

2 Hydrodynamik

Lernziele

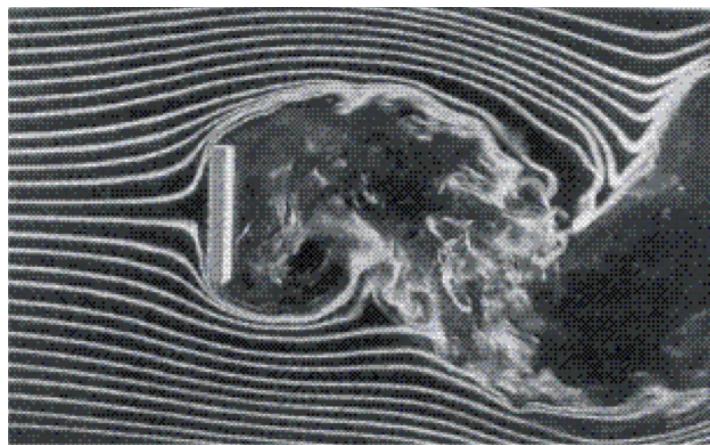
- Sie kennen und verstehen die Kontinuitätsgleichung und können sie anwenden.
 - Sie verstehen die Herleitung der Bernoulli-Gleichung und können mit der Gleichung verschiedene Anwendungen lösen.
 - Sie verstehen den Magnus-Effekt und können ihn in neuen Situationen anwenden.
 - Sie verstehen den Auftrieb bei Tragflächen und können die Formel anwenden.
-

Die Hydrodynamik beschäftigt sich mit der Strömung von Fluiden, zu denen Gase und Flüssigkeiten gehören. Diese können sehr komplexe Bewegungen aufweisen, weshalb in der Forschung hauptsächlich mit Simulationen gearbeitet wird und kaum formale Modelle verwendet werden. Um jedoch interessante Gesetzmäßigkeiten ableiten zu können, müssen die Fluidbewegungen stark vereinfacht werden. Dabei werden im Wesentlichen zwei Typen unterschieden:

- *ideale Flüssigkeit*, d. h. die inneren Reibungskräfte der Flüssigkeit sind vernachlässigbar klein. Zum Beispiel Strömung von Luft an glatten Tragflächen oder Helium durch Röhren.
- *zähe Flüssigkeiten oder hohe Viskosität*, d. h. die inneren Reibungskräfte sind gross. Zum Beispiel Honig oder Sirup.

Im Wesentlichen befinden sich reale Flüssigkeiten zwischen diesen zwei extremen Fällen. Bei Strömungen unterscheidet man

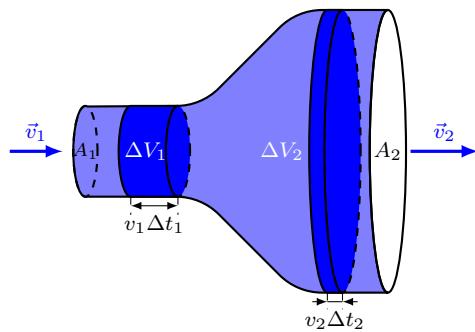
- *laminare Strömung*, d.h. die inneren Reibungskräfte sind gross gegenüber den beschleunigenden Kräften. Dies hat zur Folge, dass die Stromlinien sich innerhalb der Flüssigkeit nebeneinander herbewegen. Zum Beispiel zeigt Wasser ein solches Verhalten, wie das folgende Video zeigt: [Laminare Strömung](#).
- *turbulente Strömung*, d. h. die inneren Reibungskräfte sind klein gegenüber den beschleunigenden Kräften. Es entstehen Wirbel, welche die Stromlinien völlig durcheinander mischen können (vgl. Abb.).



In vielen Fällen können wir jetzt ideale Flüssigkeiten und laminare Strömungen betrachten, um auf dieser Stufe die Mathematik nicht unnötig kompliziert werden zu lassen. Als Erstes betrachten wir nun die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*.

2.1 Kontinuitätsgleichung

Betrachten wir eine Flüssigkeit, die sich durch eine Röhre in eine Richtung bewegt. Die Querschnittsfläche der Röhre variiert. Grundsätzlich zeigt sich dies wie folgt:



Die dunkelblau markierten Teilvolumina $\Delta V_{1,2}$ sind die Mengen, die innerhalb einer bestimmten Zeit $\Delta t_{1,2}$ in ΔV_1 hinein und aus ΔV_2 herausfliessen. Für eine nicht komprimierbare (inkompressible) Flüssigkeit gilt, wenn die Zeitintervalle gleich sind ($\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$):

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t.$$

Nach Vereinfachung der letzten Gleichung erhalten wir:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Dieses Produkt wird als Volumenstrom bezeichnet und ergibt sich aus der Multiplikation der Querschnittsfläche mit der Geschwindigkeit.

Def. 1: (Volumenstrom) Der Volumenstrom \dot{V} eines Fluida in einer Röhre mit der Querschnittsfläche A , das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, ist

$$\dot{V} = Av$$

Beachten Sie, dass die Einheit Volumen pro Sekunde ist, d. h. $[\dot{V}] = \text{m}^3/\text{s}$.

Damit lässt sich nun die Kontinuitätsgleichung formulieren:

Ges. 1: (Kontinuitätsgleichung) Für ein inkompressibles Fluidum ist der Volumenstrom \dot{V} konstant, d. h.

$$\dot{V} = \text{konst.}$$

Dazu betrachten wir nun zwei Beispiele aus der Biologie, speziell aus der Medizin.

Bsp. i.

Blut fliesst mit der Geschwindigkeit von etwa 30 cm/s durch die Aorta, wenn der Radius dieser etwa 1 cm beträgt. Bestimmen Sie daraus den Volumenstrom. Lsg: $\dot{V} \approx 9,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

Lösung:

Das folgende Beispiel soll die Frage beantworten, warum Raucher oft unter Bluthochdruck leiden, jedoch ausschließlich aus physikalischer Perspektive, ohne Berücksichtigung der chemischen Gründe.

