

Модель сложных сетей с придиричивостью

Zarvanskiy Igor, Snarskii

NTUU KPI and

IPRI

(Dated: May 01, 2014)

Предлагается модификация правила предпочтительного соединения - присоединение с “придиричивостью”, которое применяется к моделям сетей, построенных по алгоритму Барабаши-Альберта, и для (u,v) -цветков. Приводятся результаты численного моделирования предложенных моделей и рассматриваются значения различных характеристик моделируемых сетей. Было показано, что характеристики полученных сетей ведут себя аналогично фазовым переходам второго рода, а также рассчитано пороговое значение параметра “придиричивости”, при котором происходит фазовый переход.

I. Введение

Значительное количество реальных сложных сетей являются безмасштабными сетями, такими, степени которых распределяются по степенному закону. К таким сетям относятся WWW-сети, сети метаболизма, сети питания (food webs), социальные сети и многие другие [1].

В настоящее время свойства таких безмасштабных сетей достаточно подробно изучено, установлены их сетевые характеристики (средняя степень узла, минимальный средний путь, коэффициент кластеризации и т.д.) [2]. Необходимо заметить, что сложные сети построенные согласно предположенным сценариям [3] являются идеализацией реальных сетей, характеристики которых могут иногда значительно отличаться от идеальных [2]. Тем не менее степенная зависимость степени узлов реальных сложных сетей встречается достаточно часто и особенно для тех сетей, которые образованы (возможно само организованными) развивающимся по времени процессом [4, 5].

Одним из таких процессов, который начал изучаться задолго до появления понятия сложная сеть, был процесс распределения между людьми «богатства» (под которым можно понимать деньги, вложения, недвижимость...). В [6] Парето был установлен т. н. Закон Парето — степенное распределение богатства — когда, число людей ν , владеющих μ - долей богатства является степенной функцией $\nu \sim \mu^\gamma$, при $\gamma = 0.86$ получается так, что 20% людей владеют 80% богатства, что часто называется законом 80/20.

В работе [7] был найден сценарий образования сложной сети, т. н. сценарий Барабаши-Альберт, со степенным законом распределения степеней узлов, основанном на двух принципиально важных положениях:

1. Сеть является растущей, начиная с некоторого затравочного числа узлов m_0 , на каждом временном шаге появляется некоторое число новых узлов с n связями.
2. Вероятность подсоединения связей от нового узла к уже существующим прямо пропорциональна по степени.

Коротко говоря модель Барабаши-Альберт — это растущая сеть с предпочтительным подсоединением.

В дальнейшем появилось много модификаций алгоритма Барабаши-Альберт, в [3] их перечислено около 20-ти. Все они приводят к безмасштабным сетям с различным значением показателя степени распределения узлов по их степеням. На первый взгляд представляется, что растущая сеть с различным типом предпочтительного соединения обязательно вырастет в безмасштабную сеть.

В настоящей работе показано, что возможна такая, незначительная на первый взгляд, модификация закона предпочтительного соединения, при которой степенное распределение модели Барабаши-Альберт принципиально нарушается. В функции распределения при этом появляется разрыв, означающий отсутствие узлов сети для некоторого диапазона значений степени. Как показали подробные исследования, введенный параметр r , определяющий модификацию закона предпочтительного подсоединения, имеет пороговое значение r_c , так что при $r < r_c$ сеть остается безмасштабной сетью, а при $r \geq r_c$ появляется разрыв в функции распределения степеней узлов. Величина провала степенным образом зависит от близости параметра r к своему пороговому значению, что позволяет говорить об аналогии с фазовым переходом второго рода.

Модификация закона подсоединения также была нами опробована на детерминированных иерархических безмасштабных сетях, т. н. (u,v)-flowers [8]. При этом также наблюдалось нарушение степенной функции распределения аналогично фазовым законам второго рода.

II. Модель Барабаши-Альберта с придирчивостью

A. Алгоритм Барабаши-Альберта

Рассмотрим растущую сеть. В стандартном варианте модели Барабаши-Альберт [7] на первом шаге по времени существует m_0 узлов связанных между собой. На каждом следующем шаге возникает m новых узлов с q связями. p_i - вероятность подсоединения (создание связи между узлами) нового узла к уже существующему узлу i пропорциональна по степени (числу связей узла i) - k_i :

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad (1)$$

где суммирование происходит по всем “старым” узлам.

Такой алгоритм, при большом числе шагов по времени приводит к степенной функции распределения степеней $P(k)$:

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \quad (2)$$

с показателем $\gamma = 3$ [7].

В [3] приведено много модификаций правила предпочтительного подсоединения, которые приводят к различным значениям показателя γ . Однако сама степенная зависимость (2) остается.

