Модель сложных сетей с придирчивостью

Zarvanskiy Igor, Snarskii
NTUU KPI and
IPRI
(Dated: May 01, 2014)

Предлагается модификация правила предпочтительного соединения - присоединение с “придирчивостью”, которое применяется к моделям сетей, построенных по алгоритму Барабаши-Альберта, и для (u,v)-цветков. Приводятся результаты численного моделирования предложенных моделей и рассматриваются значения различных характеристик моделируемых сетей. Было показано, что характеристики полученных сетей ведут себя аналогично фазовым переходам второго рода, а также рассчитано пороговое значение параметра “придирчивости”, при котором происходит фазовый переход.

I. Введение

Значительное количество реальных сложных сетей являются безмасштабными сетями, такими, степени которых распределяются по степенному закону. К таким сетям относятся WWW-сети, сети метаболизма, сети питания (food webs), социальные сети и многие другие [4].

В настоящее время свойства таких безмасштабных сетей достаточно подробно изучено, установлены их сетевые характеристики (средняя степень узла, минимальный средний путь, коэффициент кластеризации и т.д.) [9]. Необходимо заметить, что сложные сети построенные согласно предположенным сценариям [1] являются идеализацией реальных сетей, характеристики которых могут иногда значительно отличаться от идеальных [9]. Тем не менее степенная зависимость степени узлов реальных сложных сетей встречается достаточно часто и особенно для тех сетей, которые образованы (возможно само организованными) развивающимся по времени процессом [].

Одним из таких процессов, который начал изучаться задолго до появления понятия сложная сеть, был процесс распределения между людьми «богатства» (под которым можно понимать деньги, вложения, недвижимость...). В [10] Парето был установлен т. н. Закон Парето — степенное распределение богатства – когда, число людей ν, владеющих μ - долей богатства является степенной функцией $\nu \sim \mu^{\gamma}$, при $\gamma = 0.86$ получается так, что 20% людей владеют 80% богатства, что часто называется законом $80/20$.

В работе [2] был найден сценарий образования сложной сети, т. н. сценарий Барабаши-Альберт, со степенным законом распределения степенней узлов, основанном на двух принципиально важных положениях:

1. Сеть является растущей, начиная с некоторого затравочного числа узлов m_0, на каждом временном шаге появляется некоторое число новых узлов с n связями.

2. Вероятность подсоединение связей от нового узла к уже существующим прямо пропорциональна по степени.

Коротко говоря модель Барабаши-Альберт — это растущая сеть с предпочтительным подсоединением.

В дальнейшем появилось много модификаций алгоритма Барабаши-Альберт, в [1] их перечислено около 20-ти. Все они приводят к безмасштабным сетям с различным значением показателя степени распределения узлов по их степеням. На первый взгляд представляется, что растущая сеть с различным типом предпочтительного соединения обязательно вырастет в безмасштабную сеть.

В настоящей работе показано, что возможна такая, незначительная на первый взгляд, модификация закона предпочтительного соединения, при которой степенное распределение модели Барабаши-Альберт принципиально нарушается. В функции распределении при этом появляется разрыв, означающий отсутствие узлов сети для некоторого диапазона значений степени. Как показали подробные исследования, введенный параметр r, определяющий модификацию закона предпочтительного подсоединения, имеет пороговое значение r_c, так что при $r < r_c$ сеть остается безмаштабной сетью, а при $r \geq r_c$ появляется разрыв в функции распределения степеней узлов. Величина провала степенным образом зависит от близости параметра r к своему пороговому значению, что позволяет говорить об аналогии с фазовым переходом второго рода.

Модификация закона подсоединения также была нами опробована на детерминированных иерархических безмасштабных сетях, т. н. (u,v)-flowers [3]. При этом также наблюдалось нарушение степенной функции распределения аналогично фазовым законам второго рода.

II. Модель Барабаши-Альберта с придирчивостью

A. Алгоритм Барабаши-Альберта

Рассмотрим растущую сеть. В стандартном варианте модели Барабаши-Альберт [2] на первом шаге по времени существует m_0 узлов связанных между собой. На каждом следующем шаге возникает m новых узлов с q связями. p_i - вероятность подсоединения(создание связи между узлами) нового узла к уже существующему узлу i пропорциональна по степени (числу связей узла i) - k_i:

$$p_i = \frac{k_i}{\sum\limits_j k_j}, \tag{1}$$

где суммирование происходит по всем “старым” узлам.