Bsp. ii.

Blut fließt von einer grossen Arterie bei einem Radius von 0.3 cm mit 10 cm/s in einen Bereich mit nur noch 0.2 cm (z. B. durch Ablagerung). Bestimmen Sie in diesem zweiten Bereich die Geschwindigkeit. Lsg: $v_2 \approx 22.5 \text{ cm/s}$

Lösung:

Wir führen nun die zentrale Gleichung der Strömungslehre her. Diese ist nach ihrem Entdecker benannt und wird als *Bernoulli-Gleichung* bezeichnet.

2.2 Bernoulli-Gleichung

Die Bernoulli-Gleichung geht auf Daniel Bernoulli¹ zurück und stellt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit eines Fluida und dem dabei herrschenden Druck dar.

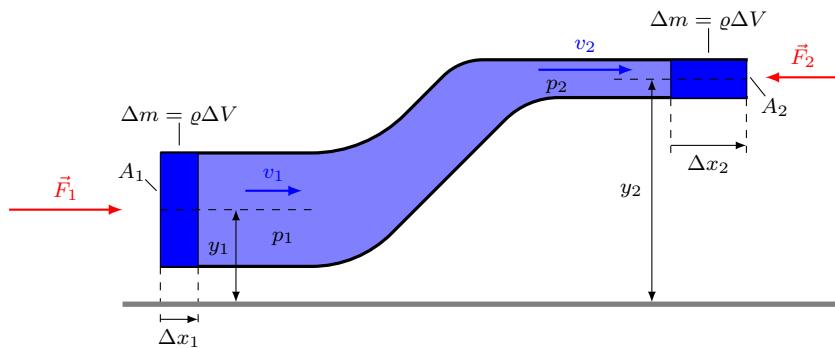


D. Bernoulli
(1700-1782)

Daniel Bernoulli war ein herausragender Schweizer Mathematiker und Physiker des 18. Jahrhunderts, der für seine Arbeit auf dem Gebiet der Hydrodynamik und der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt ist. Eine seiner wichtigsten Leistungen war die Formulierung des Bernoulli-Effekts. Dieser Effekt ist von grundlegender Bedeutung für das Verständnis von Strömungen und hat zahlreiche Anwendungen in Bereichen wie Luftfahrt, Medizin und Ingenieurwesen. Darüber hinaus leistete Bernoulli bedeutende Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie, insbesondere durch seine Arbeiten zum Gesetz der grossen Zahlen und zur Bernoulli-Verteilung, die wichtige Konzepte in der Statistik darstellen.

Wenn ein Fluid horizontal durch ein sich verengendes Rohr strömt, nimmt die Strömungsgeschwindigkeit entsprechend der Kontinuitätsgleichung an der Verengung zu. Die Teilchen erfahren in diesem Bereich eine Beschleunigung und dadurch eine Erhöhung der kinetischen Energie. Dies führt jedoch zu einem Absinken der potentiellen Energie. Im vorliegenden Fall resultiert dies in einem Druckabfall.

Zur Erläuterung betrachten wir den allgemeinen Fall einer Röhre, bei der sich sowohl die Querschnittsfläche als auch die Höhe über dem Boden verändert. Hierzu dient der folgende Querschnitt:



Betrachten wir zuerst die Arbeit, welche geleistet werden muss, um das Massenelement Δm hochzuheben. Es gilt aus der Sicht der Flüssigkeit

$$W_{k_0} = -F_g \Delta y = -\Delta m g(y_2 - y_1) = \rho \Delta V g y_1 - \rho \Delta V g y_2.$$

Des Weiteren müssen wir sowohl gegen den Druck p_1 als auch gegen den Druck p_2 kämpfen, wobei darin der Schweredruck nicht enthalten ist. Diese zusätzliche Arbeit ist:

$$W_{k_1} = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V$$

¹Daniel Bernoulli (29. Januar 1700 in Groningen - 17. März 1782 in Basel) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker aus der Gelehrtenfamilie Bernoulli.

und analog für den zweiten Druck, wobei die Kraft anti-parallel zur Wegänderung ist, d. h.

$$W_{k_2} = -F_2 \Delta x_2 = -p_2 A_2 \Delta x_2 = -p_2 \Delta V.$$

Durch diese konservative Arbeite wird die potentielle Energie des Fluidums geändert. Die kinetische Energie des Massenelement Δm ist:

$$E_{\text{kin}_1} = \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \varrho \Delta V v_1^2$$

respektive

$$E_{\text{kin}_2} = \frac{1}{2} \varrho \Delta V v_2^2.$$

Für ideale, d. h. reibungsfreie Fluida ist die Änderung der kinetischen Energie gleich der Summe der konservativen Arbeiten. Damit erhalten wir:

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{ges},k} \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{1}{2} \varrho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \varrho \Delta V v_1^2 = \varrho \Delta V g y_1 - \varrho \Delta V g y_2 + p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \quad (\text{D.2})$$

Wir vereinfachen diese Beziehung zu:

$$\frac{1}{2} \varrho v_2^2 - \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = \varrho g y_1 - \varrho g y_2 + p_1 - p_2$$

oder wenn wir unten (1) von oben (2) trennen:

$$p_1 + \varrho g y_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \varrho g y_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2.$$

Daraus lässt sich die Bernoulli-Gleichung nun aufschreiben:

Ges. 2: (Bernoulli-Gleichung) Für reibungsfreie, inkompressible Fluida der Dichte ϱ mit äusserem Druck p und Geschwindigkeit v und Höhe h bzgl. einem Nullpunkt, gilt:

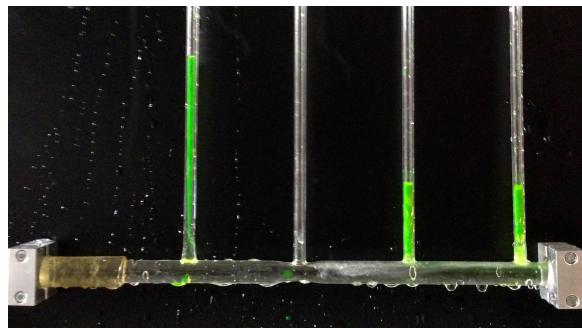
$$p + \varrho g h + \frac{1}{2} \varrho v^2 = p_{\text{ges}} = \text{konst.}$$

wobei $p_{\text{St}} = \frac{1}{2} \varrho v^2$ der Staudruck und $p_{\text{ges}} - p_{\text{St}} = p + \varrho g h$ der statische Druck darstellt.

