

Kapitel C

Mechanik starrer Körper

*“Das Hebelgesetz der Physik lehrt uns:
Wenn Du weisst, wo Du ansetzen musst,
kannst Du mit geringer Kraft viel bewegen..”*
- Achim Reichert

Nachdem wir nun einiges über die Bewegung von Massenpunkten gelernt haben, machen wir einen Schritt weiter und befassen uns in diesem kurzen Kapitel mit der Statik und Dynamik starrer Körper.

Der entscheidende Unterschied zu punktförmigen Körpern besteht darin, dass ein Körper eine Ausdehnung besitzt, die nicht vernachlässigt werden kann. Wenn ein System nicht mehr punktförmig ist, greifen die Kräfte nicht mehr an derselben Stelle an. Dies führt zu einer zusätzlichen Bedingung für das Gleichgewicht, wie wir es von der Wippe kennen.

Dieses Kapitel ist in zwei Unterkapitel gegliedert: *Statik* und *Dynamik*. Die Statik und Dynamik stellen eine Verallgemeinerung von Newton I und Newton II für starre Körper dar, woraus sich neue Formeln für die Energie und den Impuls in Bezug auf diese ergeben. Dabei werden wir auch Begriffe wie die *Rotationsenergie* oder den *Drehimpuls* kennenlernen. Aus der Dynamik ergeben sich viele anschauliche und interessante Anwendungen. Auch in der Statik werden wir das eine oder andere interessante Phänomen entdecken.



Das Gyroskop (siehe Bild oben aus [19]) spielt eine entscheidende Rolle in verschiedenen Anwendungen aufgrund seiner einzigartigen Fähigkeit, die Richtung beizubehalten. Seine Hauptnutzen liegen in der Navigation, Stabilisierung und präzisen Ausrichtung von Geräten. In der Luft- und Raumfahrtindustrie ermöglicht das Gyroskop die genaue Positionsbestimmung von Flugzeugen und Raumfahrzeugen, während es in Trägheitsnavigationsystemen die Richtung ohne externe Referenzen beibehält. Am Ende dieses Kapitels werden wir das Gyroskop verstehen und in einem Demonstrationsexperiment untersuchen.

1 Statik starrer Körper

Lernziele

- Sie verstehen die Definition eines starren Körpers.
- Sie können die Definition des Schwerpunktes anwenden und ihn für spezielle Körper bestimmen.
- Sie sind vertraut mit Beispielen zum Drei-Kräfte-Gleichgewicht und können solche Beispiele lösen.
- Sie kennen das Hebelgesetz und können es in verschiedenen Aufgaben anwenden.
- Sie verstehen die Definition des Drehmoments und können es berechnen.
- Sie begreifen, warum das Trägheitsgesetz für starre Körper erweitert werden musste.
- Sie sind in der Lage, mithilfe des Trägheitsgesetzes für starre Körper statische Probleme zu lösen.

Die Statik ist eine eigenständige Wissenschaft, die in der Architektur und Konstruktion von grösseren Maschinen äusserst wichtig ist. An Hochschulen belegt sie einen eigenen Zweig. Hier können wir lediglich einen groben Überblick über die Gesetzmässigkeiten und Probleme der Statik geben.

In den folgenden Seiten werden wir die zentralen Begriffe der Statik behandeln, nämlich den *Schwerpunkt* und das *Drehmoment*. Bevor wir den Schwerpunkt eines starren Körpers definieren können, ist es notwendig, zu klären, was ein starrer Körper ist. Für unsere Zwecke genügt die folgende Definition:

Def. 1: (*Starre Körper*) Ein starrer Körper ist nicht verformbar und homogen.

Dadurch werden Flüssigkeiten, Gase oder Körper mit unterschiedlicher Massenverteilung (inhomogener Körper) ausgeschlossen. Auch wenn wir für einfache inhomogene Körper gewisse Probleme durchaus betrachten werden.

Exp. 1: Stehaufmännchen

Das Stehaufmännchen ist ein Beispiel für einen inhomogenen Körper. Beim inhomogenen Körper stimmt der geometrische Schwerpunkt nicht mit dem eigentlichen Schwerpunkt überein, welcher auch als Massenmittelpunkt bezeichnet wird.



Das liegt daran, dass der Schwerpunkt nicht im Massenmittelpunkt liegt.

1.1 Schwerpunkt

Wir betrachten zunächst einen Versuch, der verdeutlicht, welche Vorteile der Schwerpunkt hat, bevor wir ihn definieren. Die Beschreibung der Bewegung von starren Körpern im Raum kann schnell sehr komplex werden. Durch die Betrachtung des Schwerpunkts wird die Bewegung jedoch stark vereinfacht, wie der folgende Versuch zeigt.

Exp. 2: Bewegter Lichtpunkt

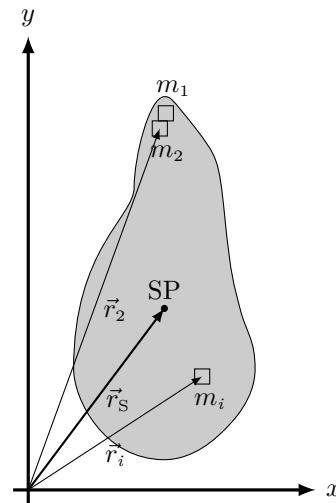
In diesem Versuch wird ein starrer Körper mit einem Leuchtmittel im Schwerpunkt (vergleiche Abbildung) senkrecht in die Luft geworfen. Der Körper dreht sich dabei.



Betrachtet man den Körper als Ganzes, wirkt die Bewegung sehr kompliziert. Doch durch gezielte Verdunklung kann der Fokus auf das Lämpchen gerichtet werden und damit wird die Bewegung sehr einfach.

Um die Bewegung des starren Körpers zu vereinfachen, sollte man sich auf den Schwerpunkt konzentrieren. Man kann sagen, dass sich der Schwerpunkt eines starren Körpers so verhält, als ob die gesamte Masse in ihm konzentriert wäre.

Damit können wir nun den Schwerpunkt (SP) (auch Massenmittelpunkt¹) definieren. Kurz gesagt, der Schwerpunkt ist der Punkt, an dem die Schwerkraft in jeder beliebigen Position des Körpers angreift. Mit Hilfe der folgenden Darstellung lässt sich eine präzisere Definition formulieren.