Такой алгоритм, при большом числе шагов по времени приводит к степенной функции распределения степеней $P(k)$:

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \tag{2}$$

с показателем $\gamma = 3$ [2].

В [1] приведено много модификаций правила предпочтительного подсоединения, которые приводят к различным значениям показателя γ. Однако сама степенная зависимость (2) остается.

B. Модификация алгоритма Барабаши-Альберта

Здесь мы предлагаем обобщение модели, основанной на правиле предпочтительного соединения, введенного Барабаши-Альберт. Новое правило предпочтительности будем для краткости называть подсоединением с “придирчивостью”(exceptive). Согласно этой модели вводится новый параметр exceptive - r, принимающей значения в диапазоне $(0, 1)$. В том случае, когда выбор подсоединения новой связи выпал на узел i со степенью k_i, подсоединение происходит с вероятностью p_i, но только в том случае, когда выполняется условие:

$$p_i = \frac{k_i}{\sum\limits_j k_j}, \quad k_i \geq r\langle k\rangle, \tag{3}$$

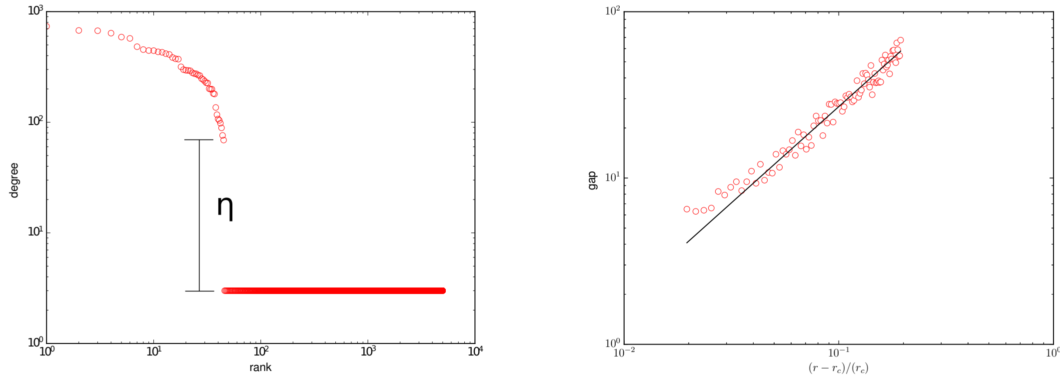
где $\langle k\rangle$ – среднее значение степени узлов в сети на момент присоединения, $\langle k\rangle = \sum\limits_j k_j/N$.

То есть присоединение происходит только к “богатым” узлам со степенью не меньше чем $r * \langle k\rangle$. Введение дополнительного условия (3) в процессе роста сети отсекает часть узлов (делает их невалидными), то есть к ним в данный момент не может присоединиться новая связь. Необходимо заметить, что если в данный момент времени некий узел не удовлетворяет условию (3), это еще не значит, что в следующие моменты времени к нему не смогут присоединиться новые узлы. Валидность или невалидность узла меняется со временем, так как с течением времени изменяется значение $\langle k\rangle$.

C. Функция распределения степеней узлов

При значение параметра придирчивости $r = 0$ предлагаемая модель переходит в стандартную модель Барабаши-Альберт, так как k_i всегда больше 0, то есть все узлы валидны. Удивительным является наличие порогового значения параметра придирчивости r_c. При значении параметра придирчивости меньше некоторого порогового r_c, то есть при $r < r_c$ функция распределения степеней узлов $P(k)$ остается степенной, а сама сеть, тем самым, безмасштабной сетью. При значениях параметра придирчивости больше порогового значения $r \geq r_c$ сеть меняет свою структуру, а именно в сети исчезают узлы со “средним” количеством связей, что мы можем увидеть на рис. 1(a).

Определим пороговое значение параметра придирчивости. Для этого рассчитаем сеть с начальным числом узлов $m_0 = 20$. На каждом шаге будет появляться один узел с $q = 3$ связями. Делая 80 шагов строим сеть с $N = 100$ узлами. Проделывая эту процедуру много раз для различных r находим то значения r, при котором распределение p_i для этой сети перестаёт быть степенным, то есть в сети появляется разрыв. Как оказывают численные расчеты для $N = 100$ $r_c(100) = 0.62$. При дальнейшем увеличении N от 100 до 2000 r_c уменьшается и “насыщается” при значении $r_c = 0.51$. Это значении $r_c = 0.51$ мы будем считать пороговым значением придирчивости для больших(бесконечных) сетей. В последующих расчетах мы будем использовать $r_c = 0.51$.



