Plan du cours

- Calcul tensoriel
- Cinématique des milieux continus
  - Généralités
  - Description de Lagrange
  - Description d'Euler
- Efforts dans les milieux continus
  - Représentations des efforts extérieurs
  - Représentations des efforts intérieurs
- Lois de conservations - Equations fondamentales

Chapitre II

Cinématique des milieux continus

Cinématique des milieux continus

- Généralités
  - Concept de milieu continu
  - Notion de configurations
- Description Lagrangienne
  - Description du mouvement
  - Description locale du mouvement
  - Mesure des déformations
  - Cas des petites perturbations
  - Conditions d'intégrabilité du tenseur des déformations
  - Intégration du tenseur des déformations - Conditions aux bords
- Description Eulérienne
  - Champ eulérien des vitesses ; dérivée particulaire
  - Gradient eulérien des vitesses
  - Tenseur taux de déformations
  - Cas des petites perturbations

Généralités :

Le concept de milieu continu

Le milieu continu :

une modélisation macroscopique d'une réalité microscopique

La physique des milieux continus découle d'observations expérimentales obtenues à une **échelle macroscopique**

Pour modéliser ces observations *(ou les traduire mathématiquement)*, on assimile **la matière**, qui est constituée d'éléments discrets de faibles dimensions:

- grains de mono-cristaux pour les métaux –μm–
- graviers pour les bétons –mm–...

à un **milieu continu** et ce, à une échelle macroscopique

Généralités :

Le concept de milieu continu

Sur le plan mathématique:

L'espace physique est représenté par l'espace euclidien $\mathcal{E}$ et un **milieu matériel** occupe un domaine volumique Ω de $\mathcal{E}$ si, $\forall\ t$ et en chaque point M de Ω, on peut définir des **grandeurs physiques locales** relatives à ce milieu matériel.

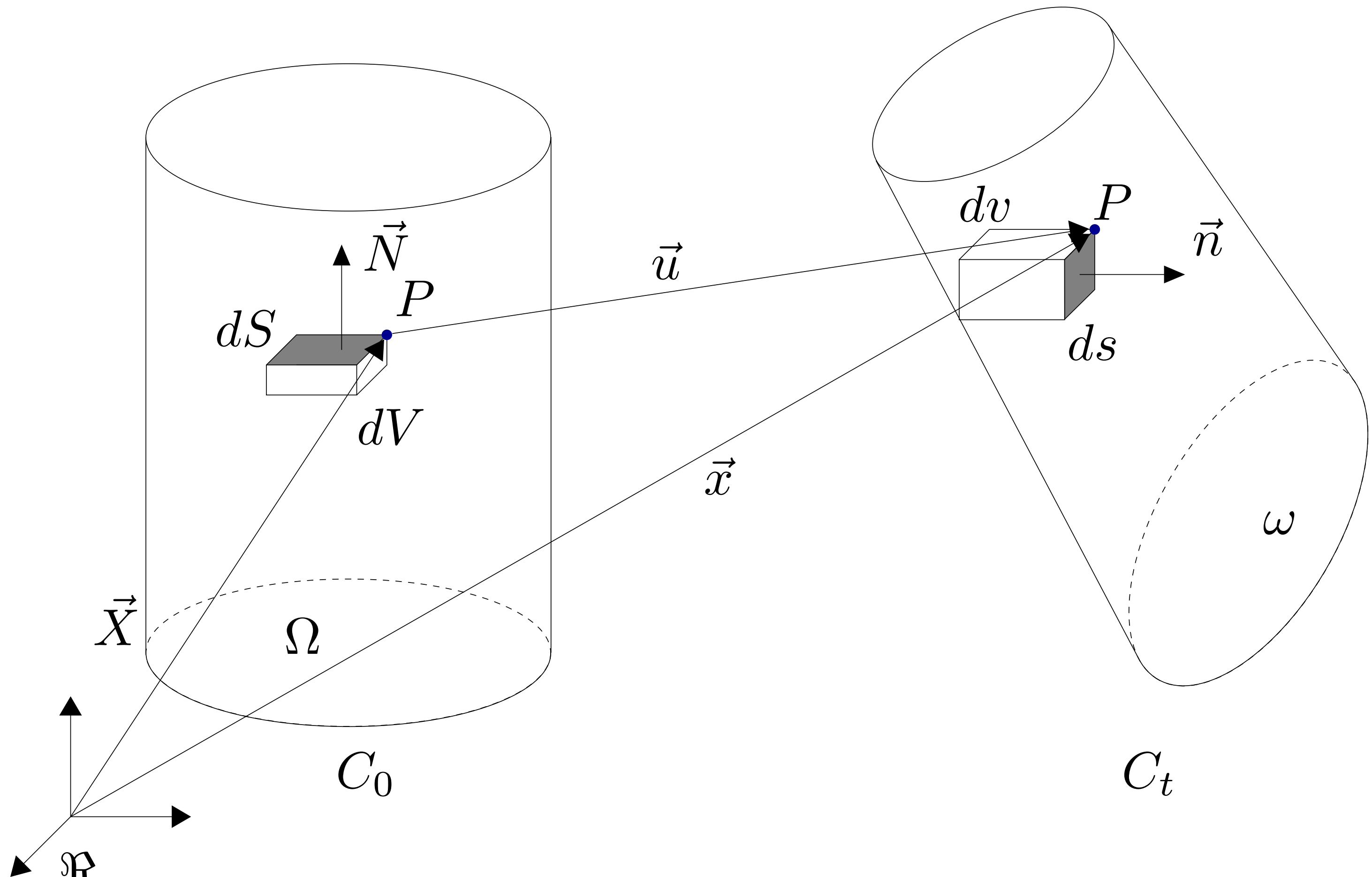
Ces grandeurs peuvent être représentées par :

- **des scalaires (masse volumique, température...)**
- **des vecteurs (vitesse, accélération...)**
- **des tenseurs (déformations, contraintes...)**

Ω est continu (*i.e.* Ω milieu continu) si toutes ces grandeurs physiques locales sont continuement différentiables presque partout *(au sens mathématique du terme).*

Généralités :

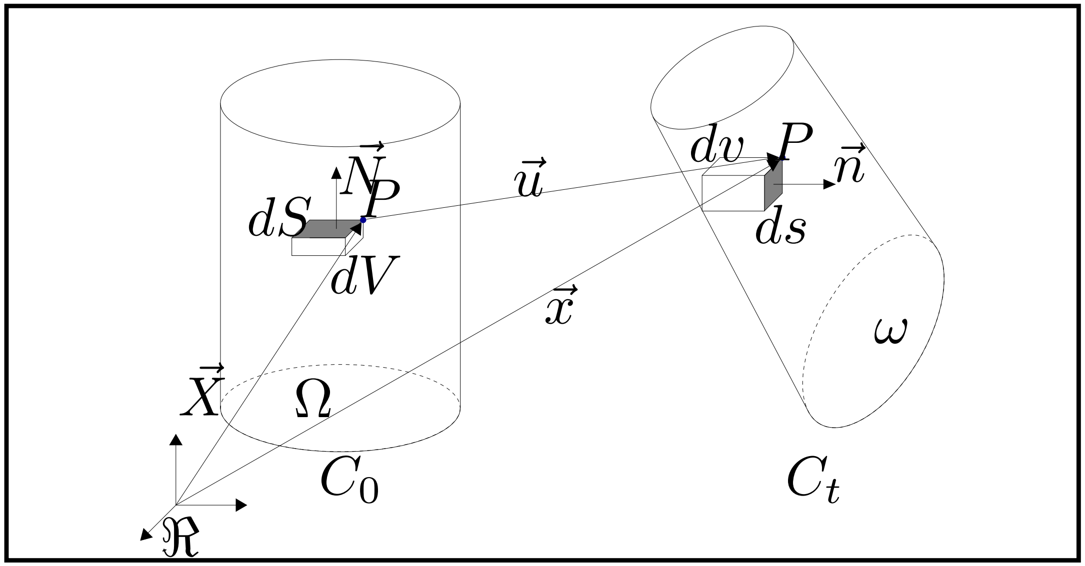
Notion de configurations



Système de configurations.

