

Cluster 2022

Ciencia de Datos en Ingeniería Industrial

clase_01

Análisis exploratorio de datos. Descripción estadística.

AI & Art



Obra de Robbie Barrat, artista. Imágenes creadas por una Generative Adversarial Network.

<https://robbiebarrat.github.io>

agenda_clase_01

- Densidades y distribuciones de probabilidad
- Boxplot
- Outliers utilizando quantiles
- Correlación Lineal (Pearson)

Lab

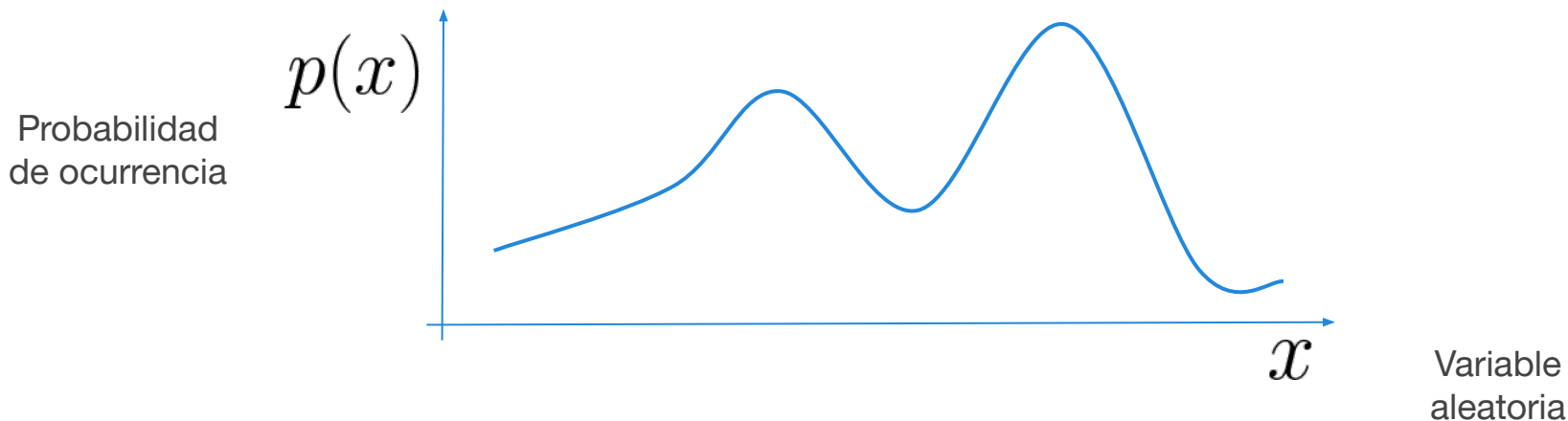
- EDA toy-example flowers
- EDA GooglePlay

Distribuciones de Probabilidad y variables aleatorias

Primer caso: univariadas

Distribución de probabilidad

La distribución de probabilidad es la **función** que asigna probabilidades de ocurrencia a distintos estados posibles de un experimento [1]. Es la **descripción** de un fenómeno **aleatorio** en términos de un espacio de muestreos y probabilidades de eventos.



Funciones de densidad de probabilidad

Función de densidad de probabilidad discreta (izq) y continua (der).

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) dx = 1$$

Funciones acumuladas de probabilidad

Función de densidad acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Función de densidad acumulada **discreta**

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(x_k)$$

Función de densidad acumulada **continua**

$$F(b) = P(x \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

Esperanza y Varianza de una VA

Valor Esperado de una variable aleatoria discreta (izq) y continua (der):

$$E(X) = \sum xP(x)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Varianza: Se utilizan para describir la variabilidad de una variable aleatoria en referencia a su esperanza.

$$var(X) = E(X - E(x))^2$$

Función de probabilidad empírica

$$P_{\text{teorica}}(x = a) = f(x = a)$$

$$P_{\text{empirica}}(x = a) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta(x_i = a)}{n}$$

Ejemplo proba empírica

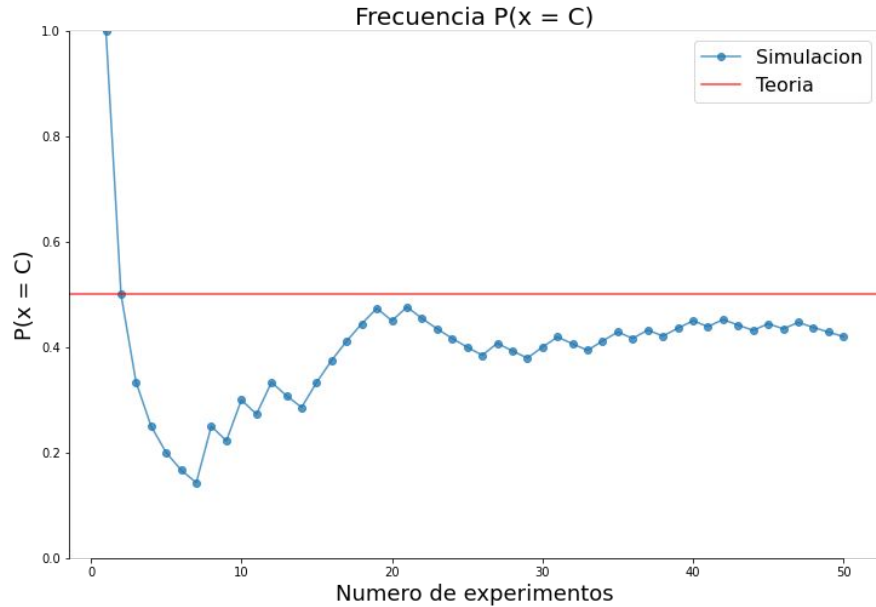
Supongamos que tenemos una moneda con 2 caras perfectamente balanceada donde la probabilidad teórica de obtener una cara es $P(x = C) = 0.5$.

Vamos a estimar en Python la probabilidad teórica con la probabilidad empírica mediante experimentos. En este caso $n = 20$.

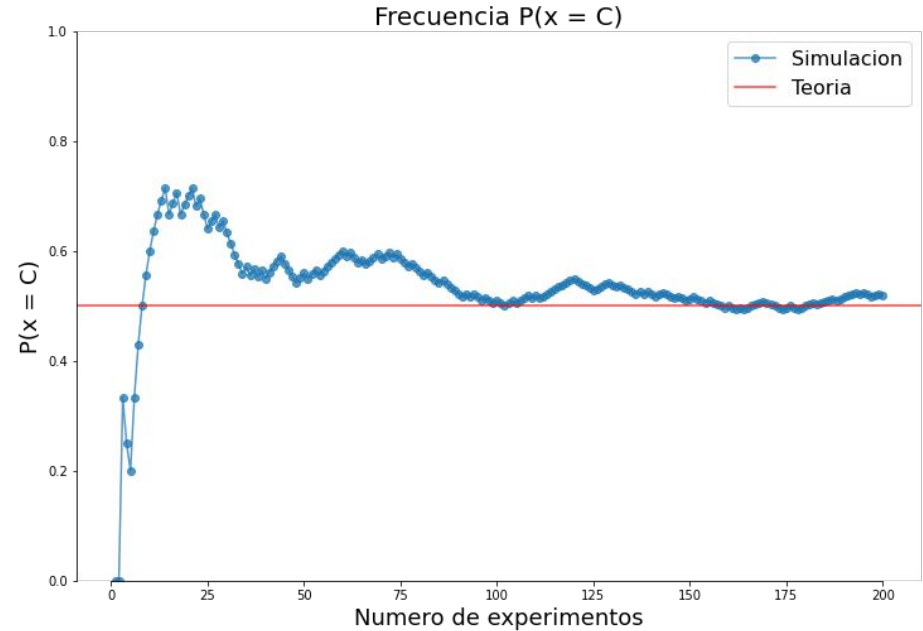
```
Experimentos: C C S C S S C S C C C S S S S S S S S C  
Numero de caras: 8  
 $P(x=C) = 0.4$  (Numero de caras/Total experimentos)
```

Luego de 20 iteraciones/sampleos del fenómeno a estudiar (moneda) observamos que la probabilidad empírica $P(x = C) = 0.4$. Que sucedió?