(a) (b)

Рис. 1. (a) Оси в логарифмическом масштабе. Ранжированное распределение сети с $N = 1000$ узлами при $r = 0.6$. По горизонтальной оси отложено порядковый номер узла, по вертикальной оси отложена степень узла. (b) Оси в логарифмическом масштабе. Величина разрыва при увеличении r от r_c до $r_c + 0.01$ с шагом 0.001. По горизонтальной оси отложено $(r - r_c)/r_c$, по вертикальной оси отложено значение величины разрыва.

Введем новую характеристику сети - величину разрыва η рис. 1(a), расстояние между узлами, ближайшими к разрыву(разница значений степени узла до разрыва и после разрыва). Величина разрыва, указывает по вертикальной оси те значения степеней узлов, которые отсутствуют.

Как следует из численного моделирования, поведение параметра η аналогично поведению параметра порядка в теории фазовых переходов второго рода [6]. Как известно, параметр порядка η, например намагниченность, при приближении температуры к критическому значению T_c уменьшается степенным образом $\eta \sim (r - r_c)^\beta$, где β – критический индекс.

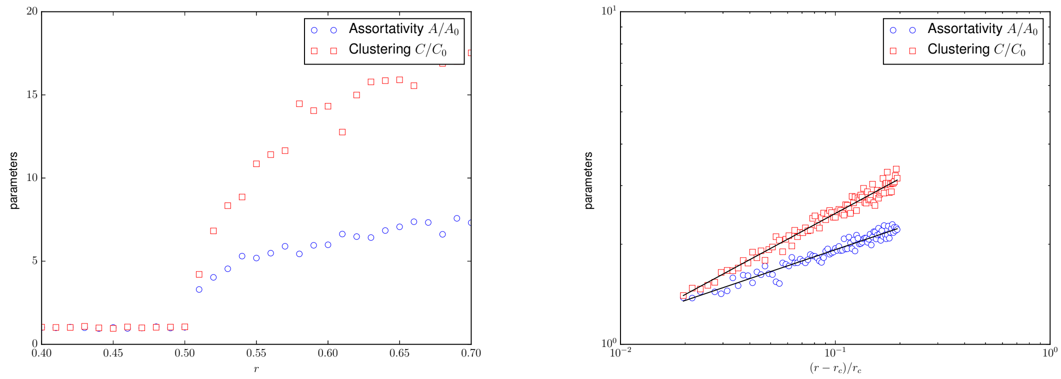
При проведении численного эксперимента были выбраны следующие начальные параметры: количество узлов $N = 5000$, начальное количеств узлов $m_0 = 20$, количество связей у каждого нового узла $m = 3$.

На рис. 1(b) показана полученная зависимость $\eta = A \cdot (r - r_c)^\beta$, где $\beta \approx 1.15$

D. Коэффициент кластеризации, ассортативность

Появление разрыва η в распределении степеней узлов $P(k)$ свидетельствует о значительном изменении структуры сети, что не может не сказаться на её характеристиках. Ниже рассмотрено поведение C - коэффициента кластеризации и A - ассортативности, как функции коэффициента придирчивости r, при $r \geq r_c$. Как показал численный эксперимент для сети с $N = 5000$ узлов, коэффициент кластеризации C, ассортативность A при $r < r_c$ от r не зависит и равна $C_0 \approx 0.01$, $A_0 \approx -0.096$, что, как и должно быть, совпадает с расчетами приведенными в [1, 8].

При увеличении r от r_c до $r_c + 0.01$ с шагом 0.001 коэффициент кластеризации увеличивается от 0.04 до 0.14, ассортативность уменьшается от -0.3 до -0.6(согласно рис. 2(a)). Для нормализации зависимости возьмем отношение параметра к его значению при $r < r_c$: $A = A/A_0$, $C = C/C_0$.



