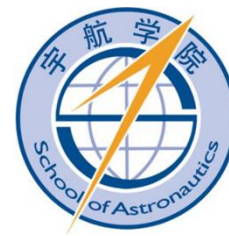
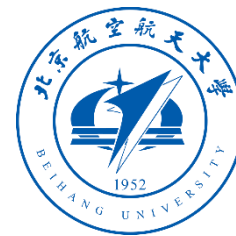


# 制导与控制基础



## 开环制导 (大气层内上升段飞行程序设计)

张 冉

自主系统与飞行控制实验室

北京航空航天大学宇航学院

2024 春

# 目 录

---

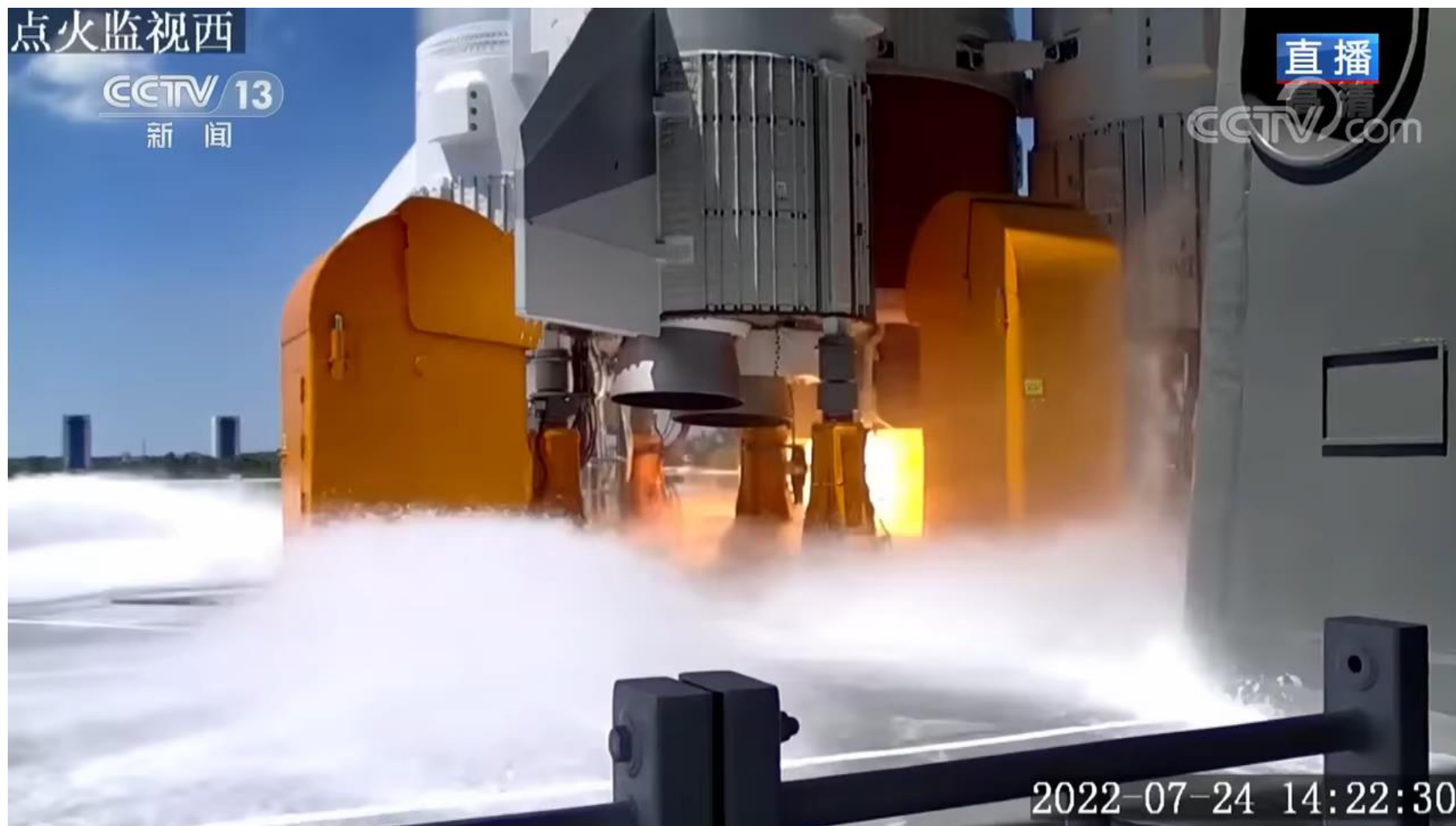
1. 开环制导
2. 火箭运动方程简化
3. 火箭运动特性分析
4. 飞行程序设计

# 目 录

---

1. 开环制导
2. 火箭运动方程简化
3. 火箭运动特性分析
4. 飞行程序设计

# 运载火箭大气层内上升段飞行

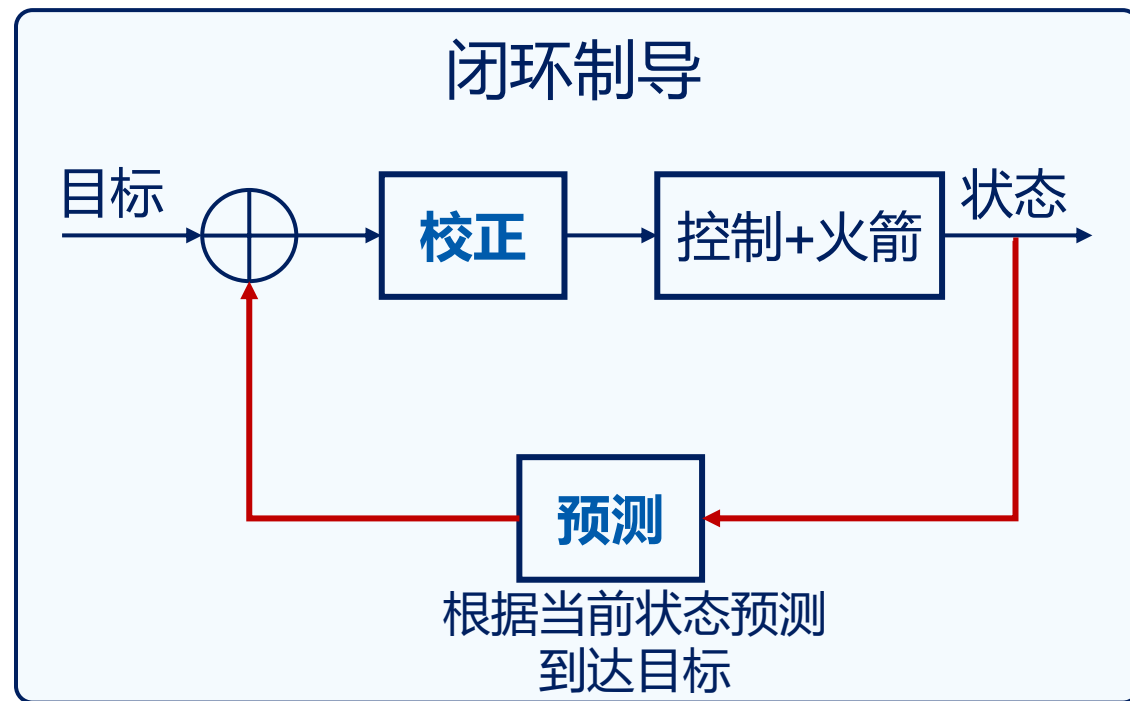
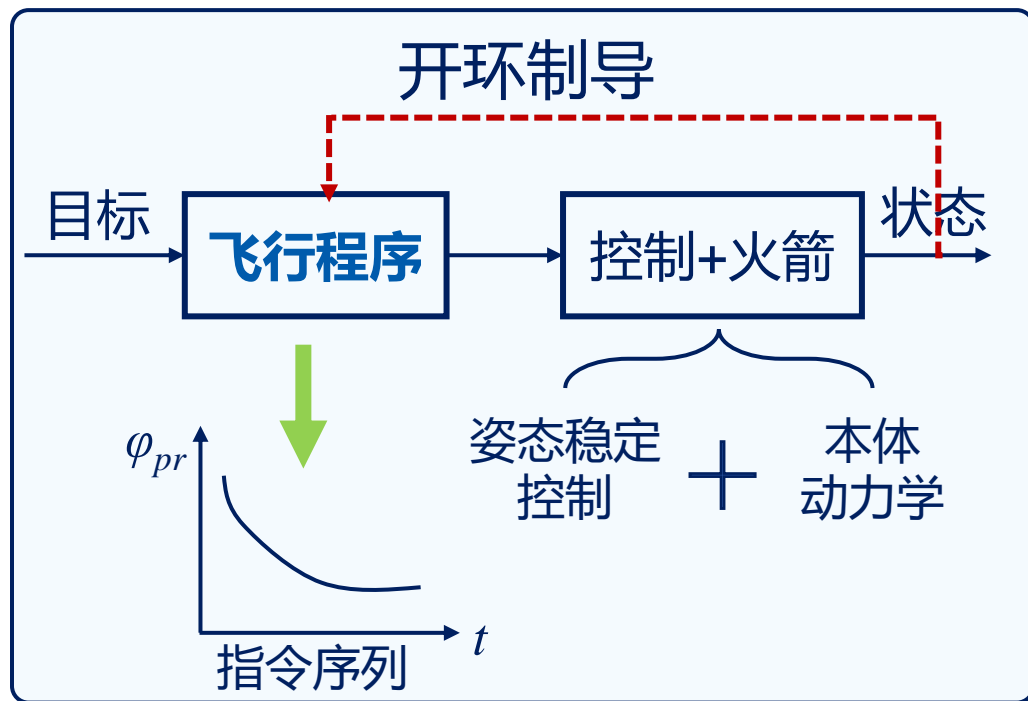


问天实验舱搭乘长征五号B发射升空

# 什么是开环制导？

## □ 开环制导

根据飞行任务，（离线）设计飞程序，（在线）基于实时状态按飞程序输出制导指令



□ （大气层内）火箭开环制导的关键：设计飞程序

# 目 录

---

1. 开环制导
- 2. 火箭运动方程简化**
3. 火箭运动特性分析
4. 飞行程序设计

# 火箭质心运动方程（1）

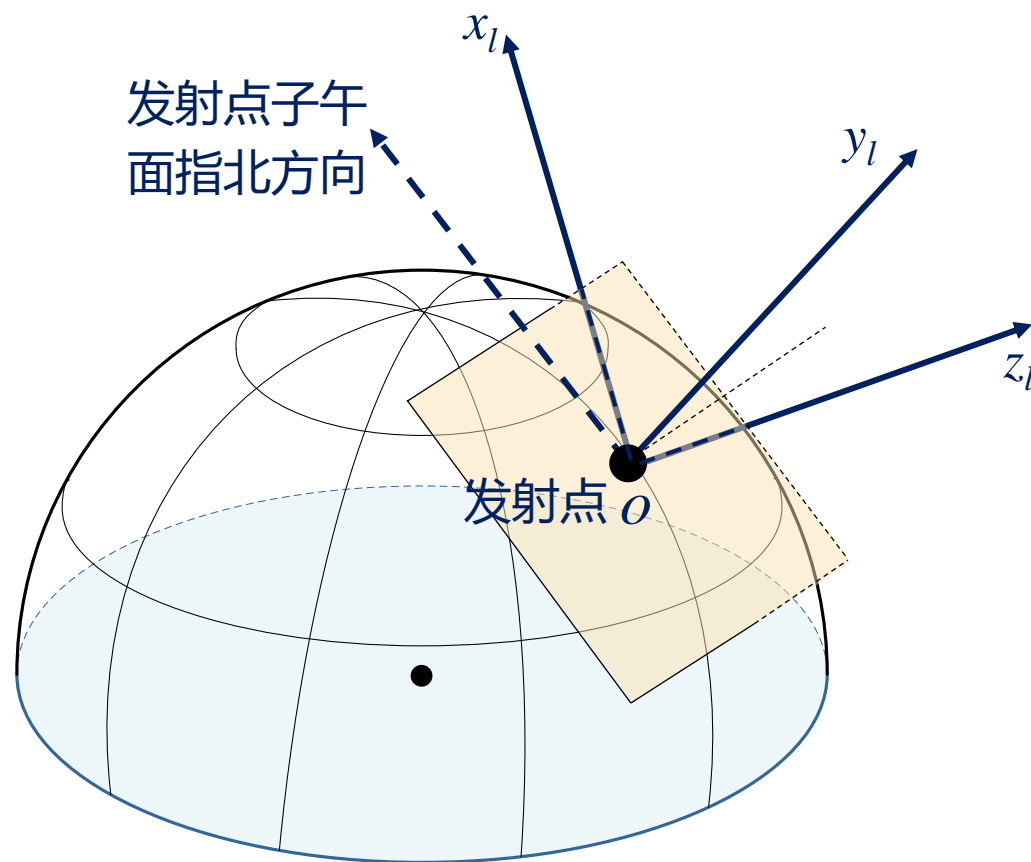
## □ 质心运动方程中变量定义

变量	含义	变量	含义	变量	含义
$r$	质心位置	$g_r$	质心位置方向引力加速度	$m$	火箭质量
$v_l$	质心对地速度	$g_\phi$	当地拟水平面北向引力加速度	$\phi$	地心纬度
$F_P$	推力	$\theta$	速度倾角	$a$	速度坐标系
$F_A$	气动力	$\sigma$	航迹偏航角	$b$	箭体坐标系
$g$	引力加速度	$\nu$	倾侧角	$l$	发射坐标系
$\omega_E$	地球自转角速度	$\alpha$	攻角	$R$	坐标系转换矩阵
$v$	相对发射点速度大小	$\beta$	侧滑角	$x$	发射系x轴
$r_l$	质心对发射点位置	$\delta_\phi$	发动机俯仰摆角	$y$	发射系y轴
$r_{ol}$	发射点对地心位置	$\delta_\psi$	发动机偏航摆角	$z$	发射系z轴
$C_D q S_M$	气动阻力 $D$	$C_L q S_M$	气动升力 $L$	$C_C q S_M$	气动侧向力 $C$