Def. 2: (Schwerpunkt) Der Schwerpunkt \vec{r}_S (oder Massenmittelpunkt) eines Körpers ist das mit der Gesamtmasse M gewichtete Mittel der Positionen \vec{r}_i seiner Massenpunkte m_i .

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i,$$

wobei $M = \sum_{i=1}^n m_i$ ist.²

¹Die Gravitation wirkt auf alle Massenpunkte eines Körpers. Nur in einem homogenen Gravitationsfeld ist die Gesamtwirkung so, als würde die Gravitationskraft im Massenmittelpunkt angreifen. Da das Gravitationsfeld oft als homogen angenommen werden kann, z. B. in der Nähe der Erdoberfläche, werden die Begriffe Gravizentrum und Massenmittelpunkt oft beide undifferenziert als Schwerpunkt bezeichnet. In einem inhomogenen Feld ist dieser effektive Punkt verschieden vom Massenmittelpunkt und wird Gravizentrum genannt. In einem solchen Fall treten Gezeitenkräfte auf.

²Die exakte Definition des Schwerpunktes, die auch für einen inhomogenen Körper K gilt, ist:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \int_K \vec{r} dm,$$

Die Berechnung des Schwerpunkts kann auch mithilfe des Aktionsgesetzes von Newton erfolgen. Diese Methode ist jedoch nur für mathematisch versierte Personen geeignet.

Für einen Körper M bestehend aus n Teilmassen m_i gilt mit dem Aktionsgesetz, dass

$$\vec{F}_{\text{res}_i} = m_i \vec{a}_i.$$

Die Beschleunigung \vec{a}_i lässt sich durch die Definition ausdrücken als: $\vec{a}_i = \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$ und analog dazu die Geschwindigkeit \vec{v}_i als: $\vec{v}_i = \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}$. Damit erhalten wir:

$$\vec{F}_{\text{res}_i} = m_i \frac{\Delta^2 \vec{r}_i}{(\Delta t)^2}.$$

Daraus ergibt sich für die gesamte resultierende Kraft auf den Körper M :

$$\vec{F}_{\text{res}} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\Delta^2 \vec{r}_i}{(\Delta t)^2}.$$

Dies entspricht aber der Kraft, welche auf den Schwerpunkt \vec{r}_S wirkt, d.h.

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{\Delta^2 \vec{r}_i}{(\Delta t)^2} = M \frac{\Delta^2 \vec{r}_S}{(\Delta t)^2}.$$

Nachdem wir die Δ aus der Summe herausnehmen, erhalten wir:

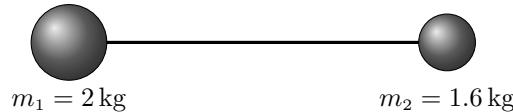
$$\frac{\Delta^2}{(\Delta t)^2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{\Delta^2}{(\Delta t)^2} M \vec{r}_S \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_S,$$

woraus sich die Definition direkt ergibt.

Einige Schwerpunkte werden nun berechnet oder konstruiert. Wenn wir den Schwerpunkt eines einfachen Beispiels betrachten, wird schnell klar, dass diese Formel dem gewichteten Mittel entspricht.

Bsp. i.

Bestimmen Sie für die folgende Abbildung den Abstand des Schwerpunkts von m_1 aus gemessen, wobei das Gewicht der Verbindung vernachlässigt werden kann.



Der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Kugeln ist $s = 1 \text{ m}$.

Lsg: $x_S \approx 0.44 \text{ m}$

Lösung:

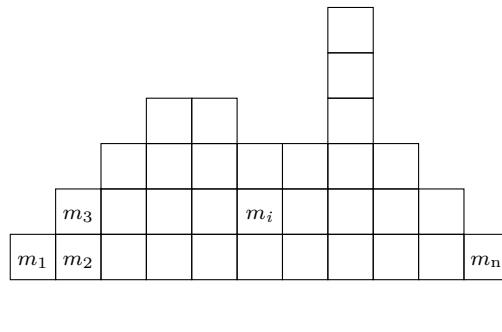


Zur Festlegung des Schwerpunkts im nächsten Beispiel wird die Definition angewendet und gleichzeitig gezeigt, wie sie verwendet wird.

Bsp. ii.

Bestimmen Sie den Schwerpunkt für folgende zweidimensionale Figur, welche aus vielen Einzelstücken besteht, die alle die gleiche Masse haben ($m_i = m, \forall i < n$) und die gleiche Seitenlänge s haben.

wobei $M = \int_K dm$ ist.



Beachten Sie, dass der Ursprung in x - und y -Richtung je um $\frac{1}{2}s$ von der Figur verschoben ist. Lsg: $R_s = (6.1s, 2.3s)$

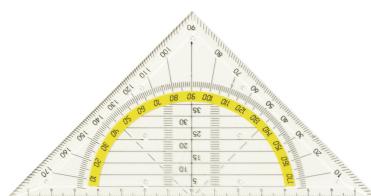
Lösung:

Solche Systeme sind selten und werden von uns nur nicht so oft verwendet. Stattdessen betrachten wir eher kontinuierliche Massenverteilungen. Bevor wir jedoch dazu übergehen können, möchten wir noch zwei experimentelle Möglichkeiten untersuchen, um den Schwerpunkt zu bestimmen.

Eine Methode zur Bestimmung des Schwerpunkts eines homogenen Körpers ist die empirische Methode, bei der der Gegenstand auf einem Finger balanciert wird. Der Punkt, an dem der Finger den Gegenstand berührt, ist der Schwerpunkt.

Exp. 3: Geodreieck balancieren

Man kann ein Geodreieck auf dem Finger ausbalancieren, wobei der Auflagepunkt dem Schwerpunkt entspricht. Diese Methode ist jedoch nicht besonders genau. Besser ist es, einen spitzen Gegenstand anstelle des Fingers zu verwenden.



Eine ähnliche Methode ist die geometrische Methode, welche im folgenden Versuch demonstriert wird.

Exp. 4: Schwerpunkt mit Lot

Der Gegenstand wird nacheinander an zwei beliebigen Punkten aufgehängt. Dazu wird ein Senklei verwendet, um die Schwerlinie einzuleichen. Der Schnittpunkt beider Schwerlinien ergibt den Schwerpunkt des Gegenstands.



Diese Methode kann auf alle Körper angewandt werden, einschliesslich inhomogener Körper. Es ist jedoch zu beachten, dass es Körper gibt, bei denen der Schwerpunkt nicht innerhalb des Körpers liegt. Ein typisches Beispiel hierfür ist der Ring, bei dem der Schwerpunkt in der Mitte liegt.