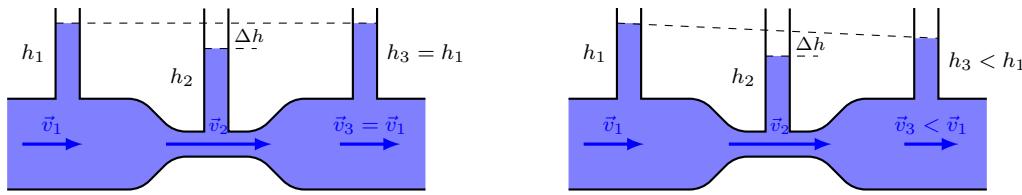
Beachten Sie, dass die Summe der Drucke konstant ist, d. h. jedoch, wenn der Staudruck gross ist, ist an dieser Stelle der statische Druck klein, was durch das folgende Experiment verdeutlicht wird.

Exp. 1: Bernoulli-Versuch

In diesem Versuch wird ein horizontales Rohr mit konstanter Höhe untersucht, wodurch sich die Bernoulli-Gleichung vereinfacht zu: $p + \frac{1}{2} \varrho v^2 = p_0$. Es gibt insgesamt ein horizontales Rohr und vier damit verbundene vertikale Rohre, die nach oben offen sind. Das Rohr verengt sich unter dem zweiten vertikalen Rohr. Wenn Wasser mit einer konstanten Einlaufgeschwindigkeit durch das Rohrsystem fliest, entsteht folgendes Bild.



Durch das Experiment wird deutlich, dass der Druck an der verengten Stelle deutlich geringer ist, wie sich am Schweredruck zeigen lässt. Energetisch kann argumentiert werden, dass die Energie, die für die Erhöhung der Geschwindigkeit verwendet wird, auf Kosten der potentiellen Energie geht. Gleichzeitig beobachtet man, dass die Wassersäule nach der Verengung nicht mehr gleich hoch ist wie vorher. Dies ist auf die innere Reibung zurückzuführen, die die Energieerhaltung verletzt, da es sich hier um eine reale Flüssigkeit handelt. Bei einer idealen Flüssigkeit steigt der Pegel nach der Verengung wieder genau gleich hoch. Das Ergebnis ist wie folgt dargestellt (ideale Flüssigkeit links und reale Flüssigkeit rechts):



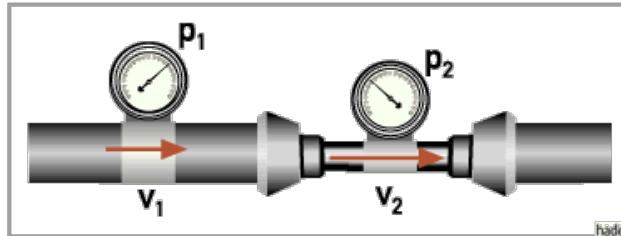
Dieser Effekt, der nach dem italienischen Physiker Giovanni Battista Venturi benannt ist, wurde bereits im 18. Jahrhundert von ihm entdeckt. Wie festgestellt wurde, ist die Fließgeschwindigkeit einer inkompressiblen Flüssigkeit, die durch ein Rohr fliesst, umgekehrt proportional zum sich verändernden Rohrquerschnitt. Dieses Ergebnis ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung. Die Bernoulli-Gleichung liefert uns nun eine Erklärung dafür. Im nächsten Beispiel soll die Druckänderung formell berechnet werden.

Bsp. iii.

Betrachten wir wieder ein horizontales Rohr mit veränderlichem Querschnitt $A_1 \rightarrow A_2 < A_1$. Die Geschwindigkeit sei zu Beginn v_1 . Bestimmen Sie daraus die Druckänderung Δp sofern die Dichte der Flüssigkeit ρ ist.
Lsg: —

Lösung:

Eine Anwendung, die nicht nur in der Technik, sondern auch in der Medizin zu finden ist, ist die *Venturi-Düse*. Diese besteht aus einer Verengung sowie zwei Druckmessern und kann anhand des folgenden Bildes aus [29] veranschaulicht werden.



Unter Berücksichtigung der oben genannten Prinzipien lautet die überarbeitete Fassung: Bei Kenntnis der Querschnittsflächen kann man aus dem oben beschriebenen Ergebnis direkt die Geschwindigkeit v_1 ableiten, da der Druck in diesem Fall direkt abgelesen werden kann. Es empfiehlt sich in der Regel, ein ganzzahliges Verhältnis zwischen den Querschnittsflächen zu wählen. Sei q dieses Verhältnis, so ergibt sich:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho} \left(\frac{1}{1-q^2} \right)}.$$

Für den Fall, dass sich die Querschnittsfläche halbiert, vereinfacht sich das Ergebnis noch weiter, wir erhalten:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2|\Delta p|}{3\rho}}.$$

Der Betrag ergibt sich aus der Tatsache, dass der Druck abnimmt und somit negativ ist. Diese negative Druckänderung wird durch den ebenfalls negativen Faktor $\frac{1}{1-q^2}$ kompensiert. Dadurch ist es möglich, die Geschwindigkeit direkt aus der Druckänderung abzulesen, vorausgesetzt man hat den Faktor für verschiedene Flüssigkeiten notiert.

