

2 Ideales Gas

Lernziele

- Sie kennen und verstehen die drei Gasgesetze.
 - Sie können die Gasgesetze anwenden.
 - Sie verstehen, wie man die drei Gasgesetzen vereinigen kann.
 - Sie kennen das Modell des idealen Gases.
 - Sie kennen das Gesetz von Avogadro und können damit die Zustandsgleichung des idealen Gases herleiten.
 - Sie verstehen den Unterschied zwischen der Zustandsgleichung und der Vereinigung der drei Gesetze.
 - Sie können die Herleitung des Gasdrucks nach Bernoulli nachvollziehen.
 - Sie verstehen den Zusammenhang zwischen kinetischer Gastheorie und den makroskopischen Zustandsgrössen.
 - Sie verstehen, wie sich die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung verändert, wenn man die Masse oder die Temperatur erhöht.
 - Sie können die spezielle Teilchengeschwindigkeit (Root Mean Square) herleiten und berechnen.
 - Sie verstehen das Äquipartitionsgesetz und können damit die innere Energie bestimmen.
 - Sie verstehen den Unterschied zwischen der inneren Energie und der kinetischen Energie eines Teilchens.
-

In diesem Kapitel zum idealen Gas wird die Zustandsgleichung des idealen Gases hergeleitet. Dabei geht es in erster Linie darum herauszufinden, welche Grössen den Zustand eines Gases beschreiben und wie sie voneinander abhängen.

Bevor wir uns der Definition des idealen Gases zuwenden, sollen die drei Gasgesetze aus dem Experiment hergeleitet werden, was im folgenden Abschnitt geschieht. Anschliessend leiten wir daraus die *Zustandsgleichung des idealen Gases* ab und vergleichen sie letztlich mit der *kinetischen Gastheorie*. Diese zeigt, dass die Wärmelehre auf die Mechanik zurückgeführt werden kann.

2.1 Gasgesetze

Für die Herleitung der drei Gasgesetze sind sowohl qualitative als auch quantitative Experimente von entscheidender Bedeutung. Das Verständnis des Gesetzes von *Boyle-Mariotte*, des Gesetzes von *Amontons* und des Gesetzes von *Gay-Lussac* erfordert eine detaillierte Analyse der Veränderungen in Druck, Volumen und Temperatur von Gasen.

Indem wir jedes Gesetz einzeln betrachten, können wir die spezifischen Einflüsse dieser Faktoren auf das Verhalten von Gasen verstehen. Schliesslich ermöglicht es die Betrachtung der Gesetze in ihrer Gesamtheit, die Zusammenhänge zwischen Druck, Volumen und Temperatur zu erfassen.

2.1.1 Gesetz von Boyle-Mariotte

Das Gesetz von Boyle-Mariotte geht auf Robert Boyle¹, der 1662 und unabhängig davon 1676 von Edme Mariotte² zurück. Beide untersuchten die Abhängigkeit von Druck und Volumen in Gasen und fanden einen Zusammenhang, der bei konstanter Temperatur gilt.

¹Robert Boyle (4. Februar 1627 in Lismore - 10. Januar 1692 in London) war ein britischer Naturforscher.

²Edme Mariotte (1620 wahrscheinlich in Dijon - 12. Mai 1684 in Paris) war ein französischer Physiker.



R. Boyle
(1627-1692)

Robert Boyle war ein bedeutender irischer Naturphilosoph, Chemiker und Physiker des 17. Jahrhunderts. Boyle ist vor allem für das von ihm formulierte Boylesche Gesetz bekannt. Dieses Gesetz legte den Grundstein für das Verständnis des Verhaltens von Gasen und war ein wichtiger Meilenstein auf dem Weg zur Entwicklung der Gastheorie. Darüber hinaus war Boyle auch ein Pionier auf dem Gebiet der Chemie, insbesondere in Bezug auf die Untersuchung von Elementen und Verbindungen. Seine Arbeit trug zur Festigung der experimentellen Methode in der Chemie bei und hatte einen grossen Einfluss auf die Entwicklung dieser Disziplin.

Edme Mariotte war ein französischer Wissenschaftler des 17. Jahrhunderts, der für seine Arbeiten auf dem Gebiet der Physik und Hydrodynamik bekannt ist. Eine seiner bemerkenswertesten Entdeckungen war das nach ihm benannte Mariottesche Gesetz. Mariottes Arbeit trug wesentlich zur Entwicklung der Gasgesetze bei und legte den Grundstein für das moderne Verständnis des Verhaltens von Gasen. Darüber hinaus leistete Mariotte auch wichtige Beiträge zur Hydrodynamik und zur Untersuchung von Flüssigkeiten. Seine Arbeit half, das Verständnis der Strömungsmechanik zu vertiefen und hatte zahlreiche Anwendungen in Bereichen wie Ingenieurwesen und Geologie.

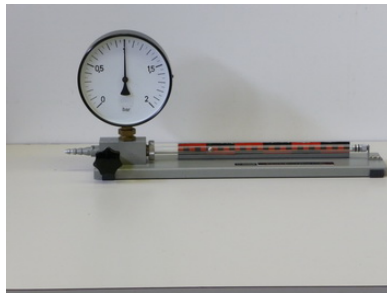


E. Mariotte
(1620-1684)

Nachdem wir diese beiden Entdecker vorgestellt haben, schauen wir uns das Experiment an, mit dem dieses Gesetz bewiesen wurde.