Ejemplo prueba empírica



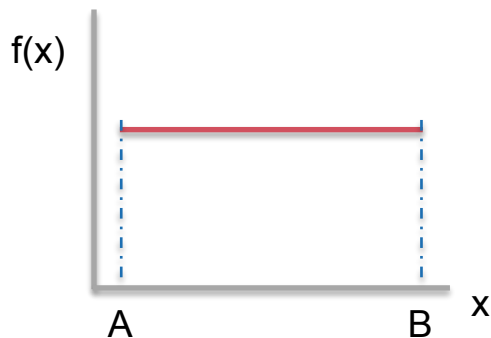
Prueba empírica luego de 50 iteraciones



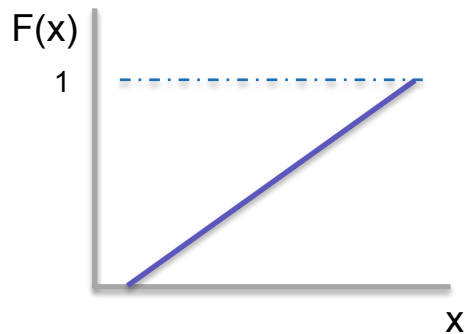
Prueba empírica luego de 200 iteraciones

distribución uniforme

Distribución de densidad de probabilidad.



Distribución de probabilidad acumulada.



Rango de valores posibles.

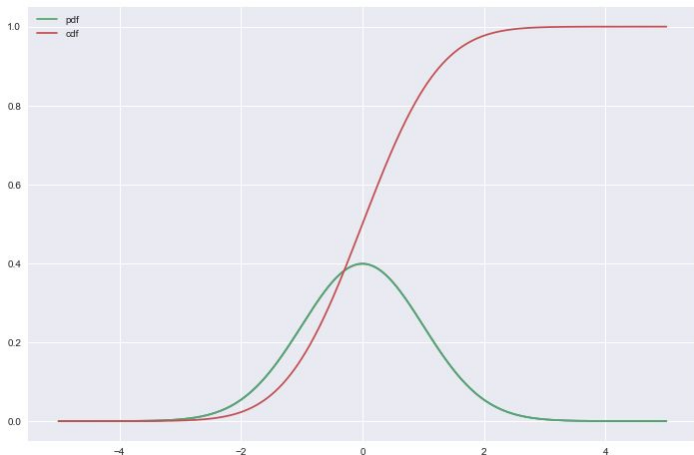
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if } x > b \end{cases}$$

La distribución de probabilidad uniforme asigna la misma probabilidad de ocurrencia a cada valor dentro del rango que puede generar una variable aleatoria.

Distribución gaussiana - normal

Distribución de densidad (verde) y acumulada (roja) de probabilidad.



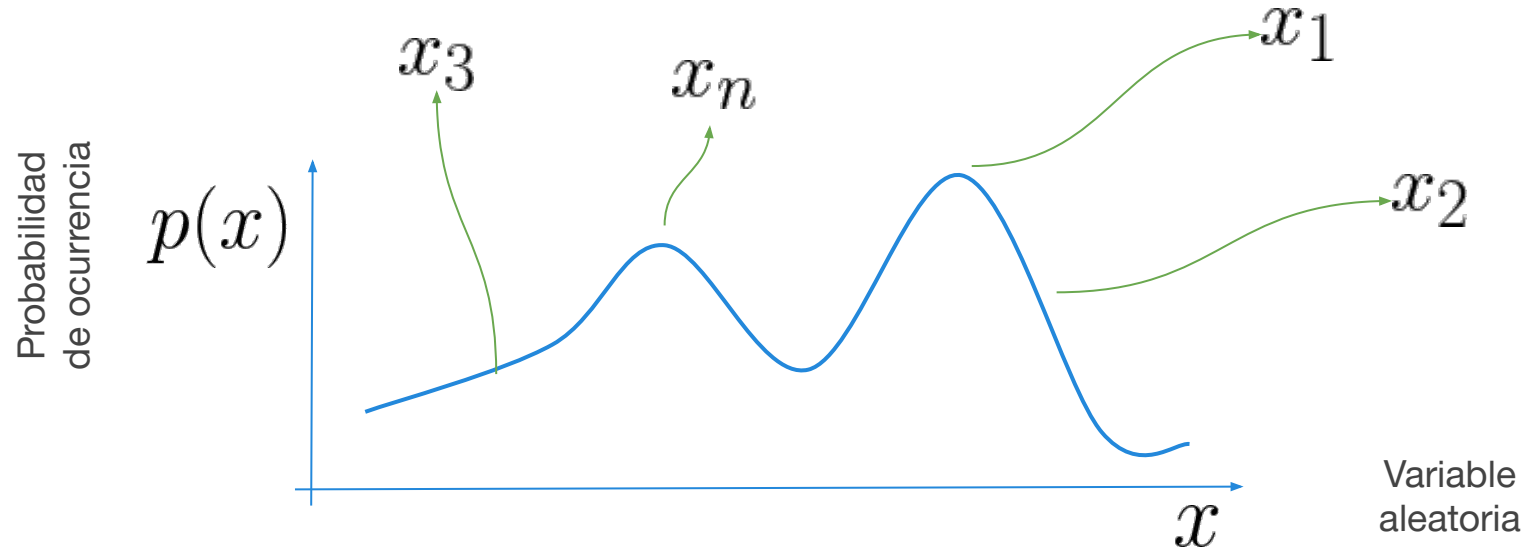
Rango de valores posibles de la VA.

Distribución simétrica de VA continua. El parámetro μ define la esperanza y el sigma el desvío standard.

Suele utilizarse para modelar procesos reales en ciencias naturales, sociales, etc.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Muestreo desde una función de densidad de probabilidad



Suponiendo que **conocemos** la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria, vamos a **muestrear** multiples veces dicha funcion y obtener distintos valores de la variable aleatoria a simular. En el caso contrario si solo tenemos los datos y no conocemos la funcion de densidad que los genero se abordaran estrategias de maxima verosimilitud o metodos de estimacion no parametrica de la densidad [2]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood_estimation

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_density_estimation .

Distribuciones de Probabilidad y variables aleatorias

Segundo caso: multivariadas

Variables aleatorias multivariadas

$$p(x = \text{cancer}) = f(???) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$p(x = + \text{covid}) = f(???) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

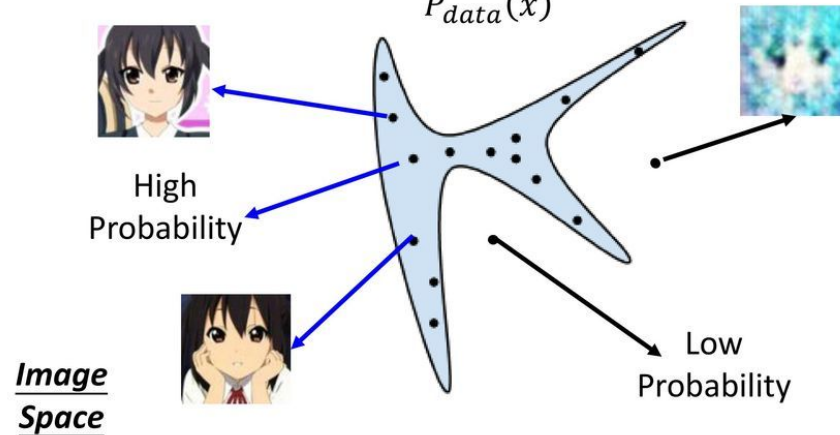
$$p(x = \text{cruzar a un conocido}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

En los problemas reales existen variables aleatorias multi-variadas con distribuciones de densidad de probabilidad complejas.