Aus Souvenirläden sind weitere Objekte bekannt, bei denen sich der Schwerpunkt an unerwarteter Stelle befindet.

Exp. 5: Bizarre Schwerpunkte

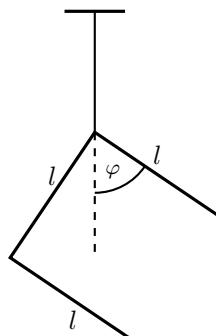
Die Experimente belegen, dass gezielte Erzeugung von Inhomogenitäten zu einem unerwarteten Gleichgewicht führen kann.



Das Beispiel verdeutlicht, dass der Schwerpunkt auch bei kontinuierlichen Massenverteilungen durch eine analytische Methode bestimmt werden kann, wenn man mit der empirischen Methode vertraut ist.

Bsp. iii.

Ein U-förmiger homogener Draht mit der Seitenlänge l werden an einer Ecke aufgehängt (vgl. Abb.).



Bestimmen Sie den Winkel φ , sofern die Ecken des Drahtes alle 90° gross sind.

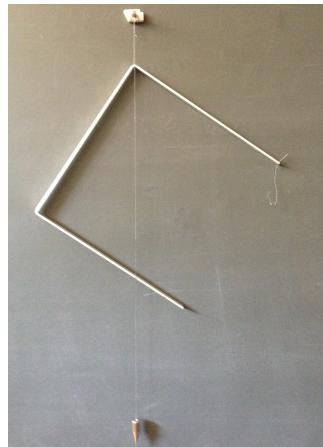
Lsg: $\varphi \approx 56.3^\circ$

Lösung:

Dieses Beispiel können wir direkt überprüfen, dazu betrachten wir folgendes analoges Experiment:

Exp. 6: U-förmiges Metall

Hängen wir das Metallstück auf, beobachten wir kurze Zeit später, wie es sich in einen stabilen Gleichgewichtszustand begibt (vergleiche Abbildung).



Die Theorie sagt voraus, dass der Wert von φ 56° beträgt. Im Experiment haben wir auch $(56 \pm 1)^\circ$ gemessen.

Betrachtet man dieses Experiment mit dem Wissen aus dem vorangegangenen Kapitel, fragt man sich vermutlich, warum sich das Drahtstück überhaupt ausrichtet. Im nächsten Abschnitt werden wir dieser Frage auf den Grund gehen.

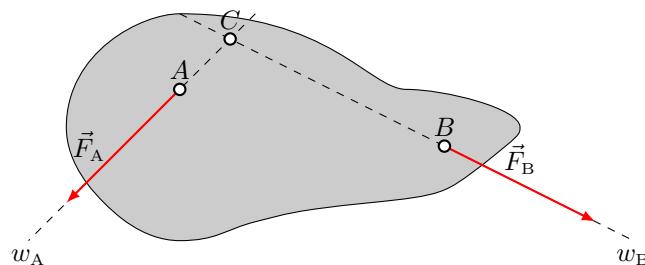
1.2 Drehmoment

In diesem Abschnitt wird das Konzept des Drehmoments eingeführt. Das Drehmoment entspricht in der Rotationsbewegung dem, was die Kraft in der Translationsbewegung darstellt. Mit anderen Worten bedeutet das, dass eine Rotation nur gleichförmig verläuft, wenn kein Drehmoment einwirkt, und dass sie nur dann gleichmäßig beschleunigt wird, wenn ein Drehmoment vorhanden ist.

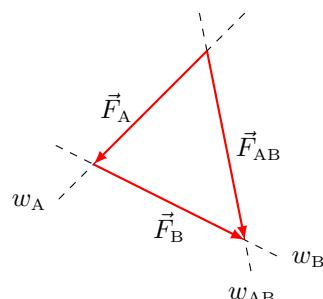
Bevor wir das *Drehmoment* definieren, betrachten wir das Problem des *Drei-Kräfte-Gleichgewichts* und leiten anschliessend das *Hebelgesetz* her. Abgeschlossen wird dieser Abschnitt mit der Formulierung des *Trägheitsgesetzes für starre Körper* sowie einigen Anwendungen daraus. Dieser Abschnitt orientiert sich stark an [20].

1.2.1 Drei-Kräfte-Gleichgewichts-Problem

In diesem Abschnitt wird das Grundproblem der Statik behandelt: das sogenannte Drei-Kräfte-Gleichgewichts-Problem. Wir leiten das Problem her und lösen es. Dazu betrachten wir einen starren Körper, auf den an zwei verschiedenen Punkten Kräfte wirken, deren Wirkungslinien nicht parallel sind. Wirkungslinien sind dabei gedachte Verlängerungen der Kräfte. Damit können die Kräfte zum Schnittpunkt C der Wirkungslinien verschoben und addiert werden, wie in der folgenden Skizze dargestellt.



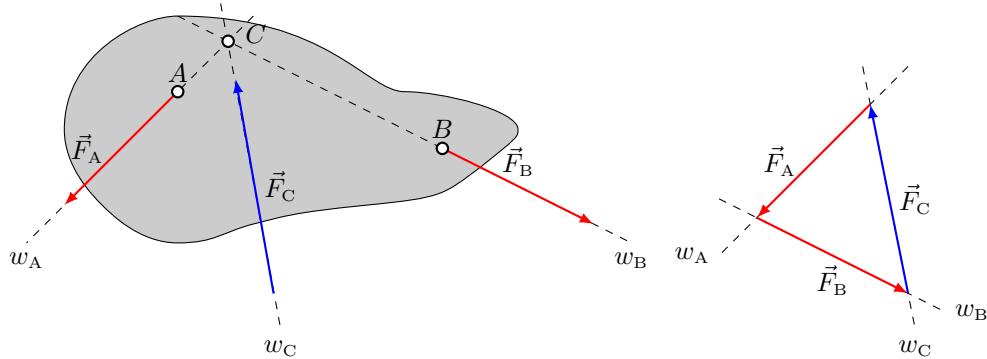
Um die Konstruktion nicht zu überladen, werden Kräfte im Kräfteplan addiert, um ihre Gesamtwirkung zu bestimmen.



