

## 2 Dynamik starrer Körper

### Lernziele

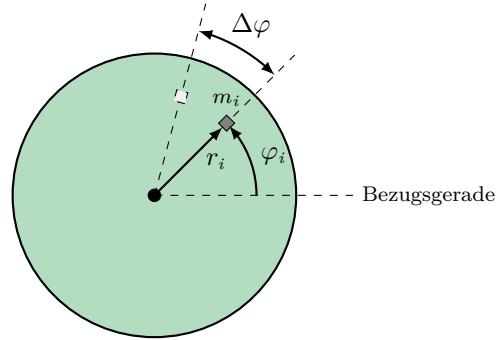
- Sie verstehen die Definition eines starren Körpers.
- Sie können die Definition des Schwerpunktes anwenden und ihn für spezielle Körper bestimmen.
- Sie sind vertraut mit Beispielen zum Drei-Kräfte-Gleichgewicht und können solche Beispiele lösen.
- Sie kennen das Hebelgesetz und können es in verschiedenen Aufgaben anwenden.
- Sie verstehen die Definition des Drehmoments und können es berechnen.
- Sie begreifen, warum das Trägheitsgesetz für starre Körper erweitert werden musste.
- Sie sind in der Lage, mithilfe des Trägheitsgesetzes für starre Körper statische Probleme zu lösen.

Dieses Kapitel zur Dynamik starrer Körper befasst sich im Wesentlichen mit der Drehbewegung starrer Körper. Da eine beliebige Bewegung in der Regel aus einer sogenannten Rotations- und einer Translationsbewegung zusammengesetzt ist, werden wir uns mit dem Aktionsgesetz starrer Körper, der Rotationsenergie und dem Drehimpuls befassen. Zuvor werden wir die Kinematik der Drehbewegung kurz wiederholen, und zum Schluss werden einige Anwendungen, wie beispielsweise den Kreisel, besprochen.

An Mittelschulen werden zu diesem Thema in der Regel nur einfache Spezialfälle behandelt, wie beispielsweise die Rotation um eine raumfeste Achse. Dieses Kapitel ist in Anlehnung an das Kapitel zur Drehbewegung in [18] gestaltet.

### 2.1 Kinematik der Drehbewegung

Die ausführlichen Herleitungen zu diesem Thema finden Sie im Kapitel B.2.5. Hier sollen nur die wichtigsten Resultate nochmals wiederholt werden. Dazu betrachten wir eine Scheibe, die um ihre senkrechte Drehachse drehbar in ihrem Mittelpunkt gelagert ist. Schauen wir uns den Grundriss dieser Scheibe an (siehe Abbildung).



Mit den folgenden Definitionen für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die Winkelbeschleunigung  $\alpha$ :

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

erhalten wir die kinematischen Formeln der Drehbewegung für das Massenelement  $m_i$ :

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_{i_0},$$

wobei  $\omega_0$  die Anfangswinkelgeschwindigkeit und  $\varphi_0$  der Anfangswinkel sind und

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0.$$

Durch Elimination von  $t$  erhalten wir, die dritte kinematische Formel:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0).$$

Mit der Definition des Bogenmasses erhalten wir direkt für den Massenpunkt  $m_i$  im Abstand  $r_i$ :

$$s_i = r_i \varphi, \quad v_i = r_i \omega \quad \text{und} \quad a_i = r_i \alpha.$$

Betrachten wir dazu ein Beispiel:

Bsp. i.

Eine ruhende Scheibe beschleunige mit konstanter Winkelbeschleunigung  $\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$ . Bestimmen Sie a) die Anzahl Umdrehungen, welche die Scheibe in 10 Sekunden vollzieht und b) die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe nach 10 Sekunden.

Lsg: a)  $U \approx 16$ , b)  $\omega = 20 \text{ rad/s}$

## Lösung:

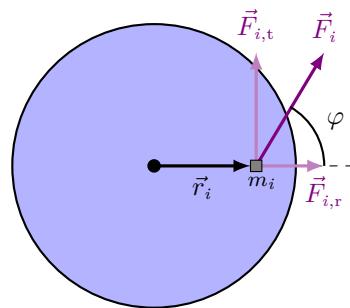
Im nächsten Abschnitt werden wir das Aktionsgesetz für den starren Körper herleiten. Nachdem wir das Trägheitsgesetz erweitert haben, ist es wahrscheinlich, dass wir auch das Aktionsgesetz anpassen müssen.

## 2.2 Aktionsgesetz starrer Körper

Das Aktionsgesetz für einen Massenpunkt besagt, dass die resultierende Kraft proportional zur Beschleunigung ist, wobei der Proportionalitätsfaktor die Masse ist. Das Gesetz lautet daher:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}.$$

Da wir uns ausschliesslich auf Drehbewegungen beschränken, ist zu erwarten, dass wir nur noch eine Gleichung mit dem Drehmoment haben sollten. Zur Herleitung dieser Gleichung betrachten wir eine Scheibe, die um ihre senkrechte Drehachse drehbar in ihrem Mittelpunkt gelagert ist. Auf diese Scheibe wirkt eine Kraft  $\vec{F}_i$  auf ein Massenelement  $m_i$ .



Da der Körper starr ist und drehbar, führt nur die Kraftkomponente senkrecht zum Radius, also  $F_{i,t} = F_i \sin \varphi$ , zu einem Drehmoment auf  $m_i$ . Die Komponente längs des Radius,  $F_{i,r} = F_i \cos \varphi$ , hat keinen Einfluss auf das Drehmoment. Damit erhalten wir für das Drehmoment auf die Masse  $m_i$ :

$$M_i = F_i r_i \sin \varphi = F_{i,t} r_i.$$

Die Kraft  $F_{i,t}$  führt zu einer tangentialen Beschleunigung  $a_i$ , für die gilt:

$$F_{i,t} = m_i a_i = m_i r_i \alpha,$$

wobei für  $a_i = r_i \alpha$  eingesetzt wurde. Eingesetzt in die obere Gleichung

$$M_i = m_i r_i^2 \alpha.$$

Nun summieren wir über den gesamten Körper und erhalten:

$$\sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \alpha$$

und da die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  für einen starren Körper überall gleich ist, kann sie aus der Summe genommen werden. Ersetzt man  $\sum_{i=1}^n M_i$  mit  $M_{\text{res}}$  erhalten wir:

$$M_{\text{res}} = \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \alpha.$$

Wenn wir diese letzte Gleichung genauer betrachten, sehen wir, dass in einer Drehbewegung das Drehmoment proportional zur Winkelbeschleunigung ist, und der Proportionalitätsfaktor ist eine gewichtete Masse. Daher ergibt sich die folgende Definition<sup>1</sup>:

**Def. 1:** (*Trägheitsmoment*) Das Trägheitsmoment  $J$  gibt den Widerstand eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsbewegung um eine vorgewählte Achse an. Eine angenäherte Definition ist:

$$J \approx \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

wobei  $m_i$  die Massenelemente und  $r_i$  deren Abstände zur Drehachse sind.

Wenn wir die letzte Gleichung der Herleitung betrachten, sehen wir, dass die Klammer

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right)$$

genau dem Trägheitsmoment entspricht. Damit lautet das Aktionsgesetz starrer Körper für reine Drehbewegungen:

**Ges. 1:** (*Aktionsgesetz der Drehbewegung*) Das Aktionsgesetz der Drehbewegung sagt, dass das resultierende Drehmoment  $M_{\text{res}}$  auf einen starren Körper gleich dem Produkt aus dem Trägheitsmoment  $J$  und der Winkelbeschleunigung  $\alpha$  ist, d. h.

$$M_{\text{res}} = J\alpha.$$

Damit kann die Analogie ausgeweitet werden. Das Trägheitsmoment  $J$  nimmt die Stelle der Masse für die Rotationsbewegung ein:

$$F_{\text{res}} = ma \rightarrow M_{\text{res}} = J\alpha.$$

Für uns ist das Trägheitsmoment eine skalare Größe, da wir nur Bewegungen mit einer raumfesten Achse betrachten. Bei einer freien Drehachse, das heißt, einer Achse, die sich im Raum bewegt, ist das Trägheitsmoment kein Skalar mehr, sondern ein sogenannter Tensor. Aus diesem Grund wird er auch als Trägheitstensor<sup>2</sup> bezeichnet.

### Bsp. ii.

Vier Teilchen der Masse  $m$  mit vernachlässigbarer Ausdehnung seien durch masselose Stäbe zu einer rechteckigen Figur mit den Seitenlängen  $2a$  und  $2b$  verbunden (vgl. Abb.).

<sup>1</sup> Die exakte Definition des Trägheitsmoments lautet:

$$J = \int_K r^2 dm,$$

wobei das Integral über den Körper  $K$  geht.

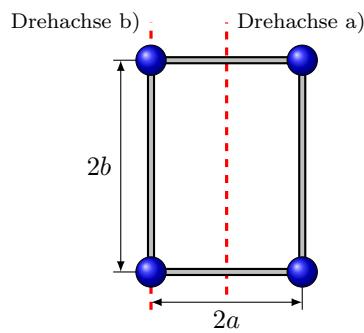
<sup>2</sup> Die Definition des Trägheitstensors ist:

$$J_{ij} = \sum_n m_n (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j),$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta ist. Für das Kronecker-Delta gilt:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Bei der Wahl eines kartesischen Koordinatensystems kann  $J_{ij}$  als Matrix dargestellt werden.