Variables aleatorias multivariadas


Basic Idea of GAN

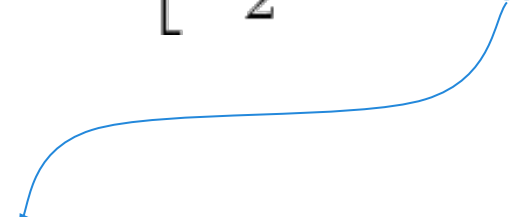
- The data we want to generate has a distribution $P_{data}(x)$




Distribución gaussiana bivariada

$$p(X) \sim (2\pi)^{-d/2} |\Sigma^{-1/2}| \mathbf{exp} \left[-\frac{1}{2} (X - M)^t \Sigma^{-1} (X - M) \right]$$

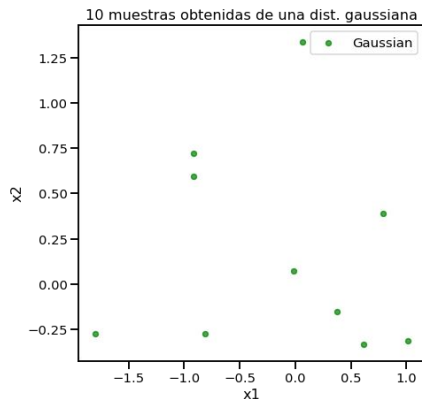

$$X = [x_1, x_2]$$


$$M = [\mu_1, \mu_2]$$

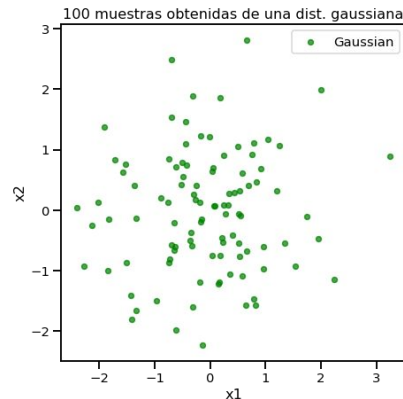

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 \end{bmatrix}$$

Muestreando una PDF gaussian bi-variada

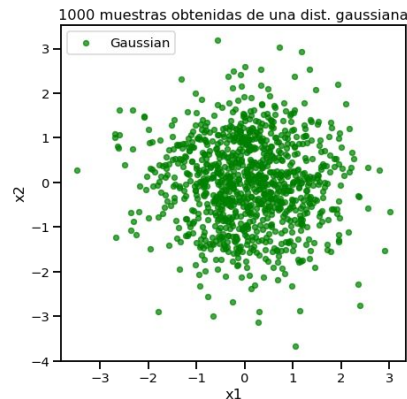
$n = 10$



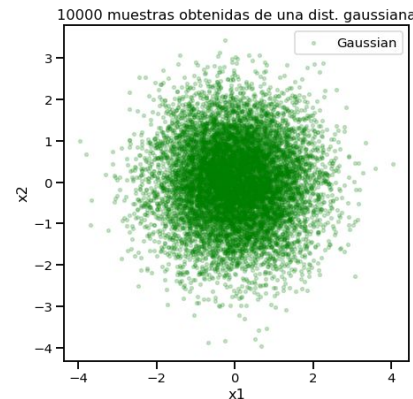
$n = 100$



$n = 1000$

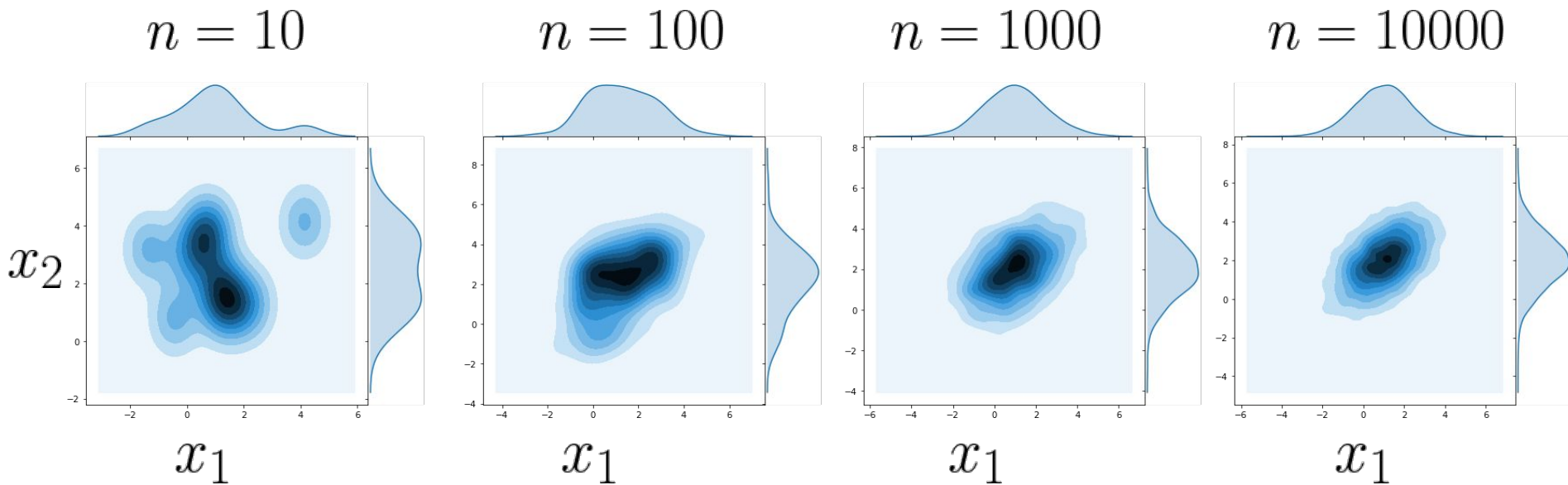


$n = 10000$



Scatterplot para visualizar las muestras/instancias obtenidas de una distribución de probabilidad gaussiana bivariada ($d=2$) para distintos valores de n .

Muestreando una PDF gaussian bi-variada

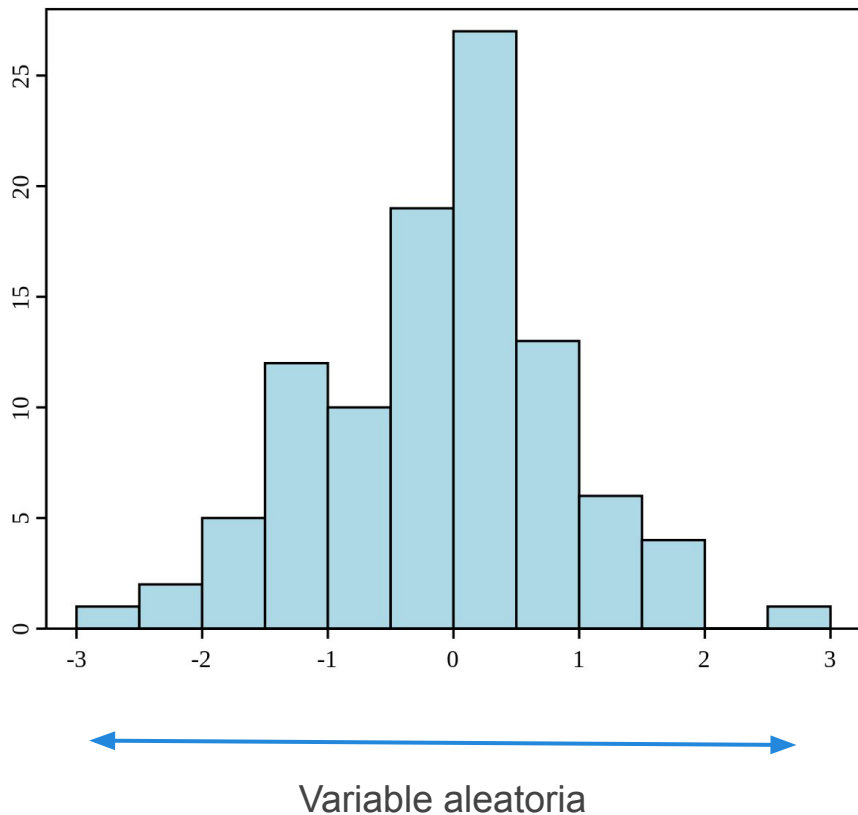


Density map realizado a partir de muestras obtenidas de una distribución de probabilidad gaussiana bivariada ($d = 2$) con distintos valores de n .