В. Модификация алгоритма Барабаши-Альберта

Здесь мы предлагаем обобщение модели, основанной на правиле предпочтительного соединения, введенного Барабаши-Альберт. Новое правило предпочтительности будем для краткости называть подсоединением с “придирчивостью”(exceptive). Согласно этой модели вводится новый параметр *exceptive* - r , принимающей значения в диапазоне $(0, 1)$. В том случае, когда выбор подсоединения новой связи выпал на узел i со степенью k_i , подсоединение происходит с вероятностью p_i , но только в том случае, когда выполняется условие:

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad k_i \geq r \langle k \rangle, \quad (3)$$

где $\langle k \rangle$ – среднее значение степени узлов в сети на момент присоединения, $\langle k \rangle = \sum_j k_j / N$.

То есть присоединение происходит только к “богатым” узлам со степенью не меньше чем $r * \langle k \rangle$. Введение дополнительного условия (3) в процессе роста сети отсекает часть узлов (делает их невалидными), то есть к ним в данный момент не может присоединиться новая связь. Необходимо заметить, что если в данный момент времени некий узел не удовлетворяет условию (3), это еще не значит, что в следующие моменты времени к нему не смогут присоединиться новые узлы. Валидность или невалидность узла меняется со временем, так как с течением времени изменяется значение $\langle k \rangle$.

С. Функция распределения степеней узлов

При значении параметра придирчивости $r = 0$ предлагаемая модель переходит в стандартную модель Барабаши-Альберт, так как k_i всегда больше 0, то есть все узлы валидны. Удивительным является наличие порогового значения параметра придирчивости r_c . При значении параметра придирчивости меньше некоторого порогового r_c , то есть при $r < r_c$ функция распределения степеней узлов $P(k)$ остается степенной, а сама сеть, тем самым, безмасштабной сетью. При значениях параметра придирчивости больше порогового значения $r \geq r_c$ сеть меняет свою структуру, а именно в сети исчезают узлы со “средним” количеством связей, что мы можем увидеть на рис. 1(а).

Определим пороговое значение параметра придирчивости. Для этого рассчитаем сеть с начальным числом узлов $m_0 = 20$. На каждом шаге будет появляться один узел с $q = 3$ связями. Делая 80 шагов строим сеть с $N = 100$ узлами. Прodelывая эту процедуру много раз для различных r находим то значения r , при котором распределение p_i для этой сети перестаёт быть степенным, то есть в сети появляется разрыв. Как оказывают численные расчеты для $N = 100$ $r_c(100) = 0.62$. При дальнейшем увеличении N от 100 до 2000 r_c уменьшается и “насыщается” при значении $r_c = 0.51$. Это значения $r_c = 0.51$ мы будем считать пороговым значением придирчивости для больших(бесконечных) сетей. В последующих расчетах мы будем использовать $r_c = 0.51$.

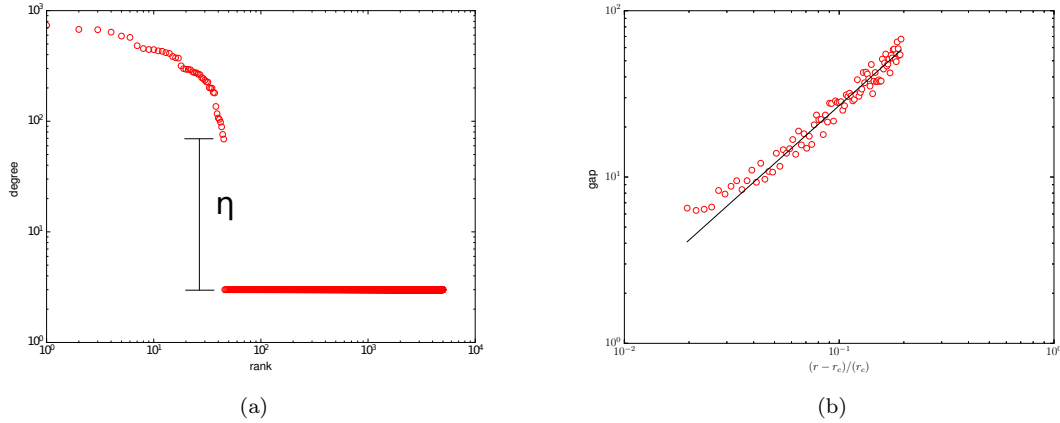


Рис. 1. (а) Оси в логарифмическом масштабе. Ранжированное распределение сети с $N = 1000$ узлами при $r = 0.6$. По горизонтальной оси отложено порядковый номер узла, по вертикальной оси отложена степень узла. (б) Оси в логарифмическом масштабе. Величина разрыва при увеличении r от r_c до $r_c + 0.01$ с шагом 0.001. По горизонтальной оси отложено $(r - r_c)/r_c$, по вертикальной оси отложено значение величины разрыва.

