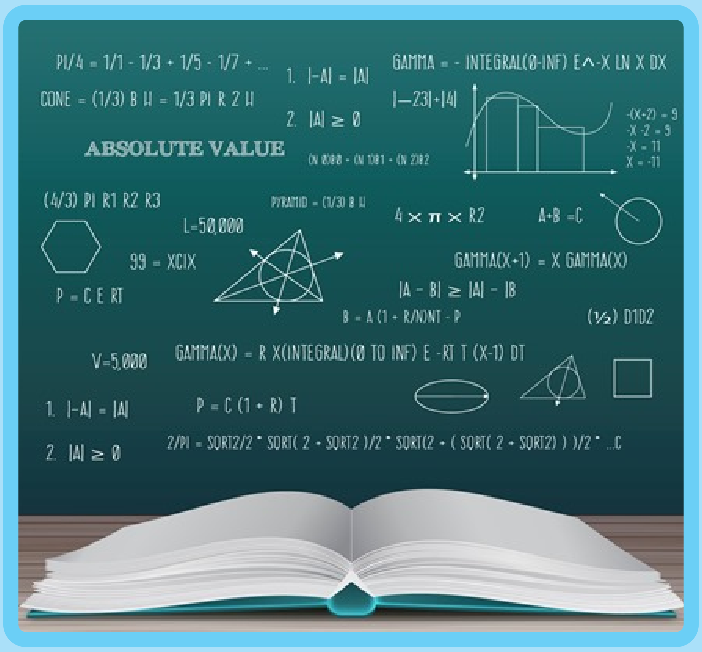
Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des sciences
Tétouan



Filière Mathèmatiques Informatique et Physique (MIP)

ANALYSE 3
MIP

Département de Mathématiques

AFILAL Soumaya

2024/2025

Table des matières

1 séries numériques

1. Généralités

Pour définir la notion de série. Nous allons voir que sa définition repose sur la notion de suite. Les deux sont donc extrêmement liées, et il ne faudra jamais perdre cet aspect de vue.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

On dit que la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge). Si la série converge, la limite

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

est appelée la somme de la série.

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On lui associe une nouvelle suite $(S_n)_n$ definie comme suit :

$$\begin{aligned}
S_0 &= u_0,\\
S_1 &= u_0 + u_1,\\
&\dots\\
&\dots\\
&\dots\\
S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k
\end{aligned}$$

Ainsi, S_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n). La suite (S_n) s'appelle la série de terme général u_n et notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série. Dans le cas de la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa limite et on l'appelle la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. Toujours dans le cas de la convergence, on appelle reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ le nombre réel $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarque 1

1. L'étude de la série de terme général u_n (en abrégé on écrit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$), se ramène à celle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, nous étudierons

les sommes partielles suivantes : $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geqslant n_0$.

1.1. Exemples fondamentaux

Série géométrique Soit q un nombre réel. On appelle série géométrique de raison q la série de terme général q^n. Sa somme partielle est donnée par

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On a le résultat suivant :

Proposition 1

$\sum_{n>0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. La somme de la série géométrique convergente est $\frac{1}{1-q}$.
Son reste d'ordre n est $R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Série télescopique Soit $(v_n)_n$ une suite réelle. On appelle série télescopique associée à la suite $(v_n)_n$ la série de terme général $u_n = v_{n+1} - v_n$.

Proposition 2

La série télescopique $\sum_{n>0} (v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si la suite $(v_n)_n$ converge. La somme de la série télescopique convergente est $\lim_{n\to+\infty} v_n - v_0$.

Preuve.

Il suffit de remarquer que la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$.
$(S_n)_n$ converge si et seulement si la suite $(v_n)_n$ converge.

Remarque 2

La proposition précédente établit un lien entre les suites et les séries. Pour étudier la nature d'une suite dont le terme général est compliqué, on préfère étudier la nature de la série télescopique correspondante. Vous trouverez la réponse à cette question ci-dessous.

Exemple : Étudier la nature de la série $\sum_{k>0} \frac{1}{k(k+1)}$ et déterminer sa somme. On a

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

La série est donc télescopique, elle est convergente car la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k>0}$ l'est aussi et on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 1$$

1.2. Conditions nécessaires de convergence

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série numérique.

Proposition 3

a) $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

c) $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| \leqslant \varepsilon$ (critère de Cauchy).

Preuve.

a) $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge par définition, la suite (s_n) converge, or $u_n = s_n - s_{n-1}$.

b) Il suffit d'écrire $R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

c) C'est le critère de Cauchy pour la convergence d'une série. La suite (s_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Remarque 3

La réciproque de l'implication a) est fausse, en effet il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0. Par exemple, on prend la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, c'est une série télescopique divergente car la suite $(\sqrt{n})$ diverge, bien que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est alors divergente. On dit qu'elle diverge grossièrement.

1.3. Opérations sur les séries

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques

a) Pour $l \in \mathbb{R}$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(l u_n)$ sont de même nature. Dans le cas de la convergence on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(l u_n) = l \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$$

b) Si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ convergent, alors la série somme $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n + \sum_{k=0}^{+\infty} v_n$$

c) Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, alors la série somme diverge.

d) Si $u_n \in \mathbb{C}$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ convergent. Dans le cas de la convergence on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

Remarque 4

La somme de deux séries divergentes n'est pas toujours divergente, en effet soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente, la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+(-u_n))$ est convergente.

2. Séries réelles à termes positifs

2.1. Résultat fondamental

On dit qu'une série réelle $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est à termes positifs s'il existe n_0 tel que $u_n \geqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. Le résultat suivant donne une condition nécessaire pour qu'une telle série converge.

Théorème 1

Pour qu'une série à termes positifs soit convergente, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M, \text{ pour tout entier } n.$$

Remarque 5

Si une série à termes positifs est divergente, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

2.2. Critères de comparaison

Notations de Landeau

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques.
- On dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(v_n)_n$ si :
$\exists C>0, \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad / \quad \forall n\geqslant N$ on a $|u_n|\leqslant C|v_n|$, $\quad (\frac{u_n}{v_n})$ est bornée. On note $u_n = O(v_n)$
- On dit que $(u_n)_n$ est negligeable devant $(v_n)_n$ si :
$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad / \quad \forall n\geqslant N$ on a $|u_n|\leqslant \varepsilon|v_n| \quad (\frac{u_n}{v_n}\to 0)$. On note $u_n = o(v_n)$
- On dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_n$ si :
$u_n - v_n = o(v_n) \quad (\frac{u_n}{v_n}\to 1)$. On note $u_n \sim v_n$

Théorème 2

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors :
- a) Si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
- b) Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente.

Preuve.

a) On pose $(s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k)$ et $(S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k)$. L'inégalité $(u_n \leqslant v_n)$ implique que $(s_n \leqslant S_n)$. Puisque la suite $((S_n))$ est convergente, elle est bornée, donc la suite (s_n) l'est aussi.

b) C'est la contraposée de a).