Nun haben wir das Werkzeug, um das Problem zu lösen. Wir verwenden die gleiche Ausgangslage: Ein starrer Körper, an dem in zwei verschiedenen Punkten A und B die Kräfte \vec{F}_A und \vec{F}_B angreifen. Gesucht ist die Kraft \vec{F}_C , die ein Gleichgewicht herstellt, das bedeutet, dass die Summe der Kräfte null sein muss, also:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}.$$

Da $\vec{F}_A + \vec{F}_B = -\vec{F}_C$ ist, wird die gesuchte Kraft genauso konstruiert wie die resultierende Kraft oben, mit der Ausnahme, dass sie entgegengesetzt zur Richtung von \vec{F}_{AB} verläuft.



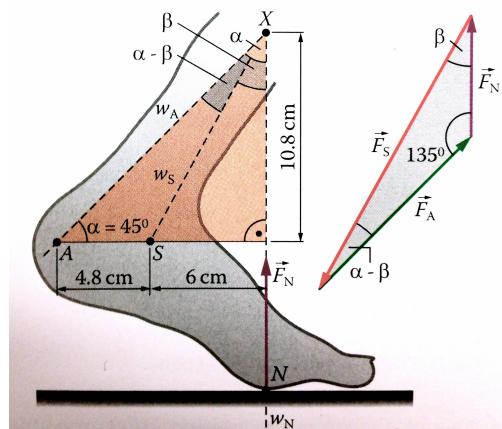
Zusammenfassend können wir feststellen, dass wenn an einem starren Körper drei Kräfte angreifen, dieser genau dann im Gleichgewicht ist, wenn:

- sich das Vektordreieck der Kräfte schliesst (Richtung beachten) und
- sich diese Wirkungslinien dieser drei Kräfte in einem Punkt schneiden.

Betrachten wir dazu ein Beispiel zum menschlichen Fuß.

Bsp. iv.

Betrachten wir den linken Fuß eines Menschen im Laufschritt, dann sehen wir, dass in diesem Moment das ganze Gewicht vom Fuß getragen wird. Diese macht sich als von unten angreifende Normalkraft \vec{F}_N bemerkbar (vgl. Bild, ebenfalls aus [20]).



Dabei soll der Fuß selbst als gewichtslos betrachtet werden. Daneben wirken zwei anatomisch bedingte Kräfte, die bestimmt werden sollen, nämlich die Zugkraft \vec{F}_A der Achillessehne und die Druckkraft \vec{F}_S des Schienbeins am Fußgelenk. (Das Gewicht des Menschen auf einem Fuß sei $F_N = 800 \text{ N}$.) Lsg: $F_S \approx 2100 \text{ N}$, $F_A \approx 1400 \text{ N}$

Lösung:

Dieser Fall, den wir hier besprochen haben, unterscheidet sich tatsächlich nicht wesentlich von den Fällen im vorherigen Kapitel. Solange die Kräfte nicht parallel sind, kann man zwei und - in speziellen Fällen - mehr Kräfte auf einen gedachten Angriffspunkt verschieben und somit aus einem starren Körper wieder einen Massenpunkt erhalten.

Im nächsten Abschnitt werden wir der Frage nachgehen, was im Fall geschieht, wenn die angreifenden Kräfte parallel sind.

1.2.2 Hebelgesetz

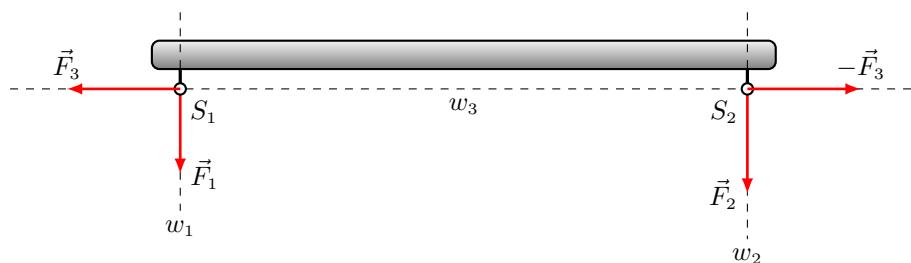
Das Hebelgesetz kommt dann zur Anwendung, wenn die Kräfte parallel sind und somit die zuvor beschriebene Lösung nicht funktioniert. Wenn die Kräfte nämlich parallel verlaufen, schneiden sich ihre Wirkungslinien nie, weshalb eine andere Lösung gefunden werden muss.

Die folgende Lösung verdeutlicht sehr anschaulich, wie in vielen Fällen in der Mathematik und der Physik neue Lösungsansätze entwickelt werden. Oft versucht der Physiker oder Mathematiker, ein neues Problem so zu modifizieren, dass er darauf die bereits bekannten Lösungsmethoden anwenden kann.

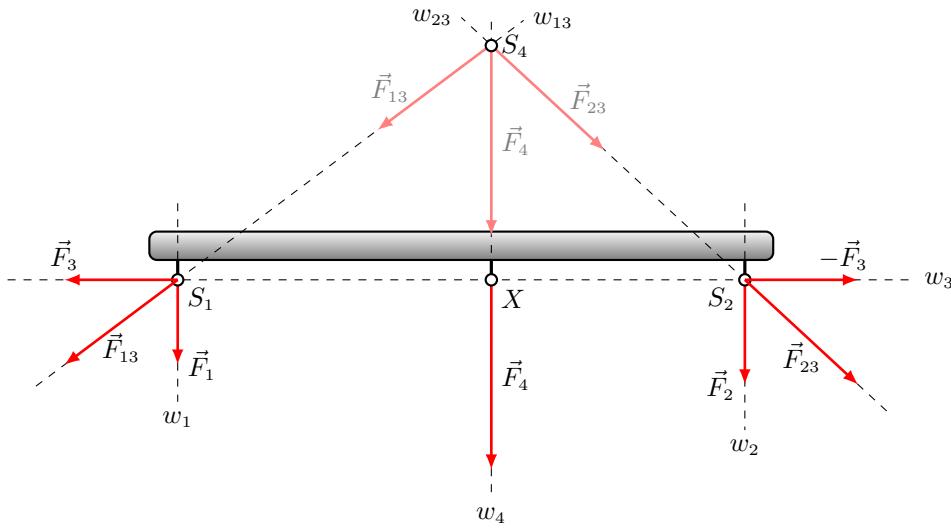
In zwei Punkten S_1 und S_2 greifen zwei parallele Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 an einem starren Körper (vgl. Abb.).