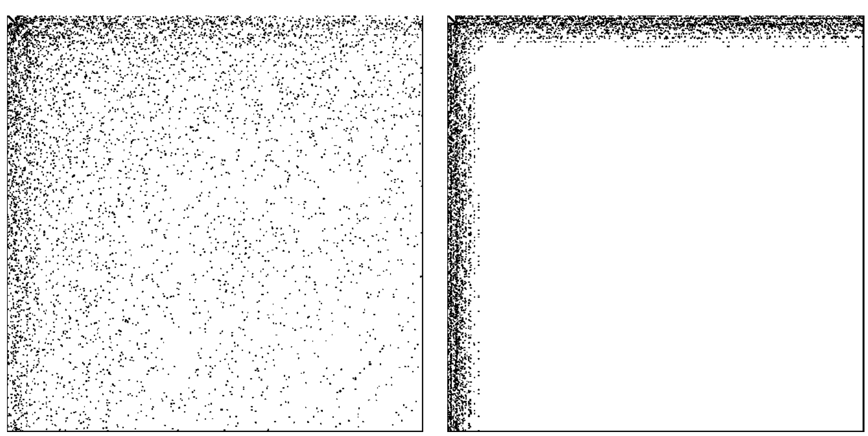
(a) (b)

Рис. 2. (a) По горизонтальной оси отложено значение параметра придирчивости, по вертикальной оси отложено значение соответствующей характеристики. Изменение кластеризации - C, ассортативности - A при $r = \lceil 0,4; 0,7 \rceil$ с шагом 0.01. (b) По горизонтальной оси отложено $(r - r_c)/r_c$, по вертикальной оси отложено значение соответствующей характеристики. Изменение кластеризации - C, ассортативности - A при $r = \lceil 0,5; 0,56 \rceil$ с шагом 0.0001. В двойном логарифмическом масштабе.

При $r \geq r_c$ такая зависимость появляется, и она оказывается степенной, а именно $C \sim (r - r_c)^{\alpha}$, $A \sim (r - r_c)^{\gamma}$, где $\alpha \approx 0.46$, $\gamma \approx 0.26$ (2(b)).

E. Матрица смежности для сети с придирчивостью

Рассмотрим матрицу смежности A_{ij} для сети с придирчивостью. Для удобства нумерации узлов в матрице смежности будем вести в порядке спадания количества связей. То есть $k_i = \sum\limits_j A_{ij}$ не возрастает с увеличением i.



(a) (b)

Рис. 3. Матрица смежности для сети с $N = 5000$ узлов: (a) при $r = 0$ (b) при $r = 0.6$

Изменение структуры сети при $r \geq r_c$ отражается и на виде матрицы смежности. Для сети с $N = 5000$ были построены две матрицы смежности: для $r < r_c$ - рис. 3(a) и для $r > r_c$ - рис. 3(b). Для удобства элементы матрицы смежности, у которых $A_{ij} = 1$, отображены в виде черной точки. Обе матрицы были ранжированы, то есть узлы сети пронумерованы в порядке спадания количества связей k_i. Из рис. 3(b) можно заметить, что в матрице смежности при $r > r_c$ в правом нижнем углу появляется значительная квадратная область, заполненная 0, то есть теми парами узлов,которые не связаны друг с другом. Эта область, как показывает численный эксперимент, прямо пропорционально зависит от величины r.

Таким образом такие характеристики сети, как коэффициент кластеризации и ассортативность ведут себя аналогично параметру порядка η.

III. Иерархические сети (U,V)-FLOWERS с придирчивостью

Кроме случайных безмасштабных сетей, построенных по алгоритму Барабши-Альберта(и их обобщений), известен класс простых детерминированных сетей, которые также являются безмасштабными сетями [12] - Fractal and Transfractal Recursive Scale-Free Networks. В частности это так называемые (u,v)-flowers, рис. 4.
Ниже мы обобщим, как и модель Барабаши-Альберта, модель Fractal and Transfractal Recursive Scale-Free сетей, введя фактор "придирчивости" r и случайность в закон роста сети. Как оказывается и в этом случае поведение характеристик сети аналогично фазовому переходу.

A. Алгоритм (u,v)-flowers

Детерминированные растущие SF-сети, называемые (u,v)-flowers и (u,v)-trees были предложены и исследованы в [3, 11, 12].