Das System rotiere um a) eine Achse, die in der Figureneben liegt und durch den Massenmittelpunkt geht und b) eine zur ersten Achse parallele Achse, die durch zwei der Massenpunkte verläuft. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment um diese Achsen.

Lsg: a)  $J_a = 4ma^2$ , b)  $J_b = 8ma^2$

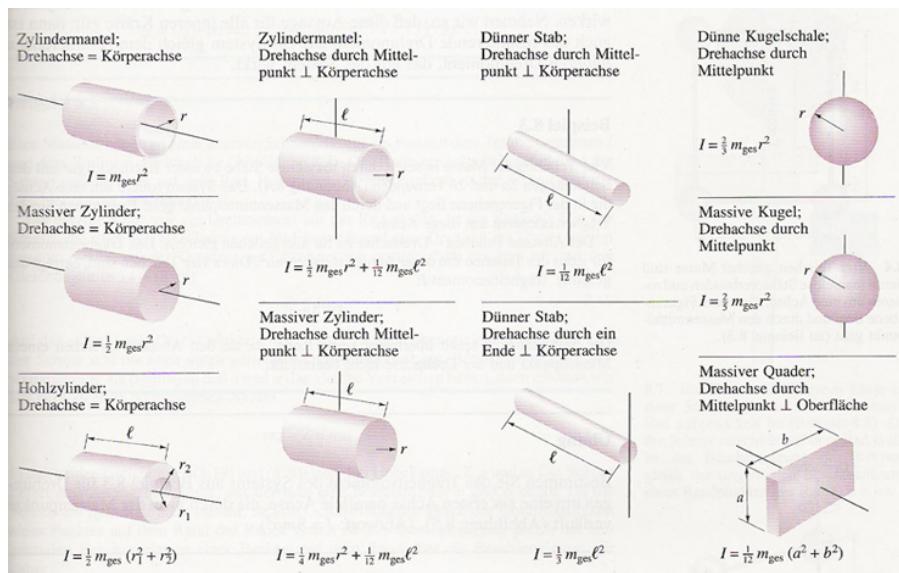
## Lösung:

Das Trägheitsmoment ist also abhängig von der Wahl der Achse. Das Trägheitsmoment ist grösser, wenn die Drehachse nicht durch den Massenmittelpunkt geht.



Zeigen Sie die letzte Aussage, dass das Trägheitsmoment dann am kleinsten ist, wenn die Drehachse durch den Massenmittelpunkt geht. (Tipp: Satz von Steiner, vgl. nächsten Abschnitt)

Leider kann das Trägheitsmoment nur für Punktmassen so einfach berechnet werden. Für beliebige Körper muss das Trägheitsmoment mithilfe der exakten Definition und der Integralrechnung berechnet werden. Da dies jedoch die Kenntnis der Integralrechnung voraussetzt, werden hier die wichtigsten Trägheitsmomente für die üblichen Körper aufgelistet (Bild aus [18]).



Bitte beachten Sie, dass es einen Unterschied gibt, ob wir z.B. einen Vollzylinder haben oder nur einen Zy-

lindermantel. Ebenso hat eine Kugel ein anderes Trägheitsmoment als eine Kugelschale. Die experimentellen Konsequenzen dieser Unterschiede werden im folgenden Versuch deutlich.

---

### Exp. 1: Zylinder auf schiefer Ebene

Drei unterschiedliche Zylinder, jedoch mit gleichen Massen, werden gleichzeitig auf einer schiefen Ebene rollen gelassen. Im ersten Zylinder ist die Masse gleichmäßig verteilt, im zweiten nur im Mantel, und im dritten im Zentrum (siehe Abbildung). Welcher Zylinder wird am schnellsten rollen?



Die Trägheitsmomente der drei Zylinder sind:

$$J_{\text{voll}} = \frac{1}{2}mr^2, \quad J_{\text{leer}} = mr^2 \quad \text{und} \quad J_{\text{komp}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{r}{2}\right)^2.$$

Die Beschleunigung, welche die Zylinder erfahren folgt aus dem Aktionsgesetz und ist:

$$\alpha = \frac{M_{\text{res}}}{J}$$

und damit je kleiner  $J$ , desto grösser ist die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  und da alle die gleiche Ausdehnung haben, ist die Beschleunigung  $a$  proportional zu  $\alpha$ . Da

$$J_{\text{komp}} < J_{\text{voll}} < J_{\text{leer}},$$

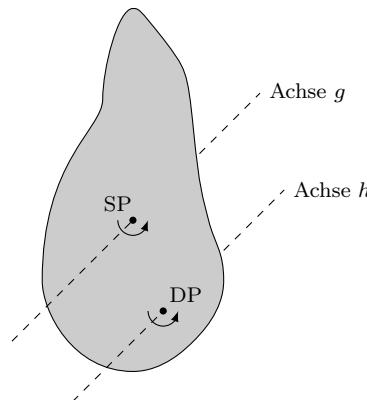
ist der kompakte Zylinder am schnellsten und der leere am langsamsten.

---

Somit rollt ein Körper umso schneller, je konzentrierter die Masse um den Massenschwerpunkt verteilt ist. Allerdings ändert sich das Trägheitsmoment, wenn die Rotation um eine andere Achse betrachtet wird oder der Körper tatsächlich um eine andere Achse rotiert. Dies wird durch den Satz von Steiner erklärt.

#### 2.2.1 Satz von Steiner

Der Satz von Steiner verknüpft das Trägheitsmoment  $J_S$  für Drehungen um eine Achse durch den Massenmittelpunkt des Systems mit dem Trägheitsmoment  $J$  bezüglich einer dazu parallelen Achse. Betrachten wir dazu folgende allgemeine Situation:



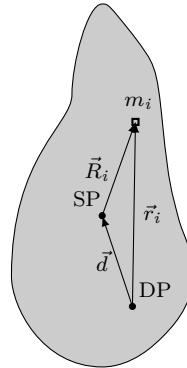
Nun können wir das Gesetz formulieren. Es gilt:

**Ges. 2:** (Satz von Steiner) Das Trägheitsmoment  $J$  bezüglich einer allgemeinen Achse (z. B.  $h$ ) im Abstand  $d$  zu einer dazu parallelen Achse (z. B.  $g$ ) durch den Schwerpunkt ist:

$$J = J_S + md^2,$$

wobei  $J_S$  das Trägheitsmoment bezüglich der Achse  $g$  ist und  $m$  die Gesamtmasse des Körpers.

Der Beweis ist kurz und kann hier hinzugefügt werden. Um den Beweis durchzuführen, ergänzen wir die Skizze um eine kleine Masse  $m_i$  sowie deren Abstand zum Schwerpunkt  $\vec{R}_i$  und zum Drehpunkt  $\vec{r}_i$ .



Sei  $\vec{r}_i$  der Abstand einer beliebigen Achse zur Masse  $m_i$ , wobei  $\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{d}$  und  $\vec{R}_i$  der Abstand vom Schwerpunkt zur Masse  $m_i$  und  $\vec{d}$  der Abstand vom Schwerpunkt zum beliebigen Drehpunkt ist. Dann gilt:

$$J \approx \sum_i m_i \vec{r}_i^2 = \sum_i m_i \left( \vec{R}_i + \vec{d} \right)^2 = \sum_i m_i R_i^2 + \sum_i m_i d^2 + \sum_i 2m_i \vec{d} \vec{R}_i.$$

Der erste Term entspricht dem Trägheitsmoment  $J_S$ . Für den zweiten Term kann man  $d^2$  aus der Summe herausnehmen und erhält:

$$d^2 \sum_i m_i = d^2 m,$$

wobei  $m = \sum_i m_i$  die Gesamtmasse des Körpers ist. Der dritte Term verschwindet zum Glück, da definitionsgemäß:

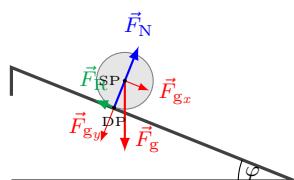
$$\sum_i m_i \vec{R}_i = 0$$

ist, d.h. der Schwerpunkt ist von allen Massen so weit entfernt, dass sich die Summe aller Abstände zu null addiert.

Erfahrungsgemäss ist nicht die Umsetzung des Satzes von Steiner schwierig, sondern vielmehr das Erkennen, wann er zur Anwendung kommt. Das folgende Beispiel soll dabei helfen, diese Schwierigkeit zu reduzieren.

### Bsp. iii.

Betrachten wir einen Zylinder mit Radius  $r$  auf einer schiefen Ebene mit Winkel  $\varphi$  und alle am Zylinder angreifenden Kräfte.



Bestimmen Sie daraus die Beschleunigung des Zylinders.

Lsg: —

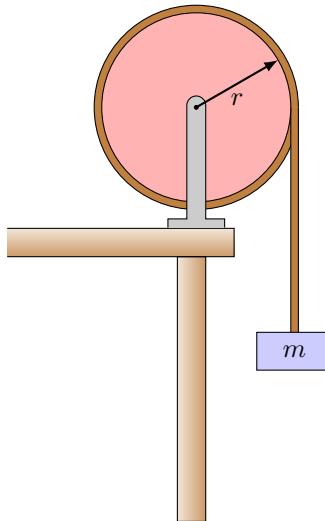
### Lösung:

## **2.2.2 Anwendungen zum Aktionsgesetz**

Jetzt werden wir uns einige Anwendungen des Aktionsgesetzes für starre Körper ansehen, wobei wir sowohl Beispiele als auch Experimente betrachten werden. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel zum Aktionsgesetz.