Comme conséquence de ce theoreme, on a :

Théorème 3

Soient $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ et $(\sum_{n\geqslant 0} v_n)$ deux séries à termes positifs, (R_n) et (r_n) respectivement leurs restes, et S_n et s_n respectivement leurs sommes partielles :

a) Si $u_n = O(v_n)$ alors :

a.1) Si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

a.2) Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

b) Si $u_n \sim v_n$ alors :

b.1) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

b.2) Dans le cas de la convergence de la série, on a $R_n \sim r_n$.

b.3) Dans le cas de la divergence de la série, on a $S_n \sim s_n$.

Preuve.

a) $u_n = O(v_n) \Rightarrow \exists C > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geqslant N \quad \text{on a} \quad u_n \leqslant C v_n$

Du théorème précédent on déduit a1) et a2

b.1) Lorsqu'on écrit $u_n \sim v_n$ cela signifie que les suites u_n et v_n sont asymptotiquement équivalentes c à d que lorsque $n \to \infty$ le rapport $\frac{u_n}{v_n} \to 1$

En d'autres termes $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad / \quad 1-\varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < 1+\varepsilon$

Du théorème précédent on déduit b1)

b.2) Si la série converge, alors $R_n \sim r_n$.

Soient R_n et r_n les restes des séries partielles associées respectivement à $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Cela signifie que :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

Si $u_n \sim v_n$, alors pour n suffisamment grand, u_k est proche de v_k, ce qui implique que les termes restants après n dans les deux séries sont asymptotiquement équivalents. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$(1-\varepsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\varepsilon)v_k$$

Cela implique que les restes R_n et r_n, étant des sommes infinies de termes asymptotiquement équivalents, vérifient également :

$$R_n \sim r_n$$

Conclusion pour b.2 : Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors les restes R_n et r_n sont asymptotiquement équivalents.

b.3) Si la série diverge, alors $S_n \sim s_n$.

Soient S_n et s_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, c'est-à-dire :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Si $u_n \sim v_n$, alors pour n suffisamment grand, u_k est proche de v_k. Cela implique que les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, qui sont des sommes de termes asymptotiquement équivalents, doivent elles aussi être asymptotiquement équivalentes. Plus formellement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$(1-\varepsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\varepsilon)v_k$$

En sommant ces inégalités de 0 à n, on obtient que :

$$(1-\varepsilon)s_n \leqslant S_n \leqslant (1+\varepsilon)s_n$$

Ce qui montre que :

$$S_n \sim s_n$$

Conclusion pour b.3 : Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors les sommes partielles S_n et s_n sont asymptotiquement équivalentes.

2.3. Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ et on s'intéresse à sa nature. Donnons d'abord quelques inégalités utiles.

Proposition 4

a) Pour $k \in [n, n+1]$, on a :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

b) En sommant de 1 à n et de $n+1$ à $+\infty$, on a :

$$\int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant s_n \leqslant \int_0^{n} f(t)dt + f(0)$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

Preuve.

b) découle facilement de a). Pour montrer a), utiliser la décroissance de f.

La nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ est donnée par :

Proposition 5

Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On pose :

$$\sigma_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$$

a) La série $\sum_{n\geqslant 0} \sigma_n$ est convergente.

b) $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

c) Dans le cas de la divergence, $s_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \int_0^{n} f(t)dt$.

Preuve.

a) Puisque f est décroissante, $\sigma_n \geqslant 0$. Pour montrer que $\sum \sigma_n$ est convergente, il suffit de montrer que la suite $(\sum_{k=0}^{n} \sigma_k)$ est bornée. En utilisant a) de la proposition précédente, on a :

$$f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) - f(k+1)$$

Alors,

$$\sum_{k=0}^{n} \sigma_k = \sum_{k=0}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt \right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} (f(k) - f(k+1)) \leqslant f(0)$$

b) On peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} \sigma_k = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt$$

Puisque la série $\sum_{n \geqslant 0} \sigma_n$ est toujours convergente, il s'ensuit que $\sum_{n \geqslant 0} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

c) Dans le cas de la divergence, on a :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \int_0^n f(t)dt$$

On suppose maintenant que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ diverge. On considère les sommes partielles de cette série :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

L'objectif est de montrer que s_n est asymptotiquement équivalente à l'intégrale $\int_0^n f(t)dt$.

En utilisant la décroissance de la fonction f et les résultats de la comparaison entre une somme discrète et une intégrale, on sait que pour n grand, la somme des valeurs discrètes $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ se comporte comme l'intégrale de f sur $[0,n]$. Plus précisément, en utilisant les inégalités :

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n)$$

et en sommant ces inégalités pour $k = 0$ à n, on obtient que :

$$\int_0^n f(t)dt \leqslant s_n \leqslant \int_0^{n+1} f(t)dt$$

Ainsi, pour $n \to \infty$, on a :

$$s_n \sim \int_0^n f(t)dt$$

Si la série $\sum f(n)$ diverge, alors la somme partielle s_n est asymptotiquement équivalente à l'intégrale $\int_0^n f(t)dt$.

À titre d'exemples, on a :

Corollaire 1

a) Série de Riemann :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

b) Série de Bertrand :

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } (\alpha > 1 \text{ et } \beta\in\mathbb{R}) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

Preuve.

a) Série de Riemann :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \quad \text{converge si et seulement si} \quad \alpha > 1$$

Pour étudier la convergence de la série de Riemann, on utilise le critère de comparaison avec une intégrale.

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, qui est décroissante pour $x > 0$ et $\alpha > 0$. On compare la série à l'intégrale impropre :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Calculons cette intégrale :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Si $\alpha \neq 1$, l'intégrale est donnée par :

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^t = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Lorsque $t\to\infty$, on a deux cas :
- Si $\alpha > 1$, alors $t^{1-\alpha}\to 0$, et l'intégrale converge vers une constante finie. - Si $\alpha \leqslant 1$, alors $t^{1-\alpha}\to\infty$ (ou diverge logarithmiquement si $\alpha = 1$), donc l'intégrale diverge.

D'après le critère de comparaison entre la série et l'intégrale, on conclut que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si l'intégrale correspondante converge, c'est-à-dire si $\alpha > 1$.

Conclusion pour a) : La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) Série de Bertrand :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta} \quad \text{converge si et seulement si} \quad (\alpha > 1 \text{ et } \beta\in\mathbb{R}) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

Pour étudier la convergence de la série de Bertrand, on utilise également le critère de comparaison avec une intégrale impropre, en considérant :

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}\,dx$$

Cas $\alpha > 1$:
Si $\alpha > 1$, la fonction x^α décroît rapidement. Ainsi, peu importe la valeur de β, le facteur $(\log x)^\beta$ ne suffit pas à empêcher la convergence de l'intégrale :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(\log x)^{\beta}}\,dx \quad \text{converge pour tout} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Cela signifie que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ converge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ lorsque $\alpha > 1$.