Généralités :

Notion de configurations

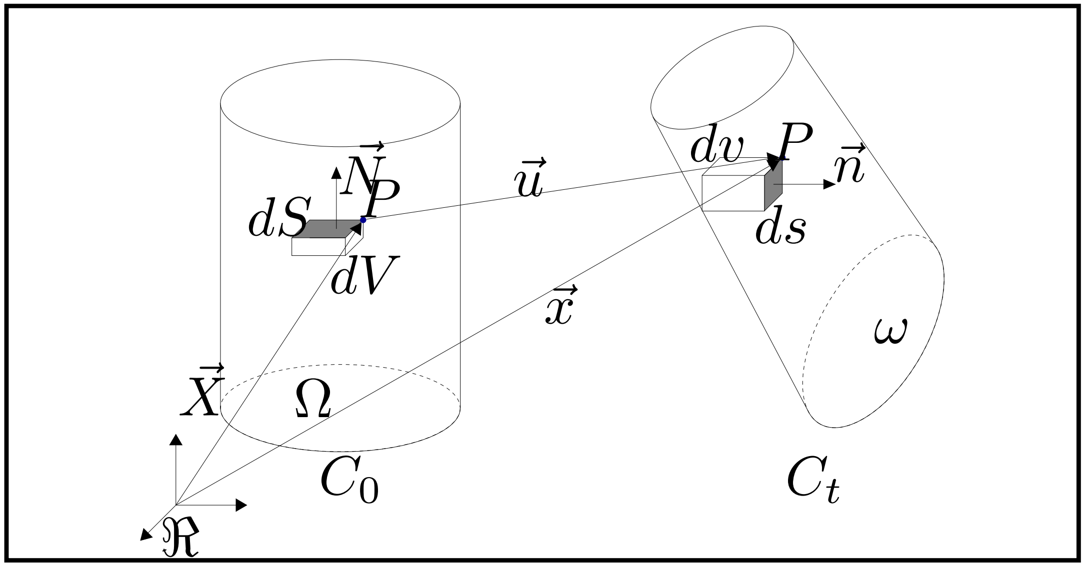


L'ensemble des **particules ou points matériels** (P) constituent un système déformable qui occupe, à chaque instant t, un ensemble de positions dans l'espace physique assimilé à $\mathcal{E}$

Cet ensemble est appelé **Configuration du système à l'instant t : C_t**

Généralités :

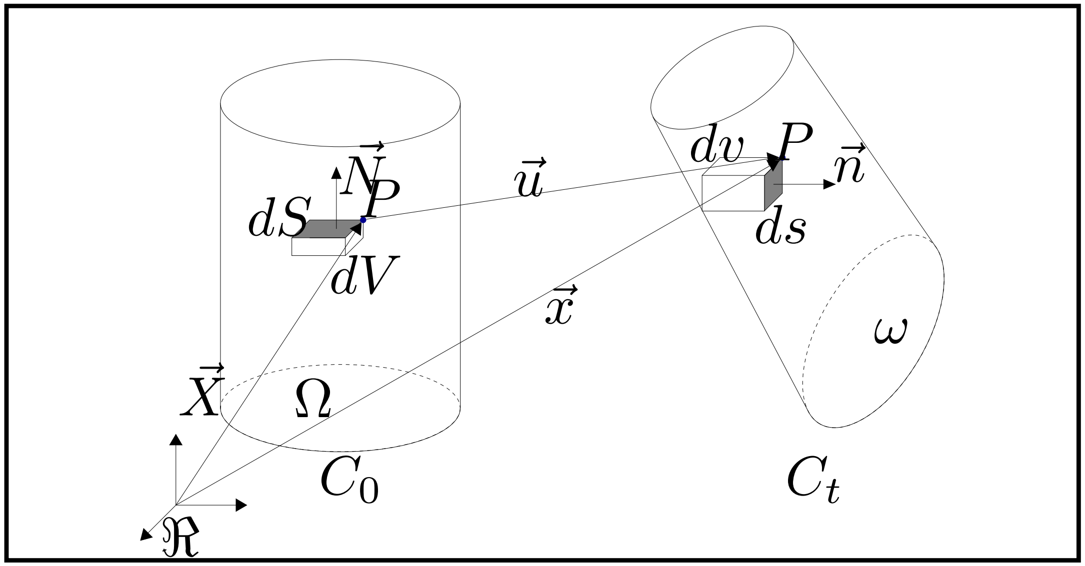
Notion de configurations



- La configuration actuelle correspond à l'instant t. Une particule occupe dans cette configuration la position $\vec{x}$, le système occupe le domaine ω de frontière $\partial\omega$
- La configuration initiale correspond à l'état initial de notre ensemble de particule. Une particule occupe la position $\vec{X}$, le système occupe le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$

Généralités :

Notion de configurations



Afin de résoudre les problèmes de m.m.c., on doit choisir une configuration de référence :

- $C_0 \Rightarrow$ description Lagrangienne (mécanique du solide)
- $C_t \Rightarrow$ description Eulérienne (mécanique des fluides)

Description Lagrangienne :

Description du mouvement

- Champ de positions

$$\vec{x}\left|\begin{array}{ccc}\Omega & \rightarrow & \omega \\ \vec{X} & \mapsto & \vec{x}\left(\vec{X},t\right)\end{array}\right.$$

- Champ des déplacements

$$\vec{u}\left|\begin{array}{ccc}\Omega & \rightarrow & \omega \\ \vec{X} & \mapsto & \vec{u}\left(\vec{X},t\right)=\vec{x}\left(\vec{X},t\right)-\vec{X}\end{array}\right.$$

Description Lagrangienne :

Description locale du mouvement

Soient P_1 et P_2 deux particules occupant les positions:

- dans C_0: $\vec{X}$ et $\vec{X} + d\vec{X}$,
- dans C_t: $\vec{x}\left(\vec{X}, t\right)$ et $\vec{x}\left(\vec{X} + d\vec{X}, t\right)$.

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \vec{x}\left(\vec{X} + d\vec{X}, t\right) - \vec{x}\left(\vec{X}, t\right) \\ &= \vec{x}\left(\vec{X}, t\right) + \frac{\partial \bar{\bar{x}}}{\partial X} \cdot d\vec{X} + O\left(|dX|^2\right) - \vec{x}\left(\vec{X}, t\right) \\ &= \frac{\partial \bar{\bar{x}}}{\partial X} \cdot d\vec{X} + O\left(|dX|^2\right) \end{aligned}$$

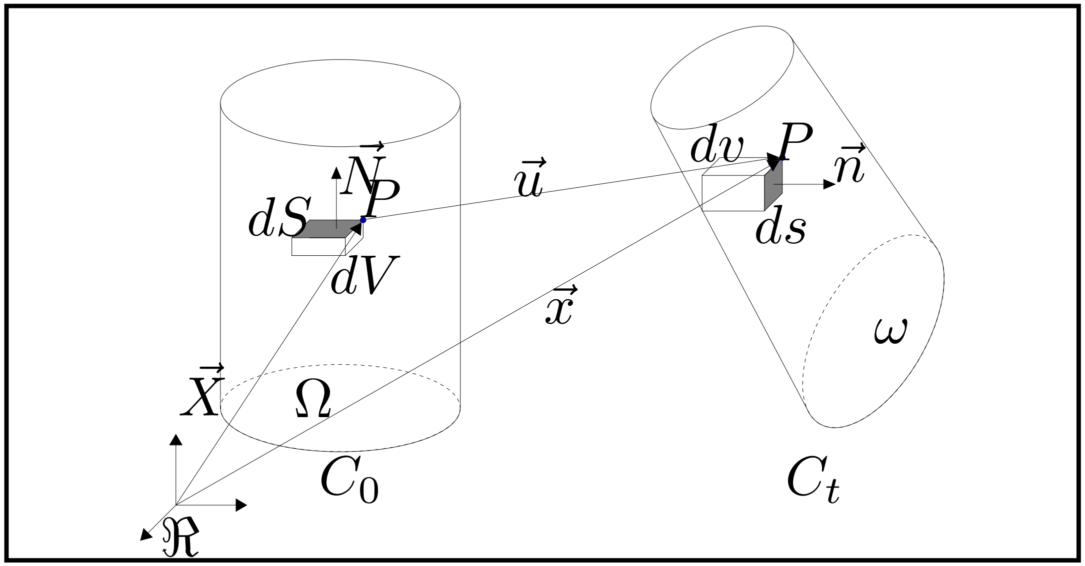
$$d\vec{x} = \bar{\bar{F}}\left(\vec{X}, t\right) d\vec{X}$$

$$\bar{\bar{F}}\left(\vec{X}, t\right) = \frac{\partial \bar{\bar{x}}}{\partial X}\left(\vec{X}, t\right) \quad ; \quad F_{ij}\left(\vec{X}, t\right) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\left(\vec{X}, t\right)$$