### Bsp. iv.

Eine Masse  $m$  hänge an einer leichten Schnur, die auf einem Rad (mit Masse  $m'$ ) mit nicht vernachlässigbarem Trägheitsmoment und dem Radius  $r$  gewickelt ist (vgl. Abb.). Bestimmen Sie a) die Seilkraft in der Schnur und b) die Beschleunigung des Objektes.



Lsg: —

## Lösung:

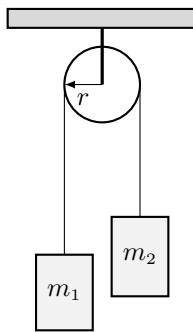
Wir haben bereits zuvor die Atwoodsche Fallmaschine betrachtet, jedoch ohne die Berücksichtigung der Rolle. Jetzt sind wir in der Lage, auch die Rolle in unsere Betrachtungen einzubeziehen.

## Exp. 2: Atwoodsche Fallmaschine

Die Atwoodsche Fallmaschine kann zur Bestimmung der Fallbeschleunigung  $g$  verwendet werden. Dazu werden zwei praktisch identische Massen über eine Rolle mit einem nicht vernachlässigbaren Trägheitsmoment verbunden (siehe Abbildung).



In diesem Fall haben wir zwei Massen,  $m_1$  und  $m_2$ , die durch eine Schnur mit vernachlässigbarer Masse verbunden sind. Diese Schnur verläuft über eine reibungsfreie Rolle, wie in der Abbildung dargestellt. Die Rolle ist eine homogene Scheibe mit der Masse  $m$  und dem Radius  $r$ . (Die Schnur gleitet nicht auf der Rolle. Das Trägheitsmoment der Scheibe kann dem eines Vollzylinders entsprechen.)



Für das Trägheitsmoment der Rolle verwenden wir  $J = \frac{1}{2}mr^2$ . Die Bewegungsgleichungen der Massen lauten:

$$\begin{aligned} F_{\text{res}_1} &= F_{S_1} - F_{g_1} = m_1 a \\ F_{\text{res}_2} &= F_{g_2} - F_{S_2} = m_2 a \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die Seilkräfte nicht mehr gleich sind. Wären sie gleich, würde sich die Rolle gar nicht drehen, da kein resultierendes Drehmoment wirken würde. Die Bewegungsgleichung der Rolle ist:

$$M_{\text{res}} = (F_{S_2} - F_{S_1})r = J\alpha.$$

Mit  $a = \alpha r$  erhalten wir durch einsetzen aller Beziehungen für die Fallbeschleunigung:

$$g = \frac{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}{m_2 - m_1} a.$$

Somit müssen wir zusätzlich noch die Beschleunigung bestimmen, diese wir jedoch direkt aus:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

bestimmt. Die folgenden Größen sind somit gegeben oder müssen gemessen werden:

gegeben			gemessen	
$m_1$ [g]	$m_2$ [g]	$m$ [g]	$s$ [m]	$t$ [s]
70	74	100	1	$3.1 \pm 0.1$

Mit diesen Werten erhalten wir für  $g \approx (10.1 \pm 0.5) \text{ m/s}^2$ .

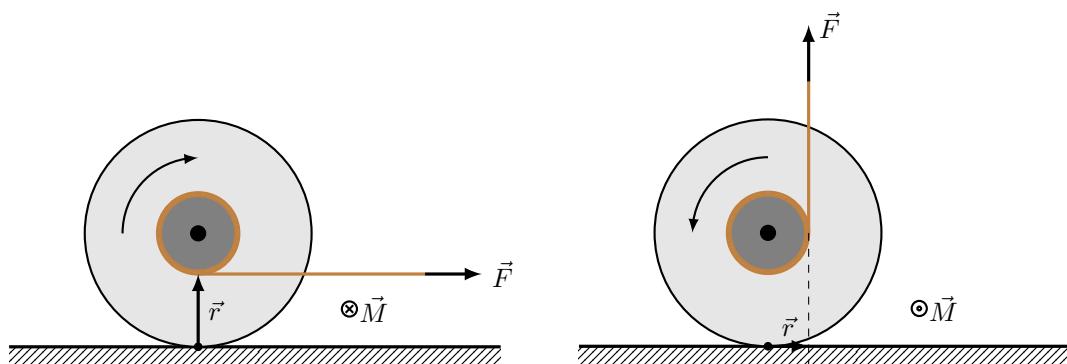
Das nachfolgende Experiment könnte sicherlich bereits nach der Einführung des Drehmoments gezeigt werden. Jedoch berücksichtigt es einerseits den vektoriellen Charakter des Drehmoments und andererseits entsteht aus diesem Drehmoment eine Bewegung. Deshalb versuchen wir, dieses Experiment erst hier zu erklären.

### Exp. 3: Vor- und rückwärts rollen

Betrachten wir ein Jo-Jo, das auf dem Tisch liegt (siehe Bild). Wenn wir an der Schnur ziehen, ziehen wir einmal parallel zum Tisch und einmal unter einem ausreichend grossen Winkel, so dass das Jo-Jo sich unterschiedlich verhält.



Wir stellen fest, dass das Jo-Jo zu uns hin rollt, wenn die Schnur parallel zum Tisch ist, und sich von uns weg bewegt, wenn die Schnur nicht parallel zum Tisch verläuft. Diesen Sachverhalt kann man am besten verstehen, wenn man sich die folgende Skizze ansieht.



Im Anschluss an dieses anschauliche und vielleicht überraschende Experiment, schauen wir uns nun ein Beispiel zum Jo-Jo an.

Bsp. v.

Ein Jo-Jo mit der Masse von 58 g und einem Trägheitsmoment von  $3.5 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$  in Bezug auf die Achse durch die Mitte. a) Wie gross ist die Fallbeschleunigung des Jo-Jos, wenn Sie es einfach loslassen und sich der Faden von der Achse mit einem Radius von 12 mm abwickelt? (Dicke und Masse des Fadens können vernachlässigt werden.) b) Welche Kraft wirkt in diesem Fall auf den Finger, mit welchem Sie den Faden halten?

Lsg: a)  $a \approx 1.9 \text{ m/s}^2$ , b)  $F_S \approx 0.47 \text{ N}$

## Lösung:

Damit haben wir einige Beispiele zum Aktionsgesetz starrer Körper betrachtet. Unter dem Abschnitt zu den Anwendungen werden noch weitere Beispiele gerechnet und besprochen. Nun erweitern wir die Energiebetrachtungen um die Rotationsenergie.

## 2.3 Rotationsenergie und Drehimpuls

In diesem Abschnitt sollen die Rotationsenergie und der Drehimpuls eingeführt und vertieft werden. Dabei erinnern wir uns, welche Möglichkeiten sich beim Lösen von Problemen eröffnet haben, als wir die Konzepte der Energie und des Impulses eingeführt haben. Ähnlich ist es mit der Rotationsenergie und dem Drehimpuls.

Zuerst werden wir die Rotationsenergie herleiten und einige Beispiele dazu lösen, um dann den Drehimpuls einzuführen sowie die Drehimpulserhaltung.

### 2.3.1 Rotationsenergie

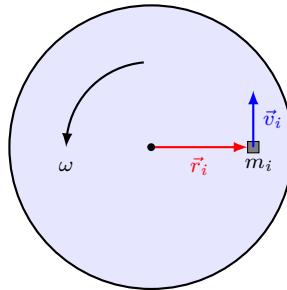
Gleich zu Beginn sollte darauf hingewiesen werden, dass die Rotationsenergie eine Form der kinetischen Energie ist. Man nennt sie deswegen auch in einigen Büchern die "kinetische Energie der Drehbewegung". Damit müssen wir die Formel für die kinetische Energie in zwei Formen unterscheiden. Zum einen:

- kinetische Energie der Translation:  $E_{\text{tra}}$  und
- kinetische Energie der Rotation:  $E_{\text{rot}}$ .

Damit gilt<sup>3</sup>:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{tra}} + E_{\text{rot}}.$$

Betrachten wir auch hier den Körper von oben noch einmal:



Aus der kinetischen Energie der Translation für das Massenelement  $m_i$ , kann die kinetische Energie der Rotation abgeleitet werden:

$$E_{\text{tra},i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Nun betrachten wir den gesamten Körper, damit müssen wir über alle  $m_i$  summieren, d. h.

$$E_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^n E_{\text{tra},i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2.$$

Für die Rotationsbewegung ist die Bahngeschwindigkeit  $v_i$  keine geeignete Größe, da sie für jede Masse  $m_i$  einen anderen Wert hat. Mit der Beziehung  $v_i = r_i \omega$  erhalten wir die kinetische Energie der Rotation:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2.$$

Somit können wir folgendes formulieren:

**Def. 2:** (Rotationsenergie) Die kinetische Energie der Rotation eines Körpers mit dem Trägheitsmoment  $J$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Vermutlich verspüren Sie gewisse Entzugserscheinungen bezüglich der schiefen Ebene. Diese sollen in den nächsten beiden Beispielen kompensiert werden.