Exp. 1: Boyle-Mariotte

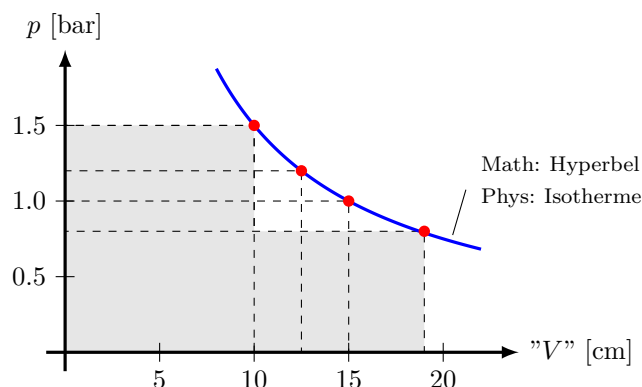
Das Volumen eines Glaszylinders mit einer beweglichen Kugel und Druckanzeige wird bei Raumtemperatur und verschiedenen Druckstufen gemessen (vergleiche Abbildung).



Der Druck kann mittels der Glasspritze variiert werden und das Volumen lässt sich direkt anhand der Längenmessung bestimmen. Das Ergebnis der Messung lautet:

Druck p [bar]	Volumen "V" [cm]	pV [bar · cm]
1	15	15
1.2	12.5	15
1.5	10	15
0.8	19	15.2

In der letzten Spalte wird deutlich, dass das Produkt von Druck und Volumen konstant ist. Im pV -Diagramm erhalten wir graphisch folgendes Ergebnis:



Die grauen Flächen unter der Kurve entsprechen exakt dem Produkt aus Druck und Volumen und haben daher stets identische Grösse. Dieser Zusammenhang gilt präzise für eine Hyperbel.

Daraus lässt sich nun das erste der drei Gesetze formulieren:

Ges. 1: (Gesetz von Boyle und Mariotte) Für ein beliebiges Gas (bei geringer Dichte) gilt bei konstanter Temperatur T , dass das Volumen V und der Druck p umgekehrt proportional zueinander sind, d. h.

$$pV = \text{konst.}, \quad \text{mit} \quad T = \text{konst.}$$

Eine äquivalente Formulierung lautet:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad \text{mit} \quad T_1 = T_2.$$

Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel aus der Küche, ohne dabei die Temperaturabhängigkeit zu berücksichtigen.

Bsp. i.

In einem tiefen Kochtopf (50 cm) beginnen sich bei ca. 90°C erste Blasen am Boden zu bilden. Durch das Aufsteigen der Blasen werden sie grösser. a) Erläutern Sie dieses Phänomen und b) bestimmen Sie den Faktor, um den sich die Blasen vergrössern, sofern die kleine Temperaturänderung vernachlässigt werden kann. Lsg: a) –, b) 5%

Lösung:



Nach der Untersuchung der Abhängigkeit zwischen Druck und Volumen im vorherigen Abschnitt betrachten wir nun im nächsten Abschnitt den Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur bei konstantem Volumen.

2.1.2 Gesetz von Amontons

Das Gesetz von Amontons geht auf Guillaume Amontons³ zurück. In gewissen Büchern ist es auch unter dem 2. Gesetz von Gay-Lussac bekannt.



G. Amontons
(1663-1705)

Guillaume Amontons war ein französischer Physiker des 17. und 18. Jahrhunderts, der für seine Beiträge auf dem Gebiet der Thermodynamik und der experimentellen Physik bekannt ist. Eine seiner wichtigsten Entdeckungen war das Amontons'sche Gesetz. Dieses Gesetz war ein früher Vorläufer des idealen Gasgesetzes und trug wesentlich zum Verständnis des Verhaltens von Gasen bei. Amontons leistete auch wichtige Beiträge zur Entwicklung von Instrumenten und Experimenten in der Physik. Er verbesserte die Thermometer und Barometer seiner Zeit und entwickelte neue Methoden zur Messung von Druck und Temperatur.

Das Amontonsche Gesetz untersucht das Verhältnis zwischen dem Druck eines Gases und dessen Temperatur, wenn das Gas in einem fest verschlossenen Volumen ist. Hierzu betrachten wir folgendes Gedankenexperiment:

Exp. 2: Gedankenexperiment zu Amontons

Betrachten wir ein geschlossenes Volumen, in dem sich viele kleine Kugeln befinden. Aus dem Teilchenmodell der Chemie wissen wir, dass nichts ruht und sich die Teilchen immer bewegen. Je höher die Temperatur, desto schneller bewegen sie sich. Dadurch erhöht sich die Frequenz der Kollisionen mit den Wänden. Folglich steigt der Druck auf die Wände. Durch eine Erhöhung der Temperatur muss der Druck also zwangsläufig steigen.

Daraus folgt, dass der Druck und die Temperatur zueinander proportional sind, wenn der Druck durch Stösse gegen die Wände beeinflusst wird. Um diesen Zusammenhang qualitativ zu untersuchen, führen wir ein Experiment durch.

³Guillaume Amontons (31. August 1663 in Paris - 11. Oktober 1705) war ein französischer Physiker und Statthalter von Lille.

Exp. 3: Amontons

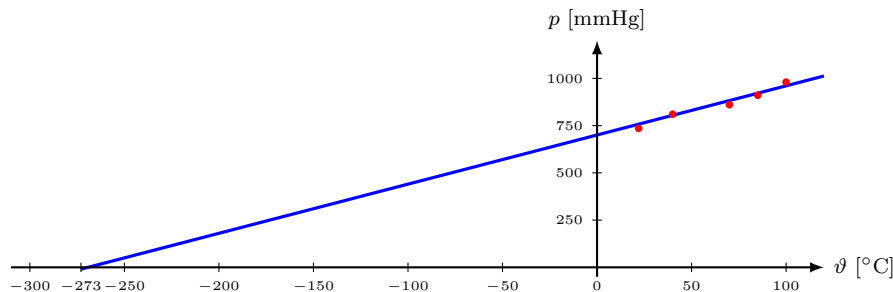
Bei dem Experiment wird das Volumen über einer Quecksilbersäule auf 100°C erhitzt, bevor der Druck p für verschiedene Temperaturen gemessen wird. Während des Abkühlprozesses wird beachtet, dass das eingeschlossene Volumen konstant bleibt (siehe Abbildung).