Nun kommt die geniale Idee dieser Herleitung: Wir führen zwei antiparallele Hilfskräfte \vec{F}_3 und $-\vec{F}_3$ mit gleichem Betrag und gleicher Wirkungslinie w_3 ein. Auf diese Weise heben sich ihre Wirkungen gegenseitig auf, und das System bleibt unverändert.



Nun bilden wir die Vektoren $\vec{F}_{13} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$ und $\vec{F}_{23} = \vec{F}_2 - \vec{F}_3$. Auf diese Weise reduzieren wir dieses Problem auf die vektorielle Addition von zwei nicht parallelen Kräften und können die resultierende Kraft \vec{F}_4 bestimmen.



Damit haben wir also die Position der resultierenden Kraft \vec{F}_4 konstruiert. Nun möchten wir sie berechnen, was mithilfe von ähnlichen Dreiecken ganz einfach aus der letzten Abbildung ersichtlich ist:

$$\frac{F_1}{F_3} = \frac{\overline{S_4 X}}{\overline{S_1 X}} \Leftrightarrow F_1 \cdot \overline{S_1 X} = F_3 \cdot \overline{S_4 X}$$

und

$$\frac{F_2}{F_3} = \frac{\overline{S_4 X}}{\overline{S_2 X}} \Leftrightarrow F_2 \cdot \overline{S_2 X} = F_3 \cdot \overline{S_4 X}.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen erhalten wir das folgende Ergebnis:

Ges. 1: (Hebelgesetz von Archimedes) Das Hebelgesetz besagt, dass das Produkt aus der Kraft \vec{F}_1 mal Kraftarm $\overline{S_1 X}$ gleich ist, wie das Produkt aus Last \vec{F}_2 mal Lastarm $\overline{S_2 X}$, d. h.

$$\boxed{\vec{F}_1 \cdot \overline{S_1 X} = \vec{F}_2 \cdot \overline{S_2 X}}$$

Da das Hebelgesetz bereits im Grundschulalter und sicherlich auch in der Sekundarschule behandelt wird, verzichten wir an dieser Stelle auf viele Anwendungen und zeigen nur ein sehr einfaches, um nicht zu sagen primitives Experiment. Falls Sie noch nie vom Hebelgesetz gehört haben, können Sie sich auf folgender Seite informieren: [Leifi - Einfache Maschinen](#).

Exp. 7: Demonstrationshebel

Dieses Demonstrations-Experiment zum Hebelgesetz dient der Überprüfung desselben. Dazu gehen wir wie folgt vor: Eine Person gibt eine Konfiguration auf der einen Seite vor, und eine andere Person sucht eine mögliche Lösung für die andere Seite, damit das System im Gleichgewicht ist. Hier ist eine mögliche Lösung zu sehen.



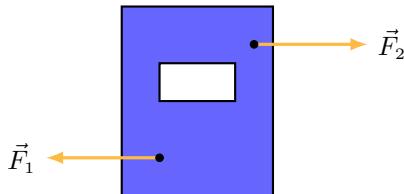
Damit kommen wir nun endlich zur Definition des Drehmoments, wobei wir bereits zu Beginn erwähnt haben, dass das Drehmoment implizit im Hebelgesetz enthalten ist. Vereinfachend kann man sagen, dass das Produkt einer Kraft und dem Abstand dieser Kraft zum Drehpunkt als Drehmoment bezeichnet wird.

1.2.3 Definition des Drehmoments

An dieser Stelle soll eine weitere Motivation für das Drehmoment gegeben werden. Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnt wurde, sind das resultierende Drehmoment und die resultierende Kraft korrespondierende Größen. Erstere für die Rotationsbewegung und letztere für die Translationsbewegung. Doch warum ist das so? Dies soll anhand des folgenden Beispiels erläutert werden.

Bsp. v.

Betrachten wir wieder einen starren Körper (einfachheitshalber das Klassenbuch) auf den zwei antiparallele Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$) an zwei verschiedenen Punkten angreifen (vgl. Abb.).



Erläutern Sie, was passiert mithilfe von a) den Newton Gesetzen I oder II und b) Ihrer Intuition.

Lsg: —

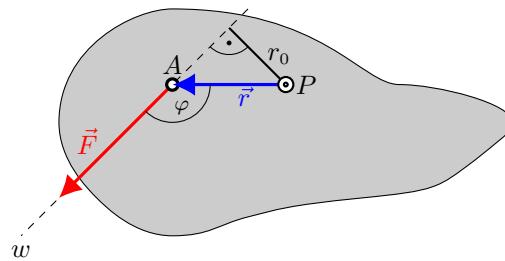
Lösung:

Dieses Beispiel verdeutlicht (und wenn Sie ein Heft oder Ähnliches zur Hand haben, können Sie Ihre Intuition überprüfen), dass die Newton'schen Gesetze für starre Körper angepasst werden müssen. Es liegt nahe, dass dies mithilfe des Drehmoments geschieht. Bevor wir jedoch die Definition des Drehmoments benötigen, sollten wir darauf hinweisen, dass das Drehmoment natürlich ein Vektor ist und wie folgt definiert ist:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

wobei in diesem Unterkapitel zur Statik lediglich der Betrag von Interesse ist.

Betrachten wir die folgende Situation: An einem drehbar gelagerten starren Körper, der einen Drehpunkt P hat, greift am Punkt A eine Kraft \vec{F} an. Die Kraft \vec{F} , die im Abstand r_0 wirkt, führt zu einer Drehung des Körpers (siehe Abbildung).

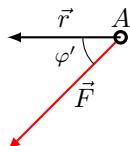


Def. 3: (Drehmoment) Das Drehmoment M ist definiert als Produkt aus dem Abstand $r_0 = r \sin \varphi$ bzgl. dem Punkt P und der Wirkungslinie der Kraft F sowie der Kraft F , d. h. es gilt:

$$M = r \sin \varphi \cdot F$$

Die Einheit ist: $[M] = \text{Nm}^3$

Da der $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ ist, kann auch der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{F} verwendet werden, also für das obere Bild wäre dies:



³ Beachten Sie, dass die Einheit des Drehmoments und der Energie die gleiche ist. Jedoch wird für das Drehmoment nie Joule verwendet, sondern immer Newton Meter.

wobei $\varphi' = 180^\circ - \varphi$ ist. Zur Veranschaulichung betrachten wir folgendes Experiment

Exp. 8: Drehmomentschlüssel

Dies ist nicht wirklich ein Experiment, sondern eher eine praktische Anwendung zur Demonstration. Der Drehmomentschlüssel (siehe Abbildung) kann dazu verwendet werden, eine Schraubenmutter bis zu einer bestimmten Festigkeit anzuziehen.



