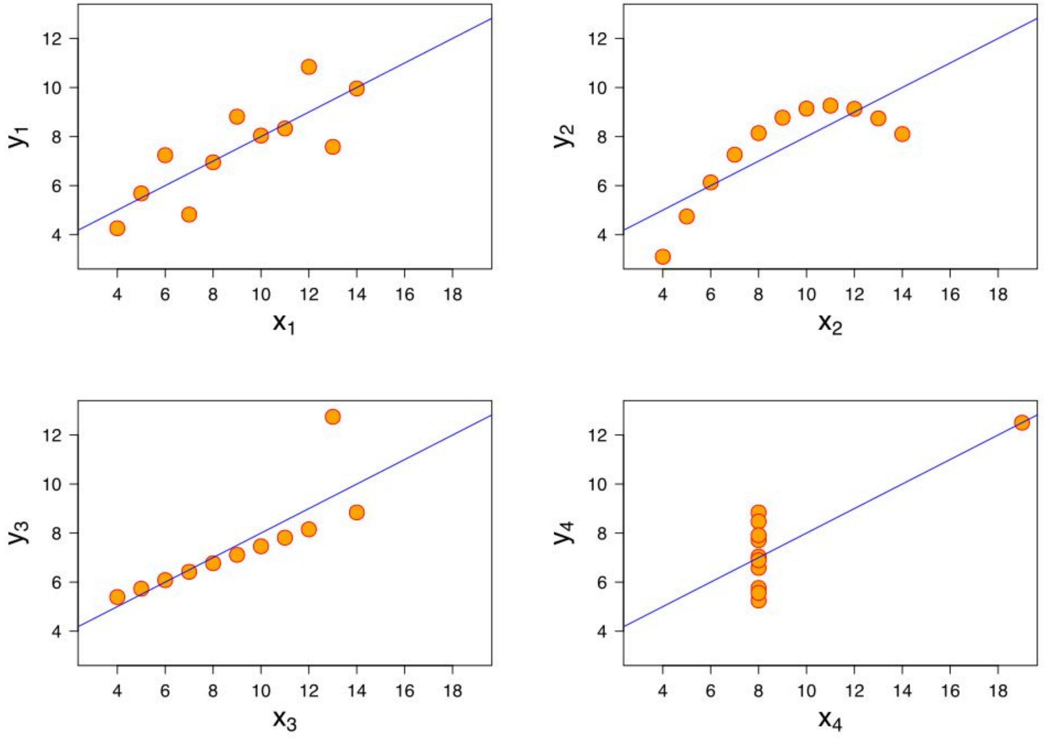
Correlación pairwise entre variables



En el ejemplo tenemos 6 variables/features. Podemos calcular la correlación lineal de Pearson par-a-par y visualizarla con un heatmap.

Atención: la correlación de Pearson **sólo** mide relación lineal entre variables. Que no exista correlación lineal no quiere decir que no exista relación alguna. Puede existir relación no lineal.

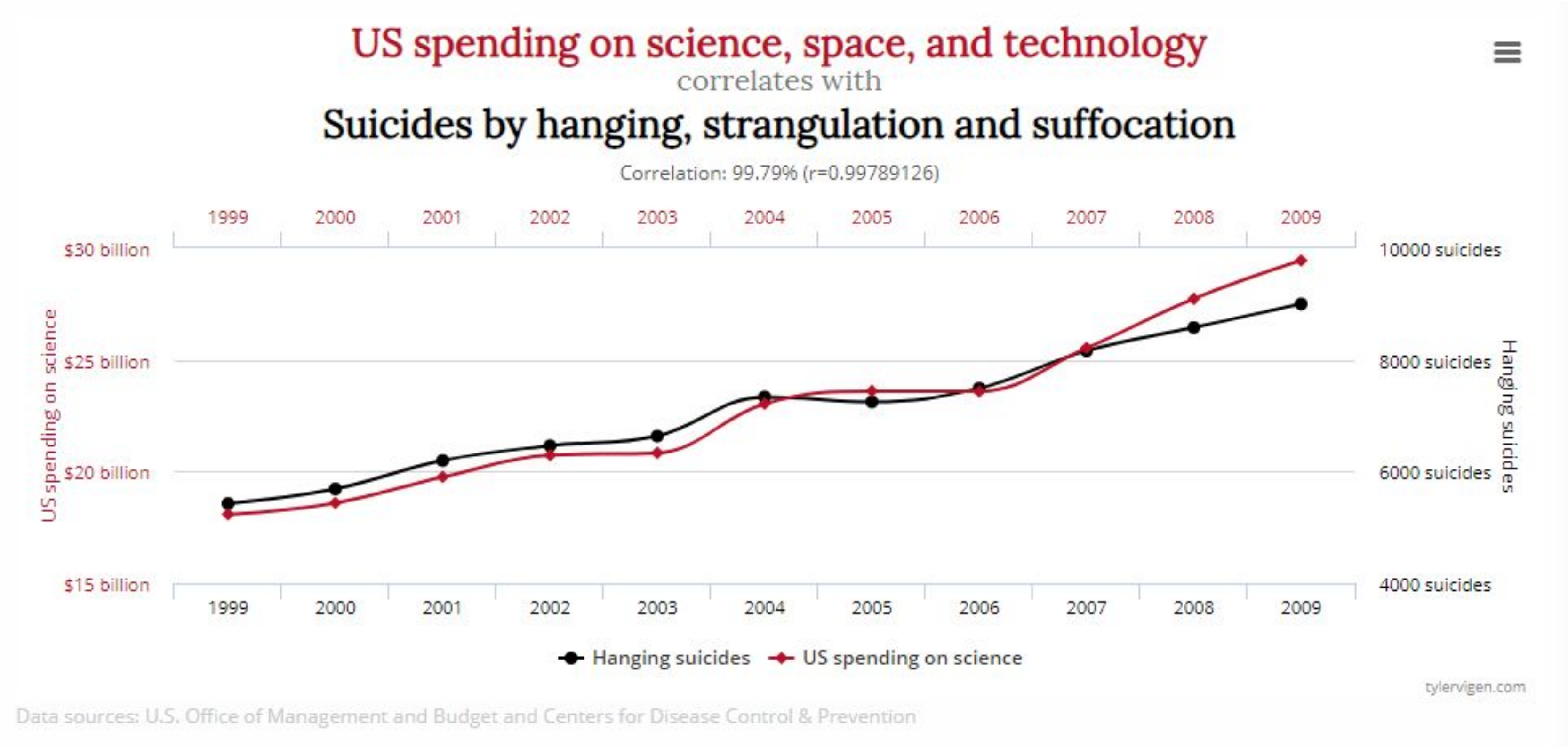
Correlaciòn lineal: trampas



Los 4 datasets tienen las mismas estadísticas descriptivas, sin embargo se ven muy distintos cuando se visualizan:

Media X = 9
Rxy = 0.81

Correlation is not causation



Pearson correlation in Python

```
x = np.array([[2,2],[3,3]])

R1 = np.corrcoef(x)
```

A agarrar la PyLA