# 火箭质心运动方程 (2)

## □ 质心运动方程中坐标系定义

1) 发射坐标系 ( $S_l$  ——  $ox_ly_lz_l$ ) : 建立火箭相对地面的运动方程



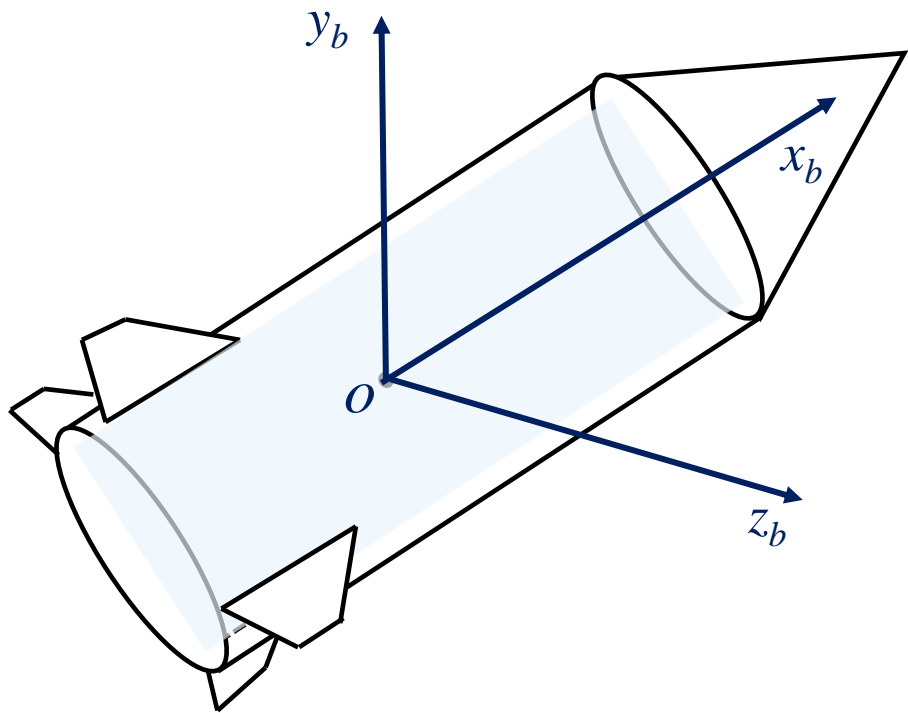
- 原点——发射点
- $x_l$ 轴——发射点水平面内, 指向发射瞄准方向
- $y_l$ 轴——垂直于发射点水平面, 指向上方
- $z_l$ 轴——发射点水平面内, 与 $x_l$ 轴和 $y_l$ 轴构成右手直角坐标系



# 火箭质心运动方程 (3)

## □ 质心运动方程中坐标系定义

2) 箭体坐标系 ( $S_b$  ——  $ox_by_bz_b$ ) : 描述火箭在空中的姿态

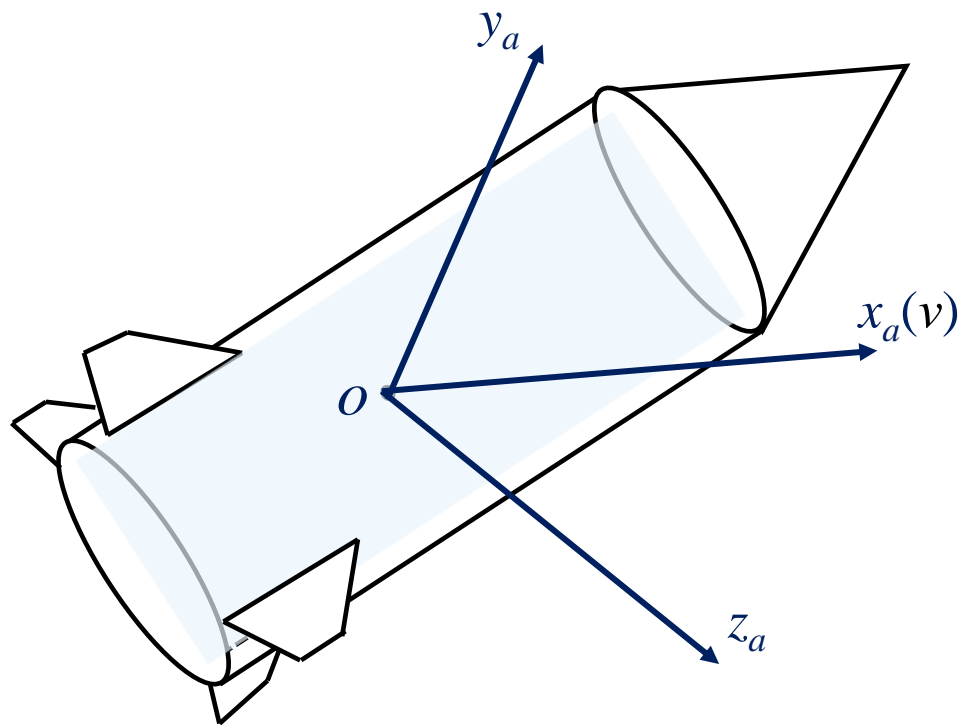


- 原点——飞行器质心
- $x_b$ 轴——箭体外壳对称轴，沿飞行器纵轴指向箭体头部
- $y_b$ 轴——在火箭的主对称面内，垂直于 $x_b$ 轴，发射瞬间在发射系 $x_loy_l$ 平面内
- $z_b$ 轴——垂直于主对称面，顺着发射方向 看去指向右方

# 火箭质心运动方程 (4)

## □ 质心运动方程中坐标系定义

3) 速度坐标系 ( $S_a$  ——  $ox_a y_a z_a$ ) : 描述火箭的飞行速度矢量状态, 计算气动力和力矩

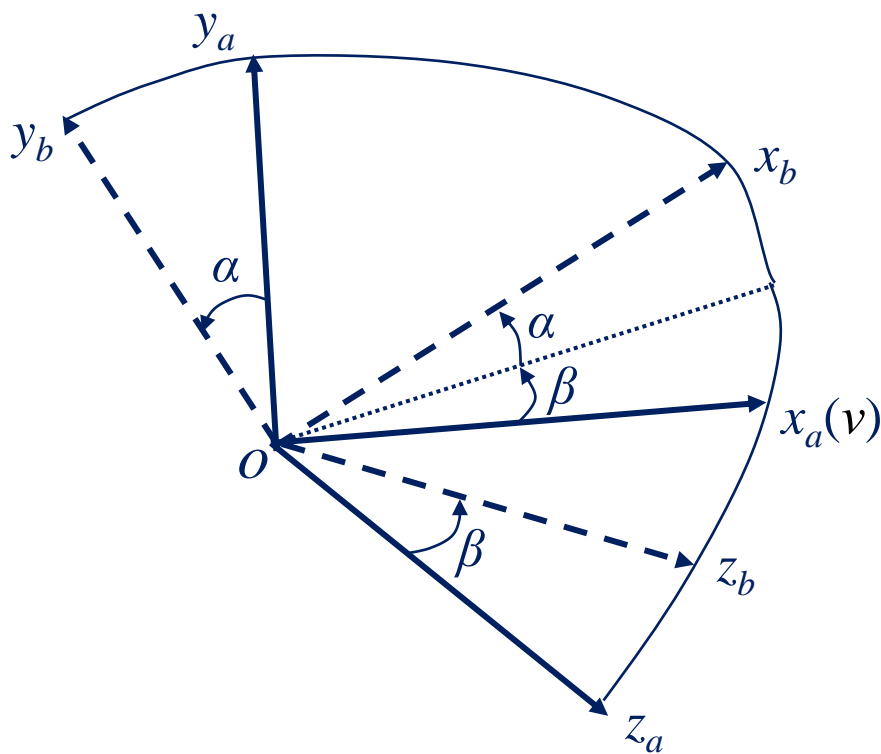


- 原点——飞行器质心
- $x_a$ 轴——沿飞行器的飞行速度 (空速) 方向
- $y_a$ 轴——在飞行器主对称面内, 垂直于 $x_a$ 轴, 指向上
- $z_a$ 轴——与 $x_a$ 轴和 $y_a$ 轴构成右手直角坐标系

# 火箭质心运动方程 (5)

## □ 质心运动方程中坐标系转化

1) 速度坐标系 ( $S_a$  ——  $ox_a y_a z_a$ )  $\rightarrow$  箭体坐标系 ( $S_b$  ——  $ox_b y_b z_b$ )



$$S_a \xrightarrow{R_y[\beta]} \circ \xrightarrow{R_z[\alpha]} S_b$$

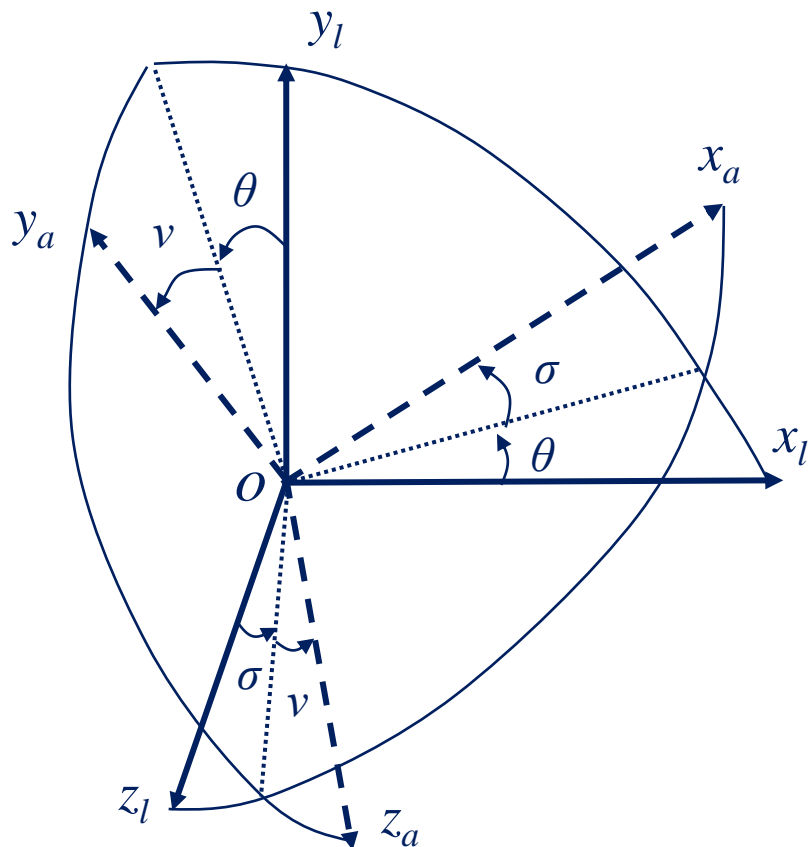
$$R_{ba} = R_z[\alpha] R_y[\beta]$$

- 攻角 $\alpha$ ——速度矢量方向在 $x_b o y_b$ 平面内的投影与 $x_b$ 轴之间的夹角，速度指向 $x_b$ 轴下方为正
- 侧滑角 $\beta$ ——速度矢量方向在 $x_b o y_b$ 平面之间的夹角，速度指向 $x_b o y_b$ 平面右侧为正

# 火箭质心运动方程 (6)

## □ 质心运动方程中坐标系转化

2) 发射坐标系 ( $S_l$  ——  $ox_ly_lz_l$ )  $\rightarrow$  速度坐标系 ( $S_a$  ——  $ox_ay_az_a$ )



$$S_l \xrightarrow{R_z[\theta]} \circ \xrightarrow{R_y[\sigma]} \circ \xrightarrow{R_x[\nu]} S_a$$

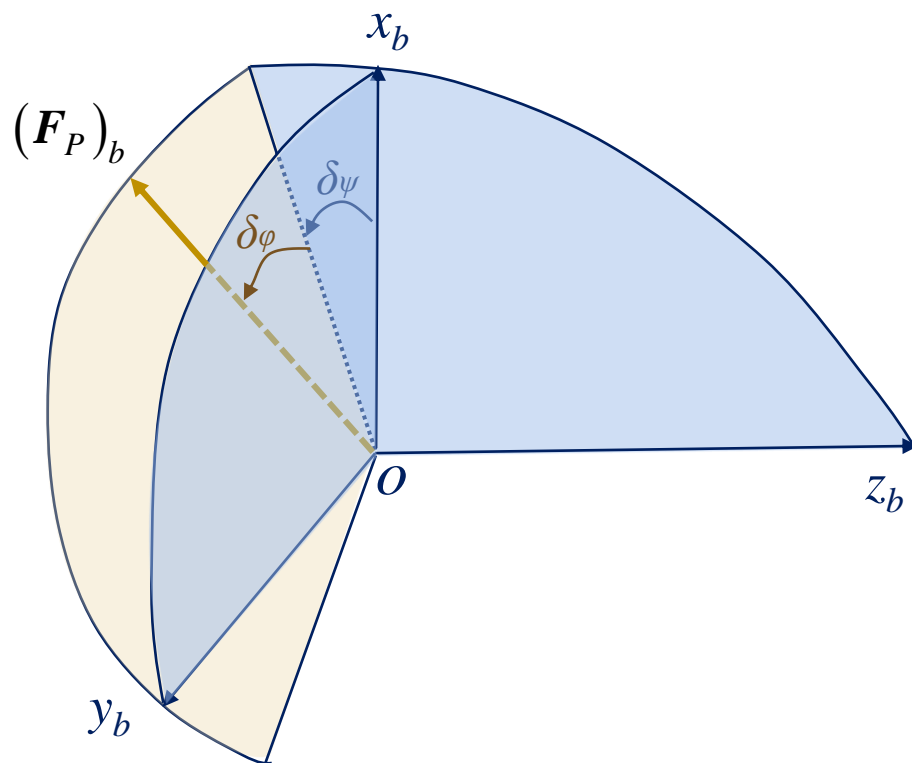
$$R_{al} = R_x[\nu] R_y[\sigma] R_z[\theta]$$

- 速度倾角  $\theta$  —— 速度矢量  $x_a$  在平面  $x_ly_l$  上的投影与  $x_l$  轴的夹角
- 航迹偏航角  $\sigma$  —— 速度矢量  $x_a$  与  $x_ly_l$  平面的夹角
- 倾侧角  $\nu$  —— 升力方向  $z_a$  与  $x_a$ 、 $z_l$  两轴构成弹面之间的夹角

# 火箭质心运动方程 (6)

## □ 作用在火箭上的力

1) 推力  $F_P$ ：由发动机喷出气体产生的力，反作用地推动火箭前进的力



在箭体坐标系下表示

$$x_b \xrightarrow{R_y[\delta_\psi]} \circ \xrightarrow{R_z[\delta_\varphi]} (F_P)_b$$