$\bar{\bar{F}}$ est appelé **tenseur gradient de la transformation**. Il décrit la transformation locale au voisinage d'un point.

Description Lagrangienne :

Description locale du mouvement

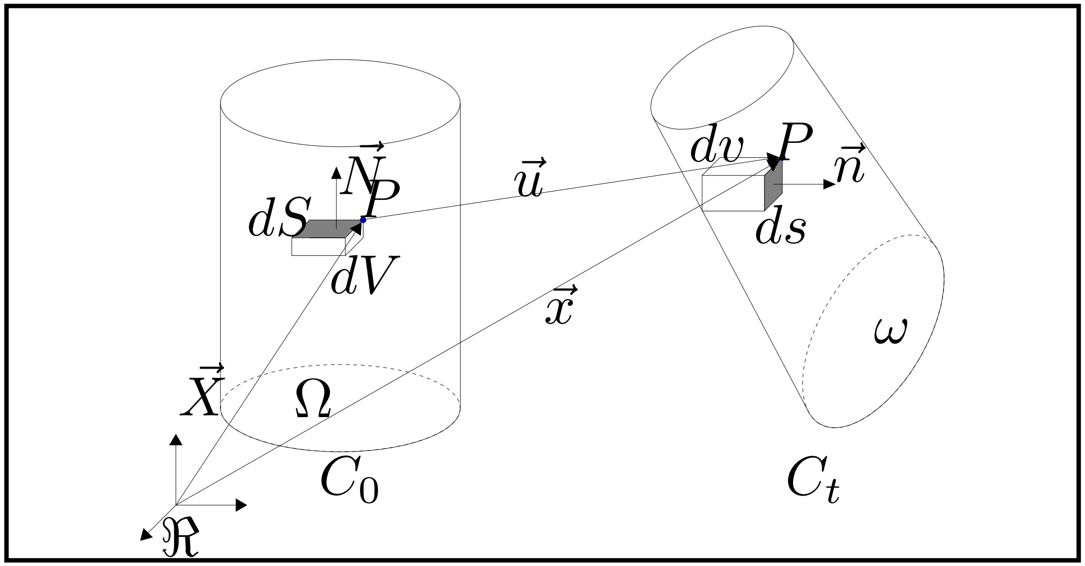


$\bar{\bar{F}}$ permet de réaliser les transformations locales:

- Vecteur : $d\vec{X} \longrightarrow d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}$
- Elément de volume $dV \longrightarrow dv = \det \bar{\bar{F}} dV$
- Elément de surface $\vec{N}dS \longrightarrow \vec{n}ds = \det F\bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}dS$

Description Lagrangienne :

Description locale du mouvement



Remarque 1 :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{\nabla}}\vec{u} + \bar{\bar{1}}$$

Remarque 2 :

Un mouvement est dit incompressible si et ssi $dv = dV$, cad:

$$\det \bar{\bar{F}} = 1$$

Description Lagrangienne :

Mesure des déformations

Le tenseur gradient $\bar{\bar{F}}$ rend compte à la fois des déformations, des rotations rigides et des translations rigides.

Description Lagrangienne :

Mesure des déformations

Le tenseur gradient $\bar{\bar{F}}$ rend compte à la fois des déformations, des rotations rigides et des translations rigides.

Une mesure des déformations doit rendre compte des **variations de longueurs et d'angles**, soit aussi des **variations du produit scalaire**

Description Lagrangienne :

Mesure des déformations

Le tenseur gradient $\bar{\bar{F}}$ rend compte à la fois des déformations, des rotations rigides et des translations rigides.
Une mesure des déformations doit rendre compte des **variations de longueurs et d'angles**, soit aussi des **variations du produit scalaire**

Soient P , P_1 et P_2 trois particules occupant les positions:

- dans C_0: $\vec{X}$, $\vec{X}+d\vec{X}$ et $\vec{X}+d\vec{Y}$,
- dans C_t: $\vec{x}$, $\vec{x}+d\vec{x}$ et $\vec{x}+d\vec{y}$.

La variation du produit scalaire au voisinage de P (ou $\vec{X}$), s'écrit:

$$\begin{aligned} d\vec{x}.d\vec{y} - d\vec{X}.d\vec{Y} &= \left(\bar{\bar{F}}.d\vec{X}\right).\left(\bar{\bar{F}}.d\vec{Y}\right) - d\vec{X}.d\vec{Y} \\ &= d\vec{X}.\left(\bar{\bar{F}}^T.\bar{\bar{F}} - \bar{\bar{1}}\right).d\vec{Y} \\ &= 2d\vec{X}.\bar{\bar{E}}.d\vec{Y} \end{aligned}$$

Description Lagrangienne :

Mesure des déformations

$\bar{\bar{E}}\left(\vec{X},t\right)$ est appelé **tenseur des déformations de Green-Lagrange**. Il décrit les variations locales des longueurs et des angles au voisinage de la particule $\vec{X}$.

$$\bar{\bar{E}}\left(\vec{X},t\right)=\frac{1}{2}\left(\bar{\bar{F}}^{T}\left(\vec{X},t\right).\bar{\bar{F}}\left(\vec{X},t\right)-\bar{\bar{1}}\right)$$

Soit aussi, en introduisant le vecteur déplacement :

$$\bar{\bar{E}}\left(\vec{X},t\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\bar{\bar{\partial u}}}{\partial X}\left(\vec{X},t\right)+\frac{\bar{\bar{\partial u}}}{\partial X}^{T}\left(\vec{X},t\right)+\frac{\bar{\bar{\partial u}}}{\partial X}^{T}\left(\vec{X},t\right)\cdot\frac{\bar{\bar{\partial u}}}{\partial X}\left(\vec{X},t\right)\right]$$

dont les composantes dans un repère cartésien sont:

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}+\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right]$$

Description Lagrangienne :

Cas des petites perturbations

L'hypothèse des petites perturbations (HPP), s'applique quand:

- les déplacements sont très petits,

$$\left\| \vec{u}\left(\vec{X},t\right) \right\| \ll 1$$

- et leurs gradients restent très petits,

$$\left\| \frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial X}\left(\vec{X},t\right) \right\| \ll 1$$

Si bien que :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}\left(\vec{X},t\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial X}\left(\vec{X},t\right) + \frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial X}^{T}\left(\vec{X},t\right)\right]$$

Description Lagrangienne :

Cas des petites perturbations

$\bar{\bar{\varepsilon}}\left(\vec{X},t\right)$ est appelé **tenseur des déformations linéarisé**, au voisinage de la particule $\vec{X}$.

Et comme le tenseur de Green-Lagrange $\bar{\bar{E}}$, il est symétrique.