Введем новую характеристику сети - величину разрыва η рис. 1(а), расстояние между узлами, ближайшими к разрыву (разница значений степени узла до разрыва и после разрыва). Величина разрыва, указывает по вертикальной оси те значения степеней узлов, которые отсутствуют.

Как следует из численного моделирования, поведение параметра η аналогично поведению параметра порядка в теории фазовых переходов второго рода [9]. Как известно, параметр порядка η , например намагниченность, при приближении температуры к критическому значению T_c уменьшается степенным образом $\eta \sim (r - r_c)^\beta$, где β - критический индекс.

При проведении численного эксперимента были выбраны следующие начальные параметры: количество узлов $N = 5000$, начальное количество узлов $m_0 = 20$, количество связей у каждого нового узла $m = 3$.

На рис. 1(б) показана полученная зависимость $\eta = A \cdot (r - r_c)^\beta$, где $\beta \approx 1.15$

D. Коэффициент кластеризации, ассортативность

Появление разрыва η в распределении степеней узлов $P(k)$ свидетельствует о значительном изменении структуры сети, что не может не сказаться на её характеристиках. Ниже рассмотрено поведение C - коэффициента кластеризации и A - ассортативности, как функции коэффициента придиричности r , при $r \geq r_c$. Как показал численный эксперимент для сети с $N = 5000$ узлов, коэффициент кластеризации C , ассортативность A при $r < r_c$ от r не зависит и равна $C_0 \approx 0.01$, $A_0 \approx -0.096$, что, как и должно быть, совпадает с расчетами приведенными в [3, 10].

При увеличении r от r_c до $r_c + 0.01$ с шагом 0.001 коэффициент кластеризации увеличивается от 0.04 до 0.14, ассортативность уменьшается от -0.3 до -0.6 (согласно рис. 2(а)). Для нормализации зависимости возьмем отношение параметра к его значению при $r < r_c$: $A = A/A_0$, $C = C/C_0$.

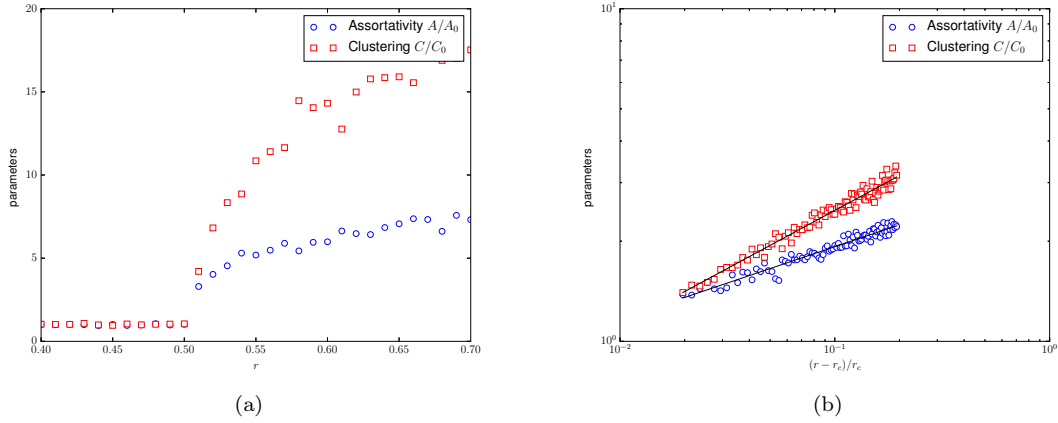


Рис. 2. (а) По горизонтальной оси отложено значение параметра придиричивости, по вертикальной оси отложено значение соответствующей характеристики. Изменение кластеризации - C , ассортативности - A при $r = [0, 4; 0, 7]$ с шагом 0.01. (б) По горизонтальной оси отложено $(r - r_c)/r_c$, по вертикальной оси отложено значение соответствующей характеристики. Изменение кластеризации - C , ассортативности - A при $r = [0, 5; 0, 56]$ с шагом 0.0001. В двойном логарифмическом масштабе.

При $r \geq r_c$ такая зависимость появляется, и она оказывается степенной, а именно $C \sim (r - r_c)^\alpha$, $A \sim (r - r_c)^\gamma$, где $\alpha \approx 0.46$, $\gamma \approx 0.26$ (2(b)).

Е. Матрица смежности для сети с придиричивостью

Рассмотрим матрицу смежности A_{ij} для сети с придиричивостью. Для удобства нумерации узлов в матрице смежности будем вести в порядке спадающего количества связей. То есть $k_i = \sum_j A_{ij}$ не возрастает с увеличением i .