### Bsp. vi.

Sie lassen einen Eiswürfel, eine Murmel und einen Klebestift auf einem schiefen Brett mit Neigungswinkel  $\varphi = 20^\circ$  und Länge  $s = 1.0 \text{ m}$  hinuntergleiten bzw. rollen. Der Eiswürfel gleitet reibungslos. Die Murmel

<sup>3</sup>Später werden wir noch die Schwingungsenergie kennenlernen, welche die kinetische Energie um noch einen weiteren Beitrag ergänzt.

und der zylinderförmige Klebestift rollen ohne Rollreibung. a) Berechnen Sie mit dem Energiesatz die Endgeschwindigkeit der drei Körper. b) Berechnen Sie mit den Resultaten aus a) die Gleitzeit bzw. Rollzeiten.  
Lsg: a)  $v_E \approx 2.6 \text{ m/s}$ ,  $v_M \approx 2.2 \text{ m/s}$ ,  $v_K \approx 2.1 \text{ m/s}$ , b)  $t_E \approx 0.76 \text{ s}$ ,  $t_M \approx 0.91 \text{ s}$ ,  $t_K \approx 0.94 \text{ s}$

Lsg: a)  $v_E \approx 2.6 \text{ m/s}$ ,  $v_M \approx 2.2 \text{ m/s}$ ,  $v_K \approx 2.1 \text{ m/s}$ , b)  $t_E \approx 0.76 \text{ s}$ ,  $t_M \approx 0.91 \text{ s}$ ,  $t_K \approx 0.94 \text{ s}$

## Lösung:

Ein zweites Beispiel zur Rotationsenergie starrer Körper bezieht sich auf ein Experiment, das wir bereits im Kapitel zu den Anwendungen der Newtonschen Gesetze besprochen haben (siehe Kapitel B.2.4).

Bsp. vii.

Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene hinunter ( $\varphi$ ). Bestimmen Sie die Reibungskonstante  $\mu$  einer hypothetischen Reibung, deren Effekt die Rotationsenergie kompensieren kann. Die Kugel rollt und erfüllt somit die Rollbedingung:  $v = \omega r$ . Lsg: –

Lsg: —

## Lösung:

Zum Schluss erinnern wir uns noch an den Energiesatz der Mechanik, der besagt, dass die Änderung der kinetischen Energie gleich der verrichteten Arbeit ist. Das bedeutet für die Rotationsenergie:

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J(\omega_1^2 - \omega_2^2) = W.$$



Leiten Sie den Term für die Änderung der Rotationsenergie über die Arbeit her. Betrachten Sie eine Masse, welche aus der Ruhe eine gleichmäigig beschleunigte Kreisbewegung vollzieht.

Bevor wir uns dem Drehimpuls zuwenden und dem sich daraus ergebenden Drehimpulserhaltungssatz, betrachten wir folgende Videos: [Bullet Block Experiment I](#) und bevor wir auflösen Tippen auch Sie: [Clicker: Bullet Block Experiment](#). Hier also die Auflösung: [Bullet Block Experiment II](#).

Wir lernen daraus, dass die kinetische Energie tatsächlich eine kombinierte Grösse ist, die aus allen oben genannten Formen resultiert. Im Gegensatz dazu sind der Drehimpuls und der lineare Impuls völlig unabhängige Größen voneinander. Diesen Sachverhalt sollte man nie vergessen.

### 2.3.2 Drehimpuls

Analog zu den vorangegangenen Überlegungen kann der Drehimpuls starrer Körper auch durch Transformation des linearen Impulses hergeleitet werden. Dazu sei daran erinnert, dass für den Streckenimpuls  $\vec{p}$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

gilt. Daraus erhalten wir für die Definition des Drehimpulses:

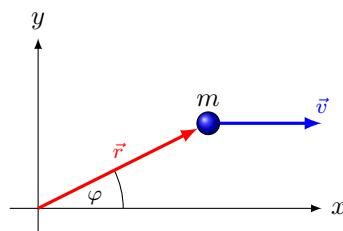
**Def. 3:** (Drehimpuls) Der Drehimpuls  $\vec{L}$  eines rotierenden Körpers ist definiert, als das Produkt aus dem Trägheitsmoment  $J$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ , d. h.

$$\vec{L} = J\vec{\omega}.$$

Der Drehimpuls  $L$  einer Masse  $m$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  im Abstand  $\vec{r}$  zum Bezugspunkt befindet, wird durch die folgende Formel beschrieben:<sup>4</sup>:

$$L = mvr \sin \varphi,$$

wobei  $\varphi = \sphericalangle(\vec{r}, \vec{v})$  ist (vgl. Abb.).



Bei diesem Bild lässt sich deutlich erkennen, dass der Drehimpuls nicht allein auf eine Drehbewegung begrenzt ist, sondern von der Wahl des Bezugspunktes abhängt. Das nachfolgende Beispiel soll dies verdeutlichen.

### Bsp. viii.

Ein Körper der Masse 2.4 kg bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s auf einer Kreisbahn mit dem Radius 1.5 m. a) Bestimmen Sie den Drehimpuls des Körpers relativ zum Kreismittelpunkt. b) Bestimmen Sie den Drehimpuls relativ zum Ursprung, wenn sich der gleiche Körper mit der gleichen Geschwindigkeit entlang der Geraden  $y = 1.5$  m bewegt.

Lsg: a)  $L \approx 10.8 \text{ kg m}^2/\text{s}$ , b)  $L \approx 10.8 \text{ kg m}^2/\text{s}$

## Lösung:



Zeigen Sie, dass aus  $L = mvr \sin \varphi$  für ein Massenelement  $\Delta m_i$  die Definition des Drehimpulses für starre Körper folgt, sofern man über den ganzen Körper summiert.

<sup>4</sup>Die exakte Definition des Drehimpulses  $\vec{L}$  für eine Punktmasse ist gegeben als:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

wobei  $\vec{r}$  der Abstand der Masse zu einem Bezugspunkt und  $\vec{p}$  der Impuls der Masse ist.

Wir haben bereits das Aktionsgesetz von Newton über die Änderungen des Impulses formuliert (siehe Kap. B.3.3).

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

Das zweite Newtonsche Gesetz für Rotationsbewegungen können wir folgendermassen ausdrücken.<sup>5</sup>

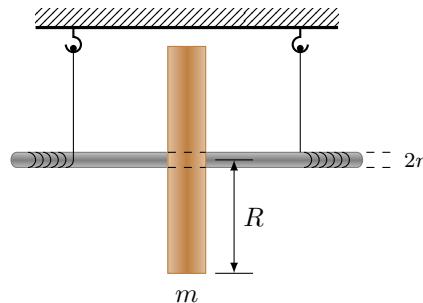
**Ges. 3:** (Aktionsgesetz rotierender starrer Körper) Für das Aktionsgesetz gilt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $\vec{L}$  dem resultierenden äusseren Drehmoment  $\vec{M}_{\text{res}}$  auf das System entspricht, d. h.

$$\vec{M}_{\text{res}} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}.$$

Betrachten wir dazu ein Beispiel und im Anschluss dazu das Experiment:

Bsp. ix.

Das Maxwellsche Rad ist eine zylindrische Scheibe mit Radius  $R$ , Masse  $m$  und Trägheitsmoment  $J_S = \frac{1}{2}mR^2$ . Das Rad ist auf einer dünnen Achse mit Radius  $r$  zentriert, um die ein Faden aufgewickelt ist, an dem das Rad hängt (vgl. Abb.). Die Masse der Achse kann vernachlässigt werden.



Lässt man das Rad los, so wird es unter dem Einfluss des Drehmoments  $M_{\text{res}} = mgr$  zu rotieren beginnen und sich beschleunigt nach unten bewegen. Bestimmen Sie seine Translationsbeschleunigung. (Dieses Beispiel wurde aus [40] abgeändert.) Lsg: -

Lsg: —

## Lösung:

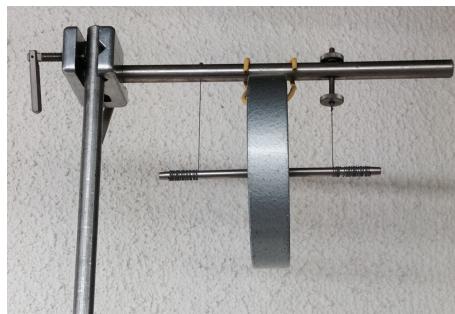
Das Maxwellsche Rad kann auch vorgeführt werden, jedoch ohne Messung.

## Exp. 4: Maxwellsches Rad

Das Maxwellsche Rad und seine Funktionsweise wurde bereits in einem vorangegangenen Beispiel erläutert und bedarf somit keiner erneuten Erklärung. An dieser Stelle soll es lediglich demonstriert werden (siehe Abbildung).

<sup>5</sup> Natürlich ist das Gesetz in der exakten Definition mit einer Ableitung zu formulieren, nämlich:

$$\vec{M}_{\text{res}} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$



Der Radius des Stabes ist  $r \approx 3.35$  mm, der Radius des Rades ist  $R \approx 6.5$  cm, die Fallstrecke ist  $s \approx 0.395$  m und die Fallzeit ist  $t \approx 4$  s. Daraus ergibt sich eine Beschleunigung von etwa

$$a_{\text{exp}} = \frac{2s}{t^2} \approx 0.05 \text{ m/s}^2.$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem theoretischen Wert, so erhält man

$$a_{\text{theo}} = \frac{g}{\frac{R^2}{2r^2} + 1} \approx 0.05.$$

Man kann sagen, dass es eine recht gute Übereinstimmung gibt, sofern man auf eine Stelle genau rechnet.