Es sollte nun klar sein, dass es sich hierbei nicht um eine Kraft handelt, sondern um ein Drehmoment, da die Kraft in einem bestimmten Abstand von der Drehachse wirkt.

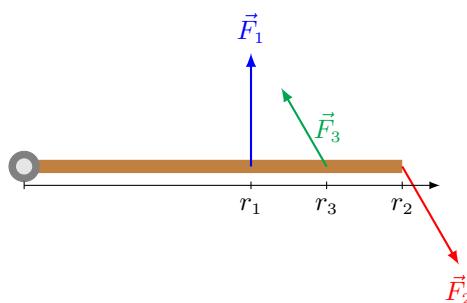
Neben dieser Anwendung gibt es noch viele weitere Anwendungen, wie die folgende nicht abschliessende Liste zeigt:

- Türen, Fester usw.
- Hammer, Schraubenschlüssel usw.
- Schubkarren,
- Wagenheber usw.

Bevor wir mit dem Trägheitsgesetz weiter fahren, üben wir noch die Berechnung des Drehmoments.

Bsp. vi.

Ein Balken der Länge $l = 2.5 \text{ m}$ ist an einem Ende drehbar gelagert. An verschiedenen Punkten wirken Kräfte. Berechnen Sie die jeweiligen Drehmomente bezgl. des Drehpunkts.



- Eine Kraft von $F_1 = 50 \text{ N}$ wirkt senkrecht zum Balken im Abstand $r_1 = 1.5 \text{ m}$ vom Drehpunkt.
- Eine zweite Kraft von $F_2 = 30 \text{ N}$ wirkt im Abstand $r_2 = 2.5 \text{ m}$ unter einem Winkel von 60° zur Balkenrichtung.
- Eine dritte Kraft von $F_3 = 40 \text{ N}$ greift im Abstand $r_3 = 2.0 \text{ m}$ an, allerdings mit einem Winkel von 30° zur Senkrechten.
- Bestimmen Sie schliesslich noch das resultierende Drehmoment M_{res} bezgl. des Drehpunktes.

Lsg: a) 75 Nm, b) 65 Nm, c) 40 Nm

Lösung:

--

Mit der Definition des Drehmoments lässt sich das Trägheitsgesetz (analog zu Newtons erstem Gesetz) auf starre Körper erweitern.

1.2.4 Trägheitsgesetz starrer Körper

Wir erinnern uns daran, dass ein Körper dem Trägheitsgesetz gehorcht, wenn er sich in Ruhe befindet oder sich gleichförmig geradlinig bewegt. Wir haben soeben gezeigt, dass die Bedingung $\vec{F}_{\text{res}} = \vec{0}$ notwendig ist, aber nicht ausreichend. Ein starrer Körper darf sich auch nicht drehen. Damit erhalten wir das folgende erweiterte Gesetz:

Ges. 2: (*Trägheitsgesetz starrer Körper*) Ein starrer Körper ist genau dann im Gleichgewicht⁴, falls die Summe aller äusseren Kräfte \vec{F}_{res} und die Summe aller äusseren Drehmomente \vec{M}_{res} bezüglich eines frei wählbaren Drehpunkts verschwinden, d. h.

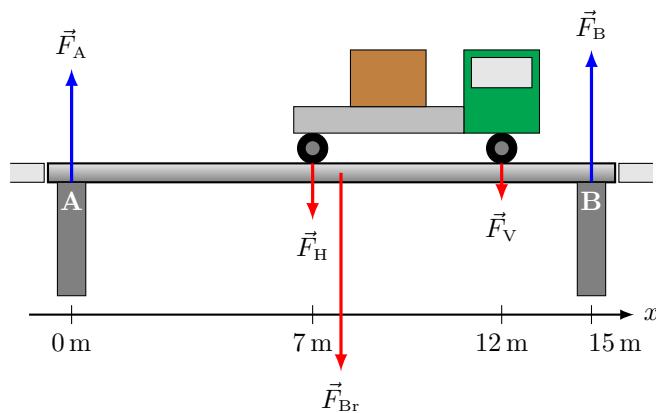
$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{M}_{\text{res}} = \vec{0}.$$

Für \vec{M}_{res} gilt die gleiche Definition, wie für \vec{F}_{res} , also: $\vec{M}_{\text{res}} = \sum_i \vec{M}_i$.

Im Folgenden werden wir gemeinsam zwei typische Beispiele zur Statik starrer Körper lösen⁵. Im ersten Fall betrachten wir lediglich parallele Kräfte, im zweiten Fall lassen wir auch nicht parallele Kräfte zu.

Bsp. vii.

Auf einer kleinen Brücke steht ein Lastwagen (vgl. Abb.), der die Brücke mit den Vorderrädern mit einer Kraft von $F_V = 30 \text{ kN}$ und mit den Hinterrädern mit $F_H = 60 \text{ kN}$ belastet. Die Brücke selbst wiegt 15 000 kg .



Bestimmen Sie a) die Lage des Fahrzeugschwerpunktes und b) die Normalkräfte F_A und F_B in den Punkten A und B der Brücke.

Lsg: a) $x \approx 8.7 \text{ m}$, b) $F_A \approx 110 \text{ kN}$, $F_B \approx 130 \text{ kN}$

⁴Ein Körper, der sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit dreht, ist ebenfalls im Gleichgewicht.

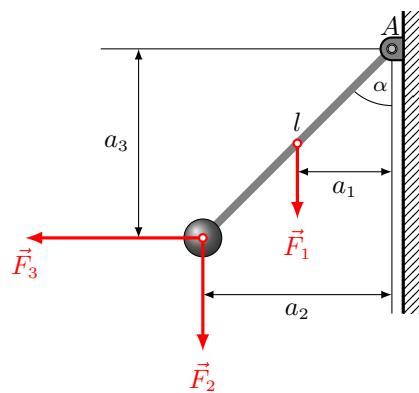
⁵Das Vorgehen beim Lösen solcher Aufgaben ist häufig sehr ähnlich: 1. Kräfte einzeichnen, 2. Drehpunkt wählen, 3. Drehrichtung festlegen, 4. $M_{\text{res}} = 0$ und 5. $F_{\text{res}} = 0$.