Durch Abkühlung der umgebenden Luft steigt die Quecksilbersäule auf der linken Seite. Der Druck lässt sich durch die Höhendifferenz Δh direkt berechnen, sofern man den Druck in mmHg misst: $p [\text{mmHg}] = p_0 [\text{mmHg}] + \Delta h [\text{mmHg}]$, wobei $p_0 \approx 735 \text{ mmHg}$ beträgt. In der Tabelle unten sind die gemessenen Werte aufgelistet:

Druck p :	980	910	860	810	735	[mmHg]
Temperatur ϑ :	100	85	70	40	22	[°C]
Temperatur T :	373	353	333	313	295	[K]

Die folgenden Werte sollen nun graphisch dargestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Abzisse, also die ϑ -Achse, fast dreimal so lang sein sollte wie der Bereich von 0°C bis 100°C. Es ist wichtig, dass genügend Platz vorhanden ist.



Die Abhängigkeit ist direkt proportional, da die Punkte auf einer Geraden liegen.

$$p \sim T \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{T} = \text{konst.}, \quad \text{mit } V = \text{konst.}$$

Durch dieses Experiment können wir den absoluten Nullpunkt bestimmen. Wenn wir die Punkte auf einen Druck von 0 mmHg extrapolieren, erreichen wir eine Temperatur von -273°C . Das bedeutet, dass der kleinste Druck bei der niedrigsten Temperatur erreicht wird.

Somit können wir nun das zweite Gesetz formulieren:

Ges. 2: (Gesetz von Amontons) Für ein beliebiges Gas (bei geringer Dichte) gilt bei konstantem Volumen, dass der Quotient aus dem Druck p und der Temperatur T konstant ist:

$$\frac{p}{T} = \text{konst.}, \quad \text{mit } V = \text{konst.}$$

Eine äquivalente Formulierung lautet:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \text{mit } V_1 = V_2.$$

Betrachten wir dazu ein Beispiel:

Bsp. iii.

In einem Gefäß mit dem Volumen von einem Liter und frei beweglichem Deckel (Masse kann vernachlässigt werden) wird die Lufttemperatur um 10% (in Kelvin gemessen) erhöht, wie stark wächst das Volumen. **Lsg: 10%**

Lösung:

Das nachfolgende Beispiel soll den Zusammenhang zwischen der Volumenausdehnung von Flüssigkeiten und Festkörpern mit der Volumenausdehnung bei konstantem Druck zeigen.

Bsp. iv.

Zeigen Sie, dass das Gesetz der Volumenausdehnung für Flüssigkeiten und Festkörper äquivalent zum Gay-Lussac Gesetz ist, sofern man für $\gamma = \frac{1}{T_0}$, mit T_0 als Anfangstemperatur, festlegt. **Lsg: –**

Lösung:

Bevor wir weitere Beispiele oder Anwendungen wie z.B. Motoren, Kühlschränke oder Dampfkochtöpfe betrachten, werden diese Gesetze im nächsten Abschnitt zu einem Gesetz vereint⁶.

2.2 Zustandsgleichung idealer Gase

Nachdem die drei Gesetze des idealen Gases experimentell gefunden wurden, geht es nun darum, sie zu einem Gesetz zu vereinen. Hier folgt eine kurze Übersicht über die drei Gesetze:

Boyle-Mariotte	$pV = \text{konst.}$	bei konstanter Temperatur
Amontons	$p/T = \text{konst.}$	bei konstantem Volumen
Gay-Lussac	$V/T = \text{konst.}$	bei konstantem Druck

Ausgehend von diesen drei Gesetzen ergibt sich unmittelbar, dass, wenn der Wert von pV sowie Wert von p/T und der Wert von V/T konstant sind, dann muss⁷:

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.}$$

⁶Immer wieder gibt es in der Physik Bestrebungen, die Anzahl der Gesetze zu reduzieren. Man könnte schon fast sagen, dass dies eines der Grundziele der Grundlagenphysik ist, verschiedene Gesetze zu einer vereinheitlichten Theorie zu vereinen.

⁷Dies kann sehr einfach gezeigt werden. Sei

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad T_1 = T_2 \quad \text{und} \quad \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}, \quad V_2 = V_3$$

Nehmen Sie an, dass beim Öffnen eines Gefrierschranks etwa 180 Liter bei -22°C kalte Luft aus dem Gefrierschrank abfließen und durch 175 Liter von 17°C warme Luft ersetzt werden. Ausserhalb herrscht ein Luftdruck von 98 kPa. Bestimmen Sie a) den Druck im Innern nach dem Schliessen der Tür bei einem luftdichten Gefrierschrank und b) die Kraft, die aufgrund des Druckunterschiedes auf die $(70 \times 180) \text{ cm}^2$ grosse Tür wirkt.

Lsg: a) $p_2 \approx 82.5 \text{ kPa}$, b) $F \approx -19.5 \text{ kN}$

Lösung:

Wir wollen nun die Zustandsgleichung idealer Gase betrachten. Hierfür müssen wir das Modell des idealen Gases einführen.

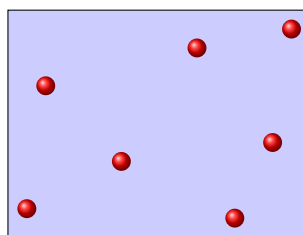
Modell des idealen Gases

Das ideale Gas-Modell basiert auf vier Grundsätzen, welche im realen Gas zwar nicht vollständig umgesetzt werden können. Trotzdem ist das ideale Gas als erste Näherung in vielen Fällen sehr nützlich. Trotzdem ist das ideale Gas als erste Näherung in vielen Fällen sehr nützlich. Es ermöglicht auch die Ableitung anderer Konzepte.