Histograma de frecuencias

Herramienta para estimar densidad empírica

Histograma de frecuencias



El histograma representa la frecuencia relativa de aparición de un valor de la variable aleatoria mediante la altura de las barras.

En el eje X tendremos los distintos valores que puede tomar una variable aleatoria a observar. En vez de contar valores únicos contamos todos los valores que caigan en un rango, es decir, la primera barra por ejemplo cuenta la cantidad de veces que la VA tomó los valores entre 100 y 125. La segunda barra cuenta la cantidad de veces que la VA tomó valores entre 125 y 150, etc.

Entonces al tomar muchas muestras (muestrear, samplear) una variable aleatoria podemos empíricamente entender cómo se distribuyen los valores que la VA puede tomar. Entonces podemos decir que con un histograma podemos aproximar empíricamente la distribución de probabilidad.

Histograma de frecuencias

Cantidad de muestras por bin/caja

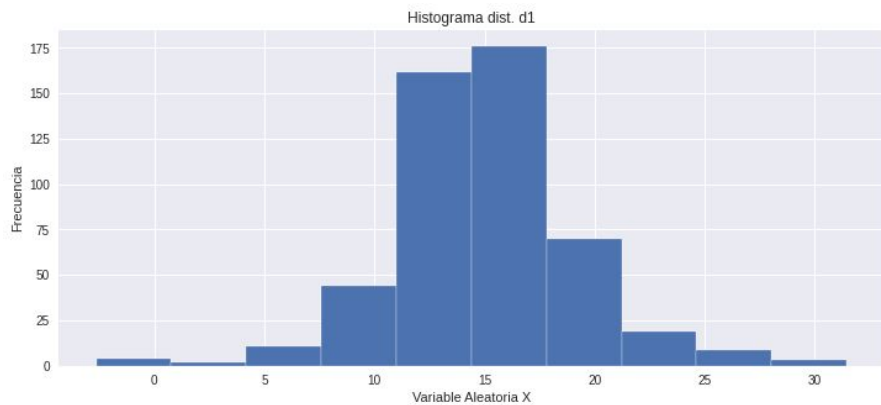
Funcion delta (contador)

$$n_k = \sum \delta(x_{(kj)}) \quad \delta(x_{(ij)}) = 1$$

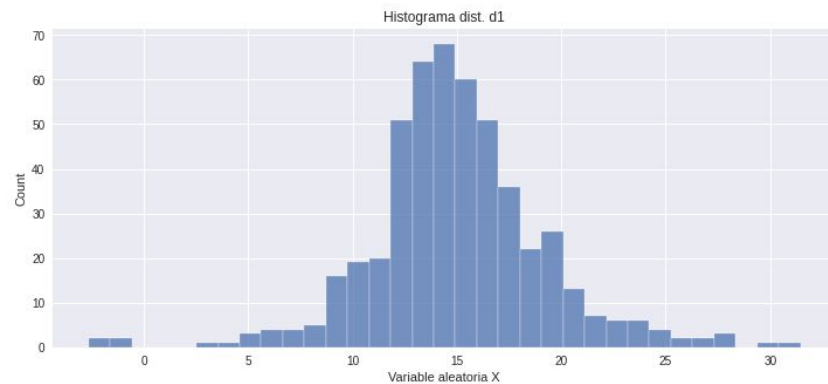
Muestras totales en los K bins

$$n = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{n_k} \delta(x_{(kj)})$$

Histograma de frecuencias



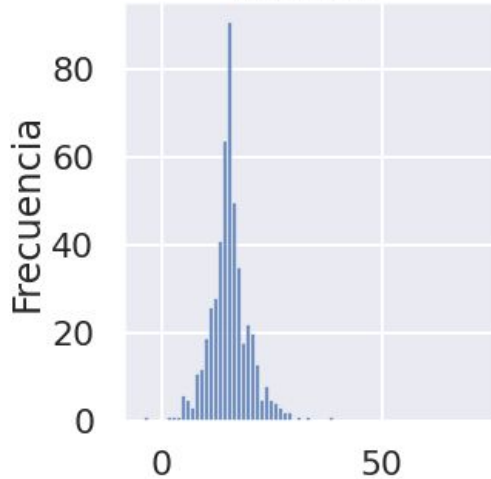
Histograma con bins = 10



Histograma con bins = 40

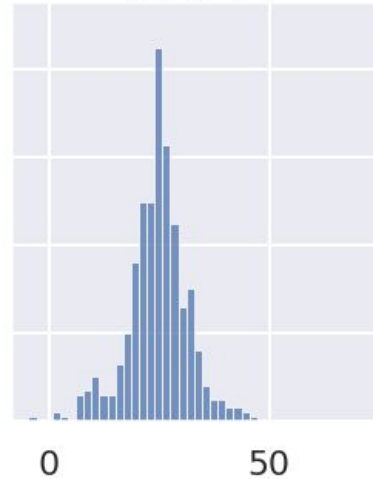
Histogramas

Hist. d1



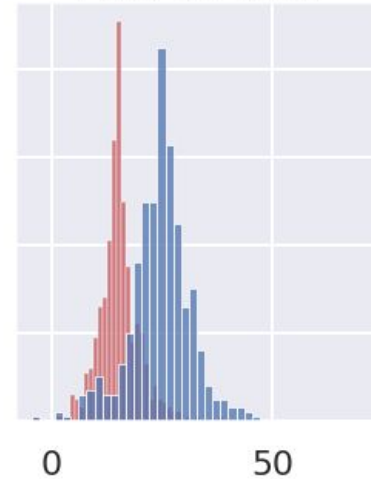
Histograma sobre 500
muestras de una
distribución d1 normal
 $\mu = 15$, $\sigma = 3$

Hist. d2



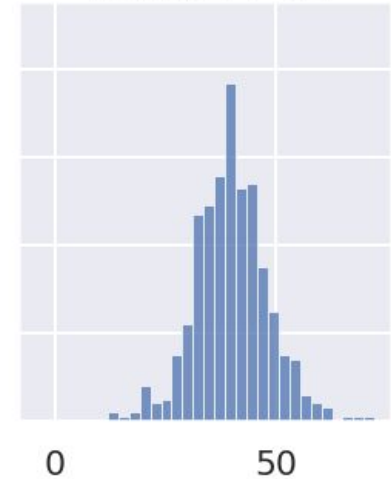
Histograma sobre 500
muestras de una
distribución d2 normal
 $\mu = 25$, $\sigma = 5$

Hist. d1 & d2



Los dos histogramas en
simultáneo.

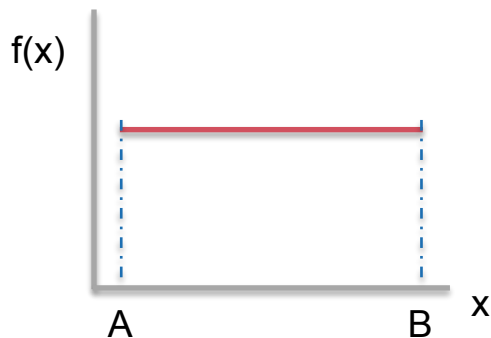
Hist. d1 + d2



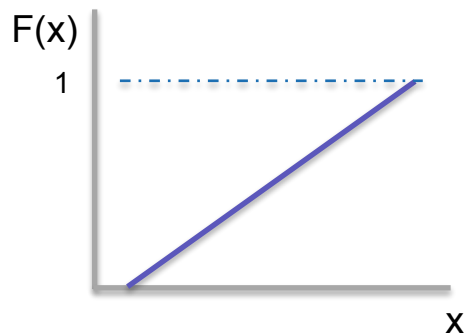
Histograma realizado sobre
la suma de las 2 muestras
obtenidas de las
distribuciones d1 y d2.

distribución uniforme

Distribución de densidad de probabilidad.



Distribución de probabilidad acumulada.



Rango de valores posibles.