Aus der zweiten Formulierung des Aktionsgesetzes können wir unmittelbar auf die Erhaltung des Drehimpulses schliessen. Wenn nämlich kein resultierendes äusseres Drehmoment wirkt, bleibt der Drehimpuls konstant.

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \text{konst.}$$

Daraus lässt sich nun die Drehimpulserhaltung formulieren:

**Ges. 4:** (Drehimpulserhaltung) Wenn das resultierende äussere Drehmoment verschwindet, dann ist der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}_{\text{ges}}$  des Systems erhalten.

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum \vec{L}_i = \text{konst.}$$

Betrachten wir gleich ein einfaches Beispiel, das als Anwendung des Prinzips einer Autokupplung verstanden werden kann (vgl. Video: [Funktion und Aufbau einer Kupplung](#)).

Bsp. x.

Eine Scheibe mit dem Trägheitsmoment  $J_1$  drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  um eine reibungsfreie Welle und werde mit einer zweiten ruhenden Scheibe mit dem Trägheitsmoment  $J_2$  in Berührung gebracht. Aufgrund der Oberflächenreibung nehmen beide Scheiben nach kurzer Zeit die gleiche Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  an (Prinzip einer Autokupplung). Bestimmen Sie diese gemeinsame Winkelgeschwindigkeit. (Beispiel aus [18].)

Lsg: —

Wir haben nun die Theorie der Rotationsbewegung abgeschlossen und dabei stets die Analogien zu den Formeln der Translationsbewegung betrachtet. Zum Abschluss soll eine Tabelle diesen Vergleich zusammenfassen.

Translationsbewegung		Rotationsbewegung	
Verschiebung	$\Delta x$	Drehung	$\Delta\varphi$
Geschwindigkeit	$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$
kinematische Gleichungen für konstante lineare	$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$	kinematische Gleichungen für konstante	$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
Beschleunigung	$v(t) = v_0 + at$	Winkelbeschleunigung	$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$
Masse	$m$	Trägheitsmoment	$J$
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
Kraft	$\vec{F}$	Drehmoment	$\vec{M}$
kinetische Energie	$E_{tra} = \frac{1}{2}mv^2$	kinetische Energie	$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$
1. Newtonsches Gesetz	$\vec{F}_{res} = \vec{0}$	1. Newtonsches Gesetz	$\vec{M}_{res} = \vec{0}$
2. Newtonsches Gesetz	$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	2. Newtonsches Gesetz	$\vec{M}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J\vec{\alpha}$

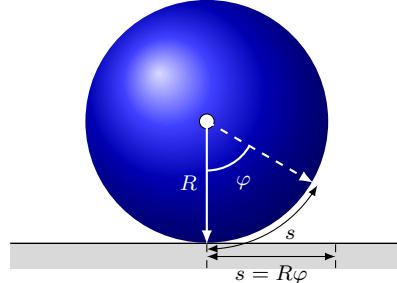
Im Folgenden werden einige Anwendungen des Gelernten betrachtet. Zuerst wird die Rollbewegung von Kugeln beim Bowling oder Billardspiel erläutert. Danach werden einige Anwendungen aus der Drehimpulserhaltung vorgestellt und schliesslich versuchen wir uns am symmetrischen Kreisel.

## 2.4 Anwendungen

Bisher haben wir einige rollende Körper betrachtet und dabei angenommen, dass der Körper rollt und die Rollbedingung erfüllt. Im nächsten Abschnitt werden wir dies genauer unter die Lupe nehmen.

### 2.4.1 Rollende Körper

Wenn wir eine Kugel mit dem Radius  $R$  betrachten, sind die Translationsbewegung und Rotationsbewegung der Kugel auf einfache Weise miteinander verbunden, wenn sie auf der Ebene rollt. Wenn sich die Kugel um den Winkel  $\varphi$  dreht, bewegt sich der Berührungsrand zwischen Kugel und Ebene um die Strecke  $s = R\varphi$ , wie auf der Abbildung dargestellt.



Damit hängt die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes  $v_s$  und die Winkelgeschwindigkeit über:

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta(R\varphi)}{\Delta t} = R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

da  $R$  konstant ist. Damit erhalten wir für die Rollbedingung:

$$v_s = R\omega$$

#### Bowlingkugel

Nun betrachten wir einen realen Fall: Eine Bowlingkugel wird so geworfen, dass sie zuerst gleitet, ohne zu rollen, und dann rollt, ohne zu gleiten. Der Werfer verleiht der Bowlingkugel keine Drehung.



Sei die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel  $v_0 = 5 \text{ m/s}$ , der Radius  $R = 11 \text{ cm}$  und die Gleitreibungszahl zwischen Kugel und Bahn  $\mu_G = 0.3$ . Für die Kugel gilt die Geschwindigkeit zu jeder Zeit  $t$ :  $v(t) = v_0 - at$ . Nun die Beschleunigung, welche die Kugel erfährt, ist die Bremsbeschleunigung, welche aus der Reibungskraft berechnet werden kann. Mit Newton II folgt:  $a = \mu_G g$ . Damit gilt für die Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_0 - \mu_G g t.$$

Diese Reibungskraft führt zu einem resultierenden Drehmoment  $M_{\text{res}} = \mu_G mgR$ . Mit Newton II starrer Körper folgt:

$$\alpha = \frac{M}{J_K} = \frac{5\mu_G g}{2R},$$

wobei  $J_K = \frac{2}{5}mR^2$  ist. Damit die Kugel die Rollbedingung erfüllt, muss zu einem bestimmten Zeitpunkt  $T$ :

$$v(T) = \omega R \quad \Rightarrow \quad v_0 - \mu_G g T = \frac{5\mu_G g}{2} T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2v_0}{7\mu_G g} \approx 0.48 \text{ s}.$$

D. h. die Kugel rollt erst etwa nach einer halben Sekunde. Doch weshalb rollt sie nicht gleich. Die Rollbedingung ist doch erfüllt, wenn  $\omega$  maximal:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

ist. Doch diese Winkelgeschwindigkeit muss erst noch erreicht werden. Für  $\omega(t)$  gilt:

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0.$$

Jedoch da keine Anfangsdrehung vorhanden ist und diese zu Zeitpunkt  $t = 0$  auftritt, muss die Winkelbeschleunigung theoretisch unendlich gross sein. Jedoch wird sie durch die Reibung der Bahn und der Kugel sowie durch den Radius der Kugel begrenzt.

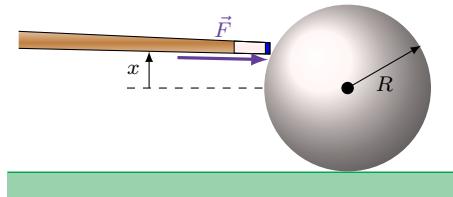
Dabei wird auch deutlich, dass eine Kugel auf einer reibungsfreien Ebene nur gleiten kann und niemals zu rollen beginnt. Im Gegensatz dazu beginnt der Körper sehr schnell zu rollen, wenn die Reibung sehr gross ist.

## Billardkugel

Die nächste Anwendung einer Rollbewegung stammt ebenfalls aus dem sportlichen Bereich, insbesondere aus dem Billardspiel. Dort soll untersucht werden, wie es möglich ist, dass eine Kugel entweder sofort zu rollen beginnt oder ob sie zuerst gleitet.



Zunächst betrachten wir den Fall, in dem die Kugel sofort rollt, ohne zu gleiten. Es ist klar, dass die Wirkungslinie der Kraft nicht durch den Massenmittelpunkt gehen darf. Denn sonst wird sich die Kugel genauso wie eine Bowlingkugel so lange nicht drehen, bis die Rollbedingung erfüllt ist. Daher ist es erforderlich, die Kugel oberhalb des Massenmittelpunkts zu treffen, wie die folgende Skizze zeigt.



Damit die Kugel gleich zu Beginn zu rollen beginnt, müssen die Winkelbeschleunigung und die lineare Beschleunigung die Rollbedingung erfüllen, d.h.  $a = \alpha R$ . Durch den Stoss mit der Kraft  $\vec{F}$  erfährt die Kugel während

einer sehr kurzen Zeit einen grossen Impulsübertrag. Dabei vernachlässigen wir die Reibung. Somit gilt mit Newton II:

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= ma \quad \text{und} \quad M_{\text{res}} = J\alpha \\ \Rightarrow \quad F &= mR\alpha \quad \text{und} \quad Fx = J\alpha \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite erhalten wir den Wert von  $x$ :

$$x = \frac{J}{mR} \Rightarrow x = \frac{2}{5}R,$$

wobei  $J = \frac{2}{5}mR^2$  eingesetzt wurde. Wir stellen also fest, dass die Wirkungslinie der Kraft  $\frac{2}{5}R$  über dem Massenmittelpunkt liegen muss, damit die Kugel gleich zu rollen beginnt, ohne zuerst zu gleiten.

Nun betrachten wir Beispiele zur Drehimpulserhaltung im Bereich des Sports. Wir werden uns einfache Anwendungen ansehen.