Hier sind also die vier Grundsätze:

1. Das ideale Gas besteht aus beweglichen Teilchen (Atome, Moleküle).
2. Die Teilchen sind Massenpunkte, d. h. sie haben kein Eigenvolumen.
3. Zwischen den Teilchen bestehen keine Wechselwirkungen (Kräfte).
4. Stösse gegen Hindernisse (z. B. Gefässwände) und untereinander sind vollkommen elastisch (Energie- und Impulserhaltung).

Für zahlreiche Gase, bei einem moderaten Druck, ist die Betrachtung als ideales Gas angemessen. Diese Betrachtungsweise kann wie folgt veranschaulicht werden:



Damit wir nun die Konstante aus der Beziehung:

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.}$$

bestimmen können, brauchen wir noch ein weiteres Gesetz. Dieses Gesetz geht auf Amadeo Avogadro⁸ zurück.



A. Avogadro
(1776-1856)

Amedeo Avogadro war ein bedeutender italienischer Physiker und Chemiker des 19. Jahrhunderts, der für seine grundlegenden Beiträge zur molekularen Theorie bekannt ist. Seine bedeutendste Entdeckung ist das nach ihm benannte Avogadro-Gesetz. Diese Entdeckung war ein entscheidender Schritt zur Entwicklung der molekularen Theorie der Gase und trug wesentlich zur Entwicklung der Chemie bei. Ein weiterer wichtiger Beitrag von Avogadro war die Unterscheidung zwischen Atomen und Molekülen. Er postulierte, dass Atome nicht die kleinsten Einheiten der Materie sind, sondern dass chemische Elemente aus Molekülen bestehen, die wiederum aus Atomen zusammengesetzt sind.

⁸Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro, Conte di Quaregna e Cerreto (9. August 1776 in Turin - 9. Juli 1856) war ein italienischer Physiker und Chemiker.

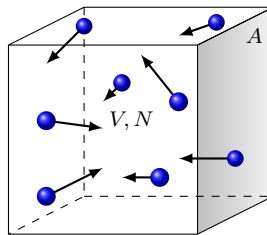
2.3 Kinetische Gastheorie

Der Begriff der kinetischen Gastheorie verrät schon einiges, in welche Richtung dieser Abschnitt gehen wird. Das Ziel ist es, den Gasdruck aus rein mechanischen Grössen abzuleiten.

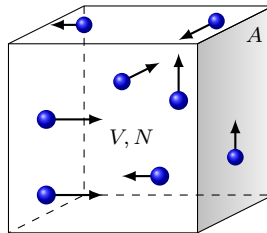
Die Erklärung des Gasdrucks machte den Naturwissenschaftlern früherer Zeiten grosse Schwierigkeiten. Robert Boyle zum Beispiel meinte, dass ein Gas *ein Haufen kleiner Körperchen sei, die aufeinander liegen und ähnliche Eigenschaften haben wie ein Fell. Denn dieses besteht aus vielen biegsamen Härchen, die sich wie Springfedern zusammendrücken lassen, aber sich stets wieder aufzurollen versuchen*. Isaac Newton wiederum glaubte, dass zwischen den Gasmolekülen abstossende Kräfte wirken, die den Gasdruck gegen die Wände hervorrufen. Im Jahre 1738 veröffentlichte schliesslich der Schweizer Mathematiker Daniel Bernoulli¹² eine Rechnung, die den Gasdruck mit der Bewegung der Moleküle in Zusammenhang brachte. Diese historische Erklärung stammt aus [17].

2.3.1 Berechnung des Gasdrucks nach D. Bernoulli

Betrachten wir ein ideales Gas, welches in einem Würfel eingeschlossen ist. Der Würfel hat die Seitenflächen A , das Volumen V und enthält N Teilchen, die sich frei in alle Richtungen bewegen können:



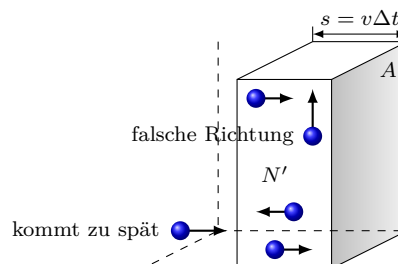
Bei sehr vielen Teilchen, sprechen wir von 10^{23} Teilchen und mehr, kann man davon ausgehen, dass sich im Mittel in allen sechs Richtungen des Würfels gleich viele Teilchen mit etwa der gleichen Geschwindigkeit bewegen.¹³ Somit kann man das Bild vereinfachen:



Damit erhalten wir das erste Resultat:

$\frac{1}{6}$ aller Teilchen fliegen senkrecht auf die Wand A zu.

Nun betrachten wir die Wand A etwas genauer und schauen uns an, wie viele Teilchen N' die Wand während einer bestimmten Zeit Δt treffen, wenn die Teilchen eine Geschwindigkeit v haben:



Die Wand wird nur von den Teilchen getroffen, die sich im Abstand s von der Wand befinden, wenn $s = v\Delta t$ ist und ihre Geschwindigkeit v in Richtung der Wand zeigt. Damit ergibt sich das zweite Resultat:

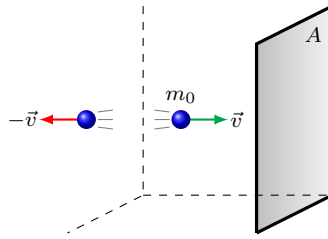
Die Anzahl Teilchen N' , welche in der Zeit Δt die Wand A treffen sind:

$$N' = \frac{1}{6} \cdot \frac{N}{V} \cdot A v \Delta t.$$

¹²Daniel Bernoulli (8. Februar 1700 in Groningen - 17. März 1782 in Basel) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker aus der Gelehrtenfamilie Bernoulli. Er arbeitete mit Leonhard Euler an den Gleichungen, die ihre Namen tragen. Der Bernoulli-Effekt ist von überragender Bedeutung in der Aerodynamik.