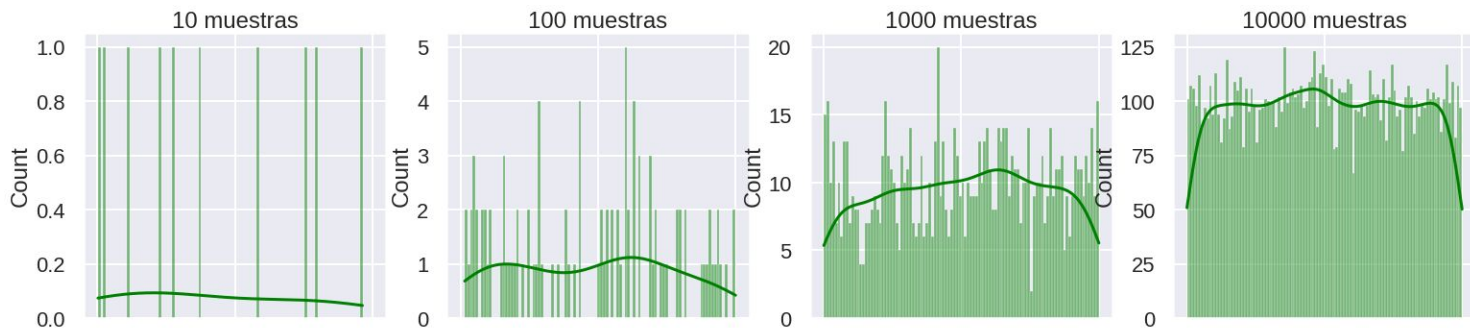
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if } x > b \end{cases}$$

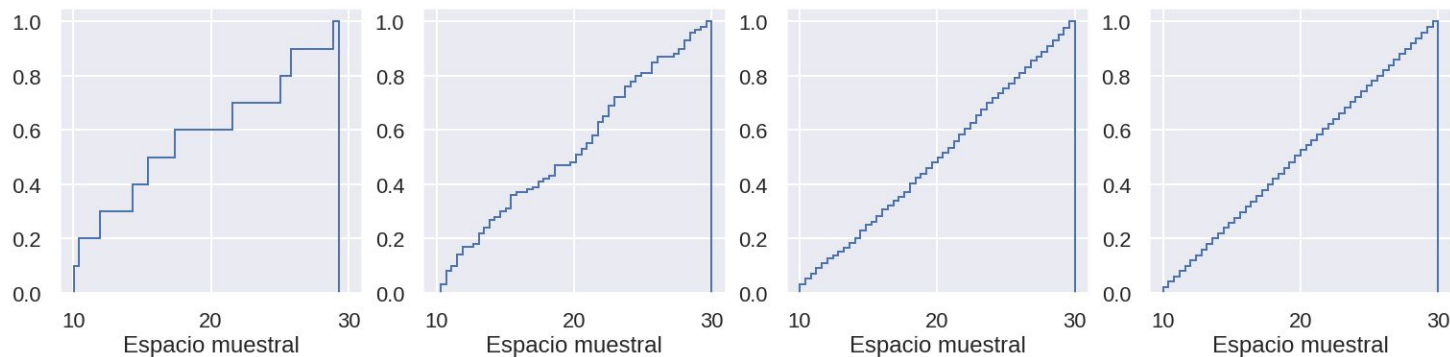
La distribución de probabilidad uniforme asigna la misma probabilidad de ocurrencia a cada valor dentro del rango que puede generar una variable aleatoria.

muestreo desde distribución uniforme

Probabilidad
Empírica
De ocurrencia

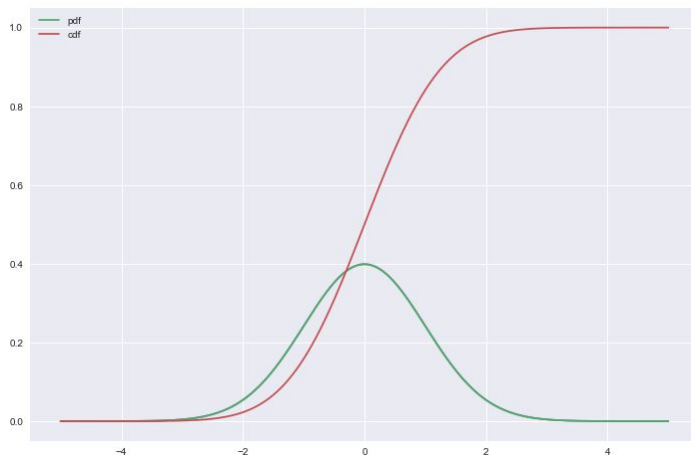


Probabilidad
Acumulada de
Ocurrencia



distribución gaussiana - normal

Distribución de densidad (verde) y acumulada (roja) de probabilidad.



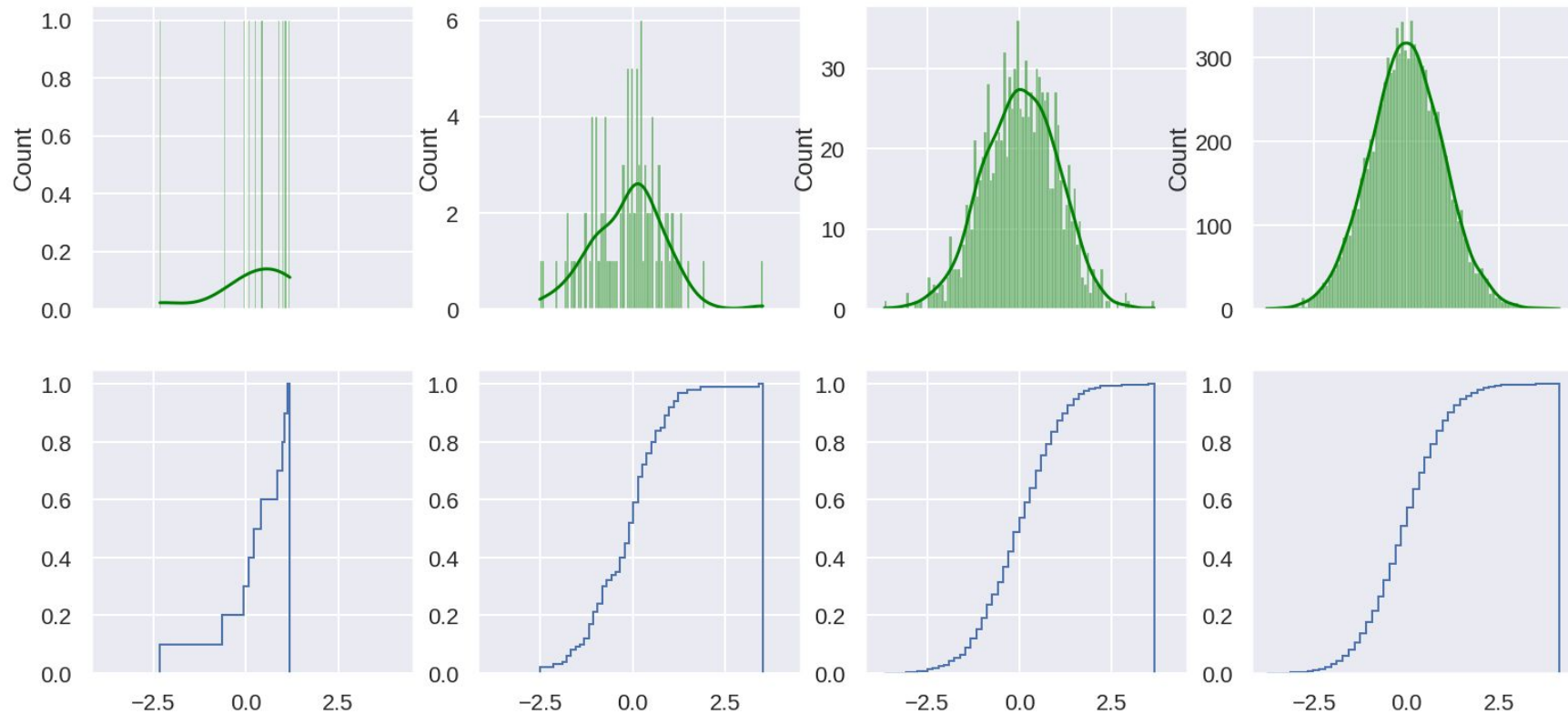
Rango de valores posibles de la VA.