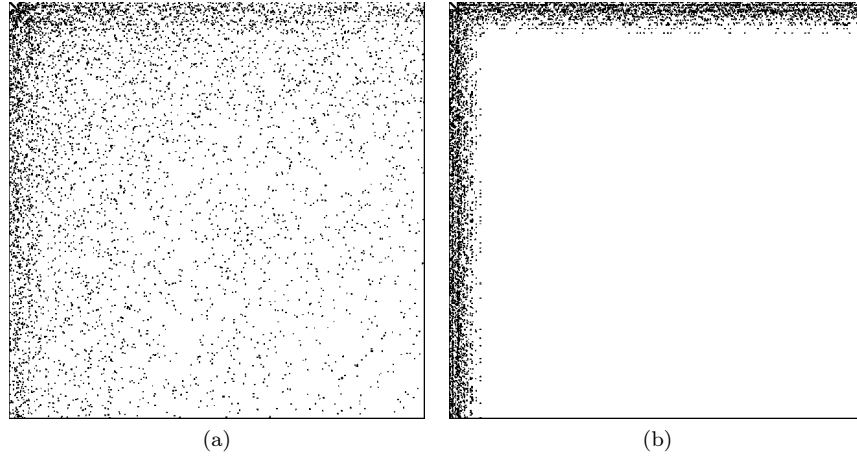


Рис. 3. Матрица смежности для сети с $N = 5000$ узлов: (а) при $r = 0$ (б) при $r = 0.6$

Изменение структуры сети при $r \geq r_c$ отражается и на виде матрицы смежности. Для сети с $N = 5000$ были построены две матрицы смежности: для $r < r_c$ - рис. 3(a) и для $r > r_c$ - рис. 3(b). Для удобства элементы матрицы смежности, у которых $A_{ij} = 1$, отображены в виде черной точки. Обе матрицы были ранжированы, то есть узлы сети пронумерованы в порядке спадающего количества связей k_i . Из рис. 3(b) можно заметить, что в матрице смежности при $r > r_c$ в правом нижнем углу появляется значительная квадратная область, заполненная 0, то есть теми парами узлов, которые не связаны друг с другом. Эта область, как показывает численный эксперимент, прямо пропорционально зависит от величины r .

Таким образом такие характеристики сети, как коэффициент кластеризации и ассортативность ведут себя аналогично параметру порядка η .

III. Иерархические сети (U,V)-FLOWERS с придирчивостью

Кроме случайных безмасштабных сетей, построенных по алгоритму Барабаш-Альберта(и их обобщений), известен класс простых детерминированных сетей, которые также являются безмасштабными сетями [11] - Fractal and Transfractal Recursive Scale-Free Networks. В частности это так называемые (u,v)-flowers, рис. 4.

Ниже мы обобщим, как и модель Барабаш-Альберта, модель Fractal and Transfractal Recursive Scale-Free сетей, введя фактор “придирчивости” r и случайность в закон роста сети. Как оказывается и в этом случае поведение характеристик сети аналогично фазовому переходу.

A. Алгоритм (u,v)-flowers

Детерминированные растущие SF-сети, называемые (u,v)-flowers и (u,v)-trees были предложены и исследованы в [8, 11, 12].