¹³Was man dem einen Teilchen in der einen Richtung wegnimmt, kriegt ein anderes Teilchen und umgekehrt, sodass am Schluss alle sich nur noch in eine der sechs Richtungen bewegen, ohne dass die mittlere Geschwindigkeit verändert wurde.

Diese vielen Teilchen, die gegen die Wand stossen, erfahren durch die Wand eine Impulsänderung. Betrachten wir ein Teilchen mit der Masse m_0 und der Geschwindigkeit \vec{v} , um diese Impulsänderung zu bestimmen:



Die Impulsänderung eines Teilchens ergibt sich natürlich aus dem Impuls vor dem Stoss und nach dem Stoss, wobei er vollkommen elastisch ist (vgl. Modell des idealen Gases), also:

$$\Delta \vec{p} = m_0(-\vec{v}) - m_0\vec{v} = -2m_0\vec{v}.$$

Die gesamte Impulsänderung entspricht der Impulsänderung für ein Teilchen multipliziert mit der Anzahl Teilchen N' , die während der Zeit Δt gegen die Wand stossen, d. h.: $\Delta p_{\text{ges}} = N' \Delta p$.

Hieraus lässt sich gerade die Kraft bestimmen, die auf die Teilchen durch die Wand ausgeübt wird. Gemäss dem Wechselwirkungsgesetz entspricht ihr Betrag auch der auf die Wand wirkenden Kraft. Es gilt: $F = \frac{\Delta p_{\text{ges}}}{\Delta t}$.

Daraus erhalten wir nun das dritte Resultat

Die gesamte Kraft F , welche auf die Wand A übertragen wird ist gegeben:

$$F = \frac{1}{6} \cdot \frac{N}{V} \cdot Av \cdot 2m_0v.$$

Schliesslich können wir den Druck p auf die Wand bestimmen. Er entspricht der Kraftübertragung der Teilchen auf die Wand A , das heisst $p = \frac{F}{A}$.

Daraus ergibt sich nun das abschliessende Ergebnis:

Der Druck eines Gases aus N Teilchen mit der Teilchenmasse m im Volumen V ist gegeben:

$$p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \cdot m_0 v^2.$$

Achten Sie darauf, dass die beiden willkürlich gewählten Grössen, nämlich die Fläche A und das Zeitintervall Δt , verschwunden sind.

Der Term $m_0 v^2$ sollte uns an die kinetische Energie der Translation erinnern, $E_{\text{tra}} = 1/2 m_0 v^2$. Jedoch besitzen nicht alle Teilchen in einem Gas genau die gleiche kinetische Energie. Dieser Term entspricht vielmehr der mittleren kinetischen Energie, die durch eckige Klammern angedeutet wird. Damit erhalten wir folgendes Gesetz für den Gasdruck:

Ges. 6: (Energie-Druck-Beziehung) Der Druck p eines idealen Gases ist proportional zur Teilchendichte N/V und zur mittleren kinetischen Energie der Translation $\langle E_{\text{tra}} \rangle$, d. h.

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle E_{\text{tra}} \rangle,$$

wobei die mittlere kinetische Energie $\langle E_{\text{tra}} \rangle = \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle$ ist.

Dieser Term kann noch weiter umgeformt werden, indem wir das Produkt aus Druck und Volumen betrachten, das heisst:

$$pV = \frac{2}{3} N \langle E_{\text{tra}} \rangle = \frac{2}{3} n N_A \langle E_{\text{tra}} \rangle,$$

wobei die Anzahl Teilchen N berechnet werden kann, aus der Anzahl Mol n und der Avogadro Konstante N_A , welche die Anzahl Teilchen in einem Mol definiert, d. h. also: $N = n N_A$.

Damit haben wir nun zwei Ausdrücke für das ideale Gas, einen aus der Gastheorie und einen aus der Modellrechnung nach Bernoulli. Wenn wir diese beiden Ausdrücke vergleichen:

$$\begin{array}{ll} \text{Modellrechnung:} & pV = \frac{2}{3} n N_A \langle E_{\text{tra}} \rangle \\ \text{Gastheorie:} & pV = nRT \end{array}$$

folgt, dass

$$\frac{2}{3}nN_A\langle E_{\text{tra}}\rangle = nRT \quad \Rightarrow \quad \langle E_{\text{tra}}\rangle = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T$$

ist. Da das Verhältnis $\frac{R}{N_A}$ eine Konstante ist, wurde sie neu definiert und nach Ludwig Boltzmann¹⁴ benannt.



L. Boltzmann
(1844-1906)

Ludwig Boltzmann war ein bedeutender österreichischer Physiker des 19. Jahrhunderts, der für seine bahnbrechenden Beiträge zur Statistischen Mechanik und Thermodynamik bekannt ist. Eine seiner bedeutendsten Errungenschaften war die Formulierung der statistischen Interpretation der Entropie, die heute als Boltzmanns Entropieformel bekannt ist. Darüber hinaus leistete Boltzmann auch wichtige Beiträge zur kinetischen Gastheorie und zur Erforschung der Brownschen Bewegung. Er entwickelte mathematische Modelle, um die Bewegung von Teilchen in einem Gas zu beschreiben, und trug so wesentlich zum Verständnis der Natur der Gase bei.