Distribución simétrica de VA continua. El parámetro μ define la esperanza y el sigma el desvío standard.

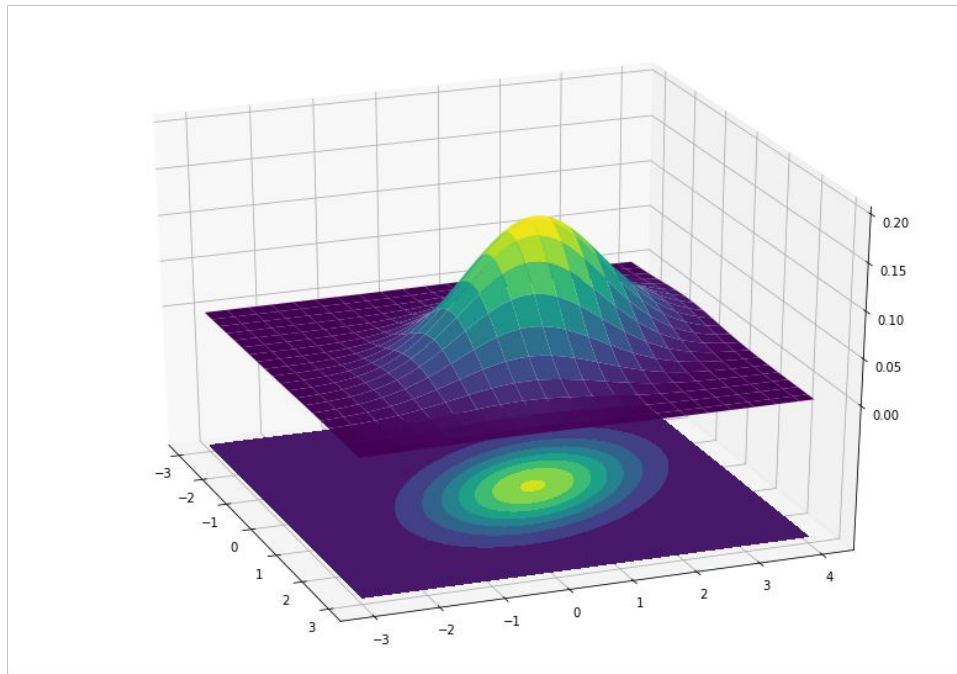
Suele utilizarse para modelar procesos reales en ciencias naturales, sociales, etc.

$$p(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[\frac{-1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

Muestreo de una distribución normal



Histograma 2D para gaussiana bivariada



$$p(X) \sim (2\pi)^{-d/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (X - M)^t \Sigma^{-1} (X - M) \right]$$

Boxplot

Herramienta para estimar densidad empírica

Quantiles

Los cuantiles suelen usarse como límites entre los grupos que dividen la distribución de una variable aleatoria en partes iguales; entendidas estas como intervalos que comprenden la misma proporción de valores.

Los mas populares son:

- Cuartiles, dividen la distribución en 4 partes iguales (0.25, 0.5, 0.75)
- Quintiles, dividen la dist. en 5 partes iguales (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)
- Deciles, dividen la dist. en 10 partes iguales (0.1, 0.2.....0.9)
- Percentiles, dividen la dist. en 100 partes iguales (0.01.....0.99)

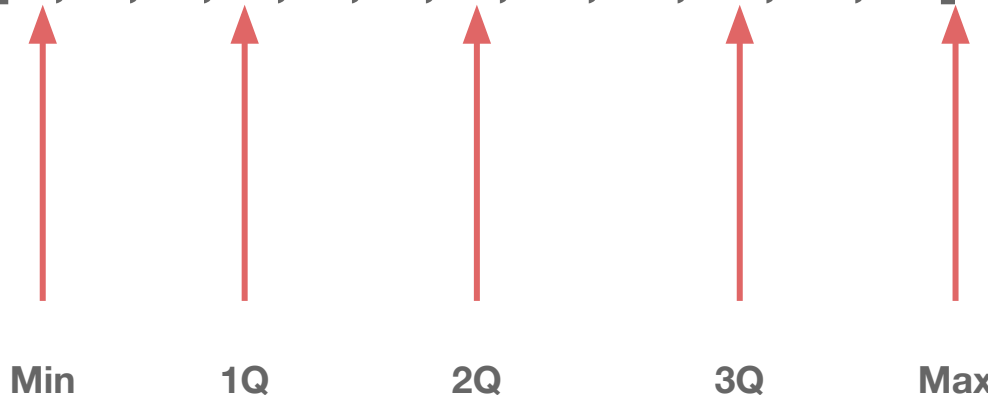
Quantiles, Cuartil

Datos Originales de una variable aleatoria

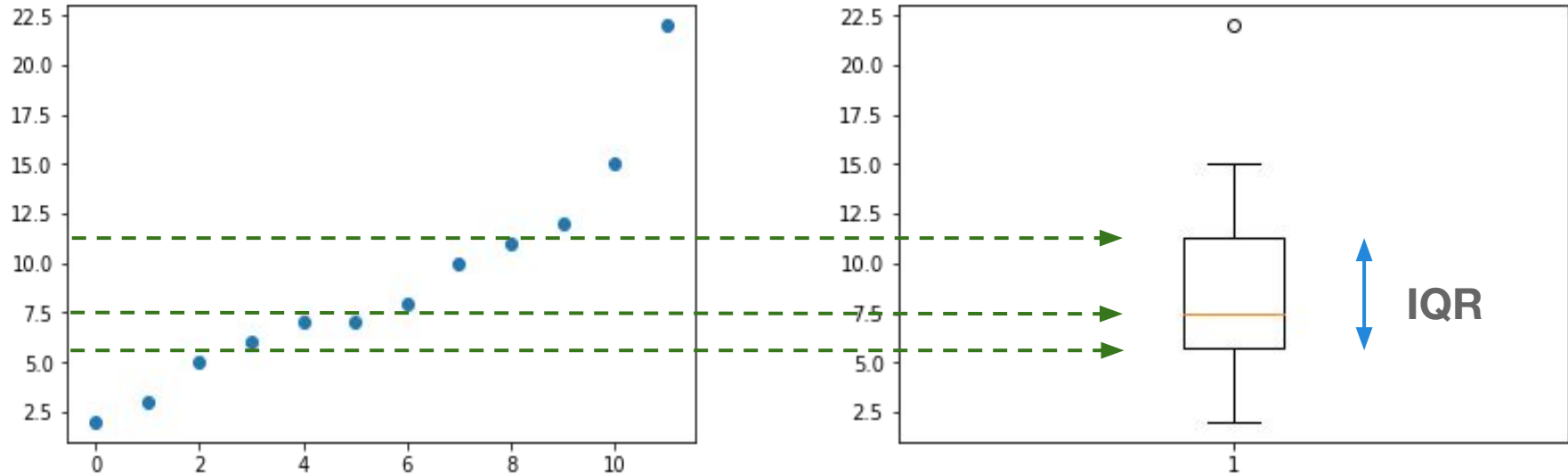
$X = [15, 7, 3, 22, 10, 8, 6, 7, 2, 11, 5, 12]$

Datos ordenados

$[2, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 10, 11, 12, 15, 22]$



Boxplot



En este caso por ejemplo tenemos una variable/feature que se mide en un lapso de 11 segundos. Queremos entender cómo se distribuyen los valores de la variable en cuestión.

Cuantiles y Boxplots

Si ordenamos los datos de menor a mayor:

- El 25% de los datos será menor al 1er cuartil
- El 50% de los datos será menor al 2do cuartil (mediana)
- El 75% de los datos será menor al 3er cuartil
- Los valores que esten sobre el percentil 0.01 y 0.99 podrian considerarse outliers.

Mean, median & outliers



Mean, median & outliers



Ignacio Spiousas @Spiousas · 2h

Si esto te parece gracioso creo que deberíamos ser amigos.