Cas $\alpha = 1$:
Si $\alpha = 1$, la série devient :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\beta}}$$

On étudie la convergence de l'intégrale associée :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\beta}}\,dx$$

Pour cela, on effectue le changement de variable $u = \log x$, donc $du = \frac{dx}{x}$, ce qui transforme l'intégrale en :

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{u^{\beta}}\,du$$

Cette intégrale converge si et seulement si $\beta > 1$. En effet, l'intégrale $\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{u^{\beta}}\,du$ est une intégrale de type Riemann, qui converge pour $\beta > 1$ et diverge pour $\beta \leqslant 1$.

Cas $\alpha < 1$:
Si $\alpha < 1$, la série devient similaire à une série de type Riemann avec un exposant $\alpha \leqslant 1$, ce qui entraîne la divergence, indépendamment de la valeur de β.

Conclusion pour b) : La série de Bertrand $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ converge dans les deux cas suivants : $(\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R})$ $\quad ou \quad$ $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

2.4. Règle de d'Alembert et règle de Cauchy

2.4.1. Règle de d'Alembert

Proposition 6

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

on a :

a) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge,

b) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement,

c) $l = 1$, on ne peut rien dire.

Preuve.

a) Si $l < 1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

Supposons que $l < 1$. Cela signifie que, pour n suffisamment grand, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement inférieur à 1. Plus précisément, il existe une constante $r \in (0,1)$ et un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$$

Cela implique que, pour $n \geqslant N$,

$$u_{n+1} \leqslant r u_n$$

En appliquant cette inégalité de manière récurrente, on obtient :

$$u_{n+1} \leqslant r^n u_N$$

La suite u_n décroît donc de manière exponentielle à partir d'un certain rang N. Il en résulte que la série $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ est majorée par une série géométrique de raison $r < 1$, qui est convergente. Donc, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge également.

b) Si $l > 1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge grossièrement.

Supposons maintenant que $l > 1$. Cela signifie que, pour n suffisamment grand, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement supérieur à 1. Plus précisément, il existe une constante $r > 1$ et un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant r$$

Cela implique que, pour $n \geqslant N$,

$$u_{n+1} \geqslant r u_n$$

La suite u_n croît donc de manière exponentielle pour $n \geqslant N$. Il en résulte que la série $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ diverge grossièrement (les termes u_n croissant trop vite). Par conséquent, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

c) Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Si $l = 1$, cela signifie que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 à mesure que n tend vers l'infini. Cependant, dans ce cas, il est impossible de conclure à la convergence ou à la divergence de la série uniquement à partir de ce critère.

Si $l = 1$, la série peut converger ou diverger selon la vitesse de décroissance (ou de croissance) des termes u_n. Par exemple :

- La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge bien que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers 1.
- En revanche, la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, bien que le rapport tende également vers 1.

Donc, dans le cas $l = 1$, le critère du rapport ne permet pas de trancher, et il faut utiliser d'autres critères pour déterminer la convergence ou la divergence.

Conclusion :

- Si $l < 1$, la série converge.
- Si $l > 1$, la série diverge.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure à partir du seul critère du rapport.

2.4.2. Règle de Cauchy

Proposition 7

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs. On suppose que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

on a :

a) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge,

b) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement,

c) $l = 1$, on ne peut rien dire.

Preuve.

a) Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Si
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$
avec $l < 1$, cela signifie que pour n suffisamment grand, il existe une constante $r \in (0,1)$ et un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a :
$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant r$$
En élevant cette inégalité à la puissance n, on obtient :
$$u_n \leqslant r^n$$
Or, la série géométrique $\sum r^n$ converge lorsque $r < 1$. Comme u_n est majoré par une suite géométrique convergente, la série $\sum u_n$ converge également d'après le critère de comparaison.

b) Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Si
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$
avec $l > 1$, cela signifie que pour n suffisamment grand, il existe une constante $r > 1$ et un entier N tels que pour tout $n \geqslant N$, on a :
$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant r$$
En élevant cette inégalité à la puissance n, on obtient :
$$u_n \geqslant r^n$$
Comme $r > 1$, les termes u_n croissent de manière exponentielle. Par conséquent, la série $\sum u_n$ diverge, car les termes u_n deviennent trop grands.

c) Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Si
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1,$$
cela signifie que u_n se comporte approximativement comme 1 pour n très grand. Cependant, cela ne permet pas de conclure à la convergence ou à la divergence de la série, car des séries dont les termes u_n tendent vers 0 peuvent aussi bien converger que diverger.

Par exemple, la série harmonique
$$\sum \frac{1}{n}$$
diverge bien que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1.$$
D'un autre côté, la série
$$\sum \frac{1}{n^2}$$
converge même si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2/n}} = 1.$$
Ainsi, dans le cas où $l = 1$, il n'est pas possible de conclure directement à partir de ce critère, et d'autres méthodes doivent être utilisées pour déterminer la convergence ou la divergence.

Remarque 6

La règle de d'Alembert est utilisée lorsque l'on peut simplifier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, c'est le cas si l'expression de u_n contient des factorielles et des puissances. La règle de Cauchy est utilisée lorsque l'expression de u_n contient uniquement des puissances.

Si dans le cas

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1,$$

la règle de d'Alembert ne nous permet pas de conclure sur la nature de la série. On peut avoir des informations sur la nature de cette série en donnant un développement limité du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On a alors la règle suivante dite la règle de Raabe-Duhamel.

Proposition 8

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs. On suppose de plus que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{l}{n}+O(v_n)$$

avec $l\in\mathbb{R}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}|v_n|$ est convergente,

on a Il existe une constante c > 0 telle que $\mathrm{u}_n \sim cn^{-l}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $l>1$.

2.5. Règle de Riemann

Il s'agit de faire une comparaison avec la série de Riemann.

Proposition 9

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs, on a :

a) S'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} n^a u_n=l,$$

avec l non nul, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $a>1$.

b) S'il existe $a>1$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} n^a u_n=0,$$

alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

c) S'il existe $a<1$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} n^a u_n=+\infty,$$

alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Preuve.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a u_n=l$ avec l non nul implique que $u_n\sim\frac{l}{n^a}$. Conclure en utilisant le theoreme 3 et le corollaire 1.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a u_n=0$ implique, en utilisant les quantificateurs, qu'il existe une constante $c>0$ telle que $u_n\leqslant\frac{c}{n^a}$ à partir d'un certain rang. Conclure en appliquant le critère de comparaison.

c) De Même que b), on aura l'existence d'une constante $c>0$ telle que $u_n\geqslant\frac{c}{n^a}$ à partir d'un certain rang.