Ein weiteres Experiment, welches oft überrascht und nun durch die Bernoulli-Gleichung erklärt wird, ist folgendes:

Exp. 2: Hydrodynamisches Paradoxon

Zwei Blätter werden mit einem kleinen Abstand von etwa 1 - 2 cm zueinander gehalten. Anschliessend wird durch Blasen ein Luftstrom erzeugt. Was passiert?

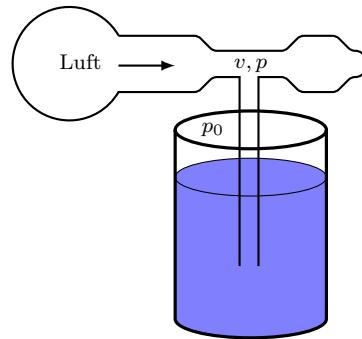
Durch die schnellere Bewegung der Luft zwischen den Blättern als ausserhalb von ihnen, entsteht ein geringerer Druck im Inneren nach dem Bernoulli-Prinzip im Vergleich zum Aussenbereich. Dies führt dazu, dass die Blätter zusammengedrückt werden.

Ein ähnliches Experiment, das von der Universität Würzburg auf ihrer Website zur Verfügung gestellt wird, soll hier noch gezeigt werden: [Hydrodynamisches Paradoxon mit Trichter](#).

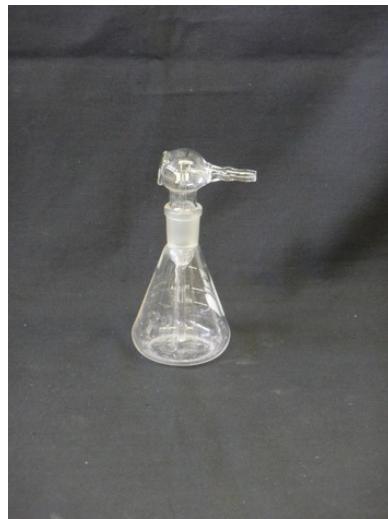
Der Zerstäuber ist eine Anwendung der Bernoulli-Gleichung, die im nachfolgenden Experiment kurz demonstriert wird.

Exp. 3: Zerstäuber

Ein Zerstäuber nebelt Flüssigkeit durch einen kurzen Luftstrom, beispielsweise durch den Mund, ein. Ein solcher Zerstäuber kann im Prinzip wie folgt aussehen.



In der Sammlung haben wir eine etwas abgewandelte Version, welche jedoch vom Prinzip her identisch ist (vgl. Abb.).

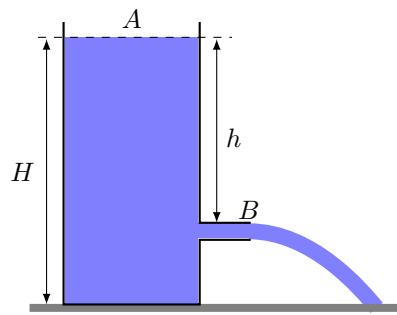


Durch den Luftstrom v wird der Druck im Rohr $p < p_0$ verringert, sodass er niedriger als der äussere Druck ist. Dadurch wird das Wasser hochgedrückt bzw. angesogen und spritzt sofort durch den Luftstrom heraus.

In den Hydrostatik-Übungen haben wir ein Beispiel gelöst, welches sich nun schnell und einfach lösen lässt.

Bsp. iv.

Ein Gefäss (vgl. Abb.) mit einem Loch auf der Höhe $H - h$ ist genügend hoch, im Vergleich zur Ausflussmenge (z. B. ein Stausee), dass der Wasserpegel bei H sich kaum ändert.



Bestimmen Sie die Ausflussgeschwindigkeit.

Lsg: —

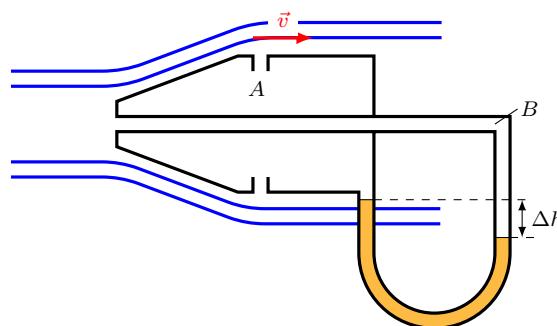
Lösung:

Dieser Sachverhalt ist allgemein als das "Gesetz von Torricelli" bekannt. Es besagt, dass die Ausflussgeschwindigkeit aus einem Gefäß direkt proportional zur Quadratwurzel der Füllhöhe ist. Bernoulli konnte mit der Herleitung seiner Gleichung die bestehenden Gesetze auf die Energieerhaltung bewegter Flüssigkeiten zurückführen.

Abschliessend betrachten wir ein Beispiel aus der Luftfahrt, das sogenannte Prandtlsche Staurohr. Dieses wurde aus der Veröffentlichung von [36] entnommen.

Bsp. v.

Das Prandtlsche Staurohr wird als Geschwindigkeitsmesser bei Flugzeugen gebraucht (vgl. Abb.). Luft staut sich in einem Rohr bei B und fliesst an den Öffnung A vorbei. Der Druckunterschied zwischen B und A lässt sich mit einem Wasserbarometer oder mit elektronischen Drucksensoren messen.



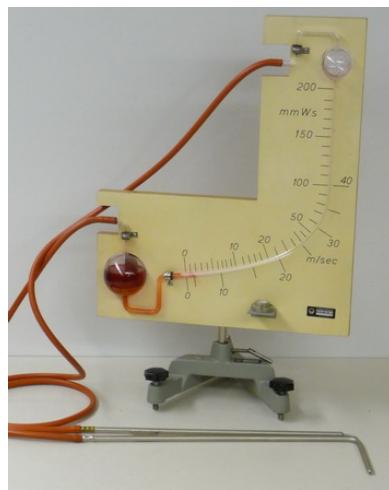
Wie berechnet man die Relativgeschwindigkeit zur Luft aus dem Höhenunterschied Δh der Wassersäulen, wenn die Luftpumpe bekannt ist? Lsg: –

Lösung:

Wir haben auch ein solches Rohr in unserer Sammlung, das als Experiment vorgeführt werden kann.