Lösung:

Eine kleine Bemerkung ist hier angebracht: Das Vorzeichen der Drehmomente in solchen Aufgaben ist frei wählbar und dient lediglich dazu, die Drehrichtung anzugeben. Es ist wichtig, dass in der Aufgabe eine einheitliche Konvention festgelegt wird, indem eine Richtung als positiv und die andere als negativ gewählt wird. Hier ist das allgemeinere Beispiel:

Bsp. viii.

Eine drehbar gelagerte Stange mit dem Gewicht F_1 und der Länge l trägt an ihrem unteren Ende eine Punktmasse mit dem Gewicht F_2 (vgl. Abb.).



Bestimmen Sie a) a_1, a_2, a_3 als Funktion von l und α , b) die horizontale Kraft \vec{F}_3 , sodass die Stange bei einem Winkel α im Gleichgewicht ist und c) die Belastung im Drehgelenk beim Punkt A. Lsg: –

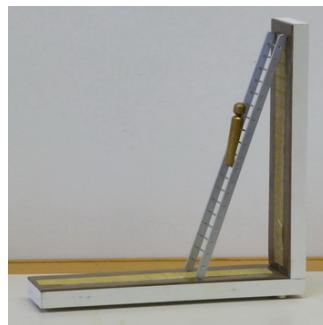
Lsg.: —

Lösung:

Als weitere Anwendung betrachten wir das folgende Experiment.

Exp. 9: Leiter an der Wand

Eine Leiter wird an eine Wand gestellt (siehe Abbildung). Gesucht ist der maximale Winkel, bei dem die Leiter noch nicht zu rutschen beginnt.



Man kann zeigen, dass der Winkel zwischen der Leiter und dem Fussboden φ und die Reibung am Boden μ_B bzw. an der Wand μ_W folgende Beziehung gehorchen:

$$\tan \varphi = \frac{1}{2\mu_B} - \frac{\mu_W}{2}.$$

In einer der Aufgaben werden Sie diese Beziehung überprüfen.

Damit schliessen wir dieses kurze Kapitel zur Statik der starren Körper ab. Die wirklich physikalisch interessanten Anwendungen des Drehmoments sind im nächsten Kapitel zur Dynamik starrer Körper zu finden. Dieses Thema wird jedoch nur mit Schüler und Schülerinnen aus dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil behandelt, nicht weil es besonders schwierig ist, sondern weil uns schlicht und einfach die Zeit fehlt.

Zusammenfassung Kapitel C1

1. Ein *starrer Körper* ist nicht verformbar, endlich und homogen.
2. Der *Schwerpunkt* \vec{r}_S eines starren Körpers der Masse M ist gegeben durch

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i.$$

3. Greifen drei Kräfte an einen starren Körper an, so ist dieser im *Gleichgewicht*, falls sich das Vektordreieck der Kräfte schliesst und sich die Wirkungslinien dieser drei Kräfte in einem Punkt schneiden.
4. Das *Hebelgesetz von Archimedes* lautet, dass das Produkt aus Hebel und Hebelarm gleich dem Produkt aus Kraft und Kraftarm ist, d. h.

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2.$$

5. Das *Drehmoment* M bezüglich eines Punktes P einer Kraft \vec{F} im Abstand \vec{r} vom Punkt P ist,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad M = r \sin \varphi \cdot F,$$

wobei $\varphi = \angle(\vec{r}, \vec{F})$.

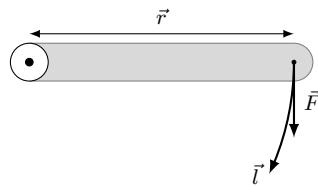
6. Das *Trägheitsgesetz starrer Körper* lautet, dass ein starrer Körper genau dann im Gleichgewicht ist, falls die Summe aller Kräfte \vec{F}_{res} und die Summe aller Drehmomente \vec{M}_{res} bezüglich eines frei wählbaren Drehpunktes verschwinden, d. h.

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{M}_{\text{res}} = \vec{0},$$

wobei ein Körper, welcher gleichförmig rotiert auch im Gleichgewicht ist.

Konzeptfragen Kapitel C1

1. Das Mädchen hat eine Masse von 40 kg und sitzt 2.4 m von der Drehachse entfernt. Die grössere Schwester hat eine Masse von 60 kg.
 - Die grössere Schwester wippt eineinhalb mal so weit wie das Mädchen.
 - Die grössere Schwester muss 1.2 m von der Achse sitzen.
 - Das Mädchen wippt eineinhalb mal so weit wie die grössere Schwester.
 - Die grössere Schwester muss 1.6 m von der Achse sitzen.
2. Ein dicker Metallträger sei horizontal drehbar an einem Scharnier bei A befestigt. Eine konstante Kraft \vec{F} im Abstand \vec{r} führt zu einer Drehung um den Weg \vec{l} . Betrachten Sie dazu in der Aufsicht die folgende Abbildung.



- a. Die Einheit der Arbeit und die Einheit des Drehmoments sind...
 - gleich; beide Nm.
 - ungleich; J, Nm.
 - gleich; J, Nm,
 - gleich; beide J.
- b. Die Arbeit, welche am Träger verrichtet wird ist ($F = 100 \text{ N}$, $r = 4 \text{ m}$ und $l = 2 \text{ m}$)
 - 200 Nm.
 - 400 J.
 - 400 Nm.
 - 200 J.
 - 600 J.
- c. Das Drehmoment, welches am Träger verrichtet wird ist ($F = 100 \text{ N}$, $r = 4 \text{ m}$ und $l = 2 \text{ m}$)
 - 200 Nm.
 - 400 J.
 - 400 Nm.
 - 200 J.
 - 600 Nm.

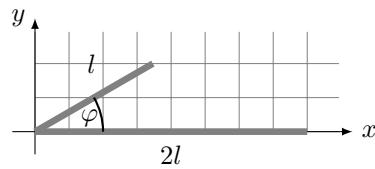
Aufgaben Kapitel C1

Weitere einfache Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:

<https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0> im Kapitel 5.

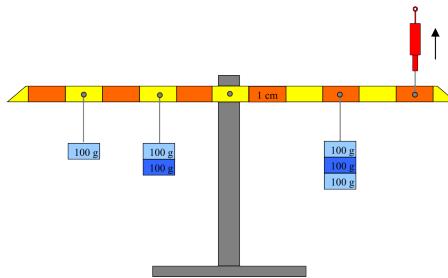


- Ein homogener Draht werde wie in der Abbildung gebogen, und zwar so, dass ein spitzer Winkel von $\varphi = 30^\circ$ zwischen den Schenkel von l und $2l$ entsteht. Bestimmen Sie die Koordinaten (kartesisch und polar) des Schwerpunktes.