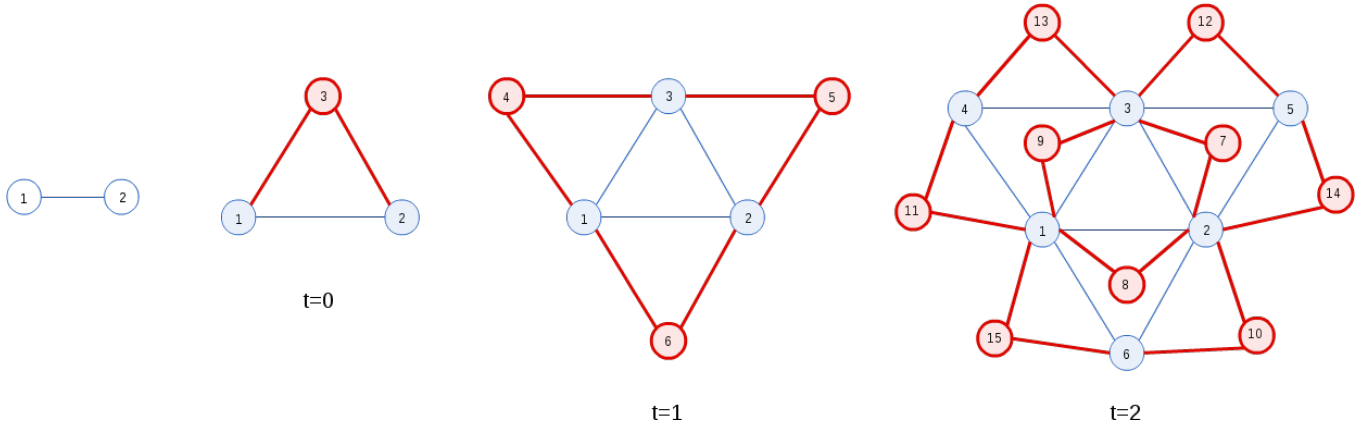


Рис. 4. Схема построения (1,2)-flowers на шагах $t = 0, 1, 2$. Утолщенные(красные online) - узлы появившиеся на данном шаге, не утолщенные (синие online) - узлы, которые появились на предыдущих шагах.

Нумерация узлов вообще говоря может быть любой, однако, в рассматриваемом примере можно занумеровать узлы таким образом (рис. 4), что матрица смежности A_{ij} станет наиболее простой. Под простой A_{ij} мы, в данном случае, понимаем такую ее структуру, что наибольшее число наибольших квадратных областей $N \times N$ в нем остаются пустыми.

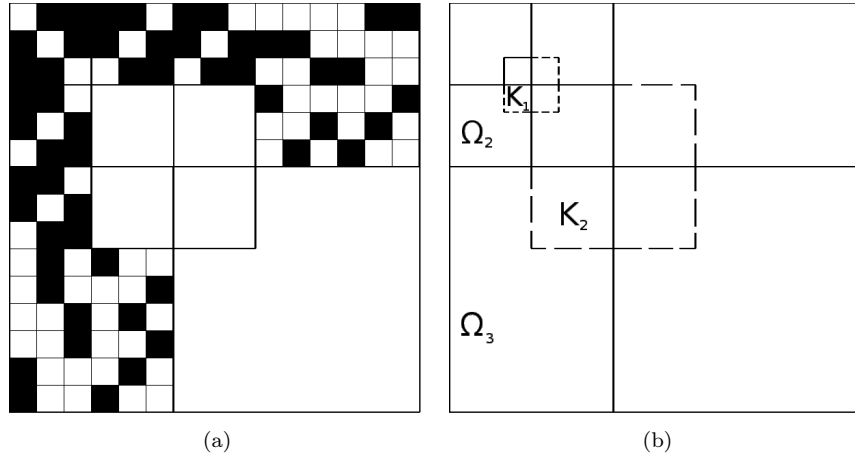


Рис. 5. Матрицы смежности для 3-го шага (1,2)-flower: (a) матрица смежности сети с выбранной нами нумерацией (b) схематическое представление, где $K_1, K_2 \dots$ пустые

На рис. 5 - $N \times N$ матрица смежности, где черным обозначены элементы матрицы с $A_{ij} = 1$. На первом шаге матрица смежности \hat{A} состоит из 3×3 элементов (верхний левый угол, шаг $t = 0$ на рис. 4). На втором шаге к ней добавляются новые элементы, и матрица состоит из 6×6 элементов (шаг $t = 1$ на рис. 4). На третьем шаге добавляются новые элементы, и матрица состоит из 15×15 элементов (шаг $t = 2$ на рис. 4). Как видно из рис. 5 правый нижний квадрат первого шага свободный от связей и состоит из одного элемента. На втором шаге добавляется правый нижний квадрат, состоящий из 3×3 элементов, а на третьем из 9×9 элементов. На рис. 5 белым обозначены места матрицы смежности, где $A_{ij} = 0$.

При выбранной нами нумерации появляются дополнительные к построению матрицы смежности в работе [8] области K_1, K_2 , в которых также $A_{i,j} = 0$.

На каждом шаге t имеется N_t узлов и L_t связей [12]

$$N_t = (u + v) \cdot N_{t-1} - (u + v), \quad L_t = (u + v)^t. \quad (4)$$

Т.е. на каждом шаге t появляется $N_t - N_{t-1}$ узлов и $L_t - L_{t-1}$ связей. Например, рис. 4, на шаге $t = 1$ появляется 3 узла и 6 связей.