Exp. 4: Prandtl Staurohr

Das soeben hergeleitete kann mit dem Prandtl-Staurohr gezeigt werden.



Je mehr Druck auf den Schlauch ausgeübt wird, desto höher steigt der Pegel der gelben Flüssigkeit im Schlauch. Der Druck wird im Experiment in mmWS gemessen, was für *Millimeter Wassersäule* steht.

Natürlich gibt es noch zahlreiche weitere Anwendungen des Bernoulli-Gesetzes. Insbesondere angehende Ärzte werden in Zukunft noch eine Reihe davon kennenlernen, auf die wir aus Zeitgründen hier jedoch nicht im Detail eingehen können. Abschliessend betrachten wir in diesem Kapitel noch einige Effekte der Aerodynamik.

2.3 Aerodynamik

Die Hochschule bietet eine eigenständige Vorlesung zur Aerodynamik an, die sich mit dem Verhalten von luftumströmten Körpern beschäftigt. In diesem Kontext sollen nun zwei bis drei spezifische Effekte genauer beleuchtet werden.

Aerodynamik spielt nicht nur in der Luftfahrt, sondern auch in der Automobilindustrie eine bedeutende Rolle. Ein Schlüsselziel in der Automobilbranche ist die Reduzierung des Benzinverbrauchs, wobei die Minimierung des Luftwiderstands eine effektive Methode darstellt. Ohne den Einsatz von Windkanälen zur Entwicklung von Formel-1-Rennwagen wäre kein Rennteam heute noch wettbewerbsfähig. In der Formel 1 wird intensiv daran gearbeitet, den Strömungswiderstand zu verringern und den dynamischen Auftrieb zu minimieren.²

2.3.1 Dynamischer Auftrieb

Wenn sich ein Körper in einem strömenden Medium, sei es eine Flüssigkeit oder ein Gas, befindet, wirken auf ihn nicht nur Widerstandskräfte (in Luft als Luftwiderstand bezeichnet), sondern auch Kräfte, die quer zur Strömungsrichtung verlaufen. Dies lässt sich anschaulich anhand von zwei Beispielen verdeutlichen: einem

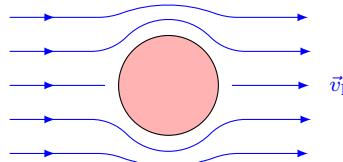
²Beachten Sie, dass in der Formel 1 das Auto eine möglichst grosse Bodenhaftung haben soll. Dies erreicht man dadurch, dass man anstatt eines dynamischen Auftriebs einen dynamischen Abtrieb versucht zu maximieren.

rotierenden Zylinder und einer Tragfläche.

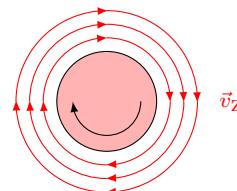
Um dies zu verdeutlichen, sollen nun zwei Beispiele näher erläutert werden: ein rotierender Zylinder und eine Tragfläche.

Magnus-Effekt

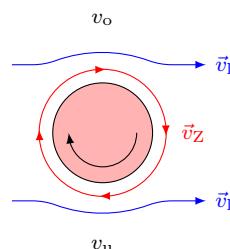
In einer laminaren Strömung mit der Geschwindigkeit \vec{v}_l , die symmetrisch um einen Kreiszylinder fliesst, ergibt sich, wenn der Zylinder ruht, in erster Linie eine Widerstandskraft in Strömungsrichtung. Diese Widerstandskraft entsteht durch die Reibung zwischen der Strömung und der Oberfläche des Zylinders, wie in der Abbildung dargestellt.



Wenn der Körper mit der Geschwindigkeit \vec{v}_z gedreht wird, ohne sich in einer Strömung zu befinden, führt dies zur Rotation einer Grenzschicht infolge der Reibung, wie in der Abbildung dargestellt.



Die Überlagerung der beiden Strömungsbilder führt zu einer Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit oberhalb des rotierenden Zylinders ($v_o = v_l + v_z$) und zu einer Verringerung unterhalb des Zylinders ($v_u = v_l - v_z$), wie in der folgenden Abbildung angedeutet ist.



Diese Differenz im Strömungsverhalten führt gemäss dem Bernoulli-Prinzip zu einem Druckunterschied zwischen der Ober- und Unterseite des rotierenden Zylinders und resultiert in einer Auftriebskraft nach oben. Dieser Effekt wurde von Magnus³ entdeckt und wird heute als Magnus-Effekt bezeichnet. Um diesen Effekt zu verdeutlichen, schauen Sie sich bitte das folgende Video an: [Basketball vom Stausee](#).

Um den Magnus-Effekt weiter zu veranschaulichen, führen wir nun ein Experiment durch.

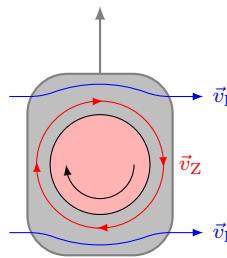
Exp. 5: Rotierender Zylinder

Ein Zylinder ist auf einem Wagen montiert, und dieser Zylinder kann sich drehen, wie in der Abbildung dargestellt. Durch einen Elektromotor wird der Zylinder in Rotation versetzt und dann durch einen Luftstrom in Bewegung gesetzt.



³Heinrich Gustav Magnus (2. Mai 1802 in Berlin - 4. April 1870 in Berlin) war ein deutscher Physiker und Chemiker. Er entdeckte ein Platinsalz (Magnus-Salz), stellte die Magnus-Formel auf und lieferte die physikalische Erklärung eines Phänomens, das seitdem ebenfalls mit seinem Namen verbunden ist (Magnus-Effekt).