Exemple 1

Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{1}{(\log n)^n}$
2. $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n-2}}$
3. $u_n = \log\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$
4. $u_n = \dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$
5. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$
6. $u_n = \log\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Solutions

1. On applique la règle de Cauchy, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log n} = 0, \quad \sum_{n>0} u_n \text{ converge.}$$
2. $u_n = 9\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, c'est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 donc convergente.
3. On remarque que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ car $\log(1+x) \leqslant x, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Puisque la série $\sum_{n>0} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente d'après le critère de comparaison, $\sum_{n>0} u_n$ converge. On peut aussi utiliser le théorème 3 b) on a $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$.
4. Le critère de Raabe-Duhamel est une méthode efficace pour déterminer la convergence d'une série lorsque le critère de d'Alembert est inconclusif. Le critère de Raabe-Duhamel s'applique aux séries à termes positifs et repose sur une analyse plus précise de la croissance des termes successifs. Pour utiliser ce critère, il est nécessaire de calculer la limite suivante :
$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Critère de Raabe-Duhamel

- Si $R > 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $R < 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $R = 1$, le critère est inconclusif.

Étape 1 : Calcul de la limite

Pour l'exercice donné, le terme général est :
$$u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$$

Nous devons donc calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et utiliser cette expression pour appliquer le critère de Raabe-Duhamel.

Calcul de u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{4^{n+2}((n+2)!)^2}{(2n+1)!}$$

Calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+2}((n+2)!)^2(2n-1)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n+1)!}$$

Simplifions cette expression en annulant les puissances de 4 et les factorielles :

$$= 4 \cdot \frac{((n+2)!)^2}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n)}$$

Calculons maintenant la fraction impliquant les factorielles :

$$\frac{((n+2)!)^2}{((n+1)!)^2} = (n+2)^2$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4 \cdot \frac{(n+2)^2}{(2n+1)(2n)}$$

Étape 2 : Calcul de $1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{4(n+2)^2}{(2n+1)(2n)}$$

Développons cette expression davantage pour simplifier l'analyse :

$$\approx 1 - \frac{4n^2}{4n^2} = 1 - 1 + \frac{-16n+16}{4n^2} \approx -\frac{4}{n}$$

Étape 3 : Application du critère de Raabe-Duhamel

Nous avons :

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \approx n \cdot \left(-\frac{4}{n}\right) = -4$$

Étant donné que cette limite est un nombre négatif ($R < 1$), le critère de Raabe-Duhamel indique que la série est **divergente**.

5. On peut appliquer la règle de Riemann, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} n^3 e^{-n\log 2} = 0.$$

On peut aussi appliquer la règle de d'Alembert.

6. Dans ce cas on ne peut appliquer aucune règle. On cherche un équivalent via les développements limités de $\log(1+x)$ et de $\cos x$ au voisinage de 0

$$u_n = \log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \log\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2},$$

la série est alors convergente par comparaison à celle de Riemann.

3. Séries à Termes quelconques

3.1. Série absolument convergente

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes quelconques. On dit qu'elle converge absolument si la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Proposition 10

$\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument $\Rightarrow \sum_{n\geqslant} u_n$ converge.

Preuve.

Il faut noter que la réciproque de cette implication est fausse. Il existe des séries qui sont convergentes mais non absolument convergentes. On dit qu'elles sont semi-convergentes, à titre d'exemple les séries alternées.

4. Séries Alternées

On appelle série alternée toute série numérique dont le terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ avec $u_n > 0$.

Proposition 11

Soit $\sum_{n>0} (-1)^n u_n$ une série alternée. On suppose que la suite (u_n) est décroissante et que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
On a :

1. La série $\sum_{n>0} (-1)^n u_n$ est convergente.
2. $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ avec R_n le reste de la série d'ordre n.
3. Pour tout n, le signe de R_n est celui de son premier terme.

Exemples

La série $\sum_{n>0} (-1)^n \frac{1}{n}$ est convergente mais non absolument convergente. On a une généralisation de ce résultat.

4.1. Critère d'Abel

Proposition 12

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ une série numérique avec (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On suppose que :

1. La suite (A_n) est bornée avec $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
2. La série $\sum_{n\geqslant 0} |b_{n+1} - b_n|$ est convergente.
3. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ est convergente.

Pour montrer cette proposition on a besoin du lemme suivant appelé transformation d'Abel.

Lemme 1

On a la transformation
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$$

Preuve.

Nous avons la somme
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

Pour la transformer, définissons $A_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$ pour tout k, c'est-à-dire que A_k est la somme partielle de la suite (a_k). En particulier, $A_0 = a_0$ et $A_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$.

Dérivation de la transformation d'Abel Écrivons la somme donnée avec la définition de A_k :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k.$$

où A_{-1} est conventionnellement défini comme 0. En réécrivant cette somme, nous pouvons développer chaque terme individuellement :
$$\sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} b_k.$$

En réarrangeant cette somme, nous obtenons :
$$= A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}).$$

Résultat final de la transformation La transformation d'Abel est donc :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n,$$

où $A_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$.

Cette formule exprime la somme d'une suite $a_k b_k$ comme une somme impliquant les différences successives de la suite (b_k) pondérées par les sommes partielles A_k.

On peut maintenant démontrer la proposition d'Abel.
On déduit du lemme 1 que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} (b_n - b_{n+1}) A_n$ et la suite $(A_n b_n)$ sont convergentes.

Puisque (A_n) est bornée et (b_n) tend vers 0, la suite $(A_n b_n)$ est convergente.

De plus on a $|(b_n - b_{n+1}) A_n| \leqslant M |b_n - b_{n+1}|$.

Le critère des séries alternées se déduit facilement, en effet on prend $a_n = (-1)^n$. Comme la suite $(b_n)_n$ est décroissante la série $\sum_{n \geqslant 0} |b_n - b_{n+1}|$ est téléscopique, elle converge car la suite $(b_n)_n$ l'est aussi.

Exemple 2

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$, étudier la nature de la série $\sum \frac{e^{inq}}{n^\alpha}$.
On applique la proposition d'Abel en posant $b_n = 1/n^\alpha$ et $a_n = e^{inq}$.
D'une part, la suite (b_n) est décroissante et tend vers 0 donc la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente.
D'autre part,

Soit la somme partielle

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikq}.$$

Nous pouvons réécrire cette somme géométrique sous la forme :

$$A_n = \frac{1-e^{i(n+1)q}}{1-e^{iq}}.$$

En utilisant les formules trigonométriques pour simplifier l'expression, nous avons :

$$A_n = \frac{e^{-i\frac{(n+1)q}{2}} - e^{i\frac{(n+1)q}{2}}}{e^{-i\frac{q}{2}} - e^{i\frac{q}{2}}} \cdot \frac{e^{i\frac{(n+1)q}{2}}}{e^{i\frac{q}{2}}}.$$

En factorisant par des exponentielles, on obtient :

$$A_n = e^{i\frac{nq}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)q}{2}\right)}{\sin\left(\frac{q}{2}\right)}.$$

Par conséquent, la norme de A_n est donnée par :

$$|A_n| = \left|\frac{\sin\left(\frac{(n+1)q}{2}\right)}{\sin\left(\frac{q}{2}\right)}\right|.$$

Puisque $q \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, nous avons $\sin\left(\frac{q}{2}\right) \neq 0$, ce qui implique que la suite (A_n) est bornée. En particulier,

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{q}{2}\right)\right|}.$$

Le critère des séries alternées se déduit facilement.
En effet, on prend $a_n = (-1)^n$. Comme la suite (b_n) est décroissante, la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est télescopique, elle converge car la suite (b_n) l'est aussi.