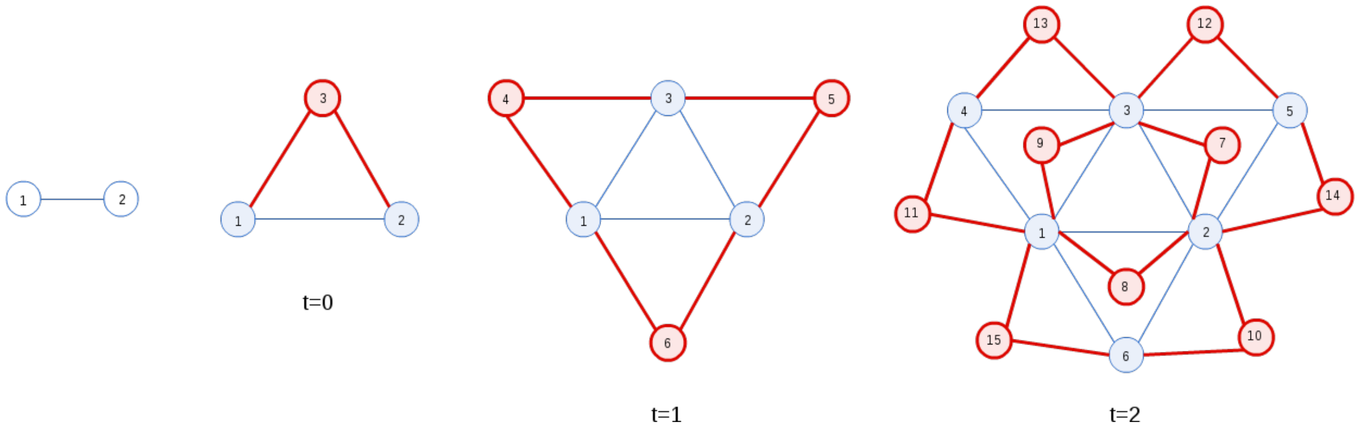
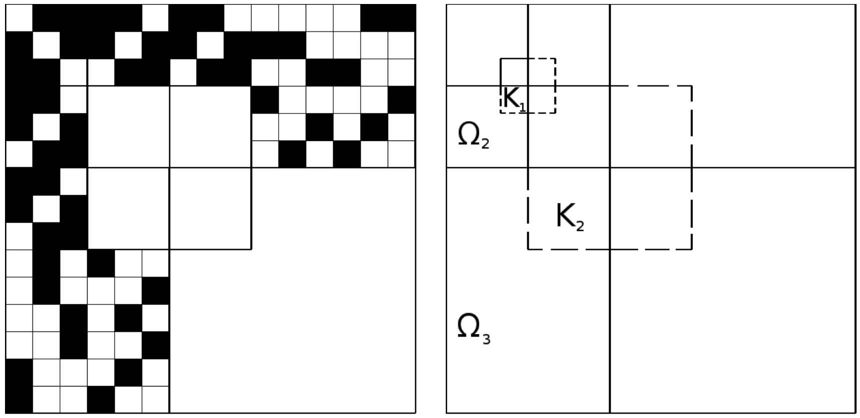


Рис. 4. Схема построения (1,2)-flowers на шагах $t = 0, 1, 2$. Утолщенные(красные online) - узлы появившиеся на данном шаге,не утолщенные (синие online) - узлы, которые появились на предыдущих шагах.

Нумерация узлов вообще говоря может быть любой, однако, в рассматриваемом примере можно занумеровать узлы таким образом (рис. 4), что матрица смежности A_{ij} станет наиболее простой. Под простой A_{ij} мы, в данном случае, понимаем такую ее структуру, что наибольшее число наибольших квадратных областей $N \times N$ в нем остаются пустыми.



(a) (b)

Рис. 5. Матрицы смежности для 3-го шага (1,2)-flower: (a) матрица смежности сети с выбранной нами нумерацией (b) схематическое представление, где K_1, K_2 ... пустые

На рис. 5 - $N \times N$ матрица смежности, где черным обозначены элементы матрицы с $A_{ij} = 1$. На первом шаге матрица смежности $\hat{A}$ состоит из 3×3 элементов(верхний левый угол, шаг $t = 0$ на рис. 4). На втором шаге к ней добавляются новые элементы, и матрица состоит из 6×6 элементов(шаг $t = 1$ на рис. 4). На третьем шаге шаге добавляются новые элементы, и матрица состоит из 15×15 элементов(шаг $t = 2$ на рис. 4). Как видно из рис. 5 правый нижний квадрат первого шага свободный от связей и состоит из одного элемента. На втором шаге добавляется правый нижний квадрат, состоящий из 3×3 элементов, а на третьем из 9×9 элементов. На рис. 5 белым обозначены места матрицы смежности, где $A_{ij} = 0$.

При выбранной нами нумерации появляются дополнительные к построению матрицы смежности в работе [3] области K_1, K_2, в которых также $A_{i,j} = 0$.