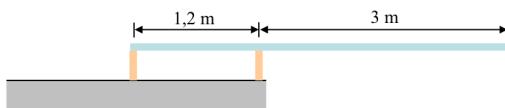
Lsg: $(x_s, y_s) \approx (0.81, 0.083)l$ und $(r_s, \theta_s) \approx (0.82l, 5.9^\circ)$

- Wie gross ist die Kraft, die am Kraftmesser in der Abb. abgelesen werden kann? Die Längeneinheit ist 1 cm und jede Gewichtseinheit wiegt 100 g.



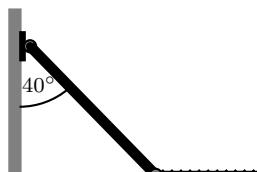
Lsg: $F = 0.2 \text{ N}$

- Das Sprungbrett in der Abb. besitze eine Masse von $m_B = 30 \text{ kg}$. Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Kräfte auf die Stützen, wenn ein Springer mit der Masse $m_S = 70 \text{ kg}$ am Ende des Sprungbrettes steht.



Lsg: $F_{N_1} \approx -2.0 \text{ kN}$ und $F_{N_2} \approx 3.0 \text{ kN}$.

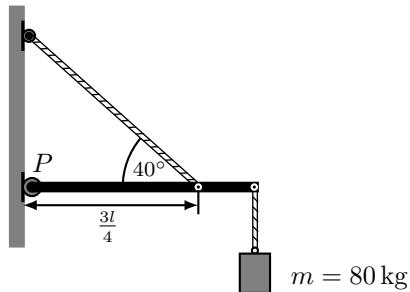
- Wie in der Abbildung gezeigt ist, sei ein homogener schwerer Träger $m_T = 160 \text{ kg}$ an einem Ende befestigt und werde über ein Seil am anderen Ende gehalten. Bestimmen Sie
 - die Zugspannung im Seil und
 - die Kraftkomponenten in der Befestigung.



Lsg: a. $F_S \approx 670 \text{ N}$ b. $F_{N_x} \approx 670 \text{ N}$ und $F_{N_y} \approx 1.6 \text{ kN}$

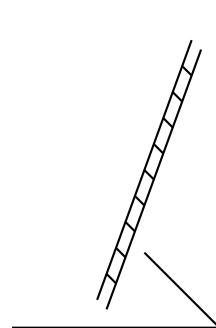
5. Der 0.6 kN schwere Träger der Länge l sei drehbar am Punkt P aufgehängt. Am Ende des Trägers sei die Masse $m = 80 \text{ kg}$ befestigt. Der Träger wird durch ein Seil in der horizontale gehalten, sodass das Seil und Träger einen Winkel von $\varphi = 40^\circ$ einschliessen. Das Seil ist im Abstand $\frac{3l}{4}$ vom Punkt P aus befestigt (vgl. Abb.).

- Bestimmen Sie die Zugspannung im Seil.
- Bestimmen Sie die Komponenten der Kraft, die die Halterung im Punkt P auf den Träger ausübt.



Lsg: a. $F_S \approx 2.3 \text{ kN}$ b. $F_{N_x} \approx 1.8 \text{ kN}$ und $F_{N_y} \approx 66 \text{ N}$

6. Eine homogene Leiter werde so an die Wand gelehnt, dass sie den Winkel φ mit dem Fussboden einschliesst. Bestimmen Sie den Winkel, falls die Reibung zwischen Fussboden und Leiter $\mu_1 = 0.75$ und die zwischen Leiter und Wand $\mu_2 = 0.25$ ist.



Lsg: $\varphi \approx 28.4^\circ$

Literaturverzeichnis

- [1] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter, Juni 2012
- [2] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem, Juni 2012
- [3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935>
- [4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007
- [5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron g-2 and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807
- [6] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Steradian>, Juni 2012
- [7] Aristoteles,
- [8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590
- [9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997
- [10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955
- [11] URL: <http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html>, September 2013
- [12] URL: <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index>
- [13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011
- [14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG
- [15] URL: <http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/>, April 2013
- [16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007
- [17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG
- [18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994
- [19] URL: <https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical>
- [20] Hans Kammer, Irma Mgelandze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG
- [21] URL: <https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal>
- [22] Wikipedia, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid>, August 2013
- [23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010
- [24] URL: <http://www.schulserver.hessen.de/>, Oktober 2013
- [25] URL: <http://www.leifiphysik.de>, September 2013
- [26] URL: <http://photos.zoochat.com>, September 2013

- [27] URL: <http://www.lab-laborfachhandel.de>, Oktober 2013
- [28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,
- [29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014
- [30] URL: <https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen>, März 2024
- [31] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707>
- [32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press
- [33] URL: <http://ephex.phys.ethz.ch>, Februar 2015
- [34] URL: <http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html>, März 2015
- [35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas opitscher Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962
- [36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004
- [37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018
- [38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001
- [39] URL: <https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en>, Juli 2018
- [40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998
- [41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869
- [42] URL: <http://www.tf.uni-kiel.de>, März 2014
- [43] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_\(Thermodynamik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik)), März 2014
- [44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014
- [45] URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png>, März 2014
- [46] URL: <http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscode.htm>, August 2014
- [47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494
- [48] URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm>, Oktober 2014
- [49] URL: <http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm>, Oktober 2014
- [50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014
- [51] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639>, Oktober 2017
- [52] URL: <https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen>, Oktober 2017
- [53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022
- [54] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode>, September 2022
- [55] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg>, November 2023
- [56] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>, April 2024
- [57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor
- [58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.
- [59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.
- [60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

- [61] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitat_der_Gleichzeitigkeit, August 2018
- [62] URL: <http://static.a-z.ch>, Mrz 2015
- [63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925
- [64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413
- [65] URL: <http://www.peter-glowatzki.de>, Mai 2015
- [66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941
- [67] URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche>, Mai 2015
- [68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)
- [69] URL: <http://w3.ppp1.gov/>, September 2015
- [70] O. Hofling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Warme. 15. Auflage. Ferd. Dummfers Verlag, Bonn 1994
- [71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database, April 2018
- [72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)
- [73] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung>, April 2018
- [74] URL: <http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...>, Juni 2012
- [75] L. Susskind und G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics*, Basic Books, 2014