Der Zylinder dreht sich im Uhrzeigersinn, während der Luftstrom von links kommt. Dadurch entsteht oben ein niedrigerer Druck, da die Geschwindigkeit grösser ist, und unten ein höherer Druck, da die Geschwindigkeit geringer ist, wie in der Skizze dargestellt.



Dadurch bewegt sich der Wagen nach oben, und wir haben eine Art Segelboot, das zwar ohne Segel auskommt, aber stattdessen einen Zylinder verwendet.

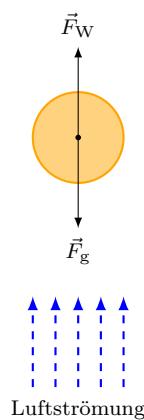
Ein möglicherweise verblüffendes, aber dennoch sehr einfaches Experiment ist der fliegende Tischtennisball. Obwohl er nicht direkt mit dem Magnus-Effekt in Verbindung steht, ist er damit verwandt. Man bezeichnet dieses Phänomen als den Coandă-Effekt⁴.

Exp. 6: Fliegender Tischtennisball

Wenn man einen Tischtennisball in einen Luftstrom setzt, beginnt er zu schweben. Egal, ob der Luftstrom vertikal oder schräg verläuft (siehe Abbildung), bleibt der Tischtennisball an seinem Platz und wird nicht weggetrieben. Dieses Verhalten ist ein charakteristisches Merkmal des Coandă-Effekts.

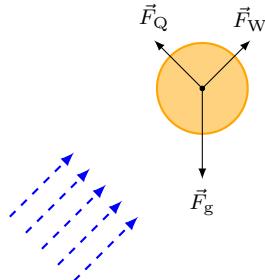


Dieses Experiment kann mithilfe der Bernoulli-Gleichungen und des Coandă-Effekts erläutert werden. Wenn der Tischtennisball in einen vertikalen Luftstrom gebracht wird, schwebt der Ball, da die Schwerkraft (\vec{F}_g) gleich der Widerstandskraft (\vec{F}_W) ist. Letztere setzt sich aus zwei Komponenten zusammen: Der eine Teil ist der übliche Luftwiderstand, und die andere Kraft hat einen dynamischen Ursprung, der durch den Druckunterschied zwischen oben und unten aufgrund des Coandă-Effekts verursacht wird, wie in der Abbildung dargestellt.



⁴Mit dem Sammelbegriff Coandă-Effekt werden verschiedene ursächlich nicht zusammenhängende Phänomene bezeichnet, die eine Tendenz eines Gasstrahls oder einer Flüssigkeitsströmung nahelegen, an einer konvexen Oberfläche „entlangzulaufen“, anstatt sich abzulösen und sich in der ursprünglichen Fließrichtung weiterzubewegen.

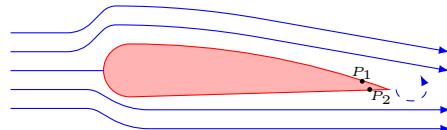
Im schiefen Fall treten erneut die Schwerkraft (\vec{F}_g) und die Widerstandskraft (\vec{F}_W) auf, zusätzlich zu einer quer dazu wirkenden Kraft, die wir als Querkraft (\vec{F}_Q) bezeichnen. Diese Querkraft ist ein Ergebnis des Coandă-Effekts. Die Luft strömt um den Ball herum und löst sich hinter dem Ball ab, wodurch die Luft den Ball wegstösst.



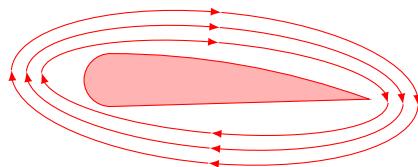
Der Magnus-Effekt findet sich in vielen unbewussten Anwendungen im Sport. Beispiele hierfür sind der Topspin-Schlag im Tennis, der gekrümmte Flankenball im Fussball und natürlich der Curveball im Baseball. In all diesen Bewegungen folgt der Ball nicht einfach einer natürlichen Flugbahn, wie sie bei einem schiefen Wurf zu erwarten wäre, sondern weist eine zusätzliche Krümmung auf, die durch die Eigenrotation des Balls (Drall) verursacht wird.

2.3.2 Auftrieb bei Tragflächen

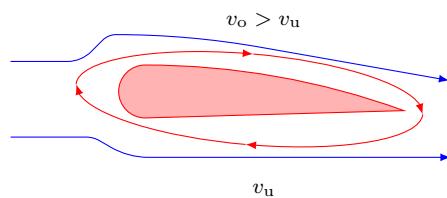
Wenn ein unsymmetrisches Profil von einem Fluid umströmt wird, entsteht auch ohne Rotation des Körpers eine seitliche Kraft, die als "dynamischer Auftrieb" bezeichnet wird. Dieser Auftrieb entsteht ebenfalls durch die Bildung von Zirkulationsströmungen, jedoch in diesem Fall durch die Entstehung von Wirbeln an bestimmten Stellen des unsymmetrischen Profils. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir ein Tragflächenprofil, wie in der Abbildung dargestellt.



In einer laminaren Strömung um das Tragflächenprofil werden die Schichten in unmittelbarer Nähe der Tragfläche aufgrund von Reibung verlangsamt. Da der Weg der Grenzschicht auf der oberen Seite länger ist als auf der unteren Seite, passiert sie Punkt P_1 mit einer geringeren Geschwindigkeit als Punkt P_2 . Dies führt zu einem Geschwindigkeitsunterschied am Ende der Tragfläche und damit zur Bildung eines Wirbels⁵. Dieser Wirbel führt aufgrund der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses zu einer Umströmung der Tragfläche in entgegengesetzter Richtung.



Durch die Überlagerung dieser beiden Bewegungen entsteht, ähnlich wie beim Magnus-Effekt, ein gröserer Geschwindigkeitsunterschied ($v_o > v_u$) zwischen der Ober- und Unterseite der Tragfläche, wie in der Abbildung dargestellt.