Сделаем замену $(u + v) = w$ и раскроем рекуррентные формулы 4 [12]:

$$N_t = \frac{w - 2}{w - 1} \cdot w^t + \frac{w}{w - 1}, \quad L_t = w^t. \quad (5)$$

На каждом шаге t есть Ω_t клеток, которые могут быть заполнены – рис. 5. Их число равно:

$$\begin{aligned} \Omega_t &= (N_t - N_{t-1}) \cdot N_t - N_{t-2}^2 = \frac{w^3 - w^2 - 1}{w^4} N_t^2 + \frac{w^3 - 2w^2 - 2w - 2}{w^3} N_t - \frac{2w^2 + 2w + 1}{w^2} = \\ &= \frac{w^{2t+4} - 5w^{2t+3} + 8w^{2t+2} - 5w^{2t+1} + 4w^{2t} + w^{t+5} - 3w^{t+4} + 4w^{t+2} - w^5}{w^3 \cdot (w - 1)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вероятность заполнения ячейки матрицы равна:

$$W_t = \frac{L_t - L_{t-1}}{\Omega_t} = \frac{w^{t+5} - 3w^{t+4} + 3w^{t+3} - w^{t+2}}{w^{2t+4} - 5w^{2t+3} + 8w^{2t+2} - 5w^{2t+1} + 4w^{2t} + w^{t+5} - 3w^{t+4} + 4w^{t+2} - w^5}. \quad (7)$$

Так с каждым шагом вероятность падает и матрица смежности становится все более разреженной. В [8] было показано, что (u,v)-flowers являются безмасштабными сетями. Для изображенного на рис. 4 (1,2)-flower распределение узлов по степеням имеет вид $P(k) \sim k^{-(1+\ln 3/\ln 2)}$. В общем случае для (u,v)-flowers [12]:

$$P(k) \sim k^{-\alpha}, \quad \alpha = 1 + \frac{\ln(u + v)}{\ln 2}. \quad (8)$$

В. Модификация алгоритма (u,v)-flowers

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при построении (u,v)-flower не все связи реализуются. При чем вероятность нереализованности связи тем больше, чем меньше степени узлов она соединяет.

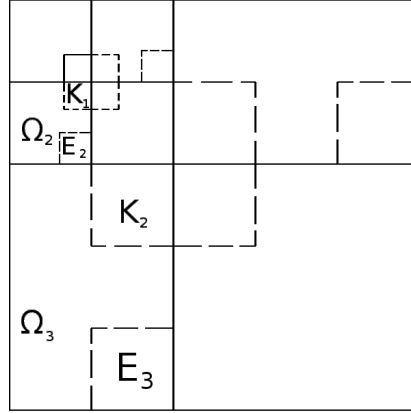


Рис. 6. Схема матрицы смежности для 3-го шага (1,2)-flower.

Правило присоединение с “придирчивостью”, как можно увидеть в случае с моделью Барабаши-Альберта 3(b), приводит к появлению пустой области(область без связей) в правом нижнем углу матрицы смежности. В случае с моделью (u,v)-flowers такая область уже существует, поэтому мы будем делать пустые области $E_1, E_2...$ в правом нижнем углу уже заполненных областей $\Omega_1, \Omega_2...$.

Построение сети будем проводить путем заполнения в матрице смежности областей $\Omega_t - E_t$ с соответствующим им количеством связей L_t . Для того чтобы случайное набрасывание связей соответствовало (u, v)-flowers, необходимо сохранить закон распределению степеней узлов $p \sim k^{-y}$, где $y = 1 + \ln(u + v) / \ln 2$ [11], что достигается путем разделения области заполнения на несколько частей с вероятностями заполнения соответствующими функции $y = x^{1 + \ln(1+2) / \ln 2}$. В последующих расчетах моделируются (1, 2)-flowers. Для сохранения закона распределения степеней узлов используется разбиение области заполнения на 4 части с вероятностями заполнения [0.37, 0.3, 0.22, 0.11].

Таким образом “придирчивость” в матрице смежности отображается правыми нижними углами областей Ω - пустыми областями E (рис. 5).

При моделировании использовались пустые области E_t подобные(пропорциональные) областям Ω_t :

$$E_t = (r \cdot N_{t-1}) \times (r \cdot (N_t - N_{t-1})), \quad (9)$$

Вероятность заполнения ячейки матрицы:

$$W_t = \psi \cdot \frac{L_t - L_{t-1}}{\Omega_t - E_t}, \quad (10)$$

где ψ вероятность попадания в соответствующую часть области заполнения.

С. Функция распределения степеней узлов

При значении параметра придирчивости $r = 0$ предлагаемая модель принимает вид стандартной (u,v)-flowers. Как и в случае с моделью Барабаши-Альберта, в модели (u,v)-flowers присутствует пороговое значения параметра придирчивости r_c . При значении параметра придирчивости меньше некоторого порогового $r < r_c$ функция распределения степеней узлов $P(k)$ остается степенной, а сама сеть, тем самым, безмасштабной сетью. При значениях параметра придирчивости больше порогового значения $r \geq r_c$ сеть меняет свою структуру.