Ses composantes dans un repère cartésien sont:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right]$$

Remarque :

Le mouvement est **incompressible** sous l'hypothèse des petites perturbations, $\Leftrightarrow$ Tr$\bar{\bar{\varepsilon}} =$ div$\vec{u} = 0$

Description Lagrangienne :

Cas des petites perturbations

Le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\bar{\varepsilon}}$ représente **la partie symétrique** de $\bar{\bar{\nabla}}\vec{u}$.

Sa **partie antisymétrique** est donnée par:

$$\bar{\bar{w}}\left(\vec{X},t\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\bar{\bar{\partial}}u}{\partial X}\left(\vec{X},t\right) - \frac{\bar{\bar{\partial}}u}{\partial X}^{T}\left(\vec{X},t\right)\right]$$

Remarque :

Un mouvement est dit **sans rotation** si $\bar{\bar{w}} = \bar{\bar{0}}$ ou encore si $\vec{\text{rot}}\,\vec{u} = \vec{0}$ (car $\vec{\text{rot}}\,\vec{u}$ est le **vecteur adjoint** du tenseur antisymétrique $\bar{\bar{w}}$).

Description Lagrangienne :

Conditions d'intégrabilité des déformations (en HPP)

On a vu que pour tout champ de déplacement $\vec{u}\,(\cdot, t)$, on peut faire correspondre un champ de tenseurs de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}\,(\cdot, t)$.

Inversement, à quelle condition sur $\bar{\bar{\varepsilon}}\,(\cdot, t)$ est-il possible de trouver un champ de déplacement ?

- Pour intégrer $du_i = (w_{ij} + \varepsilon_{ij})\, dX_j$,
- il faut pouvoir intégrer

$$dw_{ij} = (\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})\, dX_k$$

- qui doit être une différentielle exacte:

$$w_{ij,kl} = w_{ij,lk}$$

Description Lagrangienne :

Conditions d'intégrabilité des déformations (en HPP)

D'où la **Condition d'intégrabilité du tenseur des déformations** :

Etant donné un champ de tenseurs symétriques $\bar{\bar{\varepsilon}}\,(\cdot,t)$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un champ de déplacement $\vec{u}\,(\cdot,t)$ tel que:

$$\bar{\bar{\varepsilon}}\left(\vec{X},t\right) = \frac{1}{2}\left[\bar{\bar{\nabla}}\vec{u}\left(\vec{X},t\right) + \bar{\bar{\nabla}}^T\vec{u}\left(\vec{X},t\right)\right] \qquad \forall\vec{X}\in\Omega$$

est que l'ont ait :

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} = \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il}$$

Description Lagrangienne :

Intégration d'un champ de déformations

L'intégration d'un champ de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}(\cdot, t)$ s'effectue selon les étapes suivantes:

- Vérifier les conditions d'intégrabilité de $\bar{\bar{\varepsilon}}$,
- Déterminer les composantes du tenseur rotation $\bar{\bar{w}}$ en intégrant:

$$dw_{ij} = (\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})\, dX_k$$

- Déterminer les composantes du déplacement $\vec{u}$ en intégrant:

$$du_i = (w_{ij} + \varepsilon_{ij})\, dX_j$$

- Calculer les constantes d'intégration (de $\bar{\bar{w}}$ et de $\vec{u}$) en écrivant les équations des **conditions cinématiques** sur une partie $\partial\Omega_U$ de la frontière de Ω.

Description Lagrangienne :

Conditions aux bords

L'intégration d'un champ de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}\,(\cdot, t)$ nécessite la prise en compte des intéractions cinématiques du milieu continu avec le monde physique qui l'entoure. Ces liaisons cinématiques se traduisent par des conditions aux bords $\partial\Omega_U$ de la frontière de Ω, soit par exemple:

- **Encastrement mobile**:

$$\forall \vec{X} \in \partial\Omega_U \quad \vec{u}\left(\vec{X}, t\right) = \vec{U}\left(\vec{X}, t\right)$$

- **Appui mobile**:

$$\forall \vec{X} \in \partial\Omega_U \quad u_i\left(\vec{X}, t\right) = U_i\left(\vec{X}, t\right)$$

Remarque : Le champ $\vec{U}\,(\cdot, t)$ est généralement une donnée du problème. S'il est nul, on parle d'encastrement ou d'appui **fixe**.

Description Eulérienne :

Champ des vitesses

La définition eulérienne du mouvement d'un corps déformable consiste à se donner à chaque instant, **le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la particule** située en $\vec{x}$ dans la configuration C_t :

$$\begin{aligned}\vec{v} = \vec{v}\,(\vec{x}, t) \quad &= \frac{d}{dt}\vec{x}\left(\vec{X}, t\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}\left(\vec{X}, t\right)\end{aligned}$$

On définit ainsi le champ **Eulérien** des vitesses:

$$\vec{v}\,(\cdot, t)\left|\begin{array}{ccc}\omega & \rightarrow & R^3 \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{v}\,(\vec{x}, t)\end{array}\right.$$

Description Eulérienne :

Comparaison entre Euler et Lagrange

- Description lagrangienne : on suit une particule au cours de son mouvement, en spécifiant sa position à l'instant t par rapport à sa position initiale à l'instant t_0
  - variable données : $\left(\vec{X}, t\right)$
  - inconnues : $\vec{x}\left(\vec{X}, t\right)$
- description eulérienne : Observation en un point quelconque fixe des propriétés de toute particule passant en ce point à un instant donné.
  - variable données : $(\vec{x}, t)$
  - inconnues : $\vec{v}\,(\vec{x}, t)$

Description Eulérienne :

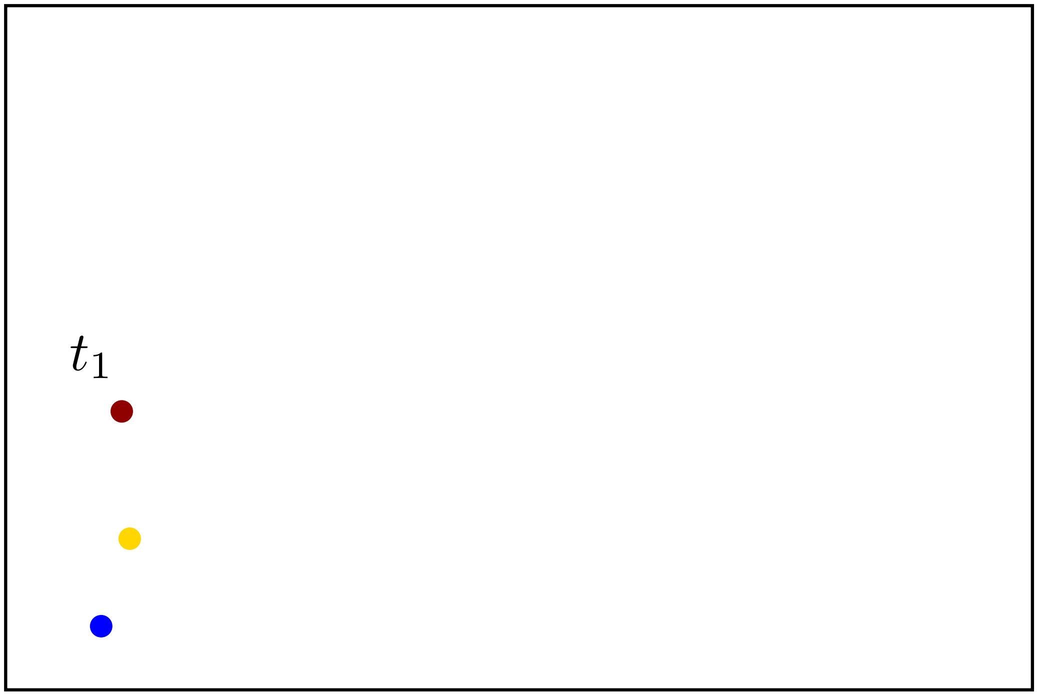
Trajectoire

La trajectoire d'une particule P est le lieu des positions de P au cours du temps.