Def. 3: (Boltzmann-Konstante) Die Boltzmann-Konstante k_B ist definiert als das Verhältnis aus der universellen Gaskonstante R und der Avogadro-Zahl N_A , d. h.

$$k_B = \frac{R}{N_A} \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

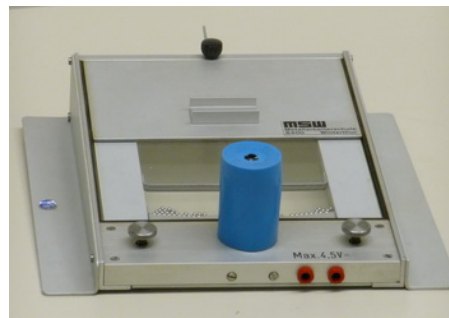
Mit dieser Definition erhalten wir für die mittlere kinetische Energie der Translation eines idealen Gases:

$$\langle E_{\text{tra}}\rangle = \frac{3}{2}k_B T.$$

Daran erkennen wir, dass die mechanische Grösse der mittleren Bewegungsenergie direkt proportional zur Temperatur ist. Somit haben wir eine spezifische Grösse der Wärmelehre auf den Formalismus der Mechanik zurückgeführt. Dazu betrachten wir das folgende Modell-Experiment.

Exp. 4: Kinetisches Gasmodell

In diesem Modell werden die Teilchen durch kleine Kugeln dargestellt, und die Temperatur kann durch die Vibration bzw. durch die angelegte Spannung modelliert werden (vgl. Abbildung).



Man sieht sehr deutlich, dass die Bewegung der Teilchen und damit die kinetische Energie zunimmt, wenn die Temperatur steigt.

2.3.2 Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

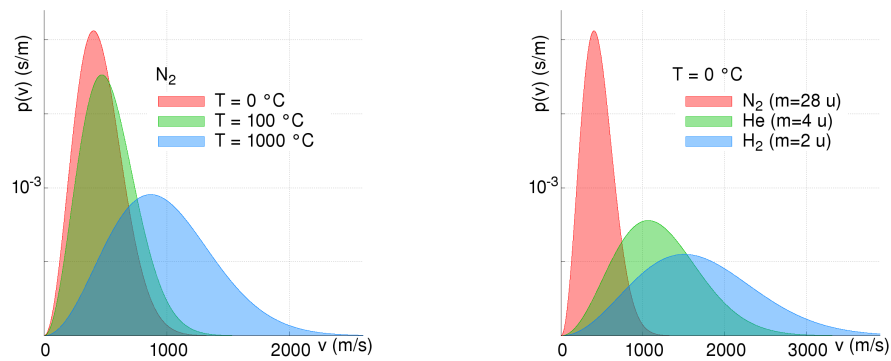
Dass nicht alle Teilchen oder Moleküle in einem Gas die gleiche Geschwindigkeit und damit die gleiche Energie haben, ist klar und konnte mit dem soeben gezeigten Modell-Experiment ebenfalls gut verstanden werden. James Clerk Maxwell¹⁵ und Ludwig Boltzmann leiteten 1860 unabhängig voneinander eine Verteilung der Geschwindigkeiten in einem Gas her. Die Herleitung wird an dieser Stelle nicht gezeigt, sondern nur das Resultat. Die Verteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit $p(v)$, ein Atom oder Molekül im Geschwindigkeitsbereich zwischen v und $v + \Delta v$ zu finden. Es gilt:

$$p(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-m_0 v^2 / 2k_B T}.$$

Die folgenden beiden Grafiken zeigen die Verteilung für ein Gas bei unterschiedlichen Temperaturen (links) und verschiedene Gase unterschiedlicher Massen bei gleicher Temperatur (rechts).

¹⁴Ludwig Eduard Boltzmann (20. Februar 1844 in Wien - 5. September 1906 in Duino bei Triest) war ein österreichischer Physiker und Philosoph.

¹⁵James Clerk Maxwell (13. Juni 1831 in Edinburgh 5. November 1879 in Cambridge) war ein schottischer Physiker.



Man erkennt einige möglicherweise auch überraschende Eigenschaften.

- Auch wenn die Temperatur sehr hoch ist, gibt es immer noch Teilchen, die praktisch keine Geschwindigkeit haben.
- Je höher die Temperatur ist, desto breiter ist die Verteilung, da der Mittelwert sich nach rechts verschiebt, und umgekehrt.
- Unterschiedliche Gase haben bei gleicher Temperatur unterschiedliche Verteilungen, da die Verteilung von der Masse abhängig ist.

Betrachten wir im folgenden Beispiel das Problem der Verdunstung.

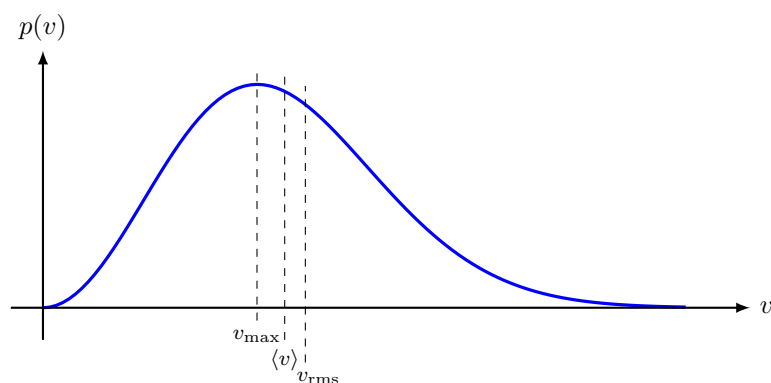
Bsp. ix.

Erläutern Sie den Vorgang des Verdunstens und was er mit der Geschwindigkeitsverteilung zu tun hat. Lsg: –

Lösung:

Diese Geschwindigkeitsverteilung hat drei wichtige Geschwindigkeiten, die sich voneinander unterscheiden. Wir bezeichnen sie mit

- v_{\max} , die Geschwindigkeit, an der die Verteilung ihr Maximum hat,
- $\langle v \rangle$, die mittlere Geschwindigkeit und
- $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_{\text{rms}}$, den Mittelwert der Quadrate der Geschwindigkeiten (Root Mean Square).



Bsp. xii.