4.1.1. Produit de Cauchy

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy des deux séries u_n et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ avec

$$w_n = \sum_0^n u_k v_{n-k}.$$

Proposition 13

Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors le produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est absolument convergent, et

$$\sum_{0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{0}^{\infty} v_n\right).$$

2 Suites et Séries de Fonctions

1. Suites de fonctions

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On désigne par $F(I;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Par analogie avec les suites numériques, une suite de fonctions est une application de $\mathbb{N}$ dans $F(I;\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on associe une fonction notée f_n. On note cette suite par $(f_n)_n$. Pour x fixé dans I, $(f_n(x))_n$ est une suite numérique.

Exemples

$f_n(x) = (1+x^n)^n$, $f_n(x) = x^n$

1.1. Modes de convergences

1.1.1. Convergence simple

Définition

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I, et $f \in F(I;\mathbb{R})$. On dit que $(f_n)_n$ converge simplement ou ponctuellement vers f sur I si pour tout x dans I la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. En termes de quantificateurs cela veut dire que

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Il faut noter que le n_0 dépend à la fois de x et ε.

Exemples

1) $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$
2) $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers f définie sur $]-1,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et f sa limite simple sur I. On pose la question : quelles sont les propriétés de f_n qui passent à f ?

Proposition 14

a) Si $x \mapsto f_n(x)$ est monotone alors $x \mapsto f(x)$ a le même sens de monotonie.
b) Si $x \mapsto f_n(x)$ est convexe alors $x \mapsto f(x)$ est convexe.

Démonstration.

a) Supposons que $x \mapsto f_n(x)$ est croissante, on a alors

$$x \leqslant y \Rightarrow f_n(x) \leqslant f_n(y) \quad \forall x, y \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}$$

On tend n vers l'infini, on obtient $f(x) \leqslant f(y) \quad \forall x, y \in I$, donc f est croissante sur I.
b) On applique la définition de la convexité de $x \mapsto f_n(x)$ puis on passe à la limite.

De l'exemple 1, on remarque que $x \mapsto f_n(x)$ est non bornée mais f est bornée.

Dans l'exemple 2, $x \mapsto f_n(x)$ est continue sur $]-1, 1]$ mais f ne l'est pas.

On conclut que la convergence simple ne nous permet pas de faire passer toutes les propriétés de f_n à sa limite simple f, ce mode de convergence est donc insuffisant. On a besoin d'un autre mode de convergence plus puissant.

1.1.2. Convergence uniforme

Définition

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I, et $f \in F(I; \mathbb{R})$. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I si

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

C'est-à-dire que la suite numérique $(\sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|)_n$ tend vers 0. En termes de quantificateurs cela veut dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Il faut noter que le n_0 ne dépend que de ε.

Proposition 15

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I, alors $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.

Démonstration.

$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I. Par définition, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \text{donc pour tout } x \in I, \lim_{n \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

En pratique, comment étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions ? Elle se fait en trois étapes :

1) Étudier la convergence simple pour déterminer la limite f.

2) Calculer la suite $a_n = \sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Remarque importante

Si on trouve une suite (β_n) dans I telle que la suite $|f_n(\beta_n)-f(\beta_n)|$ ne tend pas vers 0, alors la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur I, en effet on a l'inégalité évidente

$$|f_n(\beta_n)-f(\beta_n)| \leqslant \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|.$$

Exemples :

1) Étudier la convergence uniforme des suites (f_n) avec $f_n(x)=xe^{-nx}$; $I=[0,+\infty[$.
2) Étudier la convergence uniforme des deux exemples précédents.

Solutions

1) Pour $x>0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} xe^{-nx}=0$ et pour $x=0$, $f_n(0)=0$ donc (f_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle. Pour calculer la suite $a_n=\sup\limits_{x\in I} xe^{-nx}$, on dresse le tableau de variation sur I de la fonction f_n. Sa fonction dérivée est

$$f_n'(x)=(1-nx)e^{-nx}.$$

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
$f_n(x)$	0	$\frac{1}{ne}$	0

Il s'ensuit que $a_n=\dfrac{1}{ne}$ tend vers 0 donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

2) Pour le premier exemple, si on prend $\beta_n=n$, on a $|f_n(\beta_n)-f(\beta_n)|=1$ ne tend pas vers 0. Pour l'autre exemple, $\sup\limits_{x\in]-1,1]}|x^n|=1$.

1.2. Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité

Proposition 16

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) est une suite de fonctions de $F(I;\mathbb{R})$, et $f\in F(I;\mathbb{R})$. On suppose que

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto f_n(x)$ est continue sur I.

2) La suite (f_n) converge uniformément, sur tout segment de I, vers la fonction f alors f est continue sur I.

Remarque :

Cette proposition nous permet aussi de montrer qu'une convergence n'est pas uniforme. À titre d'exemple, la suite des fonctions continues $f_n(x)=x^n$ a une limite qui n'est pas continue donc on ne peut pas avoir la convergence uniforme.

Double limite

Proposition 17

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, une extrémité de I. (f_n) est une suite de fonctions de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On suppose que

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $l_n \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n$.

2) La suite (f_n) converge uniformément sur un voisinage de a.

Alors la suite (l_n) est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Intégration

Proposition 18

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$, et $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto f_n(x)$ est continue sur $[a,b]$.

2) La suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarques :

1) L'hypothèse de la continuité des fonctions f_n est introduite pour assurer l'existence de l'intégrale $\int_a^b f_n(x)\,dx$. La proposition 16 entraîne la continuité de f, donc $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

2) On considère la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n = \dfrac{e^{-(\frac{x}{n})^2}}{n}$. Cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f = 0$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0.$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. On conclut que si on remplace, dans la proposition, le segment $[a,b]$ par un intervalle quelconque, cette proposition n'est plus vraie.

Dérivation

Proposition 19

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) est une suite de fonctions de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On suppose que

1) La suite (f_n) converge simplement sur I vers f.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto f_n(x)$ est de classe C^1 sur I.
3) La suite (f_n') converge uniformément, sur tout segment de I, vers une fonction $g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

Alors

1) La suite (f_n) converge uniformément, sur tout segment de I, vers la fonction f.
2) La fonction f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

Classes supérieures

Proposition 20

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) est une suite de fonctions de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. On suppose que

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto f_n(x)$ est de classe C^p sur I.
2) Pour tout $k \in \{0,1,\dots,p-1\}$, la suite $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers une fonction $g_k \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ avec $g_0 = f$.
3) La suite $(f_n^{(p)})$ converge uniformément, sur tout segment de I, vers une fonction $g_p \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

Alors on a

1) La suite (f_n) converge uniformément, sur tout segment de I, vers la fonction f.
2) La fonction f est de classe C^p sur I et pour tout $k \in \{0,1,\dots,p\}$, $f^{(k)} = g_k$.