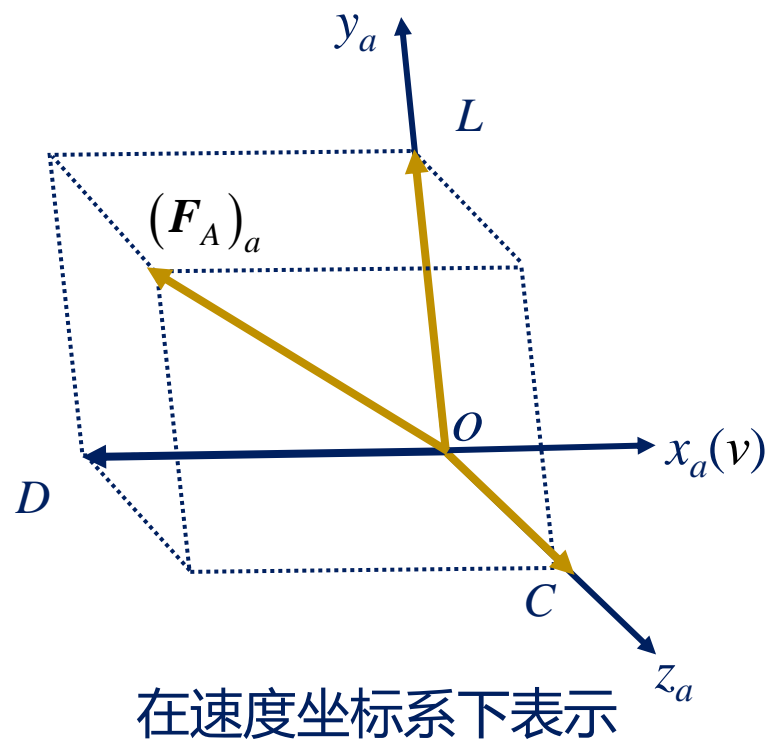
$$(F_P)_b = F_p \begin{bmatrix} \cos(\delta_\psi)\cos(\delta_\varphi) \\ \sin(\delta_\varphi) \\ -\cos(\delta_\varphi)\sin(\delta_\psi) \end{bmatrix}$$

- $F_p$ ——推力幅值
- $\delta_\varphi$ ——发动机俯仰摆角
- $\delta_\psi$ ——发动机偏航摆角

# 火箭质心运动方程 (6)

## □ 作用在火箭上的力

2) 气动力  $F_A$ : 火箭在大气层内飞行时, 大气在火箭表面产生的作用力



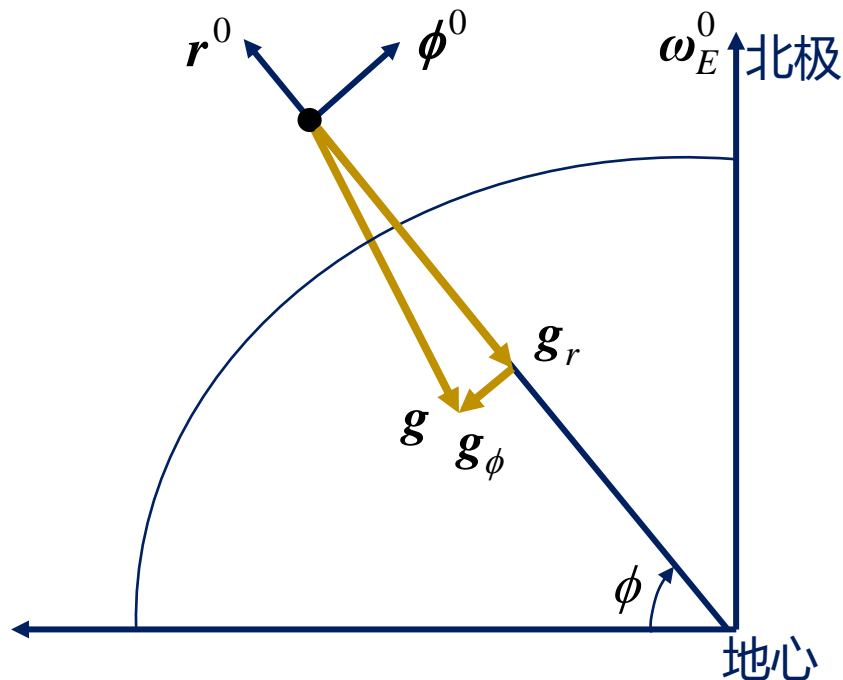
$$(F_P)_a = \begin{bmatrix} D \\ L \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_D q S_M \\ C_L q S_M \\ C_C q S_M \end{bmatrix}$$

- $D$ ——阻力, 指向速度反方向为正
- $L$ ——升力, 在火箭主对称面内垂直速度方向指向上为正
- $C$ ——侧向力, 垂直于主对称面, 顺着速度方向看去指向右方为正
- $q$ ——动压
- $C_D/C_L/C_C$  -阻力系数/升力系数/侧向力系数

# 火箭质心运动方程 (6)

## □ 作用在火箭上的力

### 3) 引力 $mg$ ：火箭与地球之间的相互吸引力



以矢量方式表示

$$\mathbf{g} = g_r \mathbf{r}^0 + g_\phi \boldsymbol{\phi}^0 = g_r \frac{\mathbf{r}_{ol} + \mathbf{r}_l}{r} + g_\phi \left( \frac{1}{\cos \phi} \boldsymbol{\omega}_E^0 - \tan \phi \mathbf{r}^0 \right)$$

$$(\mathbf{g})_l = \frac{g_r - g_\phi \tan \phi}{r} \begin{bmatrix} r_{olx} + r_{lx} \\ r_{oly} + r_{ly} \\ r_{olz} + r_{lz} \end{bmatrix} + \frac{g_\phi}{\omega_E \cos \phi} \begin{bmatrix} \omega_{Elx} \\ \omega_{Ely} \\ \omega_{Elz} \end{bmatrix}$$

- $\phi$ ——地心纬度
- $\mathbf{r}^0$ ——由地心指向火箭当前质心位置的单位向量
- $\boldsymbol{\phi}^0$ ——在当地拟水平面上且与 $\mathbf{r}^0$ 垂直指北的单位向量
- $\boldsymbol{\omega}_E^0$ ——地球自转方向单位向量
- $\mathbf{g}_r/\mathbf{g}_\phi$ ——引力加速度在 $\mathbf{r}^0/\boldsymbol{\phi}^0$ 方向的投影向量
- $\mathbf{r}_l/\mathbf{r}_{ol}$ ——质心相对发射点位置矢量/发射点对地心位置矢量

# 火箭质心运动方程 (7)

## 火箭质心运动方程包括动力学方程和运动学方程

### □ 速度坐标系下的动力学方程

推力    气动力    引力    牵连力    哥式力

$$m \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v(\dot{\theta} \cos \sigma \cos \nu - \dot{\sigma} \sin \nu) \\ -v(\dot{\sigma} \cos \nu + \dot{\theta} \cos \sigma \sin \nu) \end{bmatrix} = m \mathbf{R}_x[\nu] \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v\dot{\theta} \cos \sigma \\ -v\dot{\sigma} \end{bmatrix} = \boxed{(\mathbf{F}_P)_a} + \boxed{(\mathbf{F}_A)_a} + \boxed{m(\mathbf{g})_a} - \boxed{m(\boldsymbol{\omega}_E)_a \times ((\boldsymbol{\omega}_E)_a \times (\mathbf{r})_a)} - \boxed{2m(\boldsymbol{\omega}_E)_a \times (\mathbf{v}_l)_a}$$



$$m \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v\dot{\theta} \cos \sigma \\ -v\dot{\sigma} \end{bmatrix} = F_P \mathbf{R}_x[-\nu] \mathbf{R}_{ab} \begin{bmatrix} \cos(\delta_\psi) \cos(\delta_\phi) \\ \sin(\delta_\phi) \\ -\cos(\delta_\phi) \sin(\delta_\psi) \end{bmatrix} + \mathbf{R}_x[-\nu] \begin{bmatrix} -C_D q S_M \\ C_L q S_M \\ C_C q S_M \end{bmatrix} + m \mathbf{R}_x[-\nu] \mathbf{R}_{al} \left( \frac{g_r - g_\phi \tan \phi}{r} \begin{bmatrix} r_{olx} + r_{lx} \\ r_{oly} + r_{ly} \\ r_{olz} + r_{lz} \end{bmatrix} + \frac{g_\phi}{\omega_E \cos \phi} \begin{bmatrix} \omega_{Elx} \\ \omega_{Ely} \\ \omega_{Elz} \end{bmatrix} \right) \\ - m \mathbf{R}_x[-\nu] \mathbf{R}_{al} \begin{bmatrix} \omega_{Elx}^2 - \omega_E^2 & \omega_{Elx} \omega_{Ely} & \omega_{Elx} \omega_{Elz} \\ \omega_{Elx} \omega_{Ely} & \omega_{Ely}^2 - \omega_E^2 & \omega_{Ely} \omega_{Elz} \\ \omega_{Elx} \omega_{Elz} & \omega_{Ely} \omega_{Elz} & \omega_{Elz}^2 - \omega_E^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{olx} + r_{lx} \\ r_{oly} + r_{ly} \\ r_{olz} + r_{lz} \end{bmatrix} - 2m \mathbf{R}_x[-\nu] \mathbf{R}_{al} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{Elz} & \omega_{Ely} \\ \omega_{Elz} & 0 & -\omega_{Elx} \\ -\omega_{Ely} & \omega_{Elx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$



# 火箭质心运动方程 (8)

## □ 发射坐标系下的运动学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{al}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\sigma) \cos(\theta) \\ v \cos(\sigma) \sin(\theta) \\ -v \sin(\sigma) \end{bmatrix}$$

## □ 质心运动方程坐标转换矩阵形式

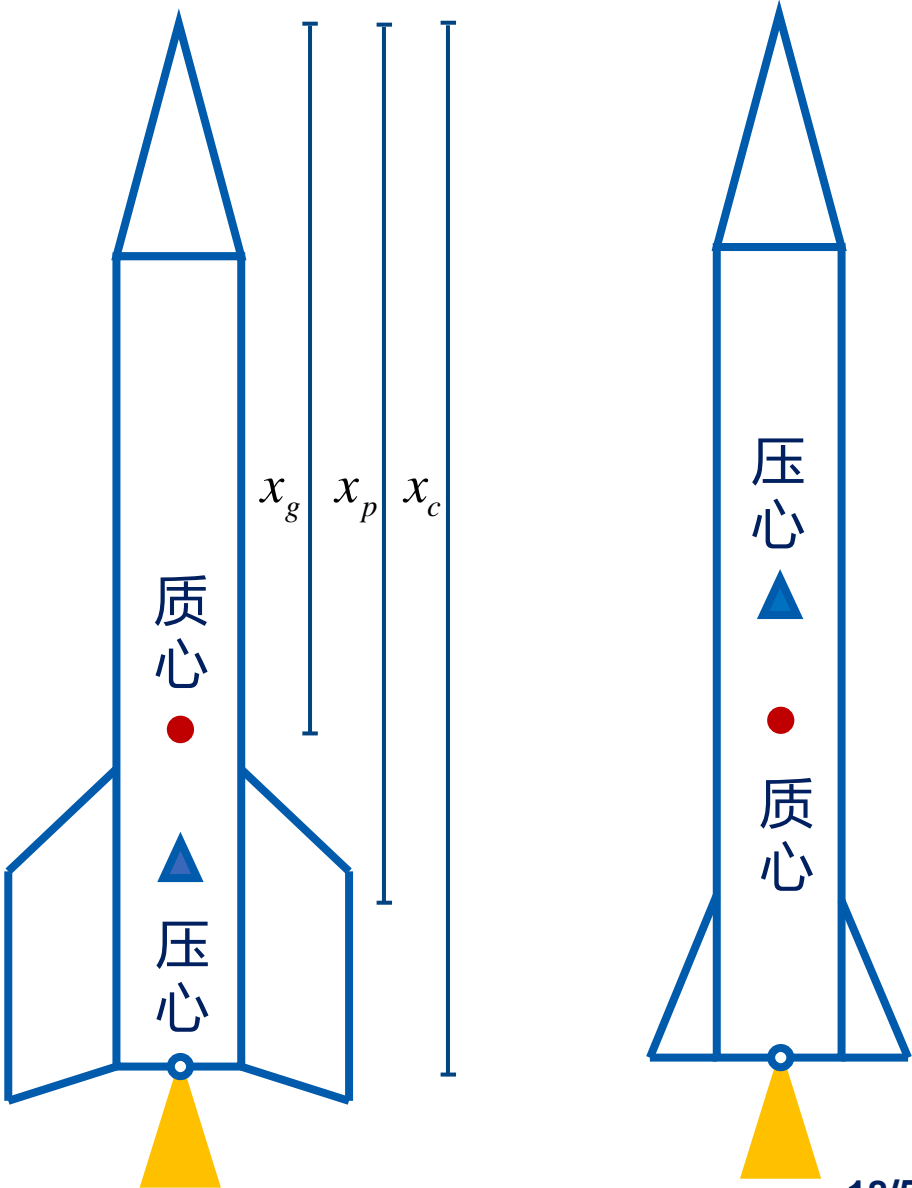
$$\mathbf{R}_x[-\nu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) & -\cos(\beta) \sin(\alpha) & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{al} = \begin{bmatrix} \cos(\sigma) \cos(\theta) & \cos(\sigma) \sin(\theta) & -\sin(\sigma) \\ \cos(\theta) \sin(\nu) \sin(\sigma) - \cos(\nu) \sin(\theta) & \cos(\nu) \cos(\theta) + \sin(\nu) \sin(\sigma) \sin(\theta) & \cos(\sigma) \sin(\nu) \\ \sin(\nu) \sin(\theta) + \cos(\nu) \cos(\theta) \sin(\sigma) & \cos(\nu) \sin(\sigma) \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\nu) & \cos(\nu) \cos(\sigma) \end{bmatrix}$$

# 火箭绕质心运动方程（1）

## □ 绕质心运动方程中变量定义

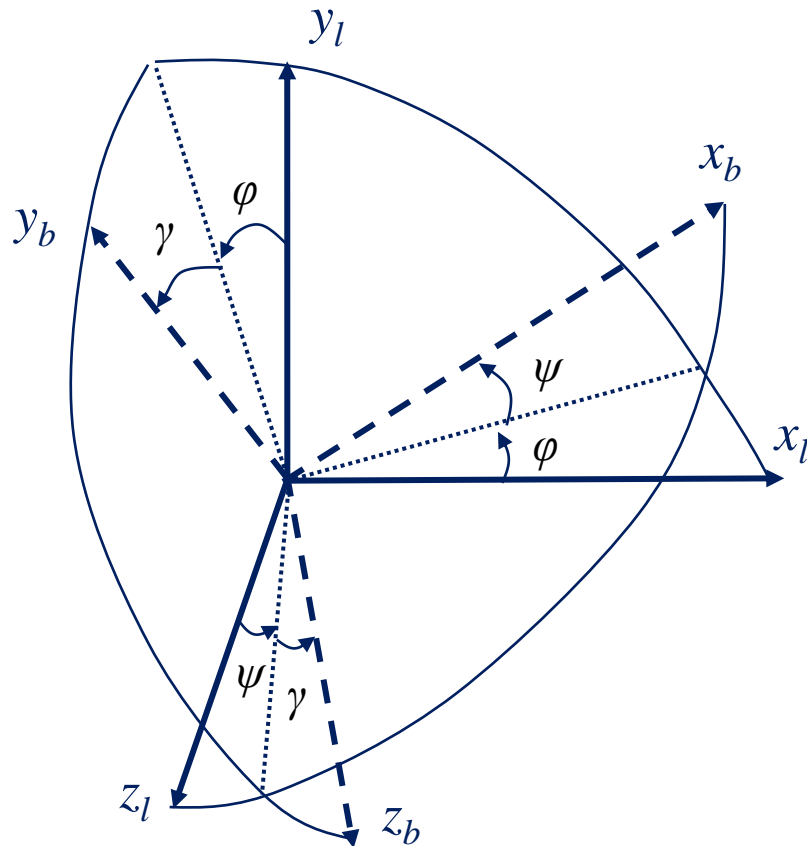
变量	含义
$J$	转动惯量
$\omega_b$	转动角速度在箭体坐标系的投影
$F_z$	法向气动力
$F_n$	横向气动力
$x_g$	质心至火箭头部理论尖端的距离
$x_c$	喷管出口截面中心至火箭头部理论尖端的距离
$x_p$	压心至火箭头部理论尖端的距离
$\varphi$	相对发射坐标系的俯仰角
$\psi$	相对发射坐标系的偏航角
$\gamma$	相对发射坐标系的滚转角