Определим пороговое значение параметра придирчивости. Для этого рассчитаем пороговое значение для (1,2)-flowers с 1 по 14 поколение. Как и в модели Барабаши-Альберт с придирчивостью происходит насыщение порогового значения. Для восьмого поколения r_c полностью насыщается и мы получаем $r_c = 0.75$.

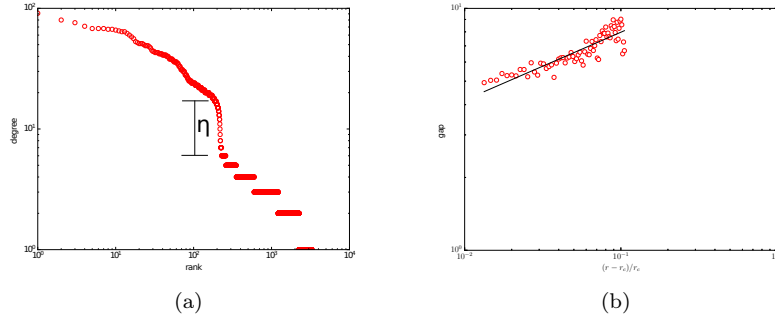


Рис. 7. (а) Оси в логарифмическом масштабе. Ранжированное распределение сети при $r = 0.8$. По горизонтальной оси отложено порядковый номер узла, по вертикальной оси отложена степень узла. (b) Оси в логарифмическом масштабе. Величина разрыва при $r = [0, 75; 0, 83]$ с шагом 0.01. По горизонтальной оси отложено $(r - r_c)/r_c$, по вертикальной оси отложено значение величины разрыва.

Для определение значения величины разрыва (параметр η) необходимо определить точки перегиба 7(a). Искомые точки будут соответствовать минимумам радиуса кривизны $k = \frac{(\sqrt{1+y'^2})^3}{|y''|}$ [13], где y аппроксимирующая функция $y = a + bx + c \cdot \arctan(x) + d \cdot \arctan(\alpha x + \beta)$ [14], зависимость на рис. 7(a).

Как следует из численного моделирования, поведение параметра η аналогично поведению параметра порядка в теории фазовых переходов второго рода [9]. Параметр порядка η при приближении к критическому значению уменьшается степенным образом $\eta \sim (r - r_c)^\beta$, где β – критический индекс. При проведении численного эксперимента были выбраны следующие начальные параметры: (1,2)-flowers восьмого поколения, то есть количество узлов $N = 3282$.

На рис. 7(b) показана полученная зависимость $\eta = A \cdot (r - r_c)^\beta$, где $\beta \approx 0.28$

D. Коэффициент кластеризации, ассортативность

Ниже рассмотрено поведение C - коэффициента кластеризации, A - ассортативности, как функции коэффициента придричивости r , при $r \geq r_c$. Как показал численный эксперимент для сети (1,2)-flowers восьмого поколения с $N = 3282$ узлов, коэффициент кластеризации C , ассортативность A при $r < r_c$ от r не зависит и равна $C_0 \approx 0.02$, $A_0 \approx -0.18$, что, как и должно быть, совпадает с расчетами приведенными в [11, 12].

При увеличении r от r_c до $r_c + 0.1$ с шагом 0.01 коэффициент кластеризации увеличивается от 0.02 до 0.04, ассортативность уменьшается от -0.18 до -0.39 (согласно рис. ??). Для нормализации зависимости возьмем отношение параметра к его значению при $r < r_c$: $A = \frac{A}{A_0}$, $C = \frac{C}{C_0}$.

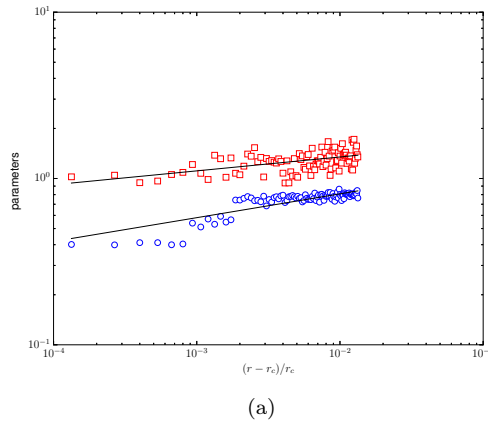


Рис. 8. По горизонтальной оси отложено значение параметра придричивости, по вертикальной оси отложено значение соответствующей характеристики. (а) Изменение кластеризации, ассортативности при $r = [0, 75; 0, 76]$ с шагом 0.0001. В двойном логарифмическом масштабе.