Description Eulérienne :

Trajectoire

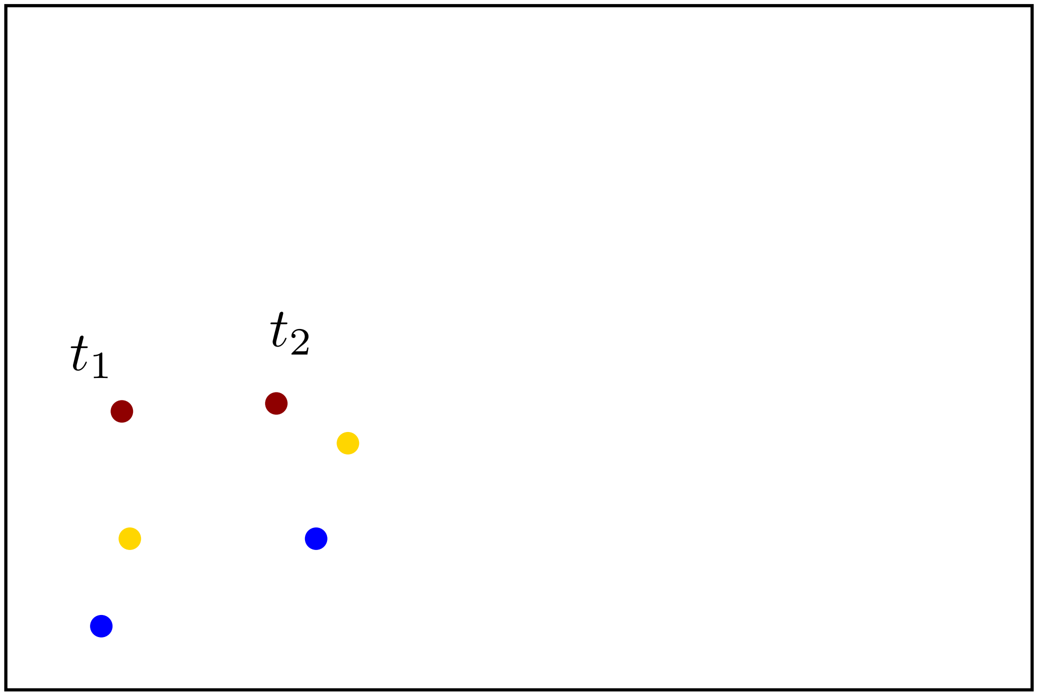
La trajectoire d'une particule P est le lieu des positions de P au cours du temps.



Description Eulérienne :

Trajectoire

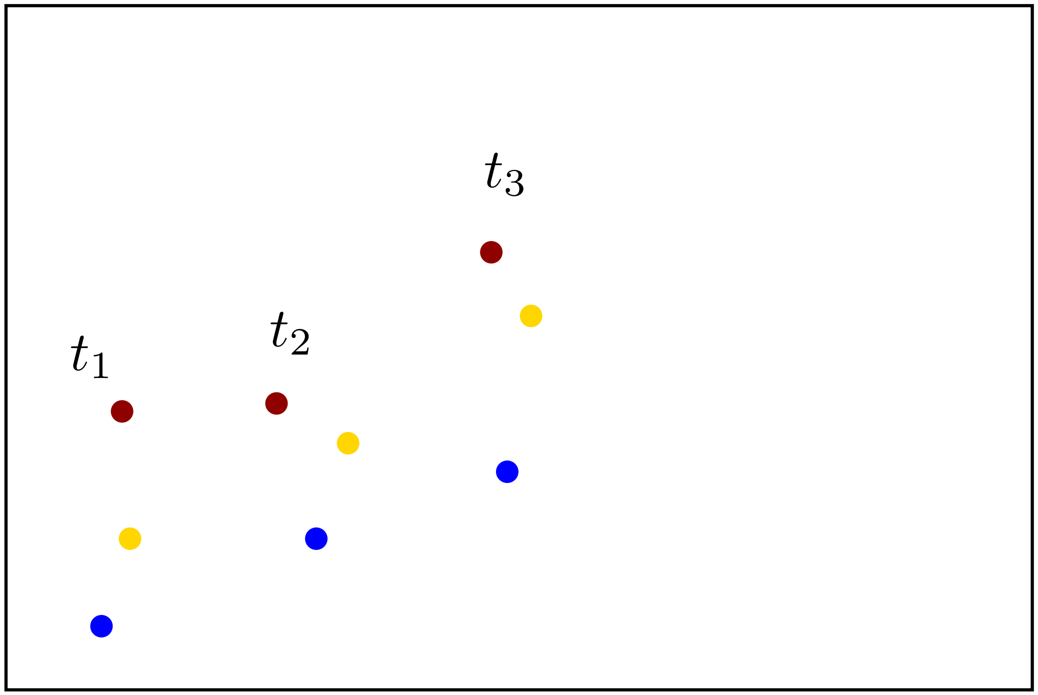
La trajectoire d'une particule P est le lieu des positions de P au cours du temps.



Description Eulérienne :

Trajectoire

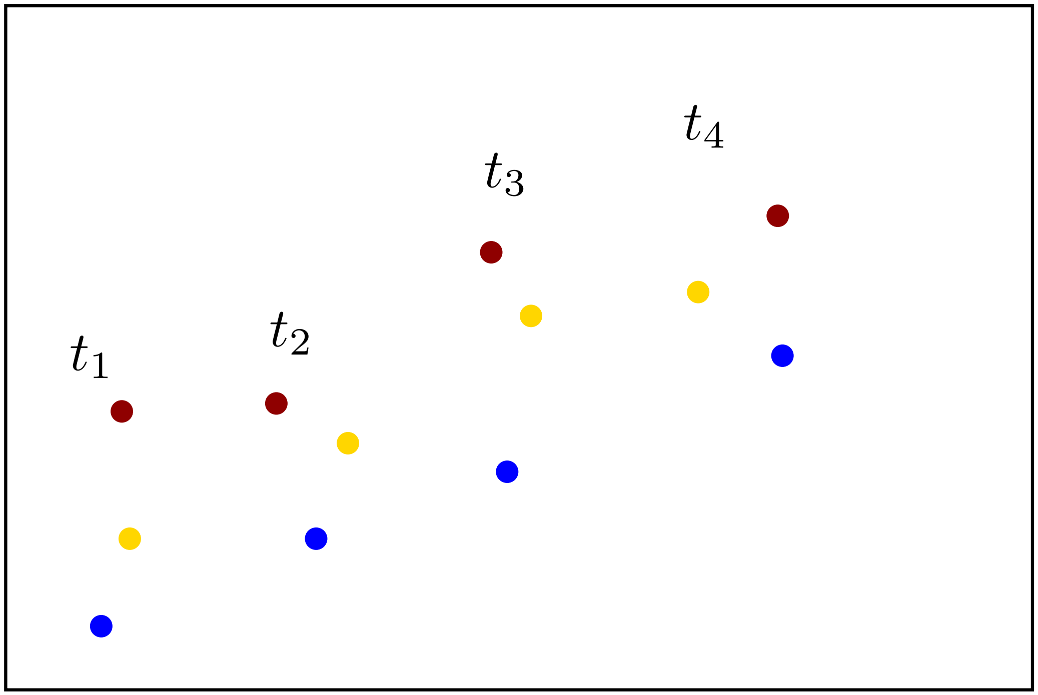
La trajectoire d'une particule P est le lieu des positions de P au cours du temps.