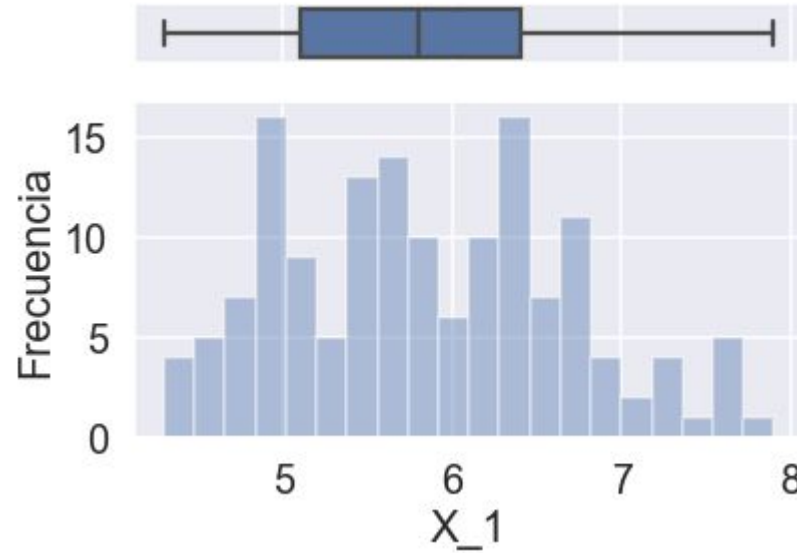
Filtrar por Cuantiles

Muchas veces, con el fin de quitar outliers de la distribución de datos que deseamos analizar, lo que podemos realizar es:

- Quitar todos los datos que estén por encima del Percentil 99
- Quitar todos los datos que estén por debajo del Percentil 1
- Quitar todos los datos que estén por fuera del $1.5 * \text{IQR}$ (Inter Quartile Range).

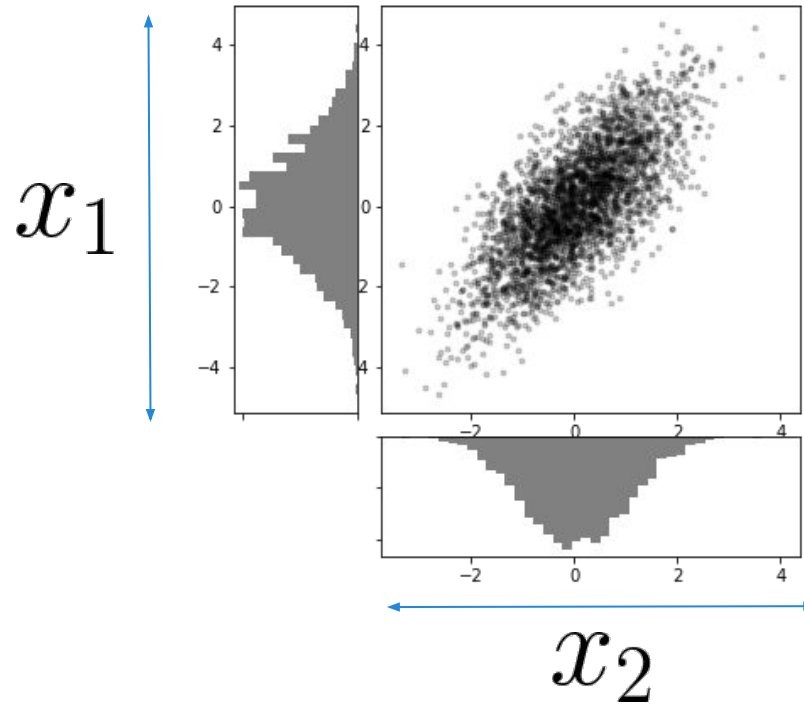
Cuidado! Quitar datos del dataset dependerá de cada caso, es importante entender las consecuencias de quitar instancias consideradas anomalías.

Boxplot & histograma



Un boxplot y un histograma en 1D son sinónimos y complementos para visualizar la densidad de probabilidad empírica de una variable.

Scatterplot + Histograma



$$x \in \mathbb{R}^2$$

Es posible visualizar muestras en dos dimensiones con un scatterplot y simultáneamente histogramas en cada una de las variables que caracterizan a cada muestra. De igual manera en lugar de los histogramas podría haber un boxplot.

Correlación Lineal

Herramienta para entender si dos variables aleatorias co-varian linealmente.

Correlación lineal (Pearson)

Es una forma de medir cuán cercanas están dos variables x e y (features) a tener una relación lineal entre ellas.

$$r = \frac{\sum_i^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{[\sum_i^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 (x_{2i} - \bar{x}_2)^2]^{1/2}}$$

Matriz de correlación

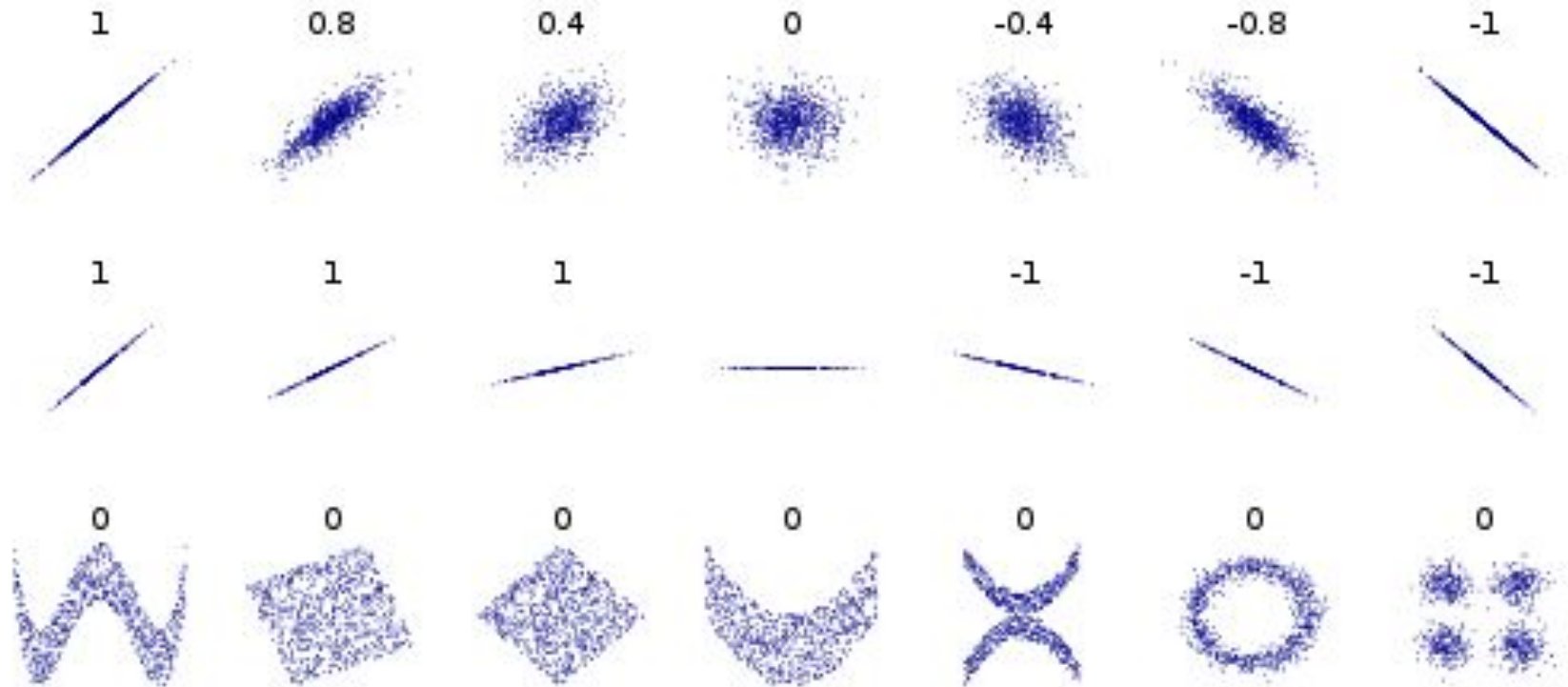
$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} \end{bmatrix}$$