На каждом шаге t имеется N_t узлов и L_t связей [11]

$$N_t = (u + v) \cdot N_{t-1} - (u + v), \quad L_t = (u + v)^t. \tag{4}$$

Т.е. на каждом шаге t появляется $N_t - N_{t-1}$ узлов и $L_t - L_{t-1}$ связей. Например, рис. 4, на шаге $t = 1$ появляется 3 узла и 6 связей.

Сделаем замену $(u + v) = w$ и раскроем рекуррентные формулы 4 [11]:

$$N_t = \frac{w-2}{w-1} \cdot w^t + \frac{w}{w-1}, \quad L_t = w^t. \tag{5}$$

На каждом шаге t есть Ω_t клеток, которые могут быть заполнены – рис. 5. Их число равно:

$$\begin{aligned} \Omega_t = (N_t - N_{t-1}) \cdot N_t - N_{t-2}^2 = \frac{w^3 - w^2 - 1}{w^4} N_t^2 + \frac{w^3 - 2w^2 - 2w - 2}{w^3} N_t - \frac{2w^2 + 2w + 1}{w^2} = \\ = \frac{w^{2t+4} - 5w^{2t+3} + 8w^{2t+2} - 5w^{2t+1} + 4w^{2t} + w^{t+5} - 3w^{t+4} + 4w^{t+2} - w^5}{w^3 \cdot (w-1)^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Вероятность заполнения ячейки матрицы равна:

$$W_t = \frac{L_t - L_{t-1}}{\Omega_t} = \frac{w^{t+5} - 3w^{t+4} + 3w^{t+3} - w^{t+2}}{w^{2t+4} - 5w^{2t+3} + 8w^{2t+2} - 5w^{2t+1} + 4w^{2t} + w^{t+5} - 3w^{t+4} + 4w^{t+2} - w^5}. \tag{7}$$

Так с каждым шагом вероятность падает и матрица смежности становится все более разряженной. В [3] было показано, что (u,v)-flowers являются безмасштабными сетями. Для изображенного на рис. 4 (1,2)-flower распределение узлов по степеням имеет вид $P(k) \sim k^{-(1+\ln 3/\ln 2)}$. В общем случаи для (u,v)-flowers [11]:

$$P(k) \sim k^{-\alpha}, \quad \alpha = 1 + \frac{\ln(u+v)}{\ln 2}. \tag{8}$$

B. Модификация алгоритма (u,v)-flowers

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при построении (u,v)-flower не все связи реализуются. При чем вероятность нереализованности связи тем больше, чем меньше степени узлов она соединяет.

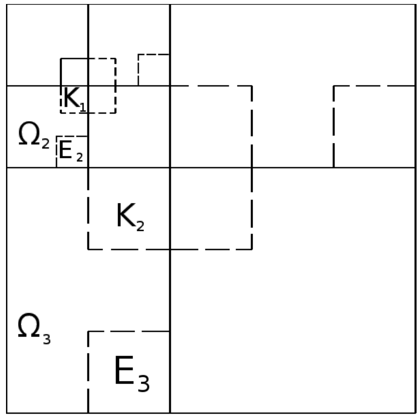


Рис. 6. Схема матрицы смежности для 3-го шага (1,2)-flower.

Правило присоединение с “придирчивостью”, как можно увидеть в случае с моделью Барабаши-Альберта 3(b), создаёт пустую область в правом нижнем углу матрицы смежности. В случае с моделью (u,v)-flowers такая область уже существует, поэтому мы будем делать пустые области $E_1, E_2 ...$ в правом нижнем углу уже заполненных областей $\Omega_1, \Omega_2 ...$.

Построение сети будем проводить путем заполнения в матрице смежности областей $\Omega_t - E_t$ с соответствующим им количеством связей L_t. Для того чтобы случайное набрасывание связей соответсвовало (u, v)-flowers, необходимо сохранить закон распределению степеней узлов $p \sim k^{-y}$, где $y = 1 + \ln(u+v)/\ln 2$ [12]. В последующих расчетах моделируются (1, 2)-fowers. Области Ω_t делятся по вертикали на четыре одинаковых части, с вероятностями попадания в каждую [0.37, 0.3, 0.22, 0.11] слева на право соответсвенно, что соответсвует функции $y = x^{1+\ln(1+2)/\ln 2}$.