Description Eulérienne :

Trajectoire

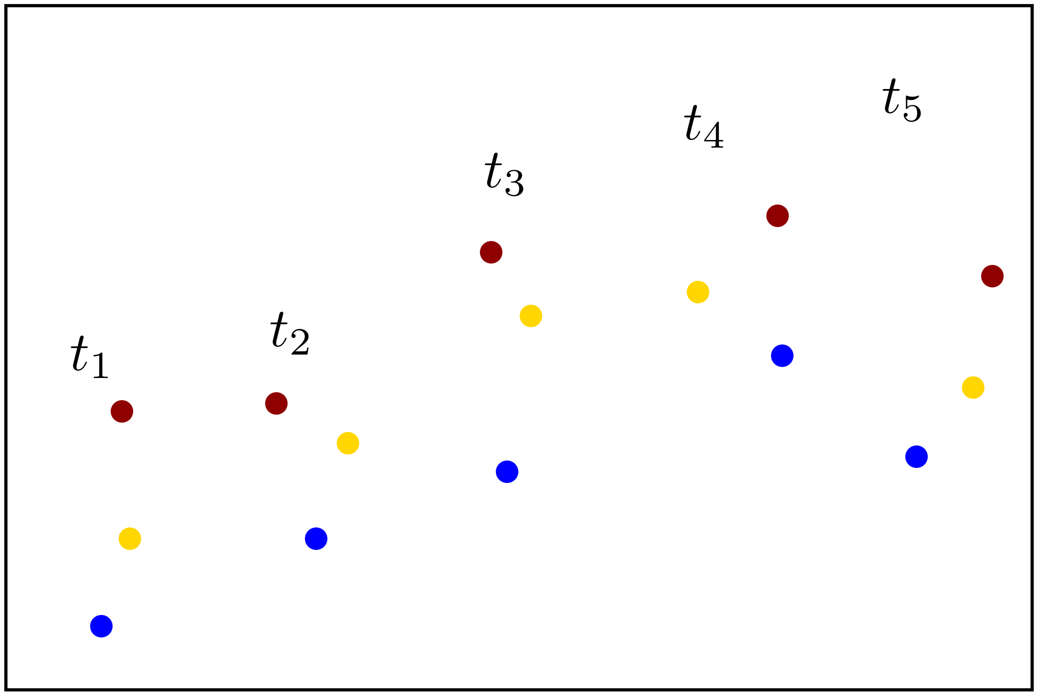
La trajectoire d'une particule P est le lieu des positions de P au cours du temps.



Description Eulérienne :

Trajectoire

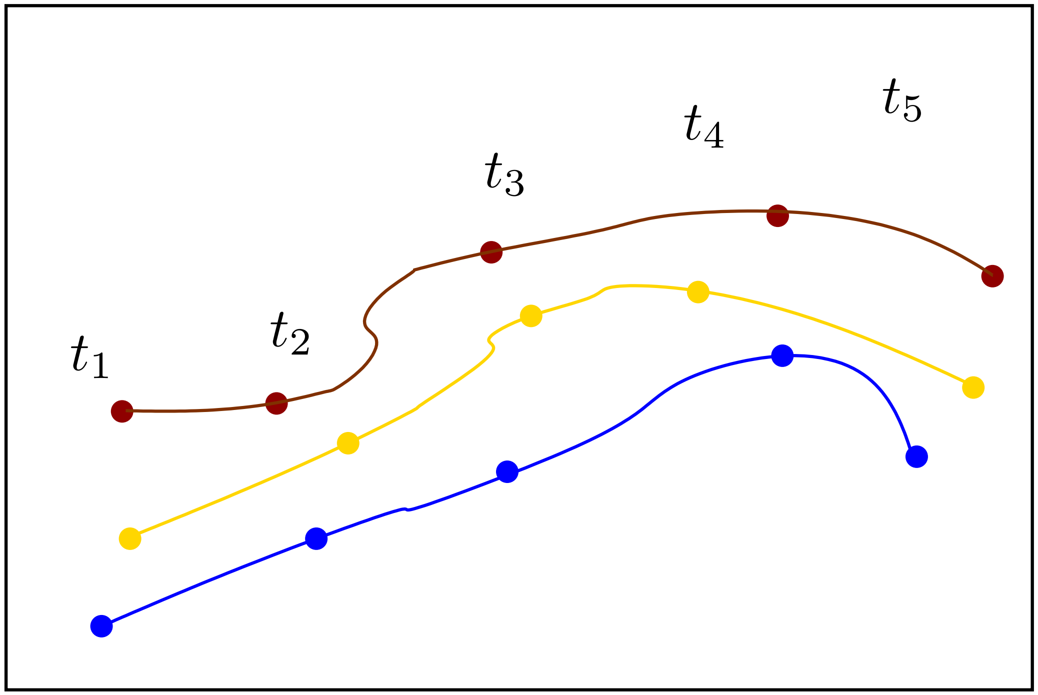
La trajectoire d'une particule P est le lieu des positions de P au cours du temps.



Description Eulérienne :

Trajectoire

La trajectoire d'une particule P est le lieu des positions de P au cours du temps.



Description Eulérienne :

Trajectoire

La trajectoire d'une particule P est le lieu des positions de P au cours du temps.

$$\boxed{\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} & = \quad \vec{v}\,(\vec{x},t) \\ \vec{x}\,(t=0) & = \quad \vec{X} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \\ &\begin{cases} dx_1 = v_1\,(x_1,x_2,x_3,t)dt \\ dx_2 = v_2\,(x_1,x_2,x_3,t)dt \\ dx_3 = v_3\,(x_1,x_2,x_3,t)dt \\ \vec{x}\,(t=0) = \vec{X} \end{cases} \end{aligned}}$$

Description Eulérienne :

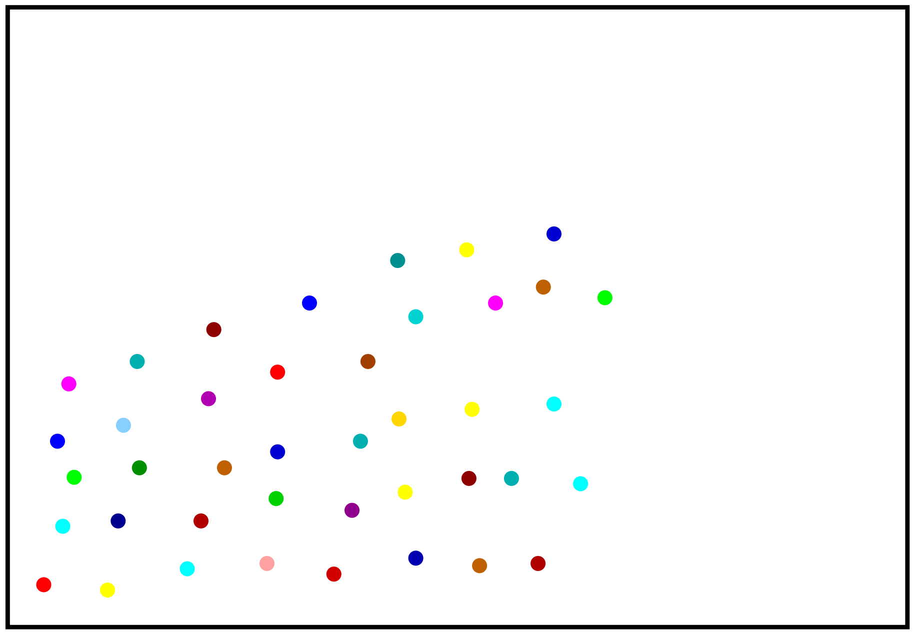
Ligne de courant

Une ligne de courant est une courbe qui, **à un instant T fixé**, admet en chacun de ces points une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point à cet instant.

Description Eulérienne :

Ligne de courant

Une ligne de courant est une courbe qui, **à un instant T fixé**, admet en chacun de ces points une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point à cet instant.