# 火箭绕质心运动方程 (2)

## □ 绕质心运动方程中坐标系转化

1) 发射坐标系 ( $S_l$  ——  $ox_ly_lz_l$ )  $\rightarrow$  箭体坐标系 ( $S_b$  ——  $ox_by_bz_b$ )



$$S_l \xrightarrow{R_z[\varphi]} \circ \xrightarrow{R_y[\psi]} \circ \xrightarrow{R_x[\gamma]} S_b$$

$$\mathbf{R}_{bl} = \mathbf{R}_x[\gamma] \mathbf{R}_y[\psi] \mathbf{R}_z[\varphi]$$

- 俯仰角  $\varphi$  —— 飞行器的纵轴  $x_b$  在平面  $x_ly_l$  上的投影与  $x_l$  轴的夹角
- 偏航角  $\psi$  —— 飞行器的纵轴  $x_b$  与  $x_ly_l$  平面的夹角
- 滚转角  $\gamma$  —— 飞行器的横轴  $z_b$  与  $x_b$ 、 $z_l$  两轴构成平面之间的夹角

# 火箭绕质心运动方程 (3)

## □ 箭体坐标系下的绕质心动力学方程

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} J_x \dot{\omega}_{bx} \\ J_y \dot{\omega}_{by} \\ J_z \dot{\omega}_{bz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (J_z - J_y) \omega_{by} \omega_{bz} \\ (J_x - J_z) \omega_{bx} \omega_{bz} \\ (J_y - J_x) \omega_{bx} \omega_{by} \end{bmatrix} = \boxed{(M_P)_b} + \boxed{(M_{st})_b} + \boxed{(M_d)_b} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{推力力矩} \qquad \qquad \text{气动静态力矩} \qquad \qquad \text{阻尼力矩} \\
 & \qquad \qquad \qquad = F_p (x_c - x_g) \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\delta_\varphi) \sin(\delta_\psi) \\ -\sin(\delta_\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_z (x_p - x_g) \\ -F_n (x_p - x_g) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{dbx} \\ M_{dby} \\ M_{dbz} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## □ 箭体坐标系下的绕质心运动学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega_{by} \sin(\gamma) + \omega_{bz} \cos(\gamma)) / \cos(\psi) \\ \omega_{by} \cos(\gamma) - \omega_{bz} \sin(\gamma) \\ \omega_{bx} + \tan(\psi) (\omega_{by} \sin(\gamma) + \omega_{bz} \cos(\gamma)) \end{bmatrix}$$

# 运动方程的简化

## □ 运动方程简化的目的

火箭飞行过程中受力多、相互耦合，运动方程形式复杂，不利于设计飞行程序。因此，需抓住上升段弹道的特点，对火箭运动方程进行简化处理。

## □ 运动方程简化的基本假设

根据火箭大气层内上升段弹道的特点，作出以下简化假设：

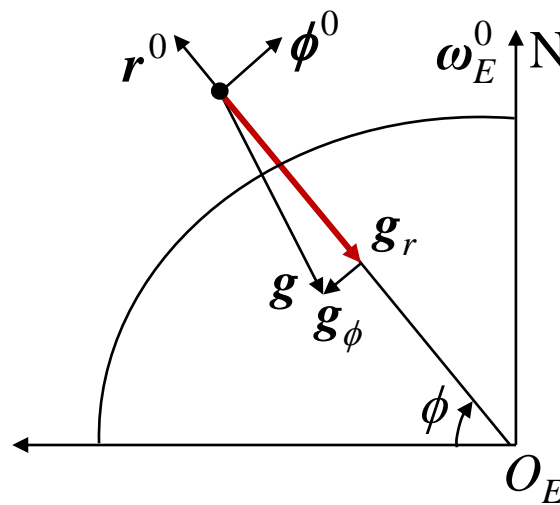
- a) 引力假设
- b) 地球自转假设
- c) 小角度假设
- d) 力矩平衡假设

# 基本假设(1)

## a) 引力假设

- 地球视为均质球体，忽略地球扁率及引力分量 $g_\phi$ 的影响，服从平方反比定律
- 引力加速度只有沿 $y_l$ 轴的分量，即

$$g = g_r = -\frac{fM}{r^2}$$



## b) 地球自转假设

- 忽略地球旋转的影响，即忽略哥式加速度和牵连加速度

$$\omega_E = 0$$

## 基本假设(2)

### c) 小角度假设

- 欧拉角  $\alpha, \beta, \gamma, \psi, \sigma, \nu, \theta$  以及控制量  $\delta_\varphi, \delta_\psi$  均为小量, **正弦取其角度, 余弦取为1**
- 出现这些角度值**之间的乘积**时, **作为二阶以上项略去**, 则坐标转化矩阵为

$$\mathbf{R}_x[-\nu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\nu \\ 0 & \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x[-\nu]\mathbf{R}_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 1 & -\nu \\ -\beta & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{al} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\sigma \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & \nu \\ \nu \sin(\theta) + \sigma \cos(\theta) & \sigma \sin(\theta) - \nu \cos(\theta) & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x[-\nu]\mathbf{R}_{al} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\sigma \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sigma \cos(\theta) & \sigma \sin(\theta) & 1 \end{bmatrix}$$

# 基本假设(3)

## d) 力矩瞬时平衡假设

### □ 力矩瞬时平衡

火箭的姿态是稳定的。绕质心转动这一动态过程是短周期运动，对质心运动的影响可以忽略。因此，在**研究质心运动时，可不考虑动态过程（自动控制中的“瞬态过程”）**，忽略质心运动方程中与姿态角速度和角加速度有关项。

➤ 忽略绕质心运动方程中与姿态角速度和角加速度有关项

$$J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (J\omega) = M_p + M_{st} + M_d$$



$$M_{st} + M_p = 0$$



# 基本假设(4)

## d) 力矩瞬时平衡假设

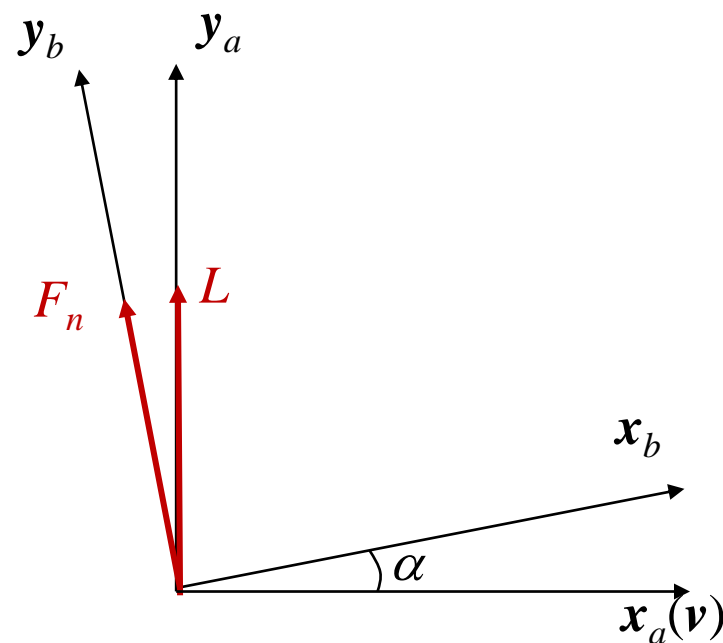
$$\mathbf{M}_{st} + \mathbf{M}_p = 0 \xrightarrow[\text{将法向气动力近似等于升力}]{\text{力矩使用线性形式表示}} \begin{aligned} M_{z1}^{\alpha} \alpha + M_{z1}^{\delta} \delta_{\varphi} &= 0 \\ M_{y1}^{\beta} \beta + M_{y1}^{\delta} \delta_{\psi} &= 0 \end{aligned}$$
$$F_n = L = C_L q S_M$$



以俯仰通道为例

$$\delta_{\varphi} = -\frac{M_{z1}^{\alpha}}{M_{z1}^{\delta}} \alpha = -\frac{C_L^{\alpha} q S_M (x_g - x_p)}{F_P (x_g - x_c)} \alpha$$

➤  $C_L^{\alpha}$  为升力系数关于  $\alpha$  的导数



法向力与升力关系

# 火箭质心运动方程简化 (1)

## □ 注意：推力矢量与气动力矢量的简化过程

$$\mathbf{R}_x[-\nu](\mathbf{F}_P)_a + \mathbf{R}_x[-\nu](\mathbf{F}_A)_a = \begin{bmatrix} F_P - C_D q S_M \\ F_P(\delta_\varphi + \alpha) + C_L q S_M \\ F_P(-\delta_\psi - \beta) + C_C q S_M \end{bmatrix} \Rightarrow \text{瞬时平衡假设 } \delta_\varphi = -\frac{C_L^\alpha q S_M (x_g - x_p)}{F_P (x_g - x_c)} \alpha$$
$$= \begin{bmatrix} F_P - D \\ F_P \alpha - \frac{C_L^\alpha q S_M (x_g - x_p)}{(x_g - x_c)} \alpha + C_L^\alpha q S_M \alpha \\ F_P(-\delta_\psi - \beta) + C_C q S_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_P - D \\ (F_P + C Y^\alpha) \alpha \\ F_P(-\delta_\psi - \beta) + C_C q S_M \end{bmatrix}$$

- $C = \left(1 - \frac{x_g - x_p}{x_g - x_c}\right)$  为火箭结构参数,  $Y^\alpha = C_L^\alpha q S_M$  为升力梯度
- 由于火箭上升段偏航小, 只关注垂直平面运动, 暂不处理 $z$ 轴向运动

# 火箭质心运动方程简化 (2)

## □ 火箭垂直平面的质心运动方程简化形式

$$\dot{v} = \frac{F_P - D}{m} + g \sin(\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{(F_P + CY^\alpha)\alpha}{mv} + \frac{g}{v} \cos(\theta)$$

$$\dot{x} = v \cos(\theta)$$

$$\dot{y} = v \sin(\theta)$$

$$m = m_0 - \dot{m}t$$

**思考：如何求解上述常微分方程？控制量是哪个物理量？**

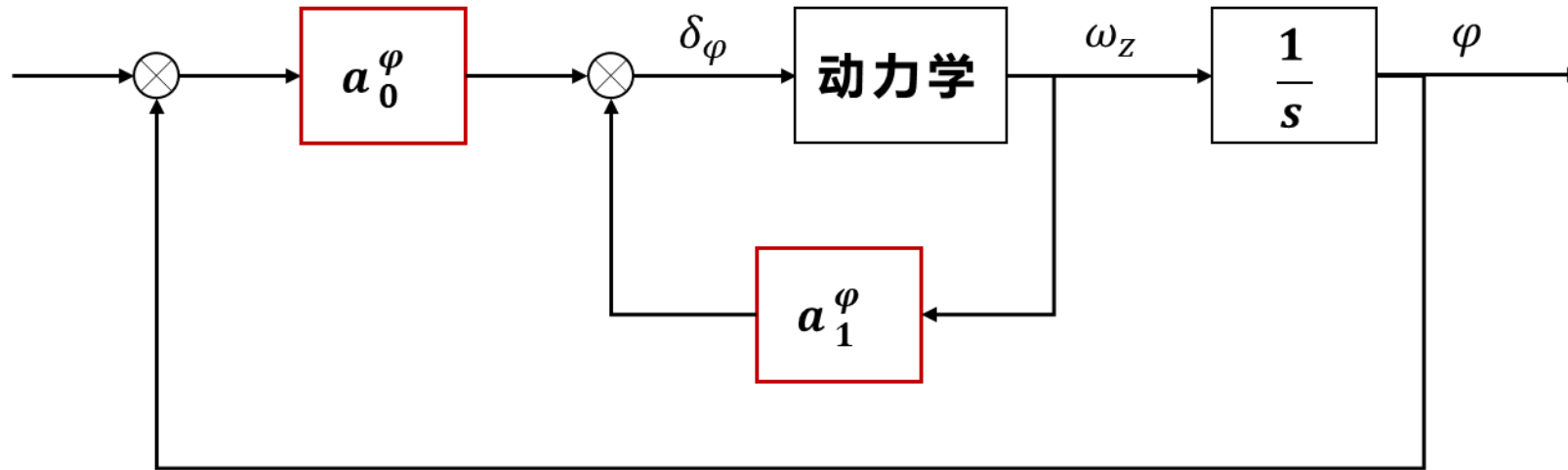
假设初值已知，需要等式右侧的值，即需要攻角随时间变化的规律（飞程序），因此，飞程序设计转化为攻角飞程序设计。

# 攻角与程序姿态角 (1)

□ 利用“力矩瞬时平衡”建立 攻角 与 程序姿态角 之间的关系 (难点)

由瞬时平衡假设  $M_{z1}^{\alpha}\alpha + M_{z1}^{\delta}\delta_{\varphi} = 0$

$\delta_{\varphi}$  舵面是由姿态控制方程决定



$$\delta_{\varphi} = a_0^{\varphi} \left( \varphi - \varphi_{pr} \right) + a_1^{\varphi} \omega_z$$
$$\Downarrow$$
$$\delta_{\varphi} = a_0^{\varphi} \left( \varphi - \varphi_{pr} \right)$$