## 2.4.2 Drehimpulserhaltung

In diesem Abschnitt wird die Nutzung der Drehimpulserhaltung im Sport betrachtet. Zunächst werden Pirouetten beim Eiskunstlaufen und Saltos beim Kunstturnen untersucht. Darüber hinaus wird das zweite Keplersche Gesetz abgeleitet und in diesem Zusammenhang untersucht.

### Pirouette beim Eiskunstlaufen

Beim Betrachten einer Eiskunstlaufperformance ist sicherlich aufgefallen, wie schnell sich ein Läufer oder eine Läuferin bei der Pirouette drehen kann, ohne dabei erkennbar etwas dafür zu tun. Doch wie ist dies möglich?

Bevor wir uns diesem anscheinend einfachen Problem stellen, schauen wir uns zuerst das folgende Video an und versuchen gleich herauszufinden, wie Sie das bewältigen können (vgl. Video: [Pirouette Stephane Lambiel](#)).

Je schlanker der Läufer seinen Körper hält, desto schneller wird er - das zeigt sich deutlich. Es muss folglich etwas mit dem Trägheitsmoment zu tun haben, das sich bekanntmassen verändert, wenn sich die Massenverteilung ändert.

Unter der Annahme, dass die Reibung zwischen dem Läufer und dem Eis vernachlässigbar ist, wirkt kein resultierendes Drehmoment auf den Läufer. Folglich bleibt der Drehimpuls konstant.

$$L_1 = J_1\omega_1 = J_2\omega_2 = L_2.$$

Da  $J_1 > J_2$  ist, muss  $\omega_2 > \omega_1$  sein. Somit ändert sich seine Winkelgeschwindigkeit umso stärker, desto kleiner sein Trägheitsmoment wird.

Bitte beachten Sie das nachfolgende Experiment, um diesen Sachverhalt besser zu verstehen. Einen ähnlichen Versuch ist auch zu Hause mit einem Drehstuhl möglich.

### Exp. 5: Drehschemel

Eine/ein SchülerIn setzt sich auf den Drehschemel (siehe Abbildung) und hält die Hanteln in den Händen. Der Stuhl wird leicht in Drehung versetzt, während die Arme ausgestreckt bleiben. Was wird in diesem Fall passieren? Nach einer Drehung soll der/die ProbandIn die Arme an den Körper nehmen.



Da das Trägheitsmoment des Systems grösser ist, wenn die Hanteln ausserhalb des Körpers sind, anstatt ganz nah, erhöht sich die Winkelgeschwindigkeit um den Betrag, um den sich das Trägheitsmoment verringert.

Ein ähnliches Experiment zur Drehimpulserhaltung soll hier ebenfalls präsentiert werden, da es die Erhaltung des Impulses für zwei unabhängige Bewegungen aufzeigt.

---

### Exp. 6: Drehschemel und Fahrrad

Eine Schülerin oder ein Schüler setzt sich auf den abgebildeten Drehschemel (vgl. Abb. links) und nimmt das Fahrrad (vgl. Abb. rechts) in die Hand. Anschliessend wird das Rad kräftig in Drehung versetzt. Wenn man dann die Richtung des Rades so ändert, dass es parallel zum Boden ist, beginnt sich das gesamte System zu drehen. Die Frage lautet: Warum dreht es sich und in welche Richtung?



Hier gibt es keine äusseren Kräfte, daher muss der Gesamtdrehimpuls erhalten bleiben. Das Rad hat einen Drehimpuls  $L_1$ , also muss der Stuhl einen Drehimpuls  $L_2 = -L_1$  haben, damit die Summe null ergibt, da das System zuvor keinen Drehimpuls hatte.

---

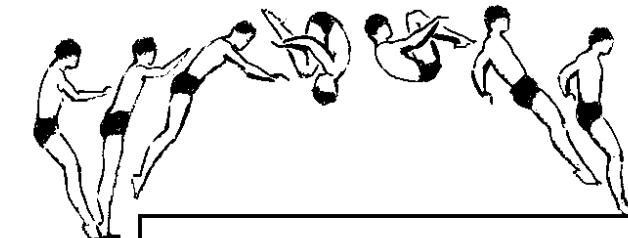
Nun analysieren wir den Salto im Kunstturnen. Selbstverständlich spielt auch hier die Erhaltung des Drehimpulses eine Rolle.

### Salto beim Kunstturnen

Auch bei einem Salto des Kunstturners spielt die Drehimpulserhaltung eine wichtige Rolle. Nach dem Absprung bewegt sich der Massenmittelpunkt gemäss Newtons zweitem Gesetz auf einer parabolischen Flugbahn. Wie das nachfolgende Bild eines Weitspringers illustriert.



Beim Salto beugt sich der Springer nach vorne und erhält dadurch einen Drehimpuls. Durch die leichte Federung am Boden oder beim Turmspringen auf dem Brett bekommt der Springer eine Kraft und somit ein Drehmoment, welches normalerweise für eine halbe Drehung ausreicht. Bei einem Salto zieht der Springer seine Beine in der Luft an, um sein Trägheitsmoment zu verringern. Dies führt aufgrund der Drehimpulserhaltung jedoch zu einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit, was in trainierten Fällen zu einem erfolgreichen Salto führt, wie das folgende Schema verdeutlicht.



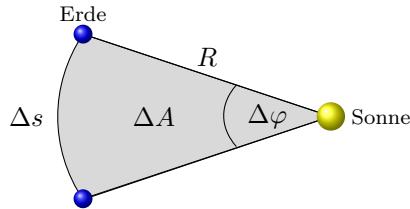
Zum Abschluss dieses Abschnitts wenden wir uns von Sport ab und kehren zur theoretischen Physik zurück.

### Zweites Keplersches Gesetz

Das zweite Keplersche Gesetz besagt, dass die Verbindungsstrecke zwischen Planet und Sonne in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Diese Regel hat formale Gültigkeit.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konstant.}$$

Betrachten wir zum Zwecke der Herleitung die folgende Skizze, welche einen Ausschnitt der Umlaufbahn der Erde um die Sonne darstellt.



Die graue Fläche lässt sich mit  $[\Delta\varphi] = \text{rad}$  wie folgt berechnen:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \Delta s R,$$

wobei hier vereinfachend die Formel für den Kreissektor verwendet wurde.

Das zweite Keplersche Gesetz folgt direkt aus dem Drehimpulserhaltungssatz. Auf die Erde wirkt lediglich die Gravitationskraft, welche als Zentralkraft bezeichnet wird. Zentralkräfte erzeugen kein Drehmoment, da die Kraft und der Radius stets parallel oder antiparallel zueinander verlaufen. Demzufolge gilt:

$$M_{\text{res}} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \text{konstant.}$$

Betrachten wir also den Drehimpuls der Erde, d. h.

$$L = J\omega.$$

Mit  $J = mR^2$  und  $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$  erhalten wir:

$$L = mR^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{mR \cdot R \Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{mR \cdot \Delta s}{\Delta t},$$

wobei  $\Delta s = R\Delta\varphi$  ist. Mit der Formel für den Kreissektor von oben erhalten wir:

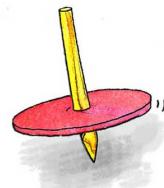
$$L = 2m \frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konstant.}$$

Da die Masse der Erde konstant bleibt, ergibt sich das zweite Keplersche Gesetz.

Zum Abschluss dieses Kapitels behandeln wir ein Schwergewicht der Schulphysik: den Kreisel.

#### 2.4.3 Symmetrischer Kreisel

Wir kennen alle die kleinen Spielkreisel (vgl. Abbildung), welche, wenn sie in Drehung versetzt werden, aufrecht stehen bleiben. Aber warum stehen sie nur aufrecht, wenn sie in Bewegung sind?



Was uns bereits aus der Statik starrer Körper klar sein sollte, ist, dass dieser Kreisel auch ohne Drehung stehen sollte, sofern man ihn perfekt ausbalancieren kann. Da dies sehr schwierig ist, insbesondere wenn die Auflagefläche so klein ist. Hier ist noch ein Video, welches einen Kippkreisel zeigt: [Video zum Kippkreisel](#).

Der dynamische Fall des Kreisels ist schwieriger zu erklären und zu verstehen, da seine Bewegungen oft unerwartet erscheinen. Ein symmetrischer Kreisel wird im physikalischen Sinn definiert als ein Objekt, das sich um eine Achse dreht und diese Achse aufgrund seiner symmetrischen Struktur beibehält.

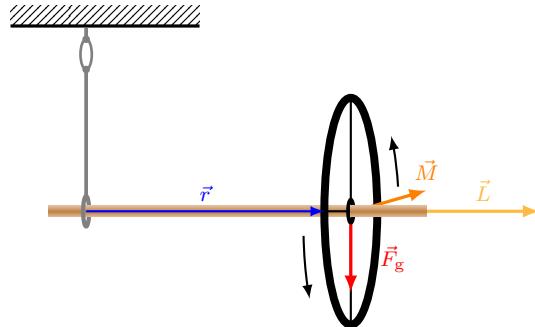
**Def. 4:** (Kreisel) Ein Kreisel ist ein Körper, der sich um eine freie Achse dreht, die in einem Punkt unterstützt wird. Ist der Körper bezüglich ihrer Drehachse symmetrisch, nennt man ihn symmetrischen Kreisel.