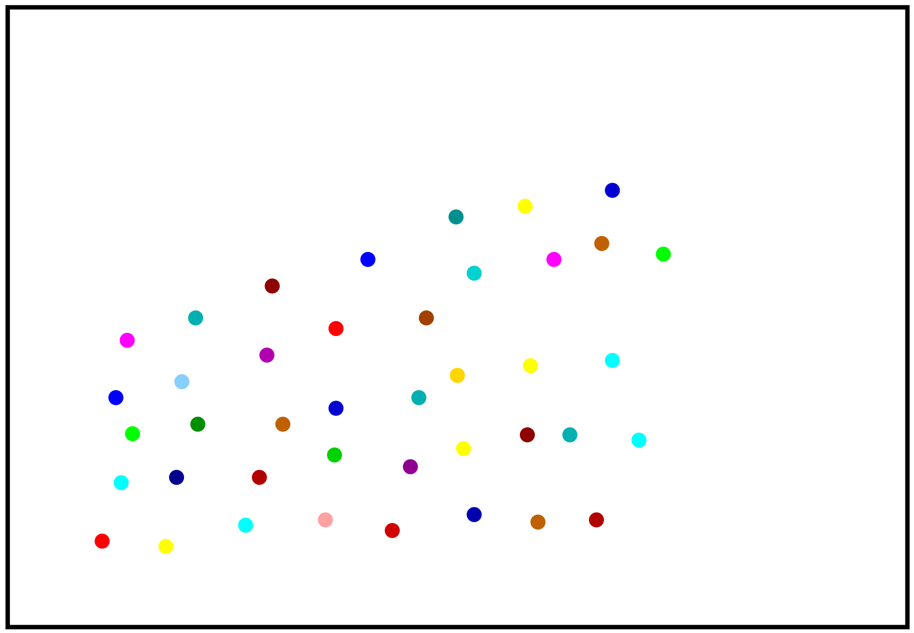


t_1

Description Eulérienne :

Ligne de courant

Une ligne de courant est une courbe qui, **à un instant T fixé**, admet en chacun de ces points une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point à cet instant.

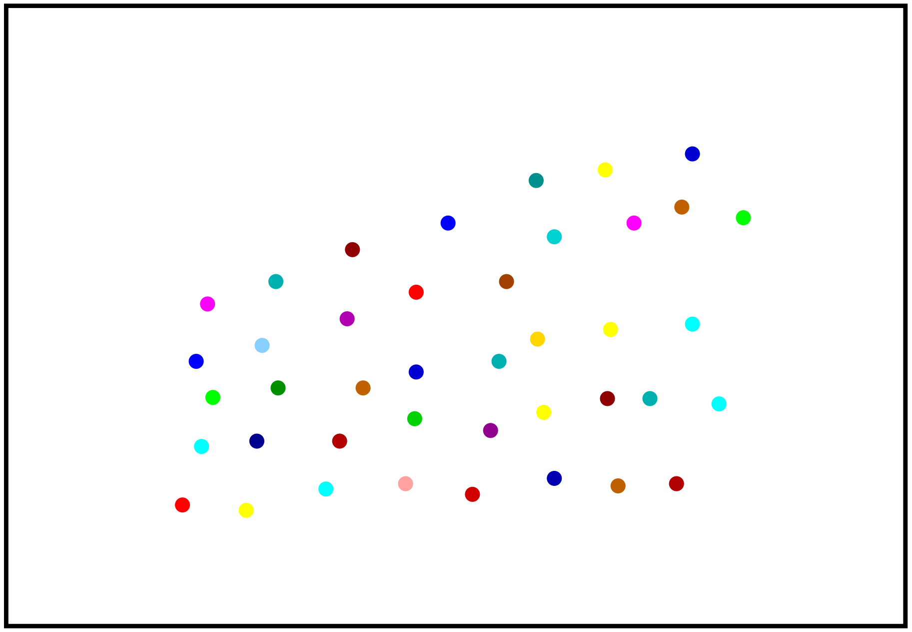


t_2

Description Eulérienne :

Ligne de courant

Une ligne de courant est une courbe qui, **à un instant T fixé**, admet en chacun de ces points une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point à cet instant.

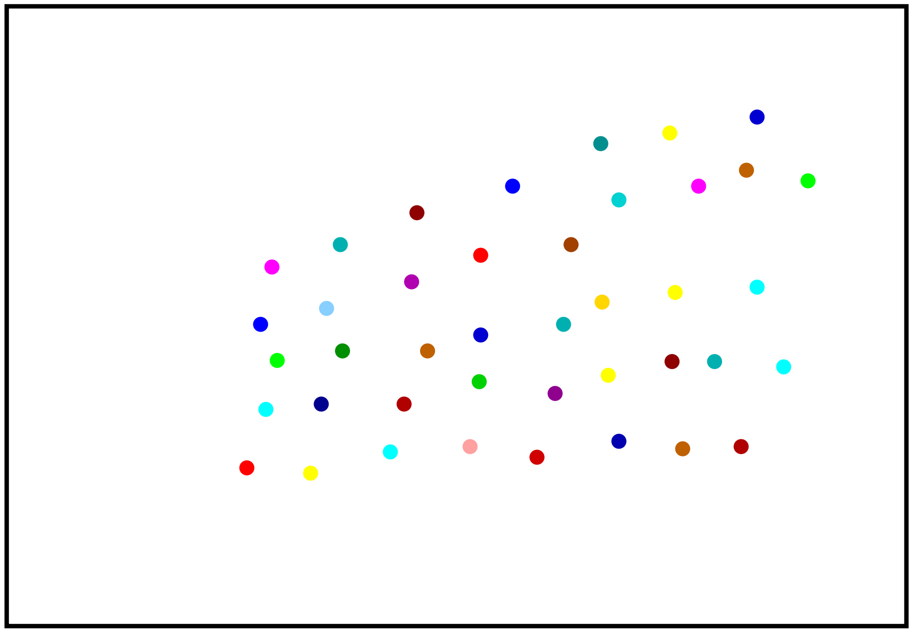


t_3

Description Eulérienne :

Ligne de courant

Une ligne de courant est une courbe qui, **à un instant T fixé**, admet en chacun de ces points une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point à cet instant.

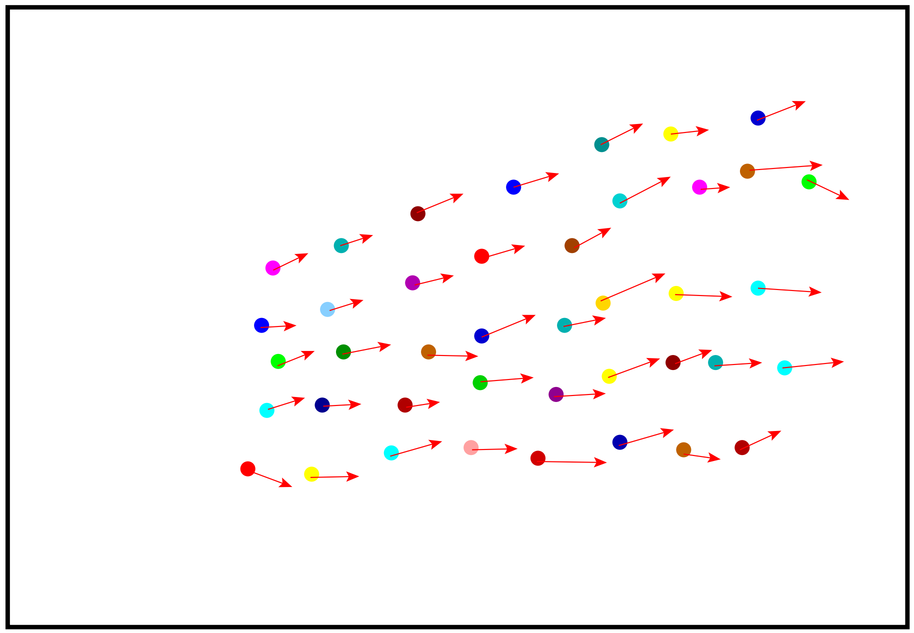


T

Description Eulérienne :

Ligne de courant

Une ligne de courant est une courbe qui, **à un instant T fixé**, admet en chacun de ces points une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point à cet instant.