2. Séries de fonctions

Comme on l'a fait pour les séries numériques, soit la suite de fonctions (f_n) définie sur I. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ de terme général f_n est par définition la suite de fonctions (S_n) donnée par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad \text{pour } x \in I.$$

S_n est appelée la somme partielle d'ordre n de la série.

Définition

On dit que la série $\sum_{n>0} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur I si la suite (S_n) converge simplement (resp. uniformément) sur I. Dans le cas de la convergence simple, la fonction somme S de la série est définie par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

On la note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$. On peut aussi définir la suite des restes R_n donnée par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \quad \text{pour tout } x \in I \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 21

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I, alors :

1. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite des fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que $S_n - S_{n-1} = f_n$ et que $S - S_n = R_n$.

Remarques :

1. Le point 2) de cette proposition est considéré comme la deuxième définition de la convergence uniforme.

2. En général, l'étude de la convergence uniforme d'une série de fonctions est assez difficile. Pour faciliter cette tâche, on introduit un autre mode de convergence spécifique pour les séries.

2.1. Convergence normale

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I. On dit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I si la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$ est convergente.

Exemple

Étudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général $f_n(x) = xe^{-nx}$, $I = [0, +\infty[$.

D'après le tableau de variation de f_n, on a $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| = \dfrac{1}{ne}$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n}$ est divergente, la série ne converge pas normalement.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I. On dit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge absolument sur I si la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |f_n(x)|$ est convergente pour tout $x \in I$. La proposition suivante résume les relations entre les différents modes de convergence pour les séries de fonctions :

Proposition 22

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I, on a :

1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CN sur $I \Rightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CU sur $I \Rightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CS.

2) $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CN sur $I \Rightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CA sur $I \Rightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CS.

Remarques :

1) Il n'y a aucune relation entre la convergence uniforme et la convergence absolue.

2) S'il existe une suite (b_n) dans I telle que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |f_n(b_n)|$ diverge, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement. En effet, il suffit de remarquer que $|f_n(b_n)| \leqslant \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

Exemple :

Étudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général $f_n(x) = xe^{-nx}$, $I = [0, +\infty[$.
On prend $b_n = \dfrac{1}{n}$, on a alors $f_n(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{ne}$.

2.2. Régularité de la somme d'une série de fonctions

Les propositions vues dans la partie 1.2 peuvent être appliquées aux suites des sommes partielles de séries de fonctions et conduisent aux résultats suivants :

Continuité

Proposition 23

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ est une série de fonctions de $F(I, \mathbb{R})$. On suppose que :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto f_n(x)$ est continue sur I.

2) La suite $(\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n)$ converge uniformément, sur tout segment de I

.

Alors la somme de la série $x \longmapsto \sum\limits_{0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur I.

Exemple

Nature de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{n^2 e^{-nx^2}}{n^3+1}$. Étudier la continuité de la somme de cette série sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{n^2 e^{-nx^2}}{n^3+1} \sim \dfrac{e^{-nx^2}}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 e^{-nx^2}}{n} = 0$, la série numérique est convergente donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$. On peut définir sur $\mathbb{R}^*$ la fonction somme S par $S(x) = \sum\limits_{0}^{+\infty} f_n(x)$.

Pour montrer la continuité de S, on vérifie les hypothèses de la proposition précédente. Les fonctions $x \longmapsto f_n(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$.

Pour vérifier le point 2), on passe par la convergence normale. Soit $[a, b]$, $a > 0$ un segment de $\mathbb{R}^*$, comme la fonction $x \longmapsto e^{-nx^2}$ est décroissante, alors $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leqslant \dfrac{n^2 e^{-na^2}}{n^3+1}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2 e^{-na^2}}{n^3+1}$ est convergente, par suite $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^*$, on conclut la continuité de S.

Double limite

Proposition 24

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, une extrémité de I. $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ est une série de fonctions de $F(I; \mathbb{R})$. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $l_n \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n$.
2. La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur un voisinage de a.

Alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} l_n$ est convergente et

$$\sum_0^{+\infty} l_n = \sum_0^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_0^{+\infty} f_n(x).$$

Intégration

Proposition 25

Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, (f_n) une série de fonctions de $F([a, b]; \mathbb{R})$. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \longmapsto f_n(x)$ est continue sur $[a, b]$.
2. La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \int_a^b f_n(x)\,dx$ est convergente et

$$\sum_0^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_0^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Dérivation

Proposition 26

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ est une série de fonctions de $F(I; \mathbb{R})$. On suppose que :

1. La suite $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \longmapsto f_n(x)$ est de classe C^1 sur I.
3. La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors

1. La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.
2. La fonction somme $S(x) = \sum\limits_0^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur I et $S'(x) = \sum\limits_0^{+\infty} f_n'(x)$.

Classes supérieures

Proposition 27

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est une série de fonctions de $F(I;\mathbb{R})$, et $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \longmapsto f_n(x)$ est de classe C^p sur I.
2. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge simplement sur I.
3. La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors on a

1. La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.
2. La fonction somme $S(x) = \sum_{0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^p sur I et pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$, $S^{(k)}(x) = \sum_{0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$.

3 Séries Entières

1. Généralités

Dans cette partie, on travaillera dans l'ensemble $\mathbb{C}$. On appelle série entière toute série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ telle que $f_n(z) = a_n z^n$ où (a_n) est une suite de nombres complexes. On note cette série entière par $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exemples

$$\sum_{n>0} z^n, \quad \sum_{n>0} \frac{x^n}{n!}$$

On appelle domaine de convergence de la série entière, noté D_c, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n>0} a_n z^n$ converge. Il est clair qu'on a toujours $0 \in D_c$. Dans ce qui suit, on cherche à déterminer ce domaine de convergence, on a d'abord le lemme d'Abel.

Lemme 2

Soient a_n une suite de nombres complexes et $r \in \mathbb{R}^+$. On suppose que la suite $|a_n|r^n$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum_{n>0} a_n z^n$ converge absolument.

Preuve.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leqslant |a_n| r^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leqslant M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

Comme la série numérique $\sum \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ est convergente, c'est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

On déduit du lemme d'Abel que pour un tel réel r, le disque ouvert $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ est inclus dans D_c. On pose

$$A = \{r \geqslant 0 \mid \text{la suite } (|a_n|r^n) \text{ est bornée}\} \quad \text{et} \quad R = \sup A$$

L'ensemble A est non vide car $0 \in A$. L'ensemble $A = \{r \geqslant 0 \mid \text{la suite } (|a_n|r^n) \text{ est bornée}\}$ représente l'ensemble des valeurs de $r \geqslant 0$ pour lesquelles la suite $(|a_n|r^n)$ est bornée.