Im Weltraum befinden sich in jedem cm^3 ca. ein Wasserstoffmolekül, wobei die Temperatur ca. 3.5 K beträgt. Bestimmen Sie a) die rms-Geschwindigkeit dieser Moleküle und b) den Druck, den sie ausüben. (Im Vergleich: Erdatmosphäre 10^{20} Teilchen pro cm^3 .)

Lsg: a) $v_{\text{rms}} \approx 210 \text{ m/s}$, b) $p \approx 4.8 \cdot 10^{-17} \text{ Pa}$

Lösung:

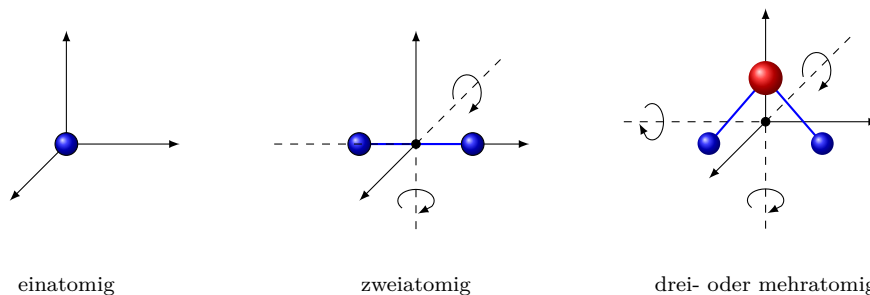
Die bisherige Herleitung basiert auf einatomigen Gasen. Jedoch stellt sich die Frage, wie sich dies auf zwei- oder mehratomige Gase auswirkt.

2.3.3 Gleichverteilungssatz und innere Energie

Es wurde bemerkt, auch wenn nur beiläufig, dass die Formel für die mittlere kinetische Energie eines idealen Gases

$$\langle E_{\text{tra}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

nur für einatomige Gase gilt. Damit stellt sich die Frage, was sich für die kinetische Energie ändert, wenn wir zum Beispiel ein zwei-, drei- oder mehratomiges Gas betrachten. Schauen wir uns an, welche Bewegungsmöglichkeiten die verschiedenen Gase haben:



Anhand dieser drei Bilder wird deutlich, dass die Anzahl der Bewegungsmöglichkeiten für ein einatomiges Gas drei beträgt, nämlich die Translationsbewegungen in den drei Raumrichtungen. Für ein zweiatomiges Gas gibt es fünf Bewegungsmöglichkeiten, davon drei Translationsbewegungen und zwei Rotationsbewegungen. Bei einem drei- oder mehratomigen Gas sind es sechs Möglichkeiten, bestehend aus drei Translationsbewegungen und drei Rotationsbewegungen¹⁶. Dazu ein einfaches Beispiel:

Bsp. xiii.

Nennen Sie a) ein ein- b) zwei- und c) drei- oder mehratomiges Gas.

Lsg: –

¹⁶Hier haben die Teilchen keine Ausdehnung und können sich somit nicht um ihre eigene Achse drehen. Im Grunde gibt es neben den Freiheitsgraden der Translation und der Rotation auch die der Schwingung, welche an dieser Stelle nicht berücksichtigt werden, da sie nur in Festkörpern vorkommen.

Lösung:

Diese Gase haben alle mindestens drei Bewegungsmöglichkeiten, welche in der Physik als *Freiheitsgrade der Bewegung* oder kurz: Freiheitsgrade bezeichnet werden. Mit diesem Begriff lässt sich nun das Äquipartitions- oder Gleichverteilungsgesetz formulieren:

Ges. 7: (*Äquipartitionsgesetz*) Das Gleichverteilungsgesetz besagt, dass jeder Freiheitsgrad der Bewegung den gleichen Anteil an Energie bekommt, d. h. ein ideales Gas bei der Temperatur T besitzt pro Freiheitsgrad f die mittlere kinetische Energie $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ von

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = f \frac{1}{2} k_{\text{B}} T$$

Allgemein gilt: $E_{\text{kin}} = E_{\text{tra}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}}$, wobei E_{rot} die Rotationsenergie und E_{vib} die Schwingungsenergie sind.

Damit sind wir nun in der Lage, die *innere Energie* U eines Gases zu definieren. Die innere Energie eines Gases ist die gesamte Energie, die die Teilchen durch ihre Bewegung haben, das heisst, sie ist direkt mit der mittleren kinetischen Energie verknüpft. Es gilt:

Def. 4: (*Innere Energie*) Die innere Energie U eines idealen Gases ist definiert als die totale mittlere kinetische Energie im thermodynamischen Gleichgewicht, d. h.

$$U = N \langle E_{\text{kin}} \rangle,$$

wobei N die Anzahl Teilchen des idealen Gases sind.

Das bedeutet nun, dass die innere Energie eines Gases aufgrund aller Bewegungen basiert, einschliesslich der Rotation und Vibration der Moleküle. Je höher die Temperatur ist, desto mehr Bewegungsarten werden angeregt. Ein Molekül beginnt erst bei sehr hoher Temperatur bzw. hoher innerer Energie zu schwingen. Damit erhalten wir für die innere Energie:

$$U = N \left(\langle E_{\text{tra}} \rangle + \langle E_{\text{rot}} \rangle + \langle E_{\text{vib}} \rangle \right).$$

Daraus lässt sich mit den entsprechenden Freiheitsgraden die Formel für die innere Energie ableiten:

$$U = \frac{3}{2} n R T + \frac{f_{\text{R}}}{2} n R T + \frac{f_{\text{v}}}{2} n R T,$$

wobei f_{R} : 2 oder 3 und f_{v} : $3n - 5$, resp. $3n - 6$ sind¹⁷.

Damit schliessen wir nun diesen Abschnitt zum idealen Gas ab. Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre beschäftigen, in dem die innere Energie eine zentrale Rolle spielt.

¹⁷Allgemein haben n Atome in einem Molekül $3n$ Freiheitsgrade. Also bleiben für die Schwingungsfreiheitsgrade $3n - 5$ für lineare Moleküle und $3n - 6$ für gewinkelte Moleküle.