При $r \geq r_c$ такая зависимость появляется, и она оказывается степенной, а именно $C \sim (r - r_c)^\alpha$, $A \sim (r - r_c)^\gamma$, где $\alpha \approx 0.11$, $\gamma \approx 0.08$ (8(a)).

IV. Заключение

В статье предложено модифицированное правило предпочтительного присоединения, а именно присоединение с “придирчивостью”, применительно к классам безмасштабных сетей - модель Барабаши-Альберта и (u,v)-цветки. Модификация правила предпочтительного присоединения заключается в введении параметра “придирчивости”, который в процессе роста сети отсекает часть узлов (делает их невалидными), то есть к ним в данный момент не может присоединиться новая связь.

Численное моделирование показало, что в моделируемых классах сетей происходят существенные структурные изменения. Введение новой характеристики сети - величины разрыва, и расчет уже известных характеристик, таких как коэффициент кластеризации, ассортативность и среднее наименьшее расстояние между узлами, позволили сделать вывод о том что в моделируемых классах сетей происходит фазовый переход второго рода. Было вычислено пороговое значение при котором происходит фазовый переход, а также определено, что введенная характеристика “величина разрыва” пропорциональна параметру порядка.

Появление разрыва η при $r > r_c$ в ранжированном распределении узлов сети (1) может представлять интерес для экономических моделей, рассматривающих распределение богатства [15].

Рассмотрим следующую модель, описывающую распределение доходов. Пусть каждый узел представляет собой предприятие. Величину богатства данного предприятия будем считать пропорциональной числу его связей с другими предприятиями, т.е. степени узла. Каждое новое предприятие (узел) соединяется (образует контакт) с другими, уже существующими узлами. Если это соединение происходит с вероятностью прямо пропорциональной величине богатства (степени узла) того предприятия, с которым происходит соединение, то распределение предприятий по величине богатства является распределение Парето [15, 16], что что наблюдается во многих реальных случаях [16].

Однако, если правило представляющиеся естественным ($p_i \sim k_i^2$) нарушается и переходит в 3, то вместо распределения Парето наблюдается распределение с разрывом 1. С точки зрения рассматриваемой экономической модели (степень узла - величина богатства предприятия и/или людей, его ообразующего) - это означает, что исчезает т.н. средний класс. На 1 видно, что предприятия с величиной богатства в диапазоне η практически отсутствуют. Т.е. существует только очень богатые предприятия/люди (узлы с большой степенью) и бедные (с малой степенью). На 1 это узлы со степенью приблизительно от 4 до

V. Литература

-
- [1] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, “Evolution of networks,” *Advances in Physics*, vol. 51, pp. 1079–1187, 2002.
 - [2] M. E. J. Newman, “The structure and function of complex networks,” *SIAM Review*, vol. 45, p. 167–256, 2003.
 - [3] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, pp. 47–97, 2002.
 - [4] A. Clauset, C. R. Shalizi, and M. E. J. Newman, “Power-law distributions in empirical data,” *SIAM Rev.*, vol. 51(4), 2009.
 - [5] J.-P. Onnela, J. Saramäki, J. Hyvönen, G. Szabó, D. Lazer, K. Kaski, J. Kertész, and A.-L. Barabási, “Structure and tie strengths in mobile communication networks,” *PNAS*, vol. 104(18), 2007.
 - [6] V. Pareto, *Manual of political economy*. Augustus M Kelley Pubs, 1969.
 - [7] A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong, “Mean-field theory for scale-free random networks,” *Physica A*, vol. 272, p. 173–187, 1999.
 - [8] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, “Pseudofractal scale-free web,” *Physical Review E*, vol. 65, 2002.
 - [9] L. D. Landau, “On the theory of phase transitions,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 7, p. 19–32, 1937.
 - [10] M. E. J. Newman, “Assortative mixing in networks,” *Physical Review Letter*, vol. 89, 2002.
 - [11] H. D. Rozenfeld, S. Havlin, and D. ben Avraham, “Fractal and transfractal recursive scale-free nets,” *New Journal of Physics*, vol. 9, p. 175, 2007.
 - [12] H. D. Rozenfeld and D. ben Avraham, “Percolation in hierarchical scale-free nets,” *Physical Review E*, vol. 75, 2007.
 - [13] M. Hazewinkel, *Encyclopedia of Mathematics*. Springer, 1995.
 - [14] T. C. Mills and K. D. Patterson, “Carmichael’s arctan trend : precursor of smooth transition functions,” *Reading : Univ. of Reading, Dep. of Economics*, 2013.
 - [15] A. Atkinson and F. Bourguignon, *Handbook of income distribution*. Elsevier imprint: North-Holland, 2007.

- 251 [16] P. Gottschalk, "Inequality, income growth and mobility: The basic facts.," vol. 11, 1997.