Das Aktionsgesetz starrer Körper ist das einzige Gesetz, das wir benötigen, um den Kreisel zu verstehen.

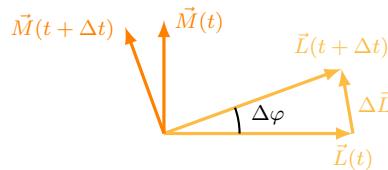
$$\vec{M}_{\text{res}} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t},$$

wobei  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  und  $\vec{L} = J\vec{\omega}$ . Ohne Berücksichtigung des vektoriellen Charakters der Größen können Bewegungen nicht vorhergesagt werden.

Betrachten wir zur Erklärung des Phänomens ein Rad eines Fahrrads mit einer Achse, welche frei rotieren kann (vgl. Abb.).



Mit Hilfe der Rechten-Hand-Regel kann einfach die Richtung des Drehmoments  $\vec{M}$  bestimmt werden. Da die Änderung des Drehimpulses  $\Delta \vec{L}$  jedoch in die gleiche Richtung wie  $\vec{M}$  zeigen muss, muss das Rad nach hinten gedreht werden. Von oben betrachtet würden die Vektoren wie folgt aussehen:



Daraus lässt sich auch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_p$  dieser Drehbewegung berechnen. Es gilt:

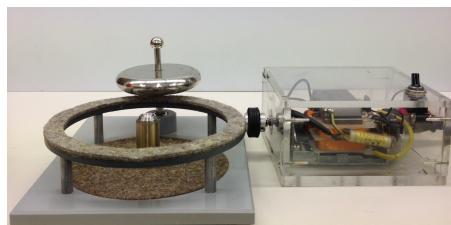
$$\omega_p = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta L/L}{\Delta t} = \frac{M}{L} = \frac{r F_g}{L}.$$

Bei der Präzession handelt es sich um eine möglicherweise überraschende Drehbewegung. Aus der Formel für die Präzessionsgeschwindigkeit wird ersichtlich, dass bei einer grossen Drehbewegung des Rades die Präzession langsam ist, während sie bei einer kleinen Drehbewegung des Rades sehr schnell ist. Dies lässt sich einerseits durch die hergeleitete Beziehung erkennen und andererseits auch ohne Formel beobachten. Ist der Drehimpuls sehr gross, bedarf es bereits für eine kleine Änderung ein grosses Drehmoment. Da das Drehmoment gegeben ist, kann dies jedoch nur eine geringe Wirkung haben. Wenn jedoch der Drehimpuls sehr klein ist, führt ein bestimmtes Drehmoment zu einer grösseren Änderung und Wirkung. Zur Veranschaulichung betrachten wir ein kleines Video, das von der ETH zur Verfügung gestellt wird. [Kreisel mit Drehmoment](#).

Betrachten wir in folgendem Experiment einen Kreisel.

#### Exp. 7: Freier Kreisel

Ein Kreisel wird durch einen kleinen Elektromotor in Bewegung gesetzt und auf den Sockel platziert (siehe Abbildung).



Da der Kreisel nicht vollständig ausbalanciert werden kann, neigt er dazu, zur Seite zu kippen. Dies löst jedoch ein Drehmoment aus, welches eine Präzessionsbewegung zur Folge hat.

---

Das gleiche Verhalten zeigt auch der Kreisel, der nach einer gewissen Zeit ausbalanciert wird und dann zu präzidieren beginnt.

### Gyroskop

Eine wichtige Anwendung des Kreisels ist das Gyroskop. Dieses Gerät besteht in der Regel aus einem Kreisel, der sich frei in allen drei Raumrichtungen bewegen kann (siehe Abbildung).



Egal in welche Richtung die Konstruktion bewegt wird, der Drehimpuls bleibt erhalten. So kann man in Flugzeugen auch ohne Sicht die Richtung bestimmen. Der Kreisel zeigt stets die gleiche Richtung an, unabhängig von der Bewegung des Flugzeugs.

Das letzte Experiment zu diesem Thema soll eher amüsant sein.

---

### Exp. 8: Kreisel im Koffer

Ein Kreisel, der fest in einem Koffer mit ihm verbunden ist, wird in Rotation gebracht (vgl. Abb.).



Wenn man den Koffer trägt und dabei eine Kurve nach rechts oder links macht oder versucht, den Koffer zu schwingen, benötigt man eine enorme Kraft. Darüber hinaus richtet sich der Koffer genauso wie ein Gyroskop aus.

---

Damit schliessen wir dieses Kapitel zur Dynamik starrer Körper ab und können stolz darauf sein, einige Erkenntnisse gewonnen zu haben, obwohl es äußerst anspruchsvoll war. Abschliessend haben ich noch ein kurzes Video für Sie: [Anit-Gravity-Wheel](#).

## Zusammenfassung Kapitel C2

- Das *Trägheitsmoment*  $J$  gibt den Widerstand eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsbewegung um eine vorgewählte Achse an. Es gilt:

$$J \approx \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

wobei  $m_i$  die Massenelemente und  $r_i$  deren Abstände zur Drehachse sind.

Die exakte Definition des Trägheitsmoments lautet:

$$J = \int_K r^2 dm,$$

wobei das Integral über den Körper  $K$  geht.

- Das *Aktionsgesetz der Drehbewegung* sagt, dass das resultierende Drehmoment  $\vec{M}_{\text{res}}$  auf einen starren Körper proportional zur Winkelbeschleunigung  $\vec{\alpha}$  ist. Damit gilt:

$$\vec{M}_{\text{res}} = J \vec{\alpha},$$

wobei  $J$  das Trägheitsmoment des Körpers ist.

- Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers lauten nun:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{M}_{\text{res}} = J \vec{\alpha}.$$

- Der *Satz von Steiner* verknüpft das Trägheitsmoment  $J_S$  für Drehungen um eine Achse durch den Massenmittelpunkt des Systems, mit dem Trägheitsmoment  $J$  bezüglich einer beliebigen dazu im Abstand  $a$  parallelen Achse. Es gilt:

$$J = J_S + m a^2,$$

sofern  $m$  die Masse des gesamten Körpers ist.

- Die *Rotationsenergie* oder kinetische Energie der Rotation eines starren Körpers mit dem Trägheitsmoment  $J$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist definiert als

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

- Der *Drehimpuls*  $\vec{L}$  eines starren Körpers mit dem Trägheitsmoment  $J$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  ist definiert als:

$$\vec{L} = J \vec{\omega}.$$

Die exakte Definition des Drehimpulses  $\vec{L}$  für eine Punktmasse ist:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

wobei  $\vec{r}$  der Abstand der Masse zu einem freiwillbaren Bezugspunkt und  $\vec{p}$  der Impuls der Masse sind.

- Mit der Definition des Drehimpulses lässt sich das Aktionsgesetz für starre Körper als Änderung des Drehimpulses  $\Delta \vec{L}$  pro Zeit  $\Delta t$  formulieren. Es gilt:

$$\vec{M}_{\text{res}} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}.$$

- Sofern kein resultierendes äußeres Drehmoment  $\vec{M}_{\text{res}}$  wirkt, ist der *gesamte Drehimpuls erhalten*, d. h.

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum \vec{L}_i = \text{konst.}$$

## Konzeptfragen Kapitel C2

1. Wenn ein konstantes Drehmoment ungleich Null auf einen starren Körper wirkt, entsteht ein
  - eine konstante Winkelgeschwindigkeit.
  - einen konstanten Drehimpuls.
  - Änderung der Winkelbeschleunigung.
  - eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit.
2. Ein Mädchen sitzt mit ausgestreckten Armen auf einem Hocker und dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Die Drehachse ist während der gesamten Bewegung fest. Wenn sie ihre Arme zu ihrem Körper hin verschränkt, erfährt sie eine Winkelbeschleunigung. Welche der folgenden Aussagen über die Rotationsbewegung des Systems Mädchen-Hocker ist richtig?
  - Es liegt eine Winkelbeschleunigung vor, weil sich nur die Richtung der Winkelgeschwindigkeit des Systems ändert.
  - Es gibt eine Winkelbeschleunigung, weil sich sowohl der Betrag als auch die Richtung der Winkelgeschwindigkeit des Systems ändert.
  - Auf das System wirkt ein Drehmoment  $\vec{M}$ , das zu der Winkelbeschleunigung  $\vec{\alpha}$  gemäss  $\vec{M} = J\vec{\alpha}$  führt (wobei  $J$  das Trägheitsmoment ist).
  - Das auf das System wirkende Drehmoment ist Null.
3. Auf einer horizontalen Fläche rollt eine starre Kugel, ohne zu verrutschen, und ein starrer Würfel gleitet, ohne sich zu drehen. Beide Objekte haben die gleiche Masse  $M$ . Zu einem bestimmten Zeitpunkt haben die Punkte im Massenschwerpunkt der Kugel und des Würfels die gleiche Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Boden. Welche der folgenden Aussagen ist zu diesem Zeitpunkt notwendigerweise wahr?
  - Der Würfel und die Kugel haben die gleiche kinetische Gesamtenergie.
  - Der Würfel hat eine kleinere kinetische Gesamtenergie als die Kugel.
  - Die Arbeit, die erforderlich ist, um den Würfel anzuhalten, ist grösser als die, die erforderlich ist, um die Kugel anzuhalten.
  - Welches Objekt eine grössere kinetische Gesamtenergie hat, hängt von dem tatsächlichen Zahlenwert der Masse  $M$  ab.
  - Keine der oben genannten Möglichkeiten.
4. Eine notwendige Bedingung dafür, dass eine starre Kugel auf einer schießen Ebene rollt, ohne abzurutschen, ist:
  - der Reibungskoeffizient ist genau gleich 1.
  - eine vernachlässigbare Winkelbeschleunigung.
  - ein steiles Gefälle mit einer Neigung von mehr als  $45^\circ$ .
  - eine nicht zu vernachlässigende Reibung.