## 攻角与程序姿态角 (2)

### □ 绕心运动方程在 “瞬时平衡” 假设条件下的等价形式

$$\delta_\varphi = a_0^\varphi (\varphi - \varphi_{pr})$$

$$M_{z1}^\alpha \alpha + M_{z1}^\delta \delta_\varphi = 0$$

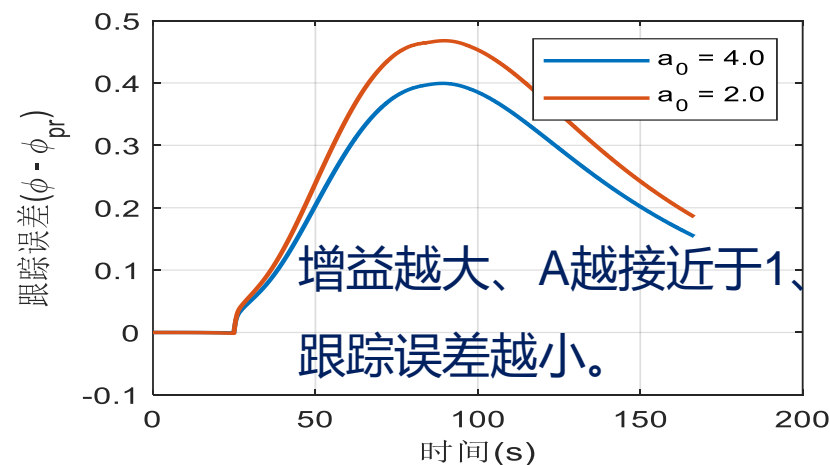
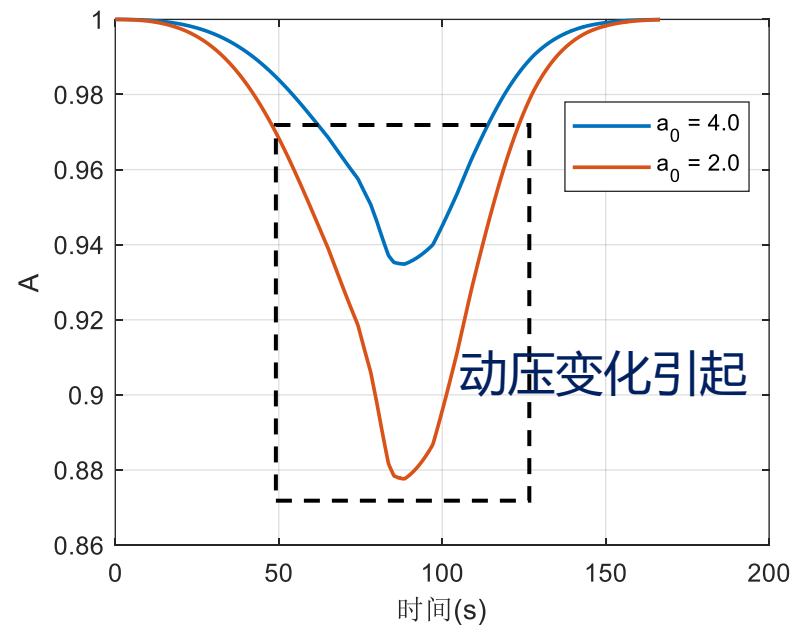
由小角度假设  $\alpha = \varphi - \theta$

进一步整理得

$$\alpha = \frac{a_0^\varphi M_{z1}^\delta}{M_{z1}^\alpha + a_0^\varphi M_{z1}^\delta} (\varphi_{pr} - \theta)$$

$$A = \frac{a_0^\varphi M_{z1}^\delta}{M_{z1}^\alpha + a_0^\varphi M_{z1}^\delta}$$

对运载火箭,  $A$  近似为1



# 飞程序设计中的火箭质心运动方程

## □ 简化的纵向运动方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = \frac{F_P - D}{m} + g \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{1}{mv} (F_P + CY^\alpha) \alpha + \frac{g}{v} \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{x} = v \cos \theta \\ m = m_0 - \dot{m}t \\ \alpha = A(\varphi_{pr} - \theta) \\ A = \frac{a_0^\varphi M_{z1}^\delta}{M_{z1}^\alpha + a_0^\varphi M_{z1}^\delta} \end{array} \right.$$

# 目 录

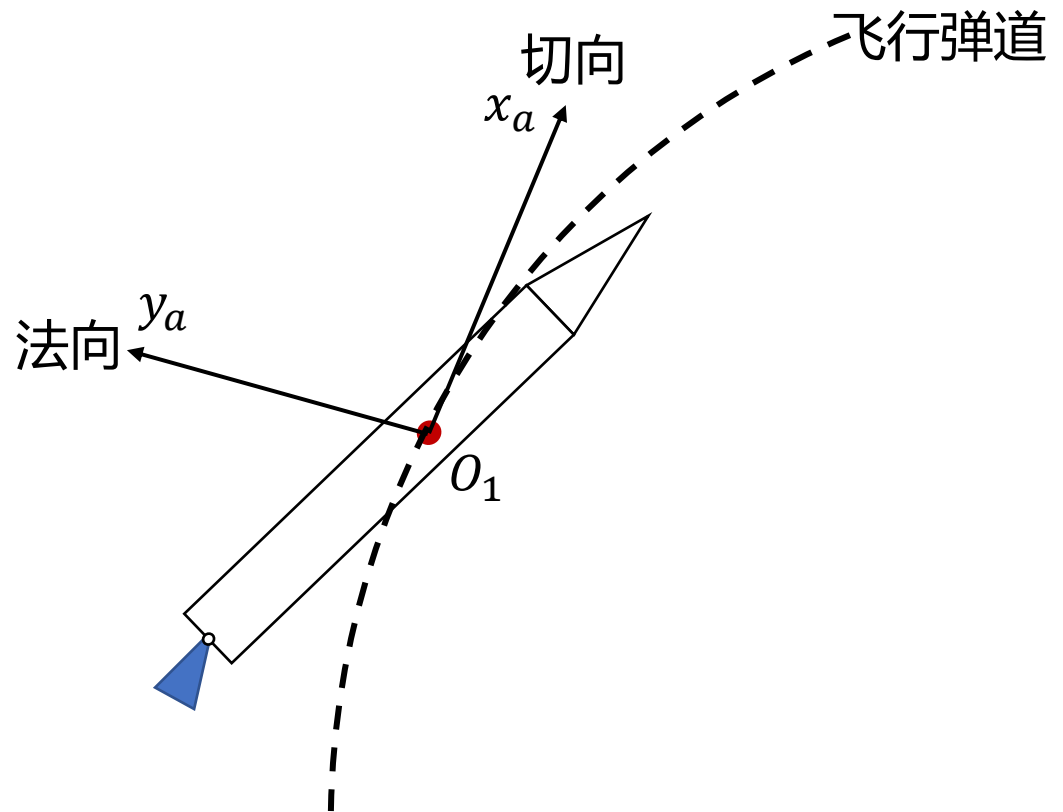
---

1. 开环制导
2. 火箭运动方程简化
- 3. 火箭运动特性分析**
4. 飞行程序设计

# 火箭运动特性分析

□ 火箭的纵向运动由切向运动以及法向运动组成

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = \frac{F_P - D}{m} + g \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{1}{mv} (F_P + CY^\alpha) \alpha + \frac{g}{v} \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{x} = v \cos \theta \\ \alpha = A(\varphi_{pr} - \theta) \\ A = \frac{a_0^\varphi M_{z1}^\delta}{M_{z1}^\alpha + a_0^\varphi M_{z1}^\delta} \\ m = m_0 - \dot{m}t \end{array} \right.$$





# 切向运动分析 (1)

## □ 切向运动方程

$$\dot{v} = \frac{F_P - D}{m} + g \sin \theta$$

推力方程  $F_P = \dot{m}u_e - S_e p_H$

$$\dot{v} = \frac{\dot{m}}{m}u_e + g \sin \theta - \frac{D}{m} - \frac{S_e p_H}{m}$$

- $\dot{m}u_e$  为燃料燃烧所能产生的推力,  $u_e$  为发动机的有效喷气速度
- $S_e p_H$  为发动机所处环境压力带来的推力偏差,  $S_e$  为发动机尾喷面积,  $p_H$  为环境压强

## 切向运动分析 (2)

$$\dot{v} = \frac{\dot{m}}{m} u_e + g \sin \theta - \frac{D}{m} - \frac{S_e p_H}{m}$$

等式两边积分

$$\int \dot{v} = \int \frac{\dot{m}}{m} u_e + \int g \sin \theta - \int \frac{D}{m} - \int \frac{S_e p_H}{m}$$

设

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{idk} = \int_0^{t_k} \frac{\dot{m}}{m} u_e dt \\ \Delta v_{1k} = - \int_0^{t_k} g \sin \theta dt \\ \Delta v_{2k} = \int_0^{t_k} \frac{D}{m} dt \\ \Delta v_{3k} = \int_0^{t_k} \frac{S_e p_H}{m} dt \end{array} \right.$$

则有

$$v(t_k) = v_{idk} - \Delta v_{1k} - \Delta v_{2k} - \Delta v_{3k}$$

# 切向运动分析 (3)

$$v(t_k) = v_{idk} - \Delta v_{1k} - \Delta v_{2k} - \Delta v_{3k}$$

$v_{idk}$  为火箭在真空无引力作用下推力所产生的速度, 称为**理想速度**

$$\dot{m} = -\frac{dm}{dt}$$

则  $v_{idk}$  可直接积分得到

$$v_{idk} = -u_e \ln \frac{m_k}{m_0} \quad \text{火箭公式}$$

如果  $t_k$  时刻, 燃料烧完, 那么  $m_k$  为火箭结构质量

思考: 如何提高理想速度?

- 1、减小结构质量与总质量的比值 (结构专业)
- 2、提高喷气速度 (动力专业)

# 切向运动分析 (4)

大气层内主动段飞行中，提升燃料利用率有效的手段是什么？

$$v(t_k) = v_{idk} - \Delta v_{1k} - \Delta v_{2k} - \Delta v_{3k}$$

➤  $v_{idk}$  为火箭在真空无引力作用下推力所产生的速度，**理想速度**

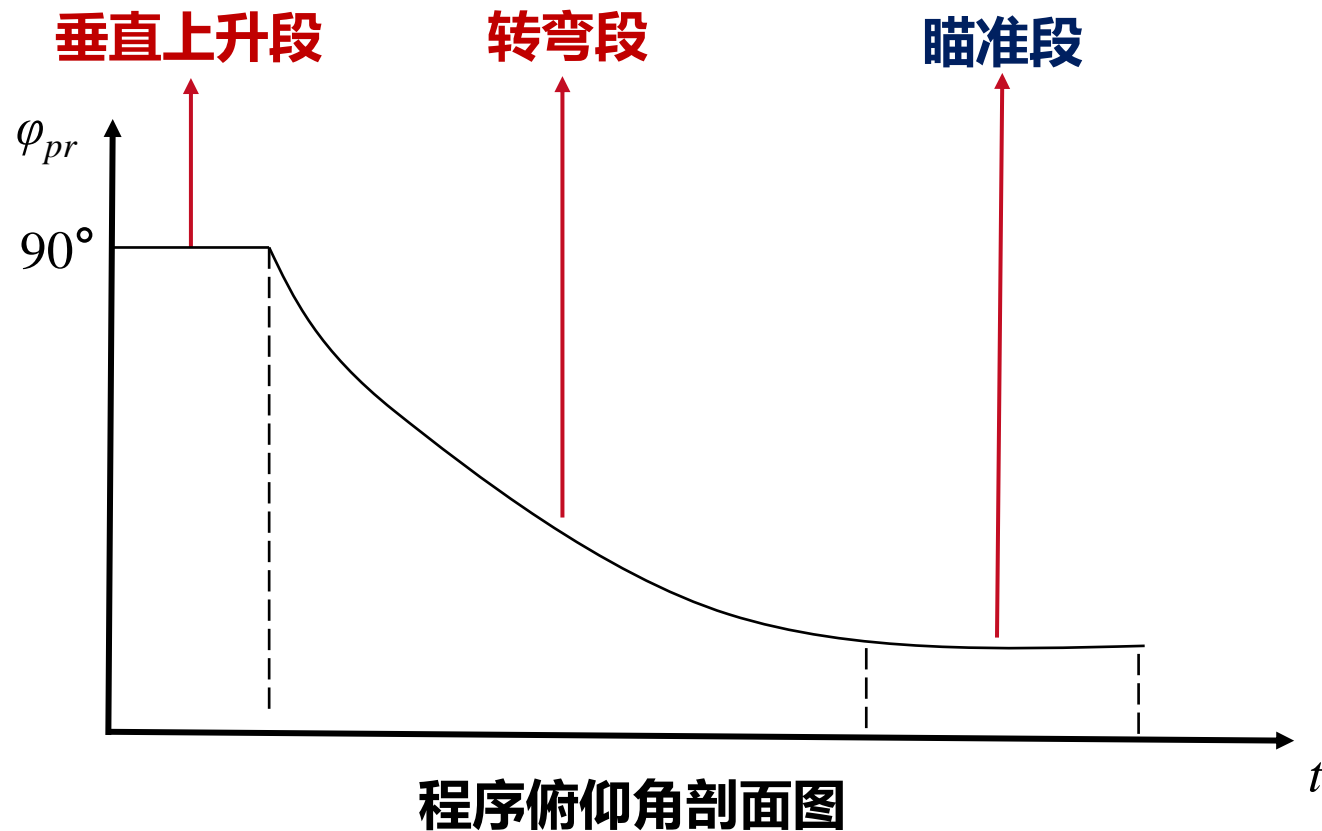
➤  $\Delta v_{1k}$  为引力加速度分量引起的速度损失，约为理想速度的 **20%~30%**

➤  $\Delta v_{2k}$  为阻力造成的损失，约为理想速度的 **3%~5%**

➤  $\Delta v_{3k}$  为大气静压力所引起的速度损失，约为理想速度的 **5%**

# 法向运动分析 (1)

□ 大气层内飞行程序分为三个阶段：垂直上升段、转弯段和瞄准段



实现俯仰程序剖面，需要火箭“会转弯”，如何控制火箭转弯？

# 法向运动分析 (2)

## □ 法向运动方程

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mv} \left( \underbrace{F_p}_{\text{推力贡献}} + \underbrace{CY^\alpha}_{\text{气动贡献}} \right) \alpha + \underbrace{\frac{g}{v} \cos \theta}_{\text{重力贡献}}$$

➤ 思考：运载火箭依靠何种力实现大气层内转弯？

- A、重力
- B、气动力和推力
- C、重力、气动力与推力共同作用

# 法向运动分析 (3)

## □ 火箭在重力、气动力与推力相互配合下完成转弯

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mv} \left( \underbrace{F_P}_{\text{推力贡献}} + \underbrace{CY^\alpha}_{\text{气动贡献}} \right) \alpha + \underbrace{\frac{g}{v} \cos \theta}_{\text{重力贡献}}$$

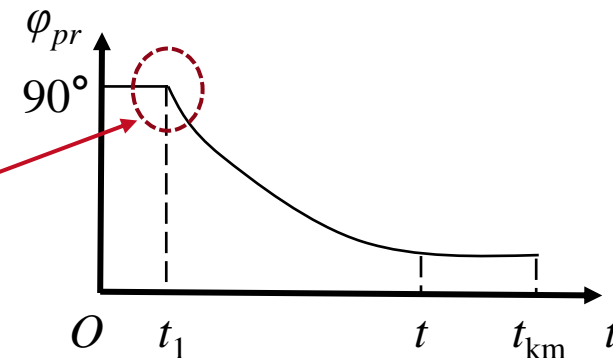
在垂直起飞段， $\varphi = \theta = 90^\circ$ ，不转弯

在转弯段，重力在转弯初期的贡献几乎为零，需要靠控制攻角（推力+气动力）启动转弯过程。

为此，输出小于 $90^\circ$ 的程序姿态角：根据力矩瞬时平衡假设，得对应攻角

$$\alpha = -\frac{M_z^\delta}{M_z^\alpha} \delta_\varphi = -\frac{F_P (x_g - x_c)}{Y^\alpha (x_g - x_p)} \delta_\varphi$$

$$\delta_\varphi = a_0^\varphi (\varphi - \varphi_{pr})$$



# 火箭运动的静稳定性

## □ 静稳定性

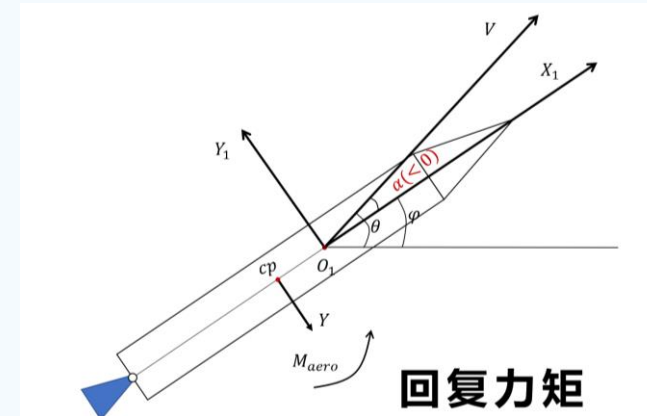
重心位于压心（焦点）之前，纵向静稳定，重心离压心越近，纵向静稳定度降低；重心位于压心之后，纵向静不稳定。

根据力矩瞬时平衡假设

$$\alpha = -\frac{M_z^\delta}{M_z^\alpha} \delta_\varphi = -\frac{F_P (x_g - x_c)}{Y^\alpha (x_g - x_p)} \delta_\varphi$$

$$\begin{cases} x_g - x_p < 0 & \text{静稳定火箭} \\ x_g - x_p \geq 0 & \text{静不稳定火箭} \end{cases}$$

### ➤ 静稳定直观理解



$$\alpha < 0 \rightarrow M_{st} > 0$$

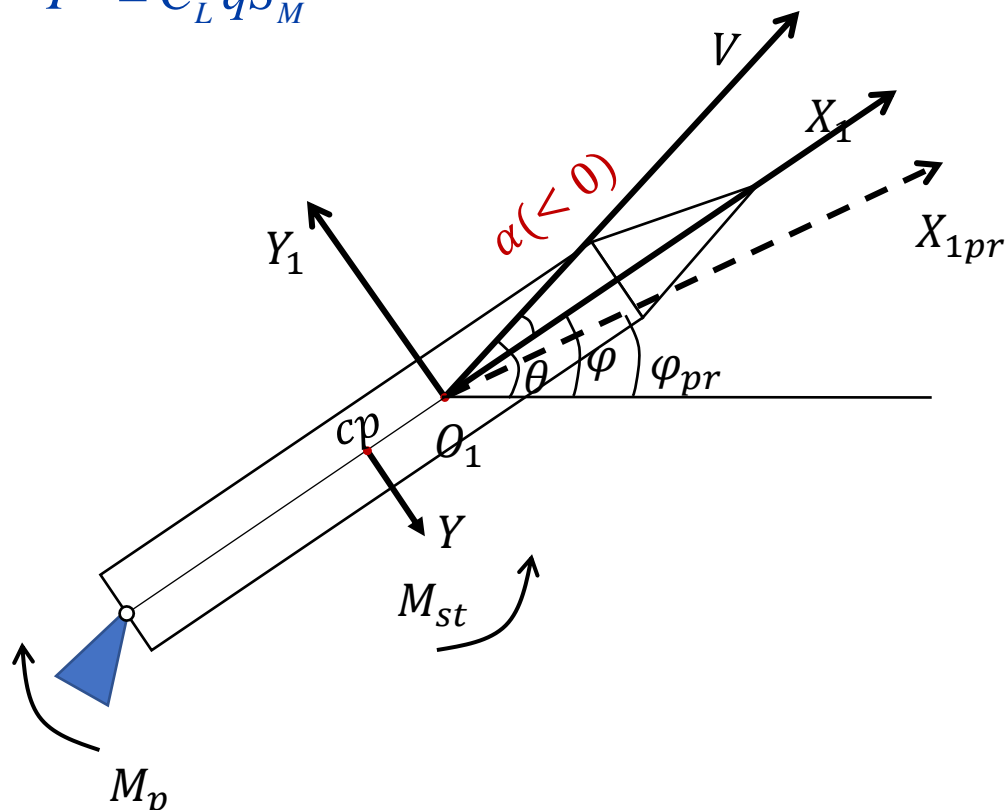
负攻角产生一个抬头力矩，  
使得攻角变小，直至回到平衡状态



# 静稳定火箭的转弯过程

□ 转弯中程序轴、弹轴、速度轴的变化，相应的力和力矩的方向、平衡关系

$$\begin{array}{l} \varphi - \varphi_{pr} > 0 \xrightarrow{\delta_\varphi = a_0^\varphi (\varphi - \varphi_{pr})} \delta_\varphi > 0 \rightarrow M_p < 0 \quad \text{弹轴低头} \\ \alpha < 0 \xrightarrow{Y^\alpha \alpha < 0} M_{st} > 0 \quad \text{抑制弹轴低头} \end{array} \Rightarrow M_p \text{ 与 } M_{st} \text{ 相互平衡}$$
$$Y^\alpha = C_L^\alpha q S_M$$



# 目 录

---

1. 开环制导
2. 火箭运动方程简化
3. 火箭运动特性分析
- 4. 飞行程序设计**

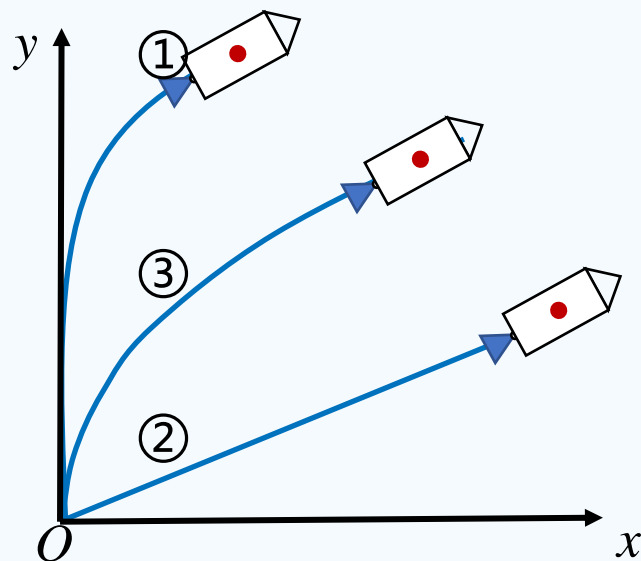
# (大气层内) 飞行程序设计

## □ 飞行程序

通过**设计攻角**的程序角，得到主动段飞行时**俯仰角**的变化规律。

飞行程序设计的选择决定了技战术性能：弹道射程、落点散布、载荷和热流等。

➤ **终端速度倾角相同**，不同的飞行程序对应不同的技战术性能：



- ① 垂直上升，接近主动段终点时转弯：大气层内时间短，转弯需要极大控制力和力矩，转弯对应的法向力大，重力造成的速度损失大（空气阻力速度损失小）
- ② 按不变的速度倾角飞行：长时间在大气层内，速度的阻力损失大，气动加热显著，对发射装置要求高
- ③ 垂直起飞后逐渐转弯：发射装置简单，法向过载和控制力较小，速度的阻力损失和重力损失不至于过大

# 飞行程序设计基本原则 (1)

## a) 垂直起飞

发射台结构简单，同时也使火箭在起飞时保持稳定，应合理选择垂直起飞段的时间，一般至少保证延续到发动机进入额定工作状态的时刻，与此同时，控制机构也能正常地控制火箭姿态实现转弯（提供足够的控制力矩）。

## b) 限制火箭转弯时的法向过载（重力转弯）

空气力矩以及由气动力造成的法向过载与 $q\alpha$ 成正比，通常要求采用重力转弯：

在跨音速及其整个具有大动压头的转弯段弹道上攻角为零或尽可能地小，使火箭只在重力法向分量 $-mg\cos\theta$ 作用下转弯（转弯角速度与重力分量平衡）

$$n_y = \frac{(F_P + C \cdot C_L^\alpha S_M q) \alpha}{mg_0} = \frac{v\dot{\theta} - g \cos \theta}{g_0}$$

# 重力转弯

## □ 重力转弯：火箭只在重力作用下转弯（攻角为零）

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mv} \left( \underbrace{F_p}_{\text{推力贡献}} + \underbrace{CY^\alpha}_{\text{气动贡献}} \right) \alpha + \underbrace{\frac{g}{v} \cos \theta}_{\text{重力贡献}}$$

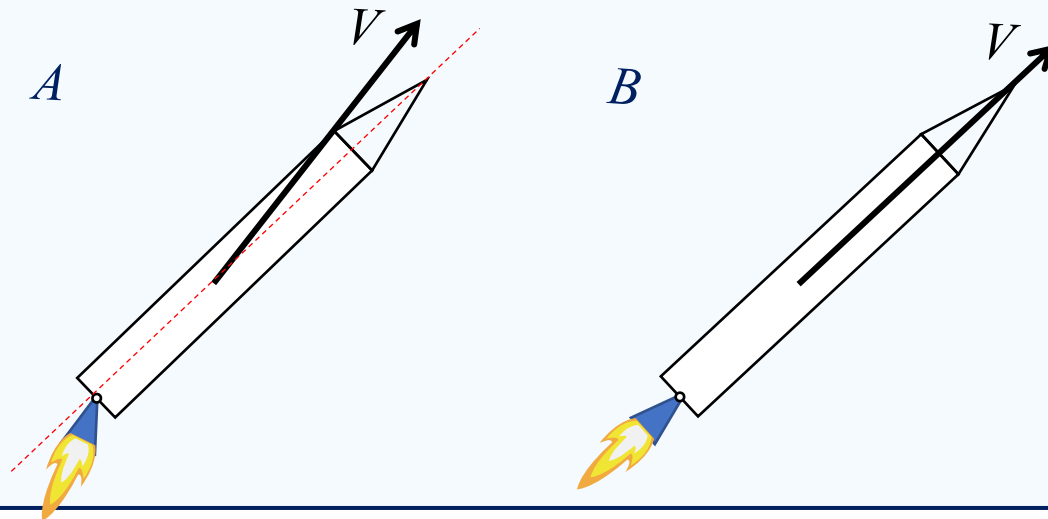
推力贡献

气动贡献

重力贡献

转弯段，不能一直靠攻角转弯，会降低**燃料最优性**。

➤ 重力转弯：减小推力偏离速度方向的攻角速度损失



## 飞行程序设计基本原则 (2)

### c) 程序俯仰角变化应连续, 角速度与角加速度要有限制

若程序俯仰角 $\varphi_{pr}(t)$ 间断, 则角速度 $\dot{\varphi}_{pr}(t)$ 无穷大, 从而会使法向过载过大;

$$\dot{\theta} = \dot{\varphi} - \dot{\alpha} \xrightarrow{\alpha=0} \dot{\theta} = \dot{\varphi} \quad \dot{\varphi} \uparrow \rightarrow \dot{\theta} \uparrow \rightarrow n_y = \frac{v\dot{\theta} - g \cos \theta}{g_0} \uparrow$$

$\ddot{\varphi}_{pr}(t)$ 过大, 惯性力矩变大, 有可能使控制机构提供不了所需的控制力矩。

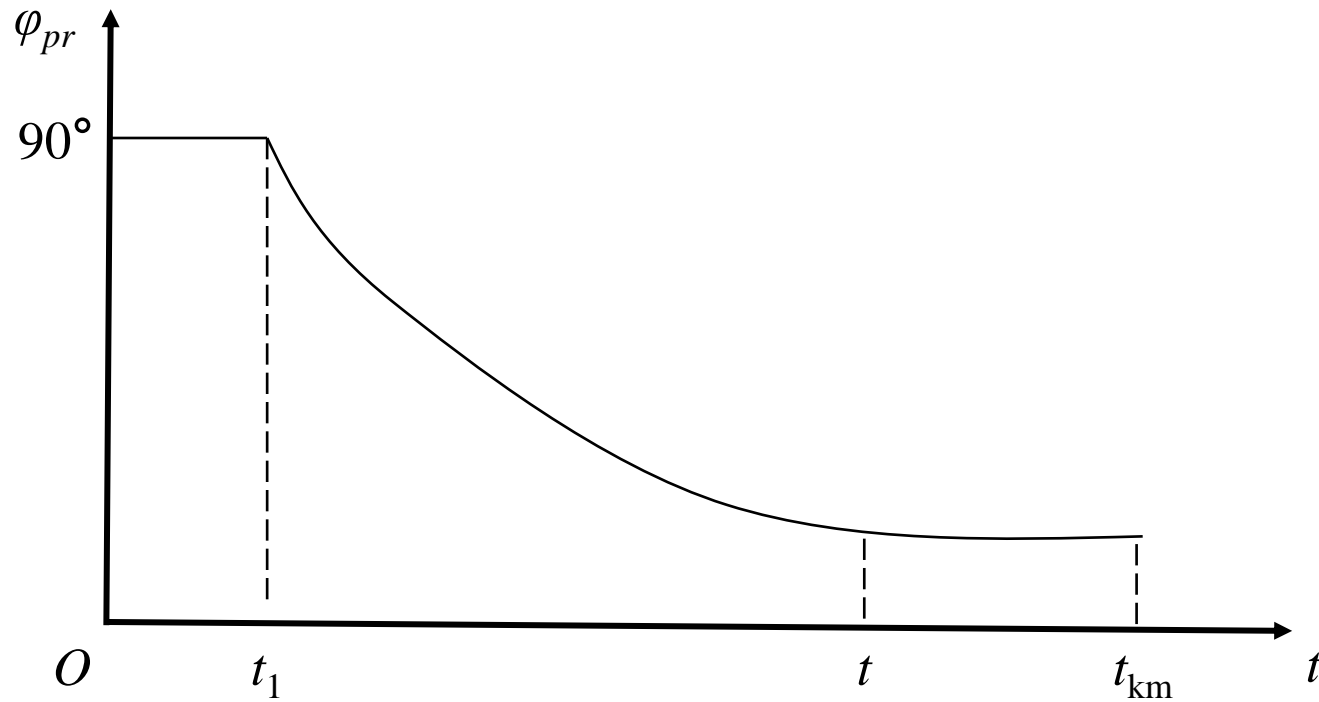
$$J\ddot{\varphi} = M_c \uparrow + M_{st} \uparrow + M_I$$

### d) 保证可靠的分离条件与合适的再入条件

例如分离期间要保证姿态尽可能的稳定 (常值姿态角分离), 目标射程对弹道倾角的约束等。

# 大气层主动飞行段

□ 根据飞行程序的基本原则，将主动段弹道分成三段：垂直上升段、转弯段、瞄准段



程序俯仰角剖面图

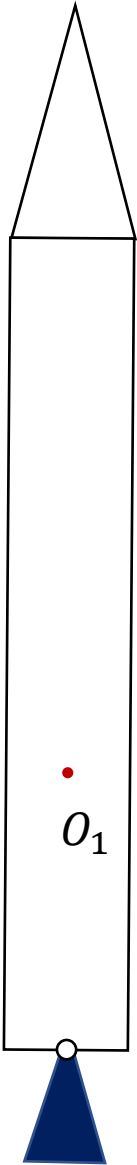
$0-t_1$ : 垂直上升段，垂直起飞

$t_1-t$ : 转弯段，减小法向过载，程序角变化连续

$t-t_{km}$ : 瞄准或分离段，级间分离或弹头分离稳定

# 飞行程序设计实例

参数类型	参数名称	单位	数值
发射点参数	经度	°	111
	纬度	°	20
	射向	°	90
	高度	m	5
质量特性参数	一级满载质量	kg	123000
	一级空载质量	kg	24000
	火箭全长	mm	30000
	一级满载质心	mm	18000
	一级空载质心	mm	13000
发动机参数	一级发动机推力	N	1300000
	一级燃料秒耗量	kg/s	510





# 飞行程序设计：垂直上升段

垂直上升段设计的主要参数：垂直段结束的时间  $t_1$  { 过小：姿态控制能力不足  
过大：转弯所需过载升高

$$t_1 = \sqrt{40 / \left( \frac{1}{\kappa_0} - 1 \right)} \quad \kappa_0 \text{ 为火箭地面重推比}$$

## ➤ 物理意义

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \times a_1 \times t_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{\kappa_0} mg - mg}{m} \times \left( \sqrt{40 / \left( \frac{1}{\kappa_0} - 1 \right)} \right)^2 \\ &= 196 \end{aligned}$$

运载火箭垂直上升段的飞行高度约为 196 m

## ➤ 实例

$$\kappa_0 = \frac{123000 \times 9.8}{1300000} \approx 0.93$$

$$t_1 = \sqrt{40 / \left( \frac{1}{\kappa_0} - 1 \right)} \approx 23.05$$

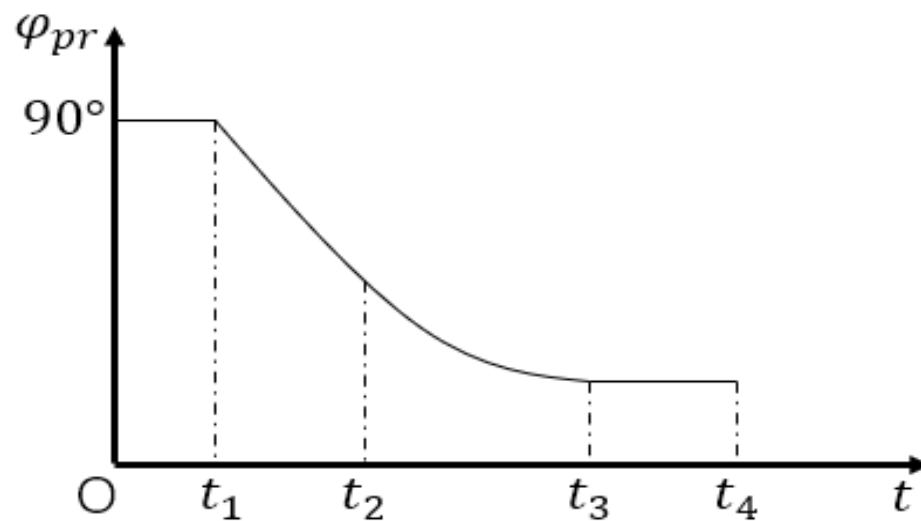
转弯受限于姿控的控制能力，稳妥起见，  
取  $t_1 = 25 \text{ s}$

# 转弯段设计

## □ 工程设计方法

设计参数为程序攻角，分两个阶段设计：

- 1)  $t_1 - t_2$ 为有攻角的转弯，应在气动力急剧变化的跨音速之前结束，以减少气动载荷和气动干扰，可在马赫数为0.7-0.9时使攻角减小为零；
- 2)  $t_2 - t_3$ 为高动压区，只依靠重力的法向分量进行转弯，即重力转弯。



由程序攻角转化得到的程序俯仰角

# 转弯采用的攻角程序 (1)

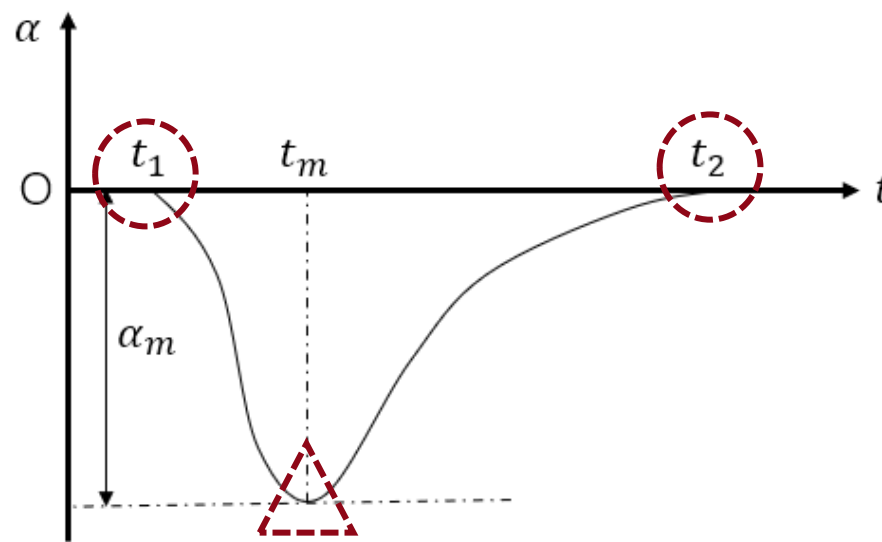
## □ 经验公式 1:

$$\alpha(t) = \begin{cases} -\alpha_m \cdot \sin^2 f(t) & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t_2 < t < t_3 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{\pi(t-t_1)}{K(t_2-t) + (t-t_1)}$$

$$K = \frac{t_m - t_1}{t_2 - t_m}$$

- $\alpha_m$  为音速段上攻角绝对值的最大值
- $t_m$  为攻角到达最大值的时间



# 转弯采用的攻角程序 (2)

## □ 经验公式 2:

$$\alpha(t) = -4\alpha_m Z(1-Z)$$

$$Z = e^{-k(t-t_1)}$$

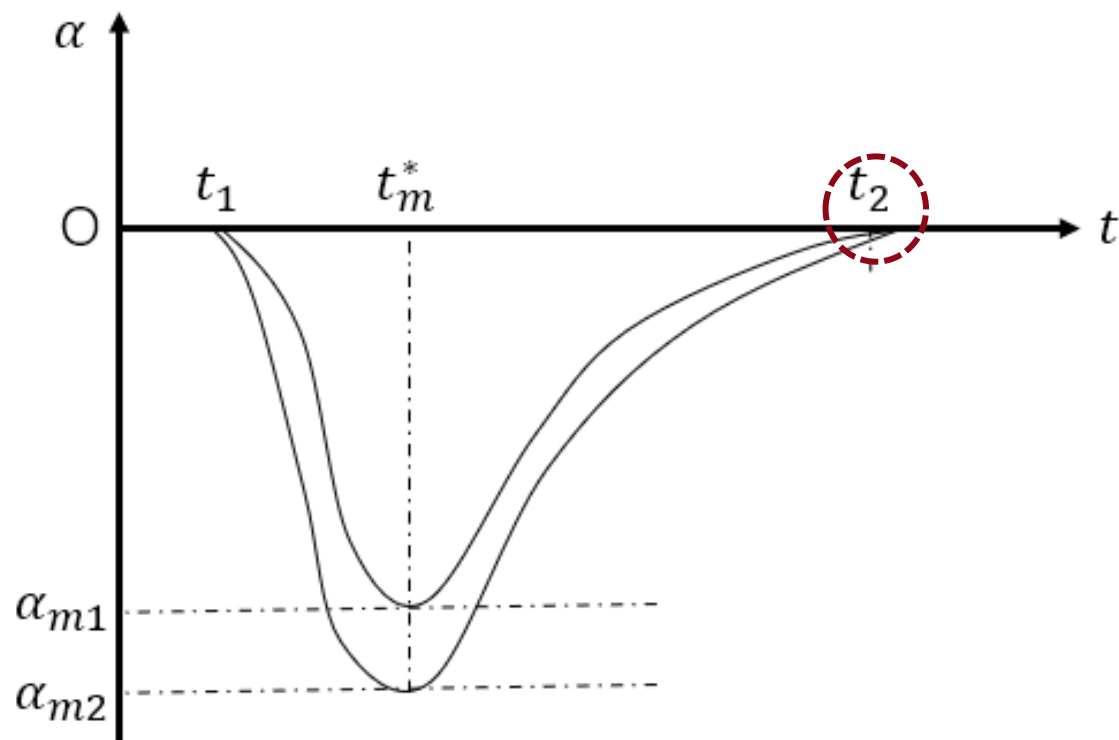
$\alpha_m$ 为音速段上攻角绝对值的最大值,  
 $k$ 为某一常值, 确定方式如下:

根据  $\frac{d\alpha(t)}{dt} = -4\alpha_m(1-2Z)\frac{dz}{dt} = 0$

当 $Z = \frac{1}{2}$ 时, 达到最大负攻角, 即

$$\frac{1}{2} = e^{-k(t_m-t_1)} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{t_m - t_1}$$

$$t_m = t_1 + \frac{\ln 2}{k}$$



- $t_m$ 为攻角绝对值到达最大值的时间
- 与【经验公式1】最大的区别在于  $t_2$  时刻的攻角不为0, 需要调整 $t_m$ 使 $t_2$ 时刻攻角足够小。

# 转弯攻角设计实例（2）

## □ 设计实例（以【经验公式2】为例）

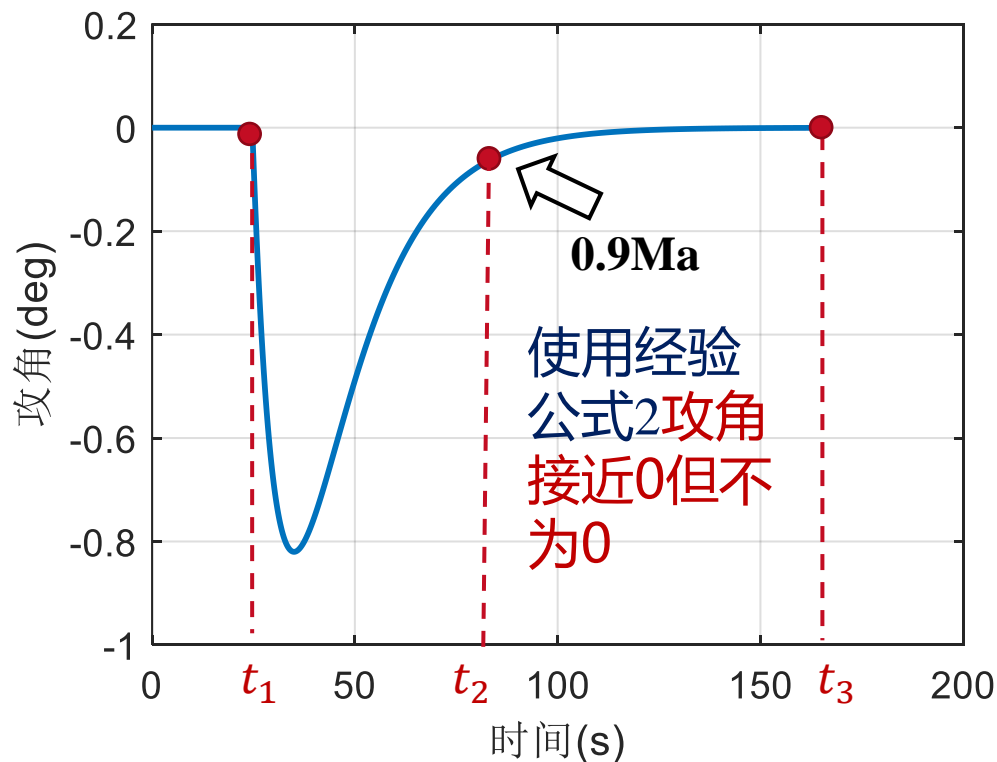
$$\alpha(t) = 4\alpha_m e^{k(t_1-t)} \left[ e^{k(t_1-t)} - 1 \right]$$

- $t_1$  为垂直上升段时间，本例为25s
- $\alpha_m$  为重力转弯攻角最大值，本例取 $0.82^\circ$
- $k = \frac{\ln 2}{t_m - t_1}$  中  $t_m$  为攻角绝对值到达最大值的时间，本例中  $t_m = 35s$

# 转弯攻角设计实例 (3)

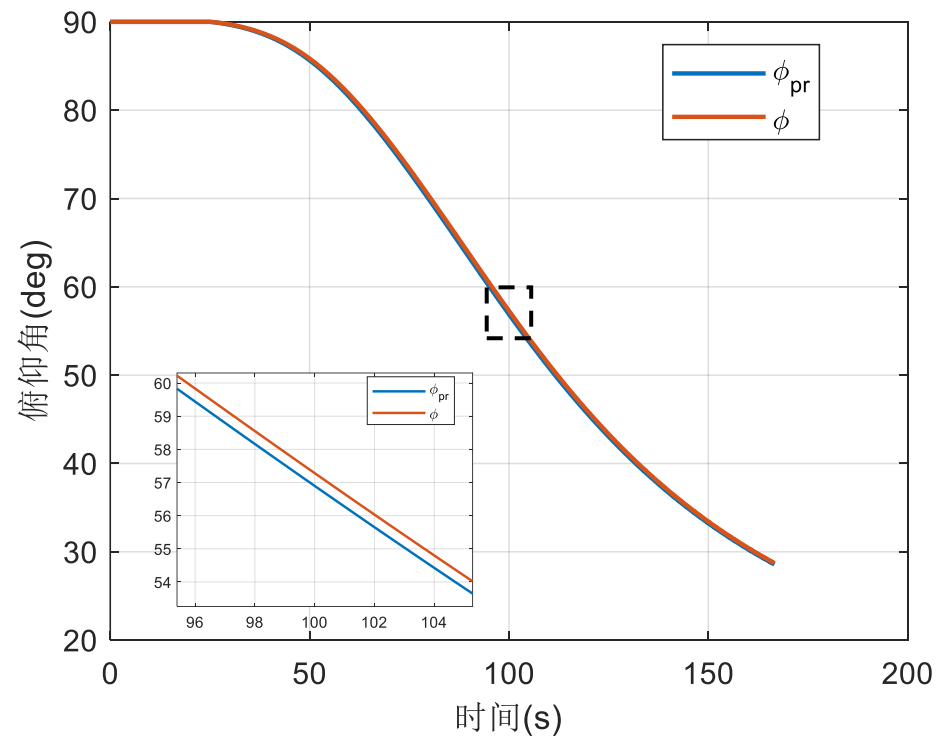
## □ 设计实例 (以【经验公式2】为例)

$$\alpha(t) = 4\alpha_m e^{a(t_1-t)} \left[ e^{a(t_1-t)} - 1 \right]$$



指令攻角剖面

动力学积分

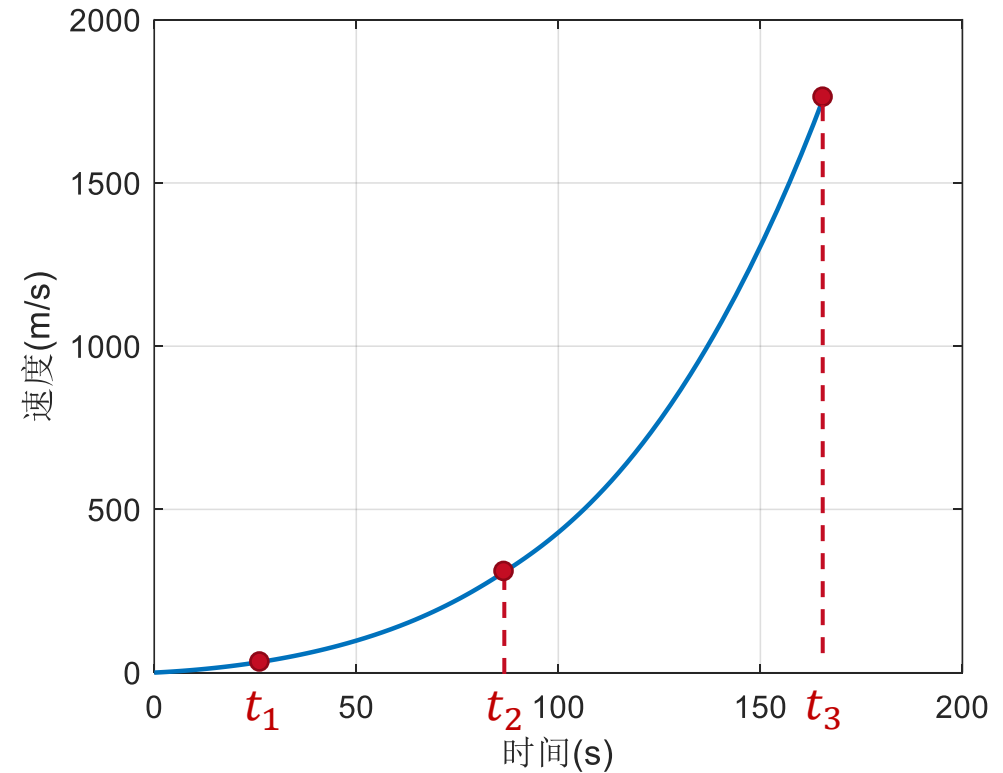
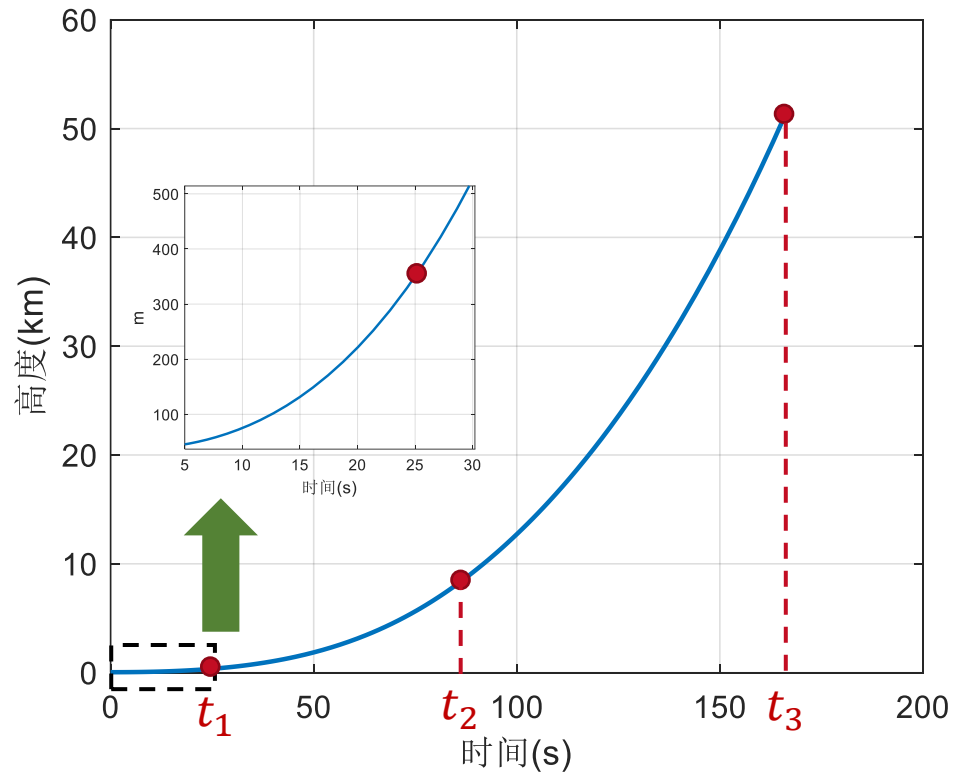


指令俯仰角及积分俯仰角剖面

# 转弯攻角设计实例（4）

## □ 设计实例（以【经验公式2】为例）

$$\alpha(t) = 4\alpha_m e^{k(t_1-t)} \left[ e^{k(t_1-t)} - 1 \right]$$



# 瞄准段飞程序选择

## □ 瞄准段保持不变的程序角

$$\varphi_{pr}(t) = \varphi_{pr}(t_3)$$

对于中近程火箭，一般就要求主动段终点的速度倾角取最小能量弹道的倾角，即  $\Theta_k = \Theta_{kopt}$ ，满足方程

$$\Theta_k = \theta_k + \beta_k$$

$$\beta_k = \arctan \frac{x_k}{R_E + y_k}$$

- $\Theta_k$  为火箭关机时刻相对于当地水平面的弹道倾角；
- $\theta_k$  为火箭相对于发射坐标系的速度倾角；
- $\beta_k$  为火箭当前位置相对于发射点的地心角。

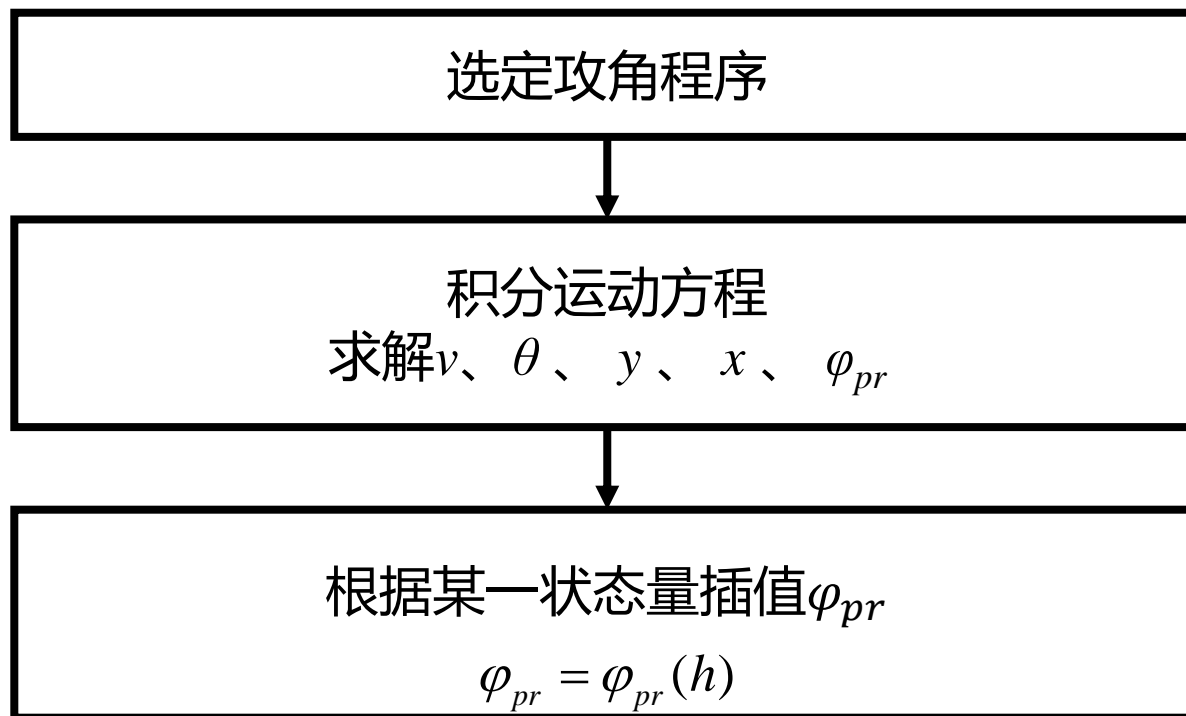


# (大气层内) 飞行程序设计

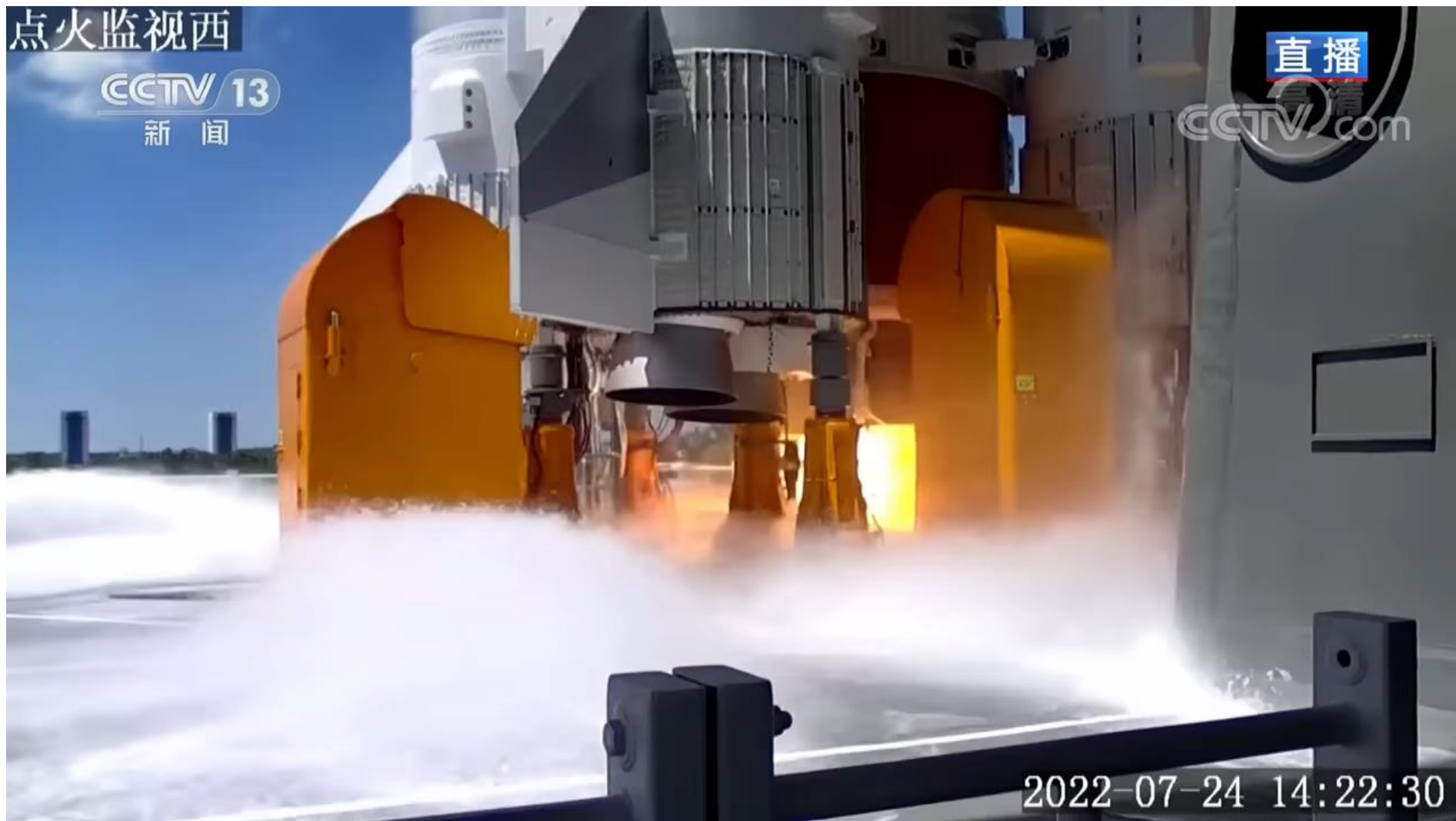
## □ 设计流程

根据设计攻角剖面，得到程序俯仰角剖面

在实际飞行过程中，**飞控中装载程序俯仰角剖面**



# 按照飞行程序飞行



问天实验舱搭乘长征五号B发射升空

# 作业

---

- 1、推导质心运动方程简化公式
- 2、画出纵向平面内的静不稳定火箭大气层内转弯受力图，并分析静不稳定火箭转弯机理

## 本章参考文献

- 1、《航空航天器运动的建模》 肖业伦
- 2、《远程火箭弹道学》 贾沛然