0.75-0.63 0.5 - 0.33 0.25 - 0.11

Таким образом “придирчивость” в матрице смежности отображается правыми нижними углами областей Ω - пустыми областями E (рис. 5). При моделировании использовались пустые области E_t подобные(пропорциональные) областям Ω_t:

$$E_t = (r \cdot N_{t-1}) \times (r \cdot (N_t - N_{t-1})), \qquad (9)$$

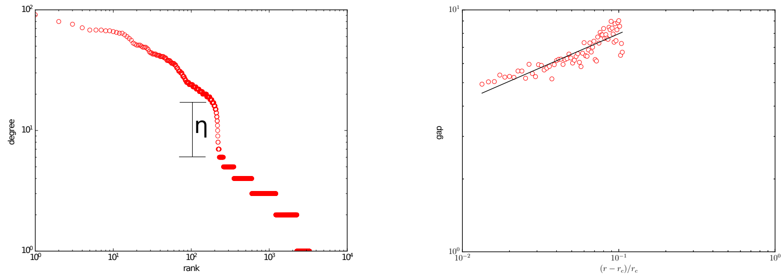
Вероятность заполнения ячейки матрицы:

$$W_t = \frac{L_t - L_{t-1}}{\Omega_t - E_t}. \qquad (10)$$

C. Функция распределения степеней узлов

При значение параметра придирчивости $r = 0$ предлагаемая модель принимает вид стандартной (u,v)-flowers. Как и в случае с моделью Барабаши-Альберта, в модели (u,v)-flowers присутствует пороговое значения параметра придирчивости r_c. При значении параметра придирчивости меньше некоторого порогового $r < r_c$ функция распределения степеней узлов $P(k)$ остается степенной, а сама сеть, тем самым, безмасштабной сетью. При значениях параметра придирчивости больше порогового значения $r \geq r_c$ сеть меняет свою структуру.

Определим пороговое значение параметра придирчивости. Для этого рассчитаем пороговое значение для (1,2)-flowers с 1 по 14 поколение. Как и в модели Барабаши-Альберт с придирчивостью происходит насыщение порогового значения. Для восьмого поколения r_c полностью насыщается и мы получаем $r_c = 0.75$.



(a) (b)

Рис. 7. (a) Оси в логарифмическом масштабе. Ранжированное распределение сети при $r = 0.8$. По горизонтальной оси отложено порядковый номер узла, по вертикальной оси отложена степень узла. (b) Оси в логарифмическом масштабе. Величина разрыва при $r = [0,75; 0,83]$ с шагом 0.01. По горизонтальной оси отложено $(r - r_c)/r_c$, по вертикальной оси отложено значение величины разрыва.

Для определение значения величины разрыва (параметр η) необходимо определить точки перегиба 7(a). Искомые точки будут соответствовать минимумам радиуса кривизны $k = \frac{(\sqrt{1+y'^2})^3}{|y''|}$ [5], где y аппроксимирующая функция $y = a + bx + c \cdot arctan(x) + d \cdot arctan(\alpha x + \beta)$ [7], зависимость на рис. 7(a).

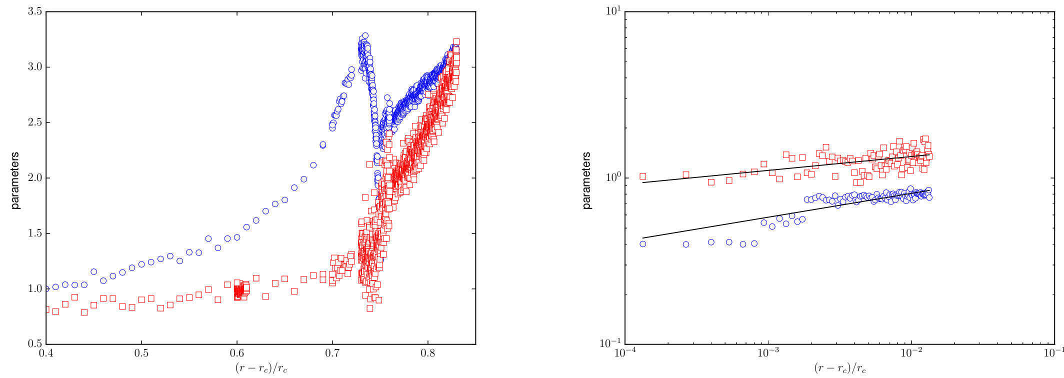
Как следует из численного моделирования, поведение параметра η аналогично поведению параметра порядка в теории фазовых переходов второго рода [6]. Параметр порядка η при приближении к критическому значению уменьшается степенным образом $\eta \sim (r - r_c)^\beta$, где β – критический индекс. При проведении численного эксперимента были выбраны следующие начальные параметры: (1,2)-flowers восьмого поколения, то есть количество узлов $N = 3282$.