Cet ensemble n'est pas majoré en général, car il peut contenir des valeurs arbitrairement grandes de r. Par exemple, si les coefficients $|a_n|$ sont tous égaux à zéro à partir d'un certain rang (ou décroissent très rapidement), alors pour des valeurs de r très grandes, la suite $(|a_n|r^n)$ pourrait toujours rester bornée. Dans ce cas, l'ensemble A peut contenir des valeurs de r aussi grandes que l'on veut, et donc il n'a pas de borne supérieure.

Plus précisément, l'absence de borne supérieure de A signifie que l'on ne peut pas fixer un maximum pour les valeurs de r qui garantissent que $(|a_n|r^n)$ reste bornée.

Comme A n'est pas forcément majoré, on a $R \in [0,+\infty]$ et il s'appelle le rayon de convergence de la série entière.

Remarque 7

Si la suite (a_n) est bornée, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.

Proposition 28

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

1. Si $|z| < R$ alors $\sum\limits_{n>0} a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$ alors $\sum\limits_{n>0} a_n z^n$ diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers 0).
3. Si $|z| = R$ alors on ne peut pas conclure en général.

Preuve.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. On prend $r \in]|z|, R[$, alors $r \in A$, ce qui fournit que la suite $(|a_n|r^n)$ est bornée et

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |a_n|r^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. De la définition de R, on déduit que la suite $(|a_n z^n|)$ n'est pas bornée, donc elle ne tend pas vers 0.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On appelle disque ouvert de convergence (resp. disque fermé) l'ensemble $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ (resp. $D[0,R] = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$). D'après la proposition précédente, on a $D(0,R) \subseteq D_c \subseteq D[0,R]$.

Corollaire 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $\sum a_n z^n$ converge, alors $R \geq |z|$.
- Si $\sum a_n z^n$ diverge, alors $R \leq |z|$.

Remarque 8

Si la suite (a_n) ne converge pas vers 0, la série $\sum a_n$ diverge. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est inférieur ou égal à 1.

Exemple 3

Considérons la série entière $\sum \cos(n) z^n$. Notons R son rayon de convergence.

- La suite de terme général $\cos(n)$ est bornée, donc $R \geq 1$.
- La suite $(\cos(n))$ ne converge pas vers 0, donc $R \leq 1$.

Ainsi $R = 1$.

Proposition 29

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux series entieres de rayon de convergence R_a et R_b respectivement
Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_a \geqslant R_b$

Preuve.

$r \geqslant 0 : |a_n r^n| \leqslant |b_n r^n|$

donc $(b_n r^n)_n$ est bornée $\Rightarrow$ $(a_n r^n)_n$ est bornée

$\Rightarrow \{r \geqslant 0 \quad / \quad (b_n r^n)_n \text{ est bornée } \} \subset \{r \geqslant 0 \quad / \quad (a_n r^n)_n \text{ est bornée } \}$

$\Rightarrow R_b \leqslant R_a$

En pratique si $|c_n| \leqslant |a_n| \leqslant |b_n|$

$R_b = R_c \Rightarrow R_a = R_b = R_c$

Remarque 9

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad R_{cv}(\sum a_n z^n) = R_{cv}(\sum \lambda a_n z^n)$$

Preuve.

$r \geqslant 0 \quad (a_n r^n)_n$ est bornee $\Rightarrow (\lambda a_n r^n)_n$ est bornee

Proposition 30

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement R_a, R_b. On a

1. $|a_n| = O(|b_n|) \Rightarrow R_a \geqslant R_b$
2. $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$

Preuve.

a. $a_n = O(b_n) \Rightarrow \exists \lambda > 0$ tel que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > N, |a_n| \leqslant \lambda |b_n|$

$$\Rightarrow R_b \leqslant R_a$$

Donc $a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geqslant R_b$

b. $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow \begin{cases} b_n = O(a_n) \\ a_n = O(b_n) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_a \leqslant R_b \\ R_b \leqslant R_a \end{cases} \quad \Rightarrow R_a = R_b$$

Exemples 1

a. $R_{cv}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) z^n\right) = 1$, En effet,

$|\sin(n)| \leqslant 1$

$\Rightarrow R_{cv}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n)z^n\right) \geqslant R_{cv}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) = 1$

D'autre part :

$\sin \nrightarrow 0 \Rightarrow \sum \sin n$ diverge

$\Rightarrow 1 \notin \{|z| / \sum \sin nz^n \text{ cv}\}$

$\Rightarrow R_{cv}\left(\sum \sin nz^n\right) \leqslant 1$

b. $R_{cv}\sum e^n z^n = \dfrac{1}{e}$

Car $\left(e^n z^n\right)_n$ est bornée ssi $|ez| \leqslant 1$ ssi $|z| \leqslant \dfrac{1}{e}$

D'autre part :

$chn = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2} \sim \dfrac{e^n}{2}$

Donc :

$R_{cv}\left(\sum_{n\geqslant 1} chnz^n\right) = R_{cv}\left(\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{e^n}{2}z^n\right) = \dfrac{1}{e}$

2. Règles pratiques pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière

Proposition 31

Règle de D'Alembert

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in [0,+\infty]$ alors

$$R = \frac{1}{l}$$

Preuve.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ posons $u_n = \left|a_n z^n\right|$

On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \to l|z|$

$|z| < \dfrac{1}{l} \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument

$|z| > \dfrac{1}{l} \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement

d'où le résultat.

Proposition 32

Règle de Cauchy

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l \in [0,+\infty]$ alors

$$R = \frac{1}{l}$$

Preuve.

pour $z \in \mathbb{C}^*$, posons $u_n = |a_n z^n|$

On a : $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow l|z|$

$|z| < \frac{1}{l} \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge

$|z| > \frac{1}{l} \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

D'où :

$$R_{cv}\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) = \frac{1}{l}$$

Car $R_{cv}\left(\sum a_n z^n\right) = \sup\left\{|z|/\sum a_n z^n \text{ cv Ab}\right\}$

$= \inf\left\{|z|/\sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}\right\}$

Exemples

Déterminer le rayon de convergence d'une série entière de coefficients a_n donnés par :

1. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 1$, $R = 1$
2. $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4n+2} \to 0$, $R = +\infty$
3. $a_n = \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{4\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \to \frac{1}{8}$, $R = 8$
4. $a_n = \frac{(-1)^n}{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2n+1} \to 0$, $R = +\infty$
5. $a_n = (\sqrt{n})^n$

   $R_{cv}\left(\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt{n}\right)^n z^n\right) = 0$

   En effet, $a_n = \left(\sqrt{n}\right)^n$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$
6. $a_n = \frac{C_{2n}^n}{n^n}$ $R_{cv}\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{C_{2n}^n}{n^n} z^n\right) = +\infty$

   car,

   Posons :

$$a_n = \frac{C_{2n}^n}{n^n} = \frac{(2n)!}{n^n (n!)^2}$$

   Vu la formule de Stirling :

$$a_n \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^n \sqrt{4\pi n}}{n^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}^2 = \frac{4^n n^{2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} n^n 2\pi n} = b_n$$

$$b_n = \left(\frac{4}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\sqrt[n]{b_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^{1/n} \times \left(\frac{4}{n}\right) \to 0$$

3. Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement R_a, R_b. On a :

(a) La série somme est $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour $|z| \leqslant \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la série multiplication par un scalaire est $\sum (\lambda a_n) z^n$ de même rayon de convergence R_a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(c) La série produit de Cauchy est $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ de rayon de convergence $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour $|z| \leqslant \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$$

Preuve.