Zusammenfassung Kapitel F2

1. Das Gesetz von *Boyle und Mariotte* besagt, dass bei konstanter Temperatur der Druck und das Volumen eines idealen Gases umgekehrt proportional sind, d. h.

$$pV = \text{konst. mit } T = \text{konst.}$$

2. Das Gesetz von *Amontons* besagt, dass bei konstantem Volumen der Druck und die Temperatur eines idealen Gases proportional sind, d. h.

$$\frac{p}{T} = \text{konst. mit } V = \text{konst.}$$

3. Das Gesetz von *Gay-Lussac* besagt, dass bei konstantem Druck das Volumen und die Temperatur eines idealen Gases proportional sind, d. h.

$$\frac{V}{T} = \text{konst. mit } p = \text{konst.}$$

4. Diese drei Gasgesetze lassen sich in einem Gesetz formulieren, d. h. für ein ideales Gas ist:

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.}$$

5. Ein ideales Gas gehorcht folgenden vier Grundsätzen:

1. Das ideale Gas besteht aus beweglichen Teilchen.
2. Die Teilchen sind Massenpunkte.
3. Zwischen den Teilchen bestehen keine Wechselwirkungen.
4. Stöße gegen Hindernisse und untereinander sind vollkommen elastisch.

6. Das Gesetz von *Avogadro* besagt, dass für ideale Gase mit gleichem Druck, gleicher Temperatur und gleichem Volumen die Anzahl der Teilchen ebenfalls die gleiche ist.

7. Das *Mol* ist die *Stoffmenge* eines Systems, das aus ebenso vielen Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12 g des Nuklids ^{12}C enthalten sind. Diese Zahl entspricht der Avogadro-Konstante N_A und ist:

$$N_A \simeq 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

8. Die *Molare Masse* M ist gegeben aus der Stoffmenge n und der Masse m des Gases, als

$$M = \frac{m}{n}.$$

9. Die *Zustandsgleichung idealer Gase* ist ein Ausdruck aus dem Zusammenhang zwischen dem Druck p , dem Volumen V , der Stoffmenge n und der Temperatur T . Es gilt:

$$pV = nRT,$$

wobei R die universelle Gaskonstante ist und den Wert:

$$R \simeq 8.314 \text{ J/(mol K)}$$

hat.

10. Der Druck p eines idealen Gases in einem Gefäß mit dem Volumen V , welches aus N Teilchen besteht ist proportional zur *mittleren kinetischen Energie* $\langle E_{\text{kin}} \rangle$, d. h.

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle E_{\text{kin}} \rangle.$$

11. Wir unterscheiden in einem Gas verschiedene charakteristische Geschwindigkeit:

- Die Geschwindigkeit v_{\max} an der die Maxwell-Verteilung sein Maximum hat:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2k_{\text{B}}T}{m_0}},$$

- die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_{\text{B}}T}{\pi m_0}} \quad \text{und}$$

- der Mittelwert der Quadrate der Geschwindigkeiten v_{rms} :

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_{\text{B}}T}{m_0}}.$$

- 12.** Das *Äquipartitionsgesetz* besagt, dass jeder *Freiheitsgrad* f der Bewegung den gleichen Anteil an Energie bekommt, d. h.

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = f \frac{1}{2} k_{\text{B}} T,$$

wobei k_{B} die Boltzmann-Konstante ist und den Wert:

$$k_{\text{B}} \simeq 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

hat.

- 13.** Die *innere Energie* U für ein ideales Gas ist definiert als

$$U = N \langle E_{\text{kin}} \rangle,$$

wobei N die Anzahl Teilchen des Gases sind.

Konzeptfragen Kapitel F2

1. Eine Spritze, die ein ideales Gas enthält und einen reibungsfreien Kolben der Masse M hat, wird von einem Becher mit kaltem Wasser in einen Becher mit heissem Wasser bewegt. Beantworten Sie die folgenden Fragen und gehen Sie davon aus, dass die Spritze das thermische Gleichgewicht mit dem heissen Wasser erreicht.
 - a. Wie ändert sich die Temperatur des Gases?
☐ Erhöhung ☐ Verringerung ☐ Keine Änderung
 - b. Wie verändert sich der Gasdruck?
☐ Erhöhung ☐ Verringerung ☐ Keine Änderung
 - c. Wie ändert sich das Gasvolumen?
☐ Erhöhung ☐ Verringerung ☐ Keine Änderung
2. Eine Spritze, die ein ideales Gas enthält und einen festen Kolben der Masse M hat, wird von einem Becher mit kaltem Wasser in einen Becher mit heissem Wasser bewegt. Beantworten Sie die folgenden Fragen und gehen Sie davon aus, dass die Spritze das thermische Gleichgewicht mit dem heissen Wasser erreicht.
 - a. Wie ändert sich die Temperatur des Gases?
☐ Erhöhung ☐ Verringerung ☐ Keine Änderung
 - b. Wie verändert sich der Gasdruck?
☐ Erhöhung ☐ Verringerung ☐ Keine Änderung
 - c. Wie ändert sich das Gasvolumen?
☐ Erhöhung ☐ Verringerung ☐ Keine Änderung
3. Wie beeinflusst eine Erhöhung der Temperatur laut der kinetischen Gastheorie die durchschnittliche Geschwindigkeit der Gaspartikel?
☐ Die Geschwindigkeit nimmt ab.
☐ Die Geschwindigkeit bleibt konstant.
☐ Die Geschwindigkeit nimmt zu.
☐ Die Temperatur hat keinen Einfluss auf die Geschwindigkeit der Gaspartikel.
4. Welche Aussage zur kinetischen Gastheorie ist korrekt?
☐ Der Druck eines Gases ist nicht proportional zur durchschnittlichