

北 京 航 空 航 天 大 学  
宇 航 学 院

飞行控制技术作业



可重复使用运载火箭的控制研究

班级 211514

学号 21374230

学生姓名 黄乙笑

指导教师 宋佳

2024 年 4 月 30 日

# 可重复使用运载火箭的控制研究

黄乙笑<sup>1</sup>

(1. 北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

**摘 要:** 当前,可重复使用运载火箭技术的研究正引领航天领域的科技进步,其中控制技术成为研究的关键部分。为了高效解决火箭回收过程中的控制问题,本研究首先建立了详尽的火箭动力学模型,并深入分析了垂直回收过程中的控制目标,通过将控制目标细化为垂直、水平及姿态三个控制通道,简化了控制策略的设计。本文详尽地回顾了经典控制理论、现代控制理论以及智能控制技术在可重复使用运载火箭回收控制中的应用,对比分析了各种方法在实际应用中的优势与局限。基于已有的研究结果,文章选取了三种具有广泛应用前景的控制算法进行案例研究:PID 控制、最优控制和强化学习控制。每种方法都通过建立相应的模型,并利用仿真计算来验证其效果。通过这些仿真实验,本研究不仅展示了各算法在火箭垂直回收控制中的具体应用,也为未来运载火箭设计提供了可靠的数据支持和理论基础。这些成果预示着在未来的航天任务中,可重复使用技术的高效控制将极大提高任务的安全性和经济性。

**关 键 词:** 可重复使用运载火箭; 经典控制理论; 现代控制理论; 智能控制

**中图分类号:** V448.12

**文献标识码:** A

**文章编号:**

## 1 引言

SpaceX 的首席执行官 Elon Musk 表示如果能像飞机那样有效地复用火箭,那么进入太空的成本将会降至百分之一以下<sup>[1]</sup>。因此,可重复使用运载火箭技术的研究具有重要的意义。

不可否认,美国是可重复使用运载火箭技术研究的先驱。航天飞机与可重复使用运载火箭一样,都是可重复使用的天地往返载具,但由于其过于昂贵,与“低成本”这一愿景相悖,加之其他原因,航天飞机方案被证明是失败的。然而美国的 SpaceX 公司在 2015 年 12 月 21 日成功地将猎鹰 9 号火箭的第一级回收,实现了可重复使用轨道火箭级的第一次垂直软着陆。2024 年 4 月 13 日,猎鹰 9 号火箭再次回收成功,其助推器成为了世界上第一枚复用 20 次的助推器。2024 年 3 月 14 日星舰成功进入预定轨道,但一级软着陆于海面失败,但预计会成为一款可完全复用的重型运载火箭。

欧盟、英国、俄罗斯、日本等国家地区也研发各种类型、各种垂直起降方式的可重复使用运载器<sup>[2-3]</sup>。

我国的商业航天公司星际荣耀自主研发的液氧甲烷可重复使用验证火箭双曲线二号在 2023 年 11 月完成试飞任务,验证了火箭着陆段垂直软着陆导航、制导与控制方案的正确性。据报道<sup>[4-5]</sup>,长征 8 号、长征 9 号等火箭也将采用可重复使用构型。

在可重复使用运载火箭的 GNC 设计中,着陆阶段的制导控制和姿态控制是关键<sup>[6-8]</sup>。火箭,特别是重型火箭要在大气层中完成减速、调整姿态,最终达到竖直降落的状态,对火箭的操控性、稳定性、抗干扰<sup>[9]</sup>等性能提出了很高的要求。为了满足这些要求,GNC 系统通常采用多传感器数据融合技术,以提高位置、速度和姿态的测量精度和可靠性。此外,还需要设计高效的控制算法,根据传感器数据和预先设定的轨迹规划,实现精确的姿态调整和火箭着陆。同时,为了保证火箭的稳定性和抗干扰性,还需要考虑风、气流等外部环境因素对火箭姿态的影响,并采取相应的措施进行补偿和调整。综上所述,着陆阶段的制导控制和姿态控制是可重复使用运载火箭设计中至关重要的环节,需要综合考虑传感器、控制算法和外部环境因素,以确保火箭能够安全、精确地

完成着陆任务。

在回收阶段的控制中, 常用算法可以分为三类: 以 PID 控制为代表的经典控制理论, 以最优控制为代表的现代控制理论, 以神经网络、强化学习为代表的智能控制。各种控制算法各有优劣, 在实际工程应用时, 要成分考虑算法的适用性、稳定性、鲁棒性、计算复杂度等因素, 选择合适的控制算法, 以确保火箭能够安全、精确地完成回收任务。回收阶段的火箭处于低速、平面大地、可忽略地球自转的情况下, 火箭的动力学模型可以简化为单输入单输出 (SISO) 系统, 所以通常采用 PID 控制来进行姿态控制或者制导控制。尽管 PID 广泛应用在简单系统的控制中, 它无法满足最优化需求、稳定性分析、多变量的 MIMO 系统等高级、复杂的控制系统要求, 为此, 需要使用最优控制或者智能控制。

## 2 火箭的动力学建模

### 2.1 坐标系定义

本文沿用《导弹飞行力学》<sup>[10]</sup> 中的坐标系定义:

- 1) 地面坐标系  $OX_0Y_0Z_0$ .
- 2) 弹体坐标系  $OX_1Y_1Z_1$ .
- 3) 弹道坐标系  $OX_2Y_2Z_2$ .
- 4) 速度坐标系  $OX_3Y_3Z_3$ .

弹体相对于地面坐标系的姿态, 通常用 3 个欧拉角来描述, 分别是偏航角  $\psi$ 、俯仰角  $\vartheta$  和滚转角  $\gamma$ 。从地面坐标系  $S_0$  到弹体坐标系  $S_1$ , 需要经过三次旋转, 分别是绕  $y$  轴的偏航角  $\psi$ 、绕  $z$  轴的俯仰角  $\vartheta$  和绕  $x$  轴的滚转角  $\gamma$ 。这三次旋转的顺序是  $\psi \rightarrow \vartheta \rightarrow \gamma$ 。

地面坐标系  $S_0$  到弹道坐标系  $S_2$ , 需要经过两次旋转, 分别是绕  $y$  轴的弹道偏角  $\psi_v$  和绕  $z$  轴的弹道倾角  $\theta$ , 即  $S_0$  到  $S_2$  的旋转矩阵为:

$$\mathbf{L}(\theta, \psi_v) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi_v & \sin \theta & -\cos \theta \sin \psi_v \\ -\sin \theta \cos \psi_v & \cos \theta & \sin \theta \sin \psi_v \\ \sin \psi_v & 0 & \cos \psi_v \end{bmatrix} \quad (1)$$

速度坐标系  $S_3$  到弹体坐标系  $S_1$ , 需要经过两次旋转, 绕  $y$  轴旋转侧滑角  $\beta$ , 绕  $z$  轴旋转攻角  $\alpha$ , 即  $S_1$  到  $S_3$  的旋转矩阵为:

$$\mathbf{L}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

弹道坐标系  $S_2$  绕  $x$  轴旋转速度倾斜角  $\gamma_v$  得到速度坐标系  $S_3$ 。

### 2.2 简化假设

在火箭的回收阶段, 为了计算建模方便, 采取适当的基本假设:

1) 地球模型假设: 地球为均匀球体, 忽略扁率。引力指向地心方向, 服从平方反比规律。由于过程时间短, 所以可以忽略地球自转。

2) 小角度假设: 回收阶段火箭近乎垂直, 攻角、侧滑角、偏航角、滚转角、弹道偏角、速度倾斜角均为小量。

3) 刚体假设: 火箭在回收阶段忽略晃动, 忽略振动, 只考虑作为刚体的质心运动和绕质心的运动。

### 2.3 质心运动的动力学

在弹道坐标系  $S_2$  中描述质心动力学方程, 标量形式较为简单, 且便于分析运动特性。其中  $\Omega_2$  是弹道坐标系  $S_2$  相对于惯性系的旋转角速度;  $F$  是除了发动机推力之外的力, 包含气动力  $\vec{R}$  和重力  $\vec{G}$  等, 气动力在  $S_3$  中可以分解为阻力  $X$ , 升力  $Y$ , 和侧向力  $Z$ ;  $\vec{P}$  为 RCS (Reaction Control Systems) 发动机推力<sup>[11]</sup>:

$$m \frac{d(\vec{V})_2}{dt} + (\vec{\Omega}_2)_2^\times (\vec{V})_2 = (\vec{F})_2 + (\vec{P})_2 \quad (3)$$

在弹道坐标系中, 各个分量如下:

$$\begin{aligned} (\vec{V})_2 &= [V \quad 0 \quad 0]^T \\ (\vec{\Omega}_2)_2 &= \mathbf{L}_z(\theta) \mathbf{L}_y(\psi_v) (\vec{\psi}_v)_0 + \mathbf{L}_z(\theta) (\vec{\psi}_v)_0 \\ &= \mathbf{L}_z(\theta) \mathbf{L}_y(\psi_v) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi}_v & 0 \end{bmatrix}^T + \mathbf{L}_z(\theta) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\psi}_v \sin \theta & \dot{\psi}_v \cos \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \\ (\vec{P})_2 &= \mathbf{L}_{21}(\vec{P})_1 \\ &= \mathbf{L}_x^T(\gamma_v) \mathbf{L}_y^T(\beta) \mathbf{L}_z^T(\alpha) \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\beta & \alpha \\ -\alpha & -\gamma_v & 1 \\ \beta & 1 & \gamma_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\ (\vec{R})_2 &= \mathbf{L}_{23}(\vec{R})_3 = \mathbf{L}_x^T(\gamma_v) (\vec{R})_3 \\ &= \begin{bmatrix} -X & Y - Z\gamma_v & Y\gamma_v + Z \end{bmatrix}^T \\ (\vec{G})_2 &= \mathbf{L}_{20}(\vec{G})_0 = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta & -mg \cos \theta & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4)$$

带入式 3, 得到质心运动的动力学方程:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= F_x - \beta F_y + \alpha F_z - X - mg \sin \theta \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= -\alpha F_x - \gamma_\nu F_y + F_z + Y - Z\gamma_\nu - mg \cos \theta \\ -mV \cos \theta \frac{d\psi_\nu}{dt} &= \beta F_x + F_y + \gamma_\nu F_z + Y\gamma_\nu + Z \end{aligned} \quad (5)$$

## 2.4 质心运动学方程

在地面坐标系  $S_0$  中, 火箭位置  $(\vec{R})_0 = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ , 质心运动:

$$\frac{d(\vec{R})_0}{dt} = (\vec{V})_0$$

坐标转换。小角度简化之后得到质心运动学方程:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\ \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \psi_\nu \end{aligned} \quad (6)$$

## 2.5 绕质心转动的动力学方程

在本体系  $S_1$  中, 火箭绕质心转动的动力学方程为:

$$(\mathbf{I})_1 \frac{d(\vec{\omega})_1}{dt} + (\vec{\omega})_1^\times (\mathbf{I})_1^\times (\vec{\omega})_1 = (\vec{M})_1 \quad (7)$$

姿态运动学方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 1 \\ 0 & \frac{1}{\cos \vartheta} & \frac{-\gamma}{\cos \vartheta} \\ 1 & -\tan \vartheta & \gamma \tan \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中  $(\mathbf{I})_1$  是火箭的转动惯量矩阵, 取惯性主轴系时, 惯量积为 0,  $(\mathbf{I})_1 = \text{diag}(I_x \ I_y \ I_z)^T$ ;  $(\vec{\omega})_1$  是火箭的角速度;  $(\vec{M})_1$  是火箭的受到的主动力矩。

# 3 火箭垂直回收的控制目标

## 3.1 垂直控制

在火箭下降阶段, 需要控制火箭的垂直速度和推力器点火高度, 以达到软着陆的效果。在垂直方向, 有两个控制目标, 分别对应了垂直速度的控制和点火高度的控制。其一是最大化降低着陆速度, 以达到在火箭着陆时减小冲击力的目的。其二是控制点火高度尽量低, 点火时间尽量短, 达到节省燃料的目的。在某种程度上, 以上两个目标是矛盾的, 需要在两者之间进行权衡。

## 3.2 水平控制

在火箭的水平控制中, 采用瞬时冲击点制导算法 (Instantaneous Impact Point Guidance Algorithm, IIPGA)。IIPGA 算法是一种基于点的制导算法, 计算着陆点位置和到达着陆点的需要加速度, 通过调整火箭的姿态, 使火箭的着陆点与目标着陆点重合。Ki-Wook Jung<sup>[12]</sup> 等人基于火箭的空气动力学模型和最优误差动力学, 实现了最小指令的制导控制。

## 3.3 姿态控制

根据 2.5 的分析, 利用火箭的舵面和 RCS 发动机进行姿态控制<sup>[13]</sup>。姿态控制的目标是保持着陆时的姿态稳定。姿态控制中, 需要考虑火箭的姿态稳定性、抗干扰性、控制精度等因素, 以确保火箭能够安全、精确地完成着陆任务。在垂直回收过程中, 姿态控制的方法与其他过程差别不大, 所以这里不再详细展开。

# 4 经典控制理论

经典控制理论以拉普拉斯变换为数学工具, 以单输入单输出线性定常系统为研究对象, 将描述系统的微分方程变化到复数域, 通过代数运算求解系统的传递函数, 在频域中对系统进行分析和设计, 确定控制器的结构和参数。

经典控制以 PID 控制为代表, 是一种基于模型的控制理论。PID 控制器是由比例环节、积分环节和微分环节组成的, 可以根据系统的特性和要求, 调节 PID 控制器的参数, 以实现对系统的控制。PID 控制器的优点是结构简单, 易于实现, 但是它无法满足复杂系统的控制需求, 如非线性系统、时变系统、多变量系统等。在火箭回收阶段的姿态控制中, 需要将火箭视为刚体进行精确的建模<sup>[10, 14-15]</sup>, 然后选择合适的算法, 调整参数以实现控制。在制导控制中, 则只需将火箭视为质点。

## 4.1 PID 算法

PID 控制器将偏差的比例、积分和微分通过线性组合得到控制量, 对被控对象进行控制。

### 4.1.1 PID 控制原理

模拟 PID 控制系统框图如图 1 所示。

PID 的控制规律为:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (9)$$

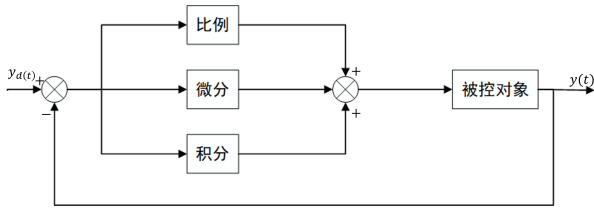


图1 模拟PID控制系统框图

Fig. 1 Block diagram of analog PID control system

或用传递函数表示:

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (10)$$

其中  $k_p$  是比例系数,  $T_i$  是积分时间常数,  $T_d$  是微分时间常数。e 是偏差,  $u$  是控制量。

PID 控制器各校正环节的作用如下:

1) 比例环节: 成比例地反映控制系统的偏差信号  $e(t)$ , 偏差一旦产生, 控制器立即产生控制作用, 以减少偏差。

2) 积分环节: 主要用于消除静差, 提高系统的无差度。积分作用的强弱取决于积分时间常数, 积分时间常数越大, 积分作用越弱, 反之则越强。

3) 微分环节: 反映偏差信号的变化趋势 (变化速率), 并能在偏差信号变得太大之前, 在系统中引入一个有效的早期修正信号, 从而加快系统的动作速度, 减少调节时间。

#### 4.1.2 数字PID控制

计算机控制是一种采样控制, 只能根据采样时刻的偏差值计算控制量。因此, 连续PID控制算法不能直接使用, 需要采用离散化方法。在计算机PID控制中, 使用的是数字PID控制器。

按模拟PID控制算法, 以一系列的采样时刻点  $kT$  代表连续时间  $t$ , 以矩形法数值积分近似代替积分, 以一阶后向差分近似代替微分, 即

$$\begin{cases} t \approx kT & (k = 0, 1, 2, \dots) \\ \int_0^t e(t) dt \approx T \sum_{j=0}^k e(jT) = T \sum_{j=0}^k e(j) \\ \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T} = \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \end{cases} \quad (11)$$

可得离散PID表达式:

$$\begin{aligned} u(k) &= k_p \left[ e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^k e(j) + \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \right] \\ &= k_p e(k) + k_i \sum_{j=0}^k e(j)T + k_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $k_i = \frac{k_p}{T_i}$ ;  $k_d = k_p T_d$ ;  $T$  是采样周期。

#### 4.1.3 PID参数整定

PID 控制器的参数整定是指根据被控对象的特性, 确定PID控制器的参数  $k_p$ 、 $T_i$  和  $T_d$  的过程。PID 参数整定的目的是使控制系统具有良好的动态性能, 包括快速响应、稳定性、抗干扰性和鲁棒性。

自从 Ziegler 和 Nichols 提出参数整定方法<sup>[16]</sup>后, PID 参数整定的方法和技术在不断发展中, 根据发展阶段的划分, 可分为常规PID参数整定方法及智能PID参数整定方法; 按照被控对象个数来划分, 可分为单变量PID参数整定方法及多变量PID参数整定方法, 前者包括现有大多数整定方法, 后者是研究的热点及难点; 按控制量的组合形式来划分, 可分为线性PID参数整定方法及非线性PID参数整定方法, 前者用于经典PID调节器, 后者用于由非线性跟踪-微分器和非线性组合方式生成的非线性PID控制器。

#### 4.2 火箭回收中的PID控制

针对3章中的三个控制目标, 均可使用PID或者改进的PID控制器进行控制<sup>[17]</sup>。Davide Demartini 进行了相应的仿真研究<sup>[18]</sup>。虽然针对火箭的动力学建模略有差异, 但是PID控制器的设计思路是相似的, 仿真结果也有一定的参考性。

##### 4.2.1 垂直控制

仿真的初始高度为 5000m; 初始速度接近对于火箭模型仿真得到的稠密大气层中自由落体的平衡速度,  $v_f \approx -147.708\text{m/s}$ ; 设定的仿真时间为 100s; 使用PD控制。对于高度和剩余燃油的仿真结果如图2所示。对高度的仿真表明, 成功地降低了火箭的速度, 且在期望时间内着陆。对燃油的仿真表明, 在 52 秒左右燃料耗尽且火箭成功着陆。

##### 4.2.2 水平控制

通过对火箭所处经度和纬度的仿真, 来验证基于IIPGA算法的水平控制的有效性。仿真初始条件为:  $r_z^0 = 25800\text{m}$ ,  $v_z^0 = -147.7\text{m/s}$ ,  $v_x^0 = 10\text{m/s}$ ,  $7\text{m}$ ; 仿真时间为 100s。仿真结果如图3所示。仿真结果表明, 火箭成功到达了期望的着陆点。

##### 4.2.3 姿态控制

在姿态控制中, 采用了滑模控制(SMC), 不属于经典控制范畴, 所以此处省略。

## 5 现代控制理论

1960 年前后, 贝尔曼、庞特里亚金等人发展了最优控制理论, 卡尔曼系统地把状态空间法引入到控制论中, 这些构成了现代控制理论的基础。现代控制理论以状态空间法为基础, 以线性代数 and 矩阵论为工具, 以最优控制为核心, 以状态观测器、状态反馈、状态估计、状态预测等为手段, 对多变量、非线性、时变等复杂系统进行控制以系统的稳定性、鲁棒性、性能指标、控制器的设计和实现等为目标, 形成了现代控制理论。现代控制理论产生了线性控制理论、稳定性理论、最优控制理论、非线性控制理论、最优滤波理论和系统辨识等分支<sup>[19]</sup>。

在火箭的回收着陆阶段, 有鲁棒控制<sup>[20]</sup>,  $L_1$ 自适应控制<sup>[21]</sup>, 最优控制<sup>[22]</sup>等。

### 5.1 最优控制理论在火箭回收中的应用

2012 年, SpaceX 的工程师使用动力下降制导算法, 解决了最优软着陆问题<sup>[22]</sup>, 使得可重复使用运载火箭成为可能。以往人类只在月球和火星进行过软着陆, 最常用的方法是在探测器近地面的时候点燃反推发动机减速, 嫦娥五号登月就用了这种方式进行软着陆。由于月球重力低, 登月舱相对较轻, 反推发动机不需要长时间运行, 所以很容易做出推力巨大的发动机来实现这件事。但是可重复使用运载火箭回地球软着陆的时候, 反推的推力是有限的。一方面地球重力较大, 另一方面火箭本身除了主发动机以外不可能再安装额外的反推发动机, 因此降落期间的推重比一般在 1.2 到 1.5 之间, 火箭不能只在降落前十秒钟才开始进行反推, 而是要从高空开始就规划一条运动轨迹, 持续调整控制发动机的输出, 为此, 火箭控制器需要在全降落过程中非线性优化问题。

动力下降制导算法在满足诸如物理约束、推力条件以及速度和位置等约束条件下, 实现落点误差最小化以及燃料效率最高。然而由于这些控制约束, 动力下降制导软着陆的原始形式是一个非凸的优化问题, 这使得它的解决变得非常困难。为了求解的稳定性和实时性, SpaceX 的工程师建立了原始最优控制问题的凸松弛, 并且证明了松弛问题的最优解也是原始问题的最优解, 即实现了无损凸化。

#### 5.1.1 动力下降制导的建模

软着陆问题的目的是对推力  $T_c$  以及状态  $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  进行优化, 使得火箭从初状态  $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$  以

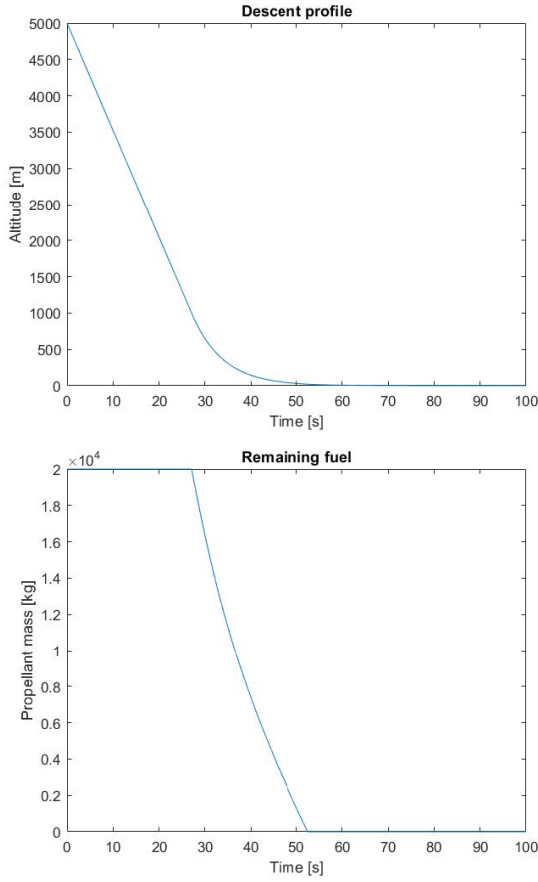


图 2 垂直控制仿真结果  
Fig. 2 Vertical control simulation result

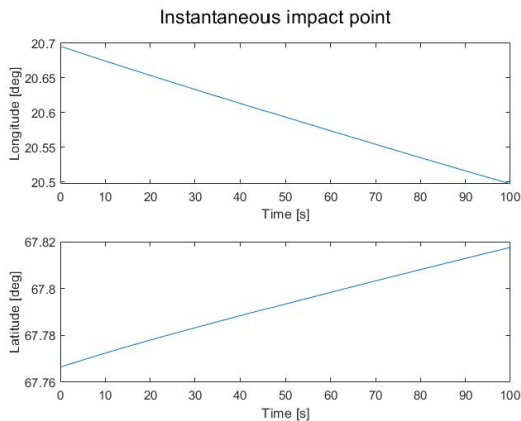


图 3 水平控制仿真结果  
Fig. 3 Horizontal control simulation result



燃料最优的路径在  $t_f$  时刻到达预定的目标点  $(0, \mathbf{q}), \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ 。并且假设地球自转速度恒定、忽略重力加速度的变化以及空气阻力。由于火箭的姿态机动可以快速完成, 所以把火箭建模为由推力矢量控制的质点, 将绕质心运动与质心运动解耦, 降低问题复杂度。因此, 火箭的动力学模型如下, 其中  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  是地球的自转速度,  $\alpha$  是燃料的常值消耗速率, 地面坐标系采用着陆点的“天东北”坐标系。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(\boldsymbol{\omega})\mathbf{x}(t) + B(\mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}_c(t)}{m(t)}) \\ \dot{m}(t) &= -\alpha \|\mathbf{T}_c(t)\| \\ \mathbf{x}(t) &= (\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \in \mathbb{R}^6 \\ A(\boldsymbol{\omega}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -S(\boldsymbol{\omega})^2 & -2S(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ S(\boldsymbol{\omega}) &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

### 5.1.2 优化问题的约束以及问题描述

约束分为两类: 凸约束和非凸约束。

凸约束包括下降过程中垂直引导的滑行斜率 (glide slope) 约束和速度上限约束。为了保证下降的稳定, 火箭下降过程中的倾斜角度会被锁定在一个具有最小斜率角  $\gamma_{gs}$  的如图 4 的圆锥里, 保证火箭在着陆前与目标点保持一个安全的距离。速度上限约束指火箭的速度不能超过音速, 超过音速之后, 控制难度会增加, 安全性也无法保证。

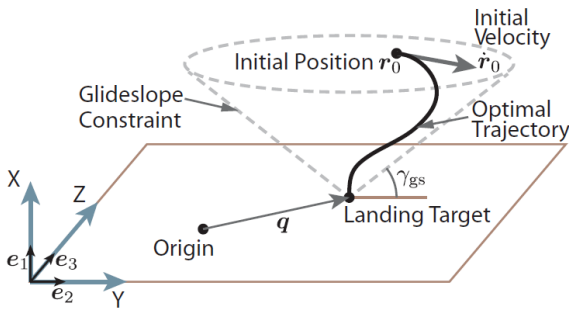


图 4 滑行斜率约束

Fig. 4 Glide slope constraint

而约束的非凸性主要来源于控制力的约束。对于推力大小  $\|\mathbf{T}_c\|$ , 由于发动机性能限制, 且一旦发动就不能关闭, 有一个最小推力限制; 火箭的推力方向和体轴方向  $\hat{\mathbf{n}}$  之间的夹角  $\theta$  也不能过

大。其中的推力上限约束是凸的, 推力下限约束是非凸的; 推力方向约束当  $\theta < \pi/2$  时是凸的, 当  $\theta > \pi/2$  时是非凸的。

$$\begin{cases} T_{\min} \leq \|\mathbf{T}_c(t)\| \leq T_{\max} \\ \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{T}_c(t) / \|\mathbf{T}_c(t)\| \geq \cos \theta \end{cases} \quad (14)$$

当然, 火箭的燃料消耗导致的质量变化也是非线性、非凸性的一个重要因素。

综上所述, 优化问题可以描述为非凸的最小落点误差问题和非凸的最小燃料消耗问题:

最小落点误差:

$$\min_{t_f, \mathbf{T}_c} \|\mathbf{E}\mathbf{r}(t_f) - \mathbf{q}\| \quad (15)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(\boldsymbol{\omega})\mathbf{x}(t) + B(\mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}_c(t)}{m(t)}) \\ \dot{m}(t) = -\alpha \|\mathbf{T}_c(t)\| \end{cases} \quad \forall t \in [0, t_f]$$

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbf{X}$$

$$0 < T_{\min} \leq \|\mathbf{T}_c(t)\| \leq T_{\max}$$

$$\hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{T}_c(t) / \|\mathbf{T}_c(t)\| \geq \cos \theta$$

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_0$$

$$m(0) = m_0, m(t_f) \geq m_0 - m_f \geq 0$$

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{r}(t_f) = 0, \dot{\mathbf{r}}(t_f) = \mathbf{0} \quad (16)$$

最小燃料消耗:

$$\min_{t_f, \mathbf{T}_c} \int_0^{t_f} \alpha \|\mathbf{T}_c(t)\| dt \quad (17)$$

$$\text{s.t. 式(16)给出的动力学和约束条件} \quad (18)$$

$$\|\mathbf{E}\mathbf{r}(t_f) - \mathbf{q}\| \leq \|\mathbf{d}_{p1}^* - \mathbf{q}\|$$

其中  $\mathbf{d}_{p1}^*$  是最小落点误差问题的最优解, 也就是能达到的离预定点最近的点;  $\mathbf{E}$  矩阵定义如下:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}$  是位置和速度的可行域, 由滑行斜率约束和速度上限约束定义, 是一个凸集。

动力下降制导软着陆的解是由求解以上两个优化问题得到的。首先求解最小落点误差问题, 使得飞行器最大限度地靠近预定的落点。这个问题有多个解, 所以由第二步求解最小燃料消耗问题, 得到总体的最优解。可以证明最小燃料消耗问题的可行域和最优解均为最小落点误差问题的可行域和最优解。

### 5.1.3 优化问题的松弛极其无损证明

对于质量变化引起的非凸的约束, Acikmese<sup>[23]</sup> 等人通过引入松弛变量  $\Gamma$  在质量变化微分方程和推力大小约束中替代  $\|T_c(t)\|$ , 并利用庞特里亚金极大值原理 (Pontryagin's maximum principle)<sup>[24]</sup> 证明了引入  $\Gamma$  变量能将原问题凸化, 更进一步地, 松弛问题的最优解满足原问题的约束且严格包含了原问题的最优解。紧接着又证明了凸化问题的最优解的存在性, 并通过换元, 给出了数值求解算法。

对于推力大小和方向引起的非凸约束, 同样引入了松弛变量  $\Gamma(t)$ , 将最小落点误差问题和最小燃料消耗问题凸化。此外还用  $\hat{\omega}$  代替  $\omega$ , 对最小燃料消耗问题进行松弛, 原问题的最优解可以通过求解松弛问题得到。

$$\hat{\omega} := \begin{cases} \omega & \text{if } S(\omega) \neq \mathbf{0}, N^T S(\omega)^2 \neq 0 \\ \omega + \epsilon \hat{n}^\perp & \text{if } S(\omega) \hat{n} = \mathbf{0} \\ \omega + \epsilon \hat{n} & \text{if } S(\omega) \neq \mathbf{0}, N^T S(\omega)^2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

其中  $\hat{n}$  是火箭体轴方向单位向量,  $\hat{n}^\perp$  是垂直于  $\hat{n}$  的单位向量,  $N \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  的列向量张成  $\hat{n}^\perp$  的零空间,  $\epsilon$  是任意小的实数。

凸化结果在几何上可以解释为通过确保哈密顿函数在松弛问题的可行域中的极值点取得最大值, 实现了无损的凸化。于是我们可以利用  $\hat{\omega}$  求解凸化的最小落点误差问题, 得到凸化问题的最优落点位置集合  $d_{p3}^*$ , 再利用  $\hat{\omega}$  和  $d_{p3}^*$  求解凸化的最小燃料消耗问题。

### 5.1.4 算法仿真以及改进

在  $r_0 = (2.4, 3.4, 0)km$ ,  $\dot{r}_0 = (-40, 45, 0)m/s$ ,  $\gamma_{gs} = 30^\circ$ ,  $\theta = 120^\circ$ ,  $v_{max} = 90m/s$ , 限定推力在推大推力 (节流阀全开) 的 20%–80% 的初始条件和限制下, 得到了如图 5 的结果。表明了推力矢量的变化在原始问题的可行域内, 并且满足凸化条件, 得到了动力下降制导软着陆的最优解。

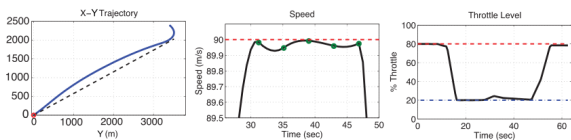


图 5 无损凸优化动力下降制导的仿真结果

Fig. 5 Lossless convexification powered descent landing simulation

若直接进行凸优化, 当动力学系统设计复杂的非线性气动力、状态变量维数高是, 可能会存在难以收敛、计算量大的问题, 难以满足在线制导的要求。吴杰<sup>[25]</sup> 等人提出了一种分段序列凸优化和 LQR 的轨迹跟踪方法, 同时兼顾凸优化的优点和计算速度。将速度跟踪按照标称轨迹进行分段, 进行凸优化时, 只需要满足当前阶段的速度跟踪条件, 而不必满足全程的速度跟踪。

## 6 智能控制

随着人工智能技术, 特别是深度神经网络的飞速发展, 我们也在尝试将人工智能应用在强不确定性、欠驱动、多约束, 要求自主性、鲁棒性、实施决策的控制领域。成林<sup>[26]</sup> 等人以提升飞行器控制自主性和智能化水平为主题, 总结了深度学习应用在动力学、最优控制和任务设计中的研究思路和总体实现方法。

在动力学的应用中, 机器学习方法可以用于拟合动力学模型中的确定且已知的部分以提升计算效率, 也可以用来学习动力学中的未知部分, 用计算机领域所推崇的 model-free 方法来改进优化控制领域最基础的 model-based 方法。依托于现代控制理论发展起来的 model-based 方法根据被控对象的动力学特点, 进行精确的控制。为了在线观测理想模型和实际模型的偏差, 并进行实时补偿, 可以引入一个神经网络, 根据状态微分的变化规律预测具体的控制指令, 综合 PI 控制器给出的控制指令, 实现稳定的控制。

在最优控制中, 数值求解方法效率高、收敛性好, 并且有严格的数学证明, 是目前最流行的最优控制求解方法, 但是由于实时性以及稳定性的不足, 主要应用在离线标称轨迹的设计和在线的弹道紧急重构中。可以使用针对马尔可夫决策问题的强化学习方法<sup>[27]</sup>, 通过与被控对象的不断交互和迭代学习, 生成可供全局决策的最优策略, 可解决复杂大维度的决策问题。也可以通过收集大量离线的最优控制数值求解方法得到的飞控指令, 离线训练深度神经网络, 应用于在线的飞行控制中。但这种方法偏离了 model-based 的设计方法, 无法很好在线利用动力学模型。若将智能方法得到的结果作为最优控制求解的初值, 则可以兼顾智能方法的实时性和最优控制的稳定性。

在任务设计中, 机器学习基于历史经验数据, 能够近似拟合状态和总体性能之间的非线性函数关系, 进行任务的评估。



目前深度学习仍然是一个黑箱, 缺乏严谨的数学证明, 无法保证结果的稳定性和鲁棒性, 在实际的控制中工程中, 仅仅在感知层面有较为广泛的应用, 在控制层面缺乏实际的应用。而且程林老师也指出“围绕飞行控制设计任务, 纯人工智能算法忽视被控对象自身动力学和控制规律、信奉纯数据驱动的懒汉策略也注定是低效的、无用的”。但是深度学习的存储、记忆、预训练的框架和模式值得我们思考和借鉴, 如何将经典的控制和新兴的人工智能方法相结合是飞控领域的重要研究方向。其中的关键在于如何通过一系列的建模和简化手段, 将飞行控制问题转化为人工智能善于解决的函数拟合问题; 由于动力学模型的强非线性, 使得智能方法在数据集外的泛化能力较差, 如何构建更好的数据集, 提高数据集的覆盖率, 也是智能控制的重要研究方向。

### 6.1 基于强化学习的可重复使用运载火箭算法设计

基于强化学习的控制算法设计可以在不使用传统的经典控制理论和现代控制理论的情况下, 基于模型实现火箭的垂直着陆。项目<sup>[28]</sup>将火箭建模为一个二维平面内的圆柱刚体, 空气阻力与推力成正比, 发动机提供  $\{0.1g, 1.0g, 2.0g\}$  三种推力, 限制火箭喷口角度  $\phi$  的最大转动速度  $\dot{\phi}$  为  $30^\circ/s$ 。这是一个极其简化的模型, 但可以证明强化学习方法在某些问题上的可行性。

状态量  $\mathbf{s} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{v}^T, \theta, \dot{\theta}, \phi]^T \in \mathbb{R}^7$ , 由位置、速度、姿态角 (体轴与地垂线的夹角)、姿态角速度和喷嘴转角组成。

动作量  $\mathbf{a} = [\mathbf{f}, \dot{\phi}]^T \in \mathbb{R}^3$ , 由推力矢量和喷嘴转角速度组成。

状态转移按照以下方程进行:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{f} + \mathbf{g} - \rho \mathbf{v} \\ \mathbf{x} &\leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{v} \Delta t + 0.5 \mathbf{a} \Delta t^2 \\ \ddot{\theta} &= \frac{M}{I} \\ \theta &\leftarrow \theta + \dot{\theta} \Delta t + 0.5 \ddot{\theta} \Delta t^2 \end{aligned} \quad (20)$$

火箭着陆的奖励函数包含三个部分: 火箭当前位置与目标点的距离尽可能小; 火箭的姿态尽可能垂直  $\theta = 0$ ; 火箭的着陆速度应在安全速度内且尽可能小。

仿真的初值设置为:  $\mathbf{x}_0 = [500m, 0], \mathbf{v}_0 = [-50m/s, 0], \theta_0 = 90^\circ$ , 即初始姿态水平。在 12000 轮的仿真之后, 火箭有很大概率着陆成功, 如图

6所示。

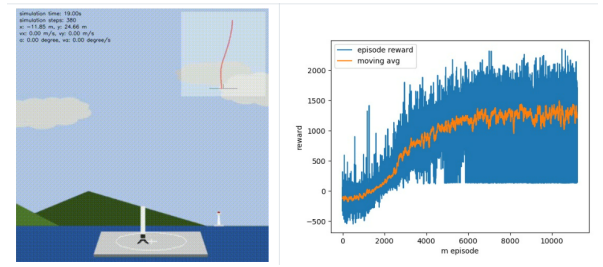


图 6 强化学习着陆仿真

Fig. 6 Reinforcement learning landing simulation

### 6.2 基于强化学习的可重复使用运载火箭着陆制导

何林坤<sup>[29]</sup>等人使用强化学习进行火箭着陆的制导, 通过分阶段的奖励函数设计使得燃料最优, 设计神经网络形式的制导策略, 使用强化学习算法进行训练, 通过不基于模型的交互采样优化网络参数, 得到具有泛化能力的制导策略。

#### 6.2.1 马尔可夫决策过程

状态量  $\mathbf{s} = [\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T, m]^T$  是由火箭的位置、速度、质量组成的 7 维矢量。

动作量  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T = [\|T\|, \alpha, \beta]$  是由推力矢量和推力方向组成的 4 维矢量。其中  $\alpha$  是推力矢量在  $xy$  平面内与  $x$  轴的夹角,  $\beta$  是推力矢量与  $z$  轴的夹角。实际推力  $\mathbf{T} = [a_1 \cos a_2 \sin a_3, a_1 \sin a_2 \sin a_3, a_1 \cos a_3]^T$

离散化的状态转移函数和确定性状态转移概率为:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{t+1} &= F(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \\ P(\mathbf{s}_{t+1} | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

分为四个阶段设计奖励函数:

1) 位置约束奖励阶段: 仅考虑当前位置与目标位置的误差,  $R_1(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = -\|\mathbf{r}\|$ ;

2) 位置、速度约束奖励阶段, 考虑位置-速度空间内的奖励函数, 进入奖励球面就产生常值奖励  $R_2(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = k_i l_{\text{first}} [\|(\mathbf{r}, \mathbf{v})\| < \|(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)\|]$ , 其中  $l_{\text{first}}(x)$  在  $x$  首次为真时取 1, 其余取 0;

3) 位置、速度、燃料消耗约束, 增加对燃料消耗的考虑, 由于燃料消耗与推力模值成正比, 所以惩罚推力模值,  $R_3(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = R_2(\mathbf{s}, \mathbf{a}) - \|T\|$ ;

4) 精确位置、速度、燃料消耗约束, 在制导末端, 为了提高制导精度, 增加 2) 中的奖励球面在零点附近的密度。

## 6.2.2 仿真结果

图7使强化学习和凸优化着陆制导的对比,能够实现火箭着陆的终端精度,且燃料的消耗与凸优化得到的最有轨迹的燃料消耗偏差小于3%,有一定应用价值。

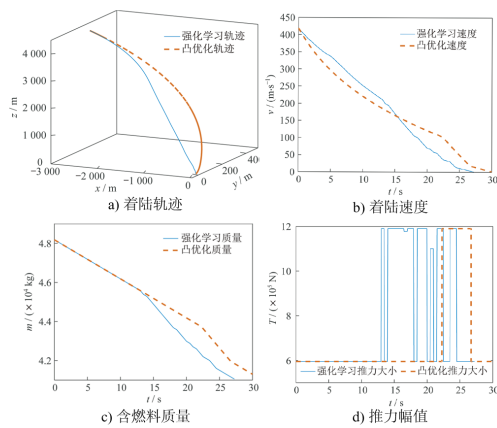


图7 强化学习制导着陆仿真

Fig. 7 Reinforcement learning landing guidance simulation

## 7 总结

可重复使用运载火箭的控制是一个复杂的新系统,其非线性、时变、多输入多输出特性以及多样化的控制目标对控制系统的设计提出了巨大挑战。本文从经典控制理论到现代控制理论再到智能控制,综合分析了各种控制算法在可重复使用运载火箭回收控制中的应用。

经典控制理论中的PID控制算法虽然简单易用,在工业中得到广泛应用,但对于非线性、时变、多输入多输出系统的控制效果有限。现代控制理论中的最优控制算法能够更好地处理复杂系统,但需要较为精确的模型和参数,且计算量大,收敛性无法保证。智能控制算法,如强化学习,能够快速处理复杂系统,但缺乏严格的数学证明,结果的稳定性和鲁棒性有待验证。

因此,未来飞行控制领域的重要研究方向之一是在经典控制、现代控制和智能控制之间寻找平衡,结合各种算法的优势,以期在可重复使用运载火箭的控制中取得更好的效果。这将需要进一步研究控制算法的融合和优化,以应对火箭回收过程中复杂多变的环境和控制要求,提高控制系统的性能和稳定性,从而推动可重复使用运载火箭技术的发展。

## 参考文献 (References)

- [1] <https://web.archive.org/web/20200115131159/https://www.spacex.com/reusability-key-making-human-life-multi-planetary>.
- [2] 樊伟, 王林, 龙雪丹, 等. 2022 年国外重复使用运载器发展综述 [J]. 中国航天, 2023(2):25-30.
- [3] Paolo Baiocco. Overview of reusable space systems with a look to technology aspects. *Acta Astronautica*, 189:10–25, 2021.
- [4] <https://sat.huijiwiki.com/wiki/长征八号>.
- [5] <https://sat.huijiwiki.com/wiki/长征九号>.
- [6] 重复使用运载器制导与控制技术综述. 航空学报, 2021.
- [7] Nebylov A, Nebylov V. Reusable space planes challenges and control problems[J]. IFAC-PapersOnLine, 2016, 49(17): 480-485.
- [8] Botelho A, Martinez M, Recupero C, et al. Design of the landing guidance for the retro-propulsive vertical landing of a reusable rocket stage[J]. CEAS Space Journal, 2022, 14(3): 551-564.
- [9] 陈海朋, 余薛浩, 李聪, 等. 垂直起降运载火箭着陆段抗漂移控制算法 [J]. 飞控与探测, 2023, 6(04):71-78.
- [10] 钱杏芳, 林瑞雄, 赵亚男. 导弹飞行力学 [M]. 北京理工大学出版社, 2013.
- [11] Gallaher M, Coughlin D, Krupp D. A guidance and control assessment of three vertical landing options for RLV[C]//Guidance, Navigation, and Control Conference. 1995: 3702.
- [12] Ki-Wook Jung, Chang-Hun Lee, Junseong Lee, Sunghyuck Im, Keejoo Lee, Marco Sagliano, and David Seelbinder. An instantaneous impact point guidance for rocket with aerodynamics control. In *2021 21st International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, pages 1489–1495, 2021.
- [13] 伊鑫, 潘豪, 黄聪, 等. 垂直回收运载火箭高精度姿态控制技术 [J]. 深空探测学报 (中英文), 2022, 9(5): 492-497.
- [14] 黄喜元, 孙光, 吴俊辉. 重复使用运载器再入动力学建模研究 [J]. 导弹与航天运载技术, 2017 (5): 8-12.
- [15] 林平余, 李昭堂. 可重复使用运载器再入数学建模. 34(3):23–31, 2014.
- [16] ZIEGLER J G, NICHOLS N B. Optimum settings for automatic controllers[J]. Transaction of ASME, 1942, 64:759-768.
- [17] Dokumaci K, Aydemir M T, Salamci M U. Modeling, PID control and simulation of a rocket launcher system[C]//2014 16th International Power Electronics and Motion Control Conference and Exposition. IEEE, 2014: 1283-1288.
- [18] Demartini D. Design of the control system for a powered landing maneuver of a rocket[J]. 2023.
- [19] 程林. 现代控制理论与方法课件.
- [20] A robust control approach for rocket landing. *university of edin-burgh*, 2017.
- [21] 苏秀健. 基于  $L_1$  自适应方法的火箭姿态控制 [D]. 大连理工大学, 2020. DOI:10.26991/d.cnki.gdllu.2020.003123.
- [22] Behcet Acikmese, John M. Carson, and Lars Blackmore. Lossless convexification of nonconvex control bound and pointing con-

- straints of the soft landing optimal control problem. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(6):2104–2113, 2013.
- [23] Behcet Acikmese and Scott R. Ploen. Convex programming approach to powered descent guidance for mars landing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(5):1353–1366, 2007.
- [24] Berkovitz, L. D., *Optimal Control Theory*, Springer - Verlag, Berlin, 1975.
- [25] 吴杰, 张成, 李淼, 等. 基于凸优化和 LQR 的火箭返回轨迹跟踪制导 [J]. 北京航空航天大学学报, 2022, 48(11): 2270-2280. doi: 10.13700/j.bh.1001-5965.2021.0084.
- [26] 程林, 蒋方华, 李俊峰. 深度学习在飞行器动力学与控制中的应用研究综述 [J]. 力学与实践, 2020, 42(3): 267-276. doi: 10.6052/1000-0879-20-077.
- [27] X. Xu, Y. Chen, and C. Bai. Deep reinforcement learning-based accurate control of planetary soft landing. *Sensors (Basel)*, 21(23), 2021.
- [28] Zhengxia Zou. Rocket-recycling with reinforcement learning. <https://github.com/jiupinjia/rocket-recycling>, 2021.
- [29] 何林坤, 张冉, 龚庆海. 基于强化学习的可回收运载火箭着陆制导 [J]. 空天防御, 2021. DOI:10.3969/j.issn.2096-4641.2021.03.005.

## Research on the Control of Reusable Rockets

HUANG Yixiao<sup>1</sup>

(1. School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191, China;)

**Abstract:** Research into reusable rocket technology is currently leading advances in aerospace technology, with control technology becoming a key part of the research. In order to effectively address control issues during the rocket recovery process, this study first established a detailed rocket dynamics model and conducted an analysis of the control objectives during vertical recovery. By refining the control objectives into vertical, horizontal, and attitude control channels, the design of control strategies was simplified. This paper thoroughly reviews the application of classical control theory, modern control theory, and intelligent control technology in the control of reusable rocket recovery, and compares the advantages and limitations of various methods in practical applications. Based on existing research results, the article selected three control algorithms with broad application prospects for case studies: PID control, optimal control, and reinforcement learning control. Each method was tested through the establishment of corresponding models and simulation calculations to verify their effectiveness. These simulation experiments not only demonstrated the specific applications of each algorithm in rocket vertical recovery control but also provided reliable data support and theoretical basis for future rocket design. These achievements indicate that in future space missions, efficient control of reusable technology will greatly improve mission safety and cost-effectiveness.

**Key words:** Reusable rockets; classical control theory; Modern control theory; intelligent control