⁵Im Grunde entsteht dieser Wirbel, da wir ein Geschwindigkeitsgefälle in vertikaler Richtung haben, einen sogenannten Geschwindigkeitsgradienten $\text{grad } \vec{v}$. Doch um die Entstehung des Wirbels genau zu verstehen, fehlen uns die mathematischen Kenntnisse.

Der Druckunterschied zwischen der Ober- und Unterseite der Tragfläche ergibt sich direkt aus der Bernoulli-Gleichung:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \varrho (v_o^2 - v_u^2).$$

Daraus ergibt sich der aerodynamische Auftrieb F_{ae} :

$$F_{\text{ae}} = \Delta p A' = c_A \cdot \frac{1}{2} \varrho (v_o^2 - v_u^2) \cdot A,$$

wobei die dynamische Fläche $A' = c_A A$ ist. Hierbei repräsentiert c_A den Auftriebswert, A die geometrische Fläche und ϱ die Dichte des Fluids. Der Auftriebswert c_A hängt von der Form des Profils ab. Lassen Sie uns abschliessend das folgende Beispiel betrachten.

Bsp. vi.

Ein Flugzeug soll in der Luft auf konstanter Höhe fliegen können. Welche Geschwindigkeit muss das Flugzeug haben, wenn eine Tragfläche eine dynamische Grösse von 60 m^2 hat und das Flugzeug ein Gewicht von $80\,000 \text{ kg}$ hat? Der Auftriebswert eines Flügels ist etwa 0.15 und das Verhältnis der Geschwindigkeit der Rotationsbewegung der Luft und der Strömungsgeschwindigkeit sei 0.5.

$$\text{Lsg: } v \approx 210 \text{ m/s}$$

Lösung:

Bevor wir dieses Kapitel abschliessen, wollen wir einen Mythos aufdecken: Kann ein Flugzeug abheben, selbst wenn es stillsteht? Hierzu schauen wir uns das folgende Video der Mythbusters an: [Flugzeug Mythos](#).

Mit diesem Abschluss beenden wir das Kapitel zur Aerodynamik im Speziellen und zur Hydrodynamik im Allgemeinen. Wir haben die grundlegenden Konzepte dieser Strömungsdynamiken erkundet und sind dabei auf die Herausforderungen komplexer Phänomene gestossen. Die Grenzen formaler Lösungen wurden deutlich, und wir haben erkannt, dass für vertiefte Einblicke Simulationen und Experimente im Windkanal unverzichtbar sind.

Zusammenfassung Kapitel D2

- Der *Volumenstrom* \dot{V} eines Fluida in einer Röhre mit der Querschnittsfläche A , das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, ist

$$\dot{V} = Av.$$

- Die *Kontinuitätsgleichung* sagt aus, dass für ein inkompressibles Fluidum der Volumenstrom \dot{V} konstant ist, d. h.

$$\dot{V} = \text{konst.}$$

- Die *Bernoulli-Gleichung* stellt die Energieerhaltungsgleichung für Flüssigkeiten dar. Für ein reibungsfreies, inkompressibles Fluida mit äusserem Druck p , Geschwindigkeit v und Höhe h gilt:

$$p + \frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho g h = \text{konst.},$$

wobei ϱ die Dichte des Fluidums ist.

- Der *Magnus-Effekt* ist der Effekt, welcher entsteht, wenn ein Körper durch seine Eigenrotation die umgebende Luft in Bewegung versetzen kann und sich dadurch ein Druckunterschied zwischen der einen und der anderen Seite des Körpers einstellt.

Konzeptfragen Kapitel D2

1. Wie beeinflusst die Geometrie eines Rohres die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit?
 - Die Geometrie hat keinen Einfluss auf die Strömungsgeschwindigkeit.
 - Eine enge Rohrgeometrie erhöht die Strömungsgeschwindigkeit.
 - Eine weite Rohrgeometrie erhöht die Strömungsgeschwindigkeit.
 - Die Geometrie beeinflusst nur den Druck.
2. Die Bernoulli-Gleichung ist ein Anwendung der...
 - Impulserhaltung.
 - Energieerhaltung.
 - Bewegungsgleichung.
 - von Newton III.
3. Was passiert mit dem Druck, wenn die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit in einem Rohr erhöht wird?
 - Der Druck bleibt konstant.
 - Der Druck nimmt zu.
 - Der Druck nimmt ab.
 - Der Druck ändert sich nicht.
4. Warum erfährt ein rotierender Ball, der durch die Luft fliegt, aufgrund des Magnus-Effekts eine seitliche Ablenkung?
 - Die Drehung des Balles erzeugt eine asymmetrische Druckverteilung, die eine seitliche Kraft erzeugt.
 - Die Rotationsachse des Balls hat keinen Einfluss auf die seitliche Ablenkung.
 - Der Magnus-Effekt tritt nur auf, wenn der Ball eine glatte Oberfläche hat.
 - Die seitliche Ablenkung entsteht aufgrund der Schwerkraft.

Aufgaben Kapitel D2

Weitere einfachere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:

<https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0> im Kapitel 14.



- Bei sehr heftigen Stürmen kann der Atmosphärendruck innerhalb eines Hauses das Dach abheben, da außerhalb der Druck stark vermindert ist. Berechnen Sie die Kraft auf ein quadratisches Dach mit 15 m Kantenlänge, wenn die Windgeschwindigkeit 30 m/s beträgt.

Lsg: $F \approx 1.0 \cdot 10^5 \text{ N}$

- Der Druck in einem Abschnitt einer horizontalen Röhre mit dem Durchmesser 2 cm betrage 142 kPa. Durch die Röhre fliesst Wasser mit einer Geschwindigkeit von $2.8 \ell/\text{s}$. Wie gross muss der Durchmesser im verengten Teil der Röhre sein, damit der Druck dort 101 kPa beträgt?