## Aufgaben Kapitel C2

Weitere einfache Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:

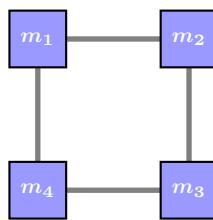
<https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0> im Kapitel 10.



1. Ein scheibenförmiger Schleifstein mit der Masse 2 kg und dem Radius 7 cm drehe sich mit 700 Umdrehungen pro Minute. Unmittelbar nach dem Abschalten des Antriebs will eine Frau ihre Sichel weiter schärfen. Sie halte die Sichel noch 10 s lang an die Schleifscheibe, bis diese zum Stillstand kommt.
  - a. Bestimmen Sie die als konstant angenommene Winkelbeschleunigung der Schleifscheibe.
  - b. Wie gross ist das Drehmoment, das von der Sichel auf die Scheibe ausgeübt wird? (Nehmen Sie an, dass keine anderen Drehmomente einwirken.)

Lsg: a.  $\alpha \approx -7.33 \text{ rad/s}^2$  b.  $M \approx -0.036 \text{ N m}$

2. Vier Massen an den Eckpunkten eines Quadrates seien durch masselose Stäbe miteinander verbunden. Die Massen betragen  $m_1 = m_3 = 3 \text{ kg}$  und  $m_2 = m_4 = 4 \text{ kg}$ . Die Seitenlängen des Quadrats sei  $l = 2 \text{ m}$ .



- a. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Systems relativ zu einer Achse, die senkrecht auf der Quadrat-Ebene steht und durch  $m_4$  geht.
- b. Welche Arbeit ist nötig, um eine Winkelgeschwindigkeit von 2 rad/s um diese Achse zu erreichen?

Lsg: a.  $J \approx 56 \text{ kg m}^2$  b.  $W \approx 112 \text{ J}$

3. Hodlers Holzfäller fällt einen  $l = 25 \text{ m}$  hohen Baum. Mit welcher Geschwindigkeit wird die Spitze des Baumes am Boden auftreffen? (Nehmen Sie an, dass der Baum durch einen dünnen, homogenen Stab angenähert werden kann.)

Lsg:  $v \approx 27 \text{ m/s}$

4. Ein Planet bewege sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne, die sich in einem Brennpunkt der Ellipse befindet. Zeigen Sie, dass für zwei Positionen mit den Abständen  $r_1$  und  $r_2$  zwischen Sonne und Planet und den dazugehörigen Geschwindigkeiten des Planets  $v_1$  und  $v_2$  folgendes gilt:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

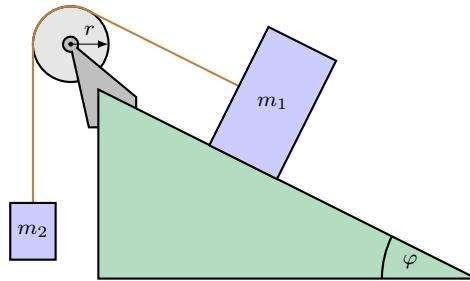
Lsg: –

5. Ein Jo-Jo besteht aus 2 Messingzylindern. Ihre Dicke beträgt  $d = 8.5 \text{ mm}$  und ihr Radius  $r_Z = 3.5 \text{ cm}$ . Eine runde Achse mit dem Radius  $r_A = 3.2 \text{ mm}$  verbindet die beiden Zylinder.

- a. Wie gross ist das Trägheitsmoment des Jo-Jos um seine Drehachse? (Vernachlässigen Sie das Trägheitsmoment der kleinen Achse.)
- b. Eine Schnur der Länge  $l = 1.1 \text{ m}$  mit vernachlässigbarer Dicke ist um die Achse gewickelt. Wie gross ist die Beschleunigung des Jo-Jos, wenn das Jo-Jo ohne Anstoss an der Schnur abläuft?
- c. Wie gross ist die Spannkraft in der Schnur?

Lsg: a.  $J \approx 3.4 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$  b.  $a \approx 0.16 \text{ m/s}^2$  c.  $F_S \approx 5.5 \text{ N}$

6. Nehmen Sie an, die Ebene in der Abbildung sei reibungsfrei und die Schnur gehe durch den Schwerpunkt von  $m_1$ . Bestimmen Sie die Beschleunigung der Massen als Funktion der gegebenen Größen, sofern die Rolle eine Masse  $m$  hat. Die zweite Masse  $m_2$  sei über eine masselose Schnur mit der ersten Masse verbunden. Der Winkel der Ebene sei  $\varphi$ . (Gehen Sie davon aus, dass sich die Rolle im Uhrzeigersinn dreht.)

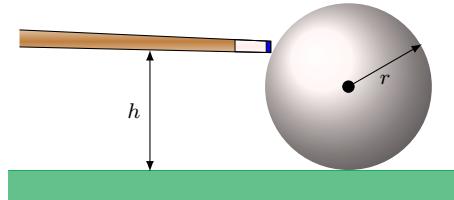


**Lsg:**  $a = \frac{m_1 \sin \varphi - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g$

7. Die weisse Anspielkugel beim Billard habe den Radius  $r$  und befindet sich in Ruhe. Sie werde mit einem horizontalen Queue angespielt, der ihre den Kraftstoss  $\Delta p = F\Delta t$  verleihe. Das Queue treffe die Kugel in der Höhe  $h$  über den Tisch (vgl. Abb.). Zeigen Sie, dass die anfängliche Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  der Kugel mit der linearen Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ihres Massenmittelpunktes über

$$\omega_0 = \frac{5v_0(h - r)}{2r^2}$$

zusammenhängt.



**Lsg:** –

# Literaturverzeichnis

- [1] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Mars\\_Climate\\_Orbiter](http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter), Juni 2012
- [2] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales\\_Einheitensystem](http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem), Juni 2012
- [3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,  
URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935>
- [4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays  $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007
- [5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron g-2 and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807
- [6] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Steradian>, Juni 2012
- [7] Aristoteles,
- [8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590
- [9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997
- [10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955
- [11] URL: <http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html>, September 2013
- [12] URL: <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index>
- [13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011
- [14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG
- [15] URL: <http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/>, April 2013
- [16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007
- [17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG
- [18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994
- [19] URL: <https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical>
- [20] Hans Kammer, Irma Mgelandze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG
- [21] URL: <https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal>
- [22] Wikipedia, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid>, August 2013
- [23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010
- [24] URL: <http://www.schulserver.hessen.de/>, Oktober 2013
- [25] URL: <http://www.leifiphysik.de>, September 2013
- [26] URL: <http://photos.zoochat.com>, September 2013

- [27] URL: <http://www.lab-laborfachhandel.de>, Oktober 2013
- [28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,
- [29] URL: [https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm\\_data/lm\\_282/auto/kap09/cd259.htm](https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm), März 2014
- [30] URL: <https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen>, März 2024
- [31] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707>
- [32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press
- [33] URL: <http://ephex.phys.ethz.ch>, Februar 2015
- [34] URL: <http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html>, März 2015
- [35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas opitscher Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962
- [36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004
- [37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018
- [38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001
- [39] URL: <https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en>, Juli 2018
- [40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998
- [41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869
- [42] URL: <http://www.tf.uni-kiel.de>, März 2014
- [43] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie\\_\(Thermodynamik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik)), März 2014
- [44] URL: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616\\_Dampfmaschine.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg), März 2014
- [45] URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png>, März 2014
- [46] URL: <http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscode.htm>, August 2014
- [47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494
- [48] URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm>, Oktober 2014
- [49] URL: <http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm>, Oktober 2014
- [50] URL: [http://www.solstice.de/grundl\\_d\\_tph/exp\\_besch/exp\\_besch\\_04.html](http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html), Oktober 2014
- [51] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639>, Oktober 2017
- [52] URL: <https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen>, Oktober 2017
- [53] URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches\\_Spektrum](https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum), August 2022
- [54] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode>, September 2022
- [55] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg>, November 2023
- [56] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>, April 2024
- [57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor
- [58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.
- [59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.
- [60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

- [61] Wikipedia, [https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitat\\_der\\_Gleichzeitigkeit](https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitat_der_Gleichzeitigkeit), August 2018
- [62] URL: <http://static.a-z.ch>, Mrz 2015
- [63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925
- [64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413
- [65] URL: <http://www.peter-glowatzki.de>, Mai 2015
- [66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941
- [67] URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche>, Mai 2015
- [68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)
- [69] URL: <http://w3.ppp1.gov/>, September 2015
- [70] O. Hofling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Warme. 15. Auflage. Ferd. Dummfers Verlag, Bonn 1994
- [71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge\\_Structural\\_Database](https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database), April 2018
- [72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)
- [73] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung>, April 2018
- [74] URL: <http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...>, Juni 2012
- [75] L. Susskind und G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics*, Basic Books, 2014