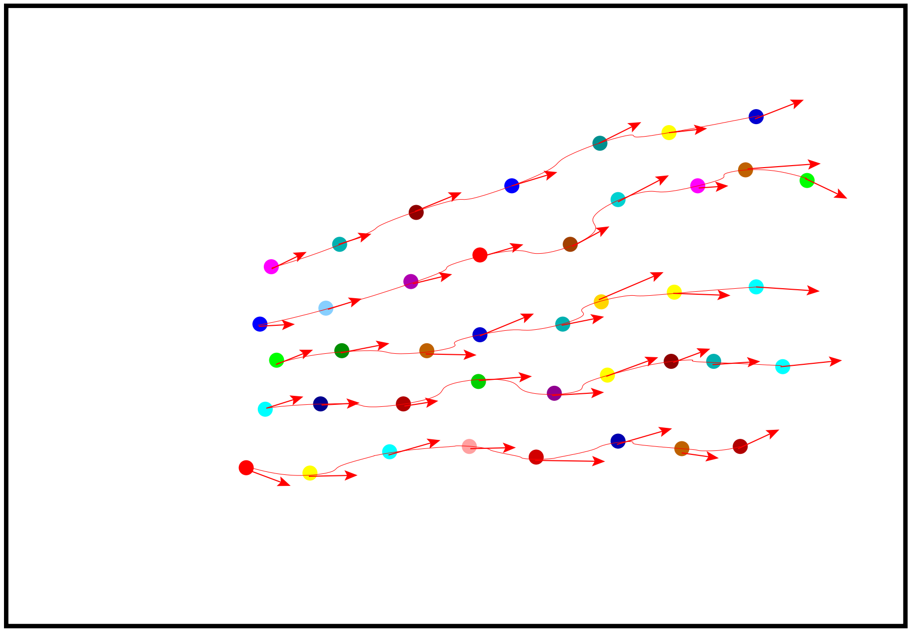


T

Description Eulérienne :

Ligne de courant

Une ligne de courant est une courbe qui, **à un instant T fixé**, admet en chacun de ces points une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point à cet instant.



T

Description Eulérienne :

Ligne de courant

Une ligne de courant est une courbe qui, **à un instant T fixé**, admet en chacun de ces points une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point à cet instant.

$$\boxed{\frac{dx_1}{v_1\left(x_1, x_2, x_3, T\right)} = \frac{dx_2}{v_2\left(x_1, x_2, x_3, T\right)} = \frac{dx_3}{v_3\left(x_1, x_2, x_3, T\right)}}$$

Description Eulérienne :

Mouvement stationnaire

Remarque

- Un mouvement est dit **stationnaire** si

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\left(\vec{x},t\right)=0.$$

- Pour un mouvement stationnaire, les trajectoires et les lignes de courant sont **confondues**.

Description Eulérienne :

Notions de dérivée particulaire

La difficulté principale en description eulérienne est liée à la définition des taux de variation des différentes grandeurs physiques par rapport au temps, car:

- La configuration de référence C_t varie au cours du temps:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \neq 0.$$

- Contrairement à la description Lagrangienne où:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0$$

Description Eulérienne :

Notions de dérivée particulaire

Si on considère une fonction scalaire définie de façon Eulérienne

$$f(\cdot,t) \left| \begin{array}{ccc} \omega & \rightarrow & R \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x},t) \end{array} \right.$$

La dérivée particulaire de f est donnée par:

$$\dot{f}(\vec{x},t) = \frac{df}{dt}(\vec{x},t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x},t)\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

ou encore

$$\boxed{\dot{f}(\vec{x},t) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x},t) + \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}(\vec{x},t)}_{\text{noté : } \frac{Df}{Dt}}}$$

Description Eulérienne :

Notions de dérivée particulaire

Si on a une fonction vectorielle:

$$\vec{g}\left(\cdot,t\right)\left|\begin{array}{ccc}\omega & \rightarrow & R^3\\ \vec{x} & \mapsto & \vec{g}\left(\vec{x},t\right)\end{array}\right.$$

alors **La dérivée particulaire** de $\vec{g}$ est donnée par:

$$\boxed{\dot{\vec{g}}(\vec{x},t)=\underbrace{\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}(\vec{x},t)+\overline{\overline{\nabla}}\vec{g}\cdot\vec{v}(\vec{x},t)}_{\frac{D\vec{g}}{Dt}}}$$

Enfin **La dérivée particulaire** de $K(t)=\iiint_\omega f(\vec{x},t)dv$:

$$\boxed{\dot{K}(t)=\iiint_\omega\frac{Df}{Dt}(\vec{x},t)+f\,\mathrm{div}\vec{v}(\vec{x},t)dv}$$

Description Eulérienne :

Gradient Eulérien du champ de vitesses

Considérons deux particules qui occupent, à l'instant t, les positions $\vec{x}$ et $\vec{x} + \vec{dx}$; et étudions le taux de variation, par rapport au temps, du vecteur matériel élémentaire $\vec{dx}$:

$$\dot{\vec{dx}} = \dot{\bar{\bar{F}}} \left(\vec{X}\left(\vec{x}, t\right), t \right) .\vec{dX} = \underbrace{\dot{\bar{\bar{F}}} \left(\vec{X}\left(\vec{x}, t\right), t \right) .\bar{\bar{F}}^{-1} \left(\vec{X}\left(\vec{x}, t\right), t \right)}_{\bar{\bar{L}}(\vec{x}, t)} .\vec{dx}$$

soit:

$$L_{ij} = \left[\dot{\bar{\bar{F}}} \right]_{ik} \left[\bar{\bar{F}}^{-1} \right]_{kj} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\vec{x}, t\right)$$

On définit ainsi le **Gradient Eulérien des vitesses**:

$$\bar{\bar{L}}\left(\vec{x}, t\right) = \bar{\bar{\nabla}} \vec{v}\left(\vec{x}, t\right) \quad \text{ou} \quad L_{ij}\left(\vec{x}, t\right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\vec{x}, t\right)$$

Description Eulérienne :

Tenseur des taux de déformations

Pour mesurer le taux de déformations au voisinage d'un point, on s'intéresse à l'évolution du produit scalaire des vecteurs matériels $\vec{dx}$ et $\vec{dy}$, au cours du temps au voisinage de la configuration C_t:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{dx}.\vec{dy}\right) &= \dot{\vec{dx}}.\vec{dy} + \vec{dx}.\dot{\vec{dy}} \\ &= \bar{\bar{L}}.\vec{dx}.\vec{dy} + \vec{dx}.\bar{\bar{L}}.\vec{dy} \\ &= \vec{dx}.\underbrace{\left(\bar{\bar{L}}^T(\vec{x},t) + \bar{\bar{L}}(\vec{x},t)\right)}_{2\bar{\bar{D}}(\vec{x},t)}.\vec{dy}\end{aligned}$$

On définit ainsi **Le tenseur des taux de déformations**:

$$\bar{\bar{D}}(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\left[\bar{\bar{L}}(\vec{x},t) + \bar{\bar{L}}^T(\vec{x},t)\right]$$

$$D_{ij}(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\vec{x},t) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\vec{x},t)\right]$$

Description Eulérienne :

Tenseur des taux de rotations

Le Tenseur taux des déformations $\bar{\bar{D}}$ constitue la partie symétrique du gradient Eulérien des vitesses $\bar{\bar{L}}$
Sa partie antisymétrique définit le **Tenseur des Taux de Rotations**:

$$\bar{\bar{W}}\left(\vec{x},t\right)=\frac{1}{2}\left[\bar{\bar{\nabla}}\vec{v}\left(\vec{x},t\right)-\bar{\bar{\nabla}}^{T}\vec{v}\left(\vec{x},t\right)\right]$$

Son **Vecteur Adjoint**:

$$\vec{\Omega}=\vec{\text{rot}}\,\vec{v}$$

Un écoulement est dit **irrotationnel** si $\bar{\bar{W}}=\bar{\bar{0}}$ ou encore si $\vec{\Omega}=\vec{0}$.

Description Eulérienne :

Cas des petites perturbations

Dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations **HPP**, on a:

$$\boxed{\bar{\bar{D}}(\vec{x},t) = \dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}(\vec{x},t)}$$