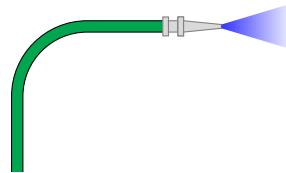
Lsg: $d_2 \approx 1.68 \text{ cm}$

- Wasser fliesse mit 0.65 m/s durch einen schlauch mit dem Innendurchmesser 3 cm. Der Durchmesser einer Düse am Ende des Schlauchs betrage 0.30 cm.

- Mit welcher Geschwindigkeit tritt das Wasser aus der Düse?
- Die Pumpe auf der einen Seite und die Düse auf der anderen Seite des Schlauchs befinden sich auf gleicher Höhe und der Druck auf die Düse sei gleich dem Atmosphärendruck. Wie gross ist dann der Druck an der Pumpe?

Lsg: a. $v_2 \approx 65 \text{ m/s}$ b. $p_1 \approx 2.2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

- Ein Feuerwehrmann halte einen gebogenen Schlauch (vgl. Abb.). Das Wasser trete in einem Strahl mit der Geschwindigkeit 30 m/s und dem Radius 1.5 cm aus der Düse aus.



- Wieviel Wasser tritt pro Sekunde aus? Resultat in kg angeben.
- Wie gross ist der horizontale Impuls des Wassers pro Sekunde?
- Das Wasser hat im Schlauch, bevor es die Krümmung erreicht, einen nach oben gerichteten Impuls. Nach dem Passieren der Krümmung hat es einen Impuls nach rechts.
- Ermitteln Sie die Impulsänderung des Wassers an der Krümmung pro Sekunde.
- Berechnen Sie daraus die Kraft, die das Wasser auf den Schlauch ausübt.

Lsg: a. $m \approx 21 \text{ kg}$ b. $p \approx 640 \text{ kg m/s}$ c. c₁. $\Delta p \approx 900 \text{ N s}$ c₂. $F \approx 900 \text{ N}$

- Ein Brunnen, der eine 12 m hohe Wassersäule in die Luft ausstossen soll, habe in Bodenhöhe eine Düse mit dem Durchmesser 1 cm. Die Wasserpumpe befindet sich 3 m unter dem Boden. Die Zuleitung zur Düse habe den Durchmesser 2 cm. Bestimmen Sie den erforderlichen Pumpendruck, falls das Wasser bei der Pumpe bereits eine Geschwindigkeit hat.

Lsg: $p_1 \approx 2.43 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

- Eine Flüssigkeit fliesst durch ein Rohr. Der äussere Druck sei konstant. Die Querschnittsfläche auf Bodenhöhe sei A_1 und auf der Höhe h über dem Boden sei die Querschnittsfläche $A_2 < A_1$. Zeigen Sie, dass für den Höhenunterschied h folgendes gelten muss:

$$h = \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) \frac{v^2}{2g},$$

sofern die Geschwindigkeit nach dem Überwinden der Höhendifferenz wieder gleich sein soll, wie zu Beginn; also $v = v_1$.

Lsg: –

7. In einen sehr hohen mit Wasser gefüllter Zylinder $H = 5\text{ m}$ soll auf der Seite ein Loch derart gebohrt werden, dass der austretende Strahl eine Mulde in $x = 4\text{ m}$ Weite trifft. Auf welcher Höhe y muss das Loch gebohrt werden? Gibt es mehr als eine Lösung?

Lsg: $y_+ = 4\text{ m}$, $y_- = 1\text{ m}$

Literaturverzeichnis

- [1] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter, Juni 2012
- [2] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem, Juni 2012
- [3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935>
- [4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007
- [5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron g-2 and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807
- [6] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Steradian>, Juni 2012
- [7] Aristoteles,
- [8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590
- [9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997
- [10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955
- [11] URL: <http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html>, September 2013
- [12] URL: <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index>
- [13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011
- [14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG
- [15] URL: <http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/>, April 2013
- [16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007
- [17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG
- [18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994
- [19] URL: <https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical>
- [20] Hans Kammer, Irma Mgelandze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG
- [21] URL: <https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal>
- [22] Wikipedia, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid>, August 2013
- [23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010
- [24] URL: <http://www.schulserver.hessen.de/>, Oktober 2013
- [25] URL: <http://www.leifiphysik.de>, September 2013
- [26] URL: <http://photos.zoochat.com>, Semptember 2013

- [27] URL: <http://www.lab-laborfachhandel.de>, Oktober 2013
- [28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,
- [29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014
- [30] URL: <https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen>, März 2024
- [31] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707>
- [32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press
- [33] URL: <http://ephex.phys.ethz.ch>, Februar 2015
- [34] URL: <http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html>, März 2015
- [35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas opitscher Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962
- [36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004
- [37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018
- [38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001
- [39] URL: <https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en>, Juli 2018
- [40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998
- [41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869
- [42] URL: <http://www.tf.uni-kiel.de>, März 2014
- [43] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_\(Thermodynamik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik)), März 2014
- [44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014
- [45] URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png>, März 2014
- [46] URL: <http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscode.htm>, August 2014
- [47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494
- [48] URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm>, Oktober 2014
- [49] URL: <http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm>, Oktober 2014
- [50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014
- [51] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639>, Oktober 2017
- [52] URL: <https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen>, Oktober 2017
- [53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022
- [54] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode>, September 2022
- [55] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg>, November 2023
- [56] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>, April 2024
- [57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor
- [58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.
- [59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.
- [60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

- [61] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitat_der_Gleichzeitigkeit, August 2018
- [62] URL: <http://static.a-z.ch>, Mrz 2015
- [63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925
- [64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413
- [65] URL: <http://www.peter-glowatzki.de>, Mai 2015
- [66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941
- [67] URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche>, Mai 2015
- [68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)
- [69] URL: <http://w3.ppp1.gov/>, September 2015
- [70] O. Hofling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wrme. 15. Auflage. Ferd. Dummfers Verlag, Bonn 1994
- [71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database, April 2018
- [72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)
- [73] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung>, April 2018
- [74] URL: <http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...>, Juni 2012
- [75] L. Susskind und G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics*, Basic Books, 2014