На рис. 7(b) показана полученная зависимость $\eta = A \cdot (r - r_c)^\beta$, где $\beta \approx 0.28$

D. Коэффициент кластеризации, ассортативность

Ниже рассмотрено поведение C - коэффициента кластеризации, A - ассортативности, как функции коэффициента придирчивости r, при $r \geq r_c$. Как показал численный эксперимент для сети (1,2)-flowers восьмого поколения с $N = 3282$ узлов, коэффициент кластеризации C, ассортативность A при $r < r_c$ от r не зависит и равна $C_0 \approx 0.02$, $A_0 \approx -0.18$, что, как и должно быть, совпадает с расчетами приведенными в [11, 12].

При увеличении r от r_c до $r_c + 0.1$ с шагом 0.01 коэффициент кластеризации увеличивается от 0.02 до 0.04, ассортативность уменьшается от -0.18 до -0.39 (согласно рис. 8(a)). Для нормализации зависимости возьмем отношение параметра к его значению при $r < r_c$: $A = \frac{A}{A_0}$, $C = \frac{C}{C_0}$.



(a) (b)

Рис. 8. По горизонтальной оси отложено значение параметра придирчивости, по вертикальной оси отложено значение соответствующей характеристики. (a) Изменение кластеризации, ассортативности при $r = \lceil 0,4; 0,83 \rceil$. (b) Изменение кластеризации, ассортативности при $r = \lceil 0,75; 0,76 \rceil$ с шагом 0.0001. В двойном логарифмическом масштабе.

При $r \geq r_c$ такая зависимость появляется, и она оказывается степенной, а именно $C \sim (r - r_c)^{\alpha}$, $A \sim (r - r_c)^{\gamma}$, где $\alpha \approx 0.11$, $\gamma \approx 0.08$ (8(b)).

IV. Заключение

В статье предложено модифицированное правило предпочтительного присоединения, а именно присоединение с “придирчивостью”, применительно к классам безмастшабных сетей - модель Барабаши-Альберта и (u,v)-цветки. Модификация правила предпочтительного присоединения заключается в введении параметра “придирчивости”, который в процессе роста сети отсекает часть узлов (делает их невалидными), то есть к ним в данный момент не может присоединиться новая связь

Численное моделирование показало, что в моделируемых классах сетей происходят существенные структурные изменения. Введение новой характеристики сети - величины разрыва, и расчет уже известных характеристик, таких как коэффициент кластеризации, ассортативность и среднее наименьшее расстояние между узлами, позволили сделать вывод о том что в моделируемых классах сетей происходит фазовый переход второго рода. Было вычислено пороговое значение при котором происходит фазовый переход, а также определено, что введенная характеристика “величина разрыва” пропорциональна параметру порядка.

Полученные результаты возможно применить для построения экономических моделей.

V. Литература

[1] R. Albert and A.-L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74:47–97, 2002.
[2] A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A*, 272:173–187, 1999.
[3] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Pseudofractal scale-free web. *Physical Review E*, 65, 2002.
[4] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes. Evolution of networks. *Advances in Physics*, 51:1079–1187, 2002.
[5] Michiel Hazewinkel. *Encyclopedia of Mathematics.* Springer, 1995.
[6] L. D. Landau. On the theory of phase transitions. *Zh. Eksp. Teor. Fiz. 7*, page 19–32, 1937.
[7] Terence C. Mills and Kerry D. Patterson. Carmichael’s arctan trend : precursor of smooth transition functions. *Reading : Univ. of Reading, Dep. of Economics*, 2013.
[8] M. E. J. Newman. Assortative mixing in networks. *Physical Review Letter*, 89, 2002.
[9] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45:167–256, 2003.
[10] Vilfredo Pareto. *Manual of political economy.* Augustus M Kelley Pubs, 1969.
[11] Hernan D. Rozenfeld and Daniel ben Avraham. Percolation in hierarchical scale-free nets. *Physical Review E*, 75, 2007.

[12] Hernan D. Rozenfeld, Shlomo Havlin, and Daniel ben Avraham. Fractal and transfractal recursive scale-free nets. *New Journal of Physics*, 9:175, 2007.