(a) Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si $r < \min(R_a, R_b)$, alors la suite $((a_n + b_n) r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée comme somme de deux suites bornées. Donc le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est $R \geqslant r$. Ceci étant vrai quel que soit $r < \min(R_a, R_b)$, on en déduit $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

En effet Si la série

$$\sum (a_n + b_n) z^n$$

converge pour tout $r < \min(R_a, R_b)$, cela signifie que le rayon de convergence R de cette série ne peut pas être plus petit que $\min(R_a, R_b)$, car le rayon de convergence est le plus grand r pour lequel la série converge.

En résumé, si la série

$$\sum (a_n + b_n) z^n$$

converge pour tous les r plus petits que $\min(R_a, R_b)$, cela montre que son rayon de convergence R est au moins égal à $\min(R_a, R_b)$, c'est-à-dire

$$R \geqslant \min(R_a, R_b).$$

Si $R_a < R_b$ par exemple, alors pour $R_a < r < R_b$, la suite $((a_n + b_n) r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée comme somme d'une suite bornée et d'une suite non bornée, donc $r \geqslant R$. Ceci étant vrai quel que soit $r \in]R_a, R_b[$, on en déduit $R_a \geqslant R$, et donc finalement $R = R_a$.

(c) Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes (d'après le lemme d'Abel), donc la série produit $\sum c_n z^n$ est absolument convergente et le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.

4. Propriétés de la somme d'une série entière, cas réel

4.1. Continuité

Proposition 33

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et $0 < r < R$. La série converge normalement sur tout segment $[-r, r]$.

Preuve.

Soit $|x| \leqslant r$, on a $|a_n||x|^n \leqslant |a_n|r^n$. Comme $0 < r < R$, la série numérique $\sum |a_n|r^n$ converge.

Comme conséquence de cette proposition, on a :

Proposition 34

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors sa somme f est continue de $]-R, R[$ à $\mathbb{R}$.

Preuve.

On a la convergence normale sur tout segment de $]-R, R[$.

4.2. Dérivée

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On appelle série dérivée de $\sum a_n x^n$ la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$.

Remarque 10

Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

Proposition 35

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors sa somme f est de classe $C^1(]-R, R[; \mathbb{R})$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

On peut dériver plusieurs fois :

Proposition 36

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors sa somme f est de classe $C^\infty(]-R, R[; \mathbb{R})$ et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

Cette proposition nous permet d'établir un lien entre les coefficients de la série et les dérivées de sa somme.

Corollaire 3

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de somme f, alors $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

En déduire de ce corollaire l'unicité des coefficients d'une série entière :

Proposition 37

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement R_a, R_b et de sommes respectivement f et g. On a les équivalences suivantes :

(a) $\forall x \in]-\min(R_a,R_b), \min(R_a,R_b)[, f(x) = g(x) \implies a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

(b) i. Si f est paire, alors $a_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

ii. Si f est impaire, alors $a_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Preuve.

(a) On a $\forall x \in]-\min(R_a,R_b), \min(R_a,R_b)[, f(x) = g(x)$ ce qui donne $(f-g)(x) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n$.

D'après la proposition précédente, $a_n - b_n = \dfrac{(f-g)^{(n)}(0)}{n!} = 0$.

(b) (a) et (b) évidents.

4.3. Intégration d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On appelle série primitive de $\sum a_n x^n$ la série $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. Ces deux séries entières ont le même rayon de convergence.

Proposition 38

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f, alors pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

4.4. Développement en série entière d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $0 \in I$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe une série entière de rayon de convergence R telle que

$$\forall x \in I \cap]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

4.5. Conditions nécessaires du développement d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $0 \in I$, supposons qu'elle est développable en série entière au voisinage de 0 alors nécessairement :

(a) f est de classe C^∞ au voisinage de 0.

(b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

On appelle série de Taylor associée à f la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Donnons une condition suffisante pour obtenir le point 2.

Proposition 39

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $0 \in I$. On suppose que

(a) f est de classe C^∞ sur I.

(b) $\exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)| \leqslant M$.

Alors, la série de Taylor associée à f a pour somme f.

Preuve.

Écrire la formule de Taylor de f au voisinage de 0 à l'ordre n.

5. Développements en séries entières des fonctions usuelles

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^7}{5040} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \cdots \qquad |z| < 1.$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \cdots \qquad |z| < 1.$$

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots \qquad z \in [-1, 1[.$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \qquad z \in]-1, 1].$$

$$\operatorname{argth}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \cdots \qquad z \in]-1, 1[.$$

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots \qquad z \in [-1, 1].$$

4 Séries de Fourier

1. Fonctions continues par morceaux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue (resp. de classe C^1) par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ la restriction $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est continue (resp. de classe C^1) et prolongeable à une fonction continue (resp. de classe C^1) sur $[a_i,a_{i+1}]$.
On dit que f est continue (resp. de classe C^1) par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue (resp. de classe C^1) par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.
Soient f et g deux fonctions continues (resp. de classe C^1) par morceaux et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et λf sont continues (resp. de classe C^1) par morceaux.
Remarques
La définition d'une fonction continue (resp. de classe C^1) par morceaux signifie que la restriction de f à $]a_i,a_{i+1}[$ a une limite (resp. une dérivée) réelle en a_i à droite et en a_{i+1} à gauche.
Exemples
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π, impaire et $f(x) = e^x$ sur $[0,\pi]$.

2. Coefficients de Fourier

Soit donc f une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les nombres complexes définis par

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-in\omega t} f(t)\,dt \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont eux définis par

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_a^{T+a} f(t)\,dt \quad a \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_a^{T+a} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_a^{T+a} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad a \in \mathbb{R}$$

La série de Fourier de f est alors définie par

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

On peut également l'exprimer avec les coefficients exponentiels :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$$

Le problème est maintenant le suivant : la série de Fourier de f converge-t-elle ? Si oui, est-ce vers f ? En quel sens ? On a le résultat suivant :

Proposition 40. Théorème de Dirichlet

Soit donc f une fonction T-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier de f converge simplement vers la fonction $\tilde{f}$ donnée par

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où $f(x+0)$ et $f(x-0)$ sont respectivement les limites à droite et à gauche de f en x. Si de plus f est continue, la convergence devient normale.