The matrix R is a 5×5 correlation matrix. The horizontal dimension is labeled d (width) and the vertical dimension is labeled d (height). The element r_{24} is circled in red. A pink arrow points from r_{24} to the formula for r :

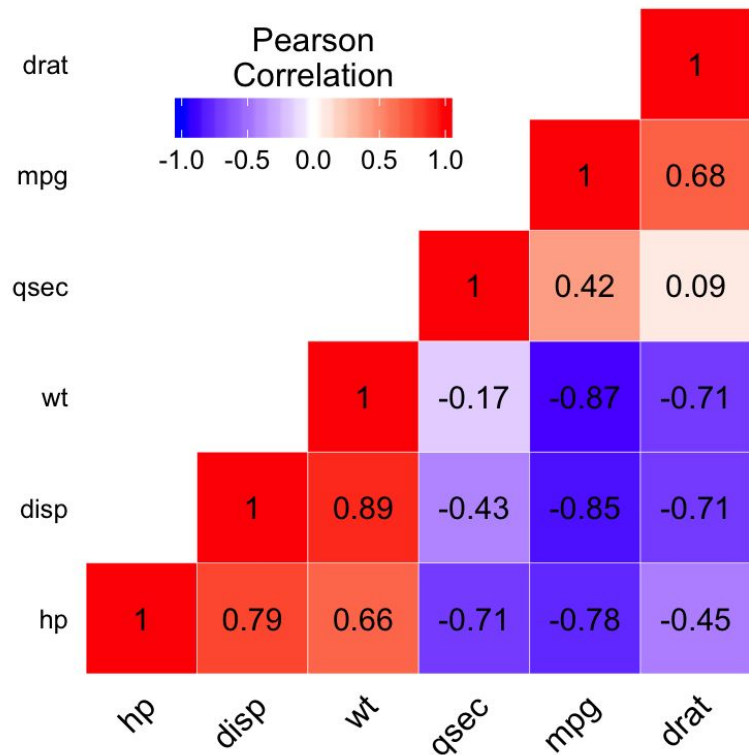
$$r = \frac{\sum_i^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{[\sum_i^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 (x_{2i} - \bar{x}_2)^2]^{1/2}}$$

$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^d$

Correlaciòn lineal (Pearson)



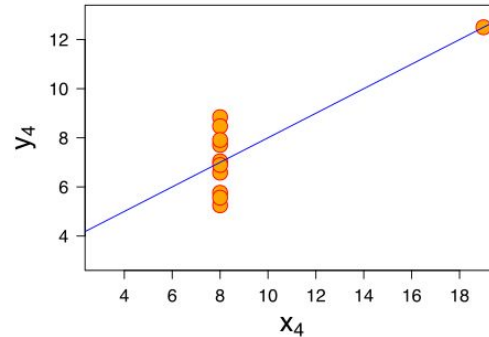
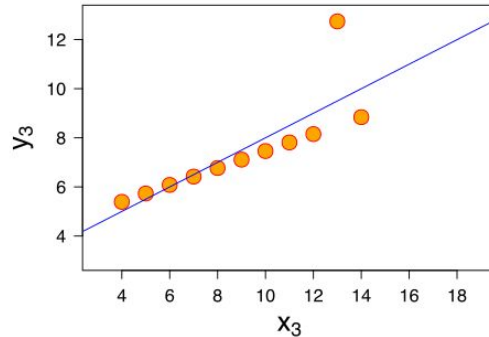
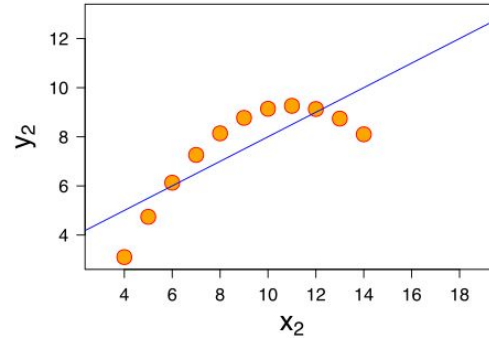
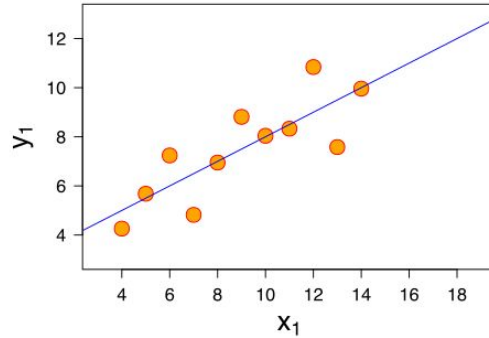
Correlación pairwise entre variables



En el ejemplo tenemos 6 variables/features. Podemos calcular la correlación lineal de Pearson par-a-par y visualizarla con un heatmap.

Atención: la correlación de Pearson **sólo** mide relación lineal entre variables. Que no exista correlación lineal no quiere decir que no exista relación alguna. Puede existir relación no lineal.

Correlación lineal: trampas



Los 4 datasets tienen las mismas estadísticas descriptivas, sin embargo se ven muy distintos cuando se visualizan:

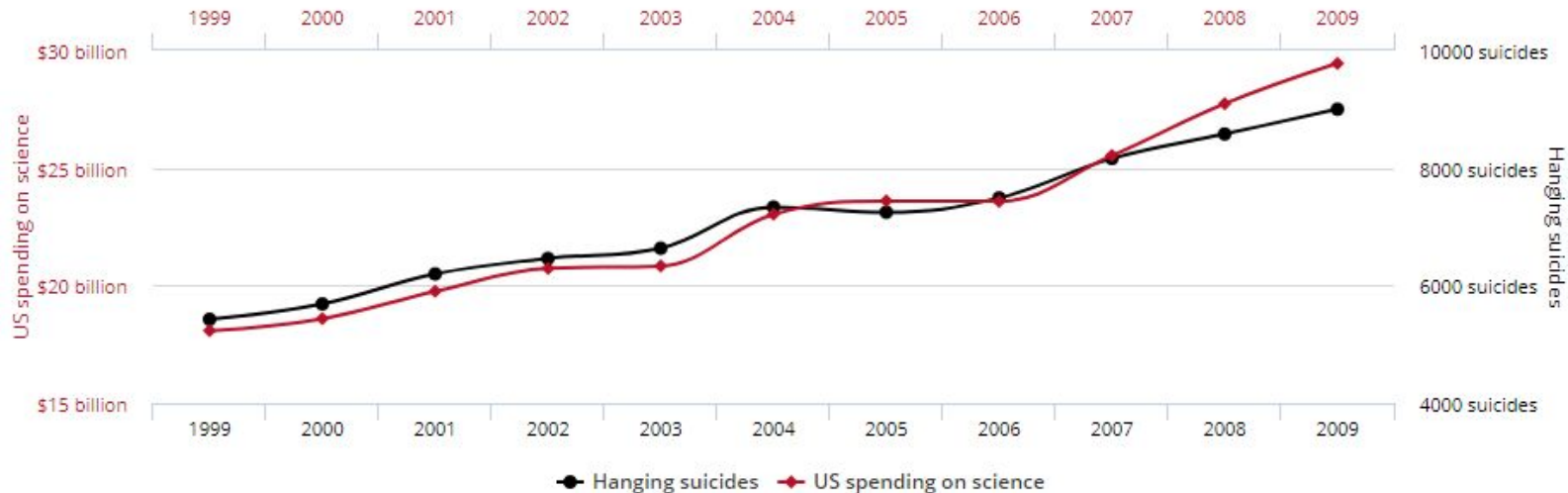
Media $X = 9$
 $R_{xy} = 0.81$

Correlation is not causation



US spending on science, space, and technology correlates with Suicides by hanging, strangulation and suffocation

Correlation: 99.79% ($r=0.99789126$)



Data sources: U.S. Office of Management and Budget and Centers for Disease Control & Prevention

tylervigen.com

Pearson correlation in Python



```
x = np.array([[2,2],[3,3]])
```

```
R1 = np.corrcoef(x)
```


A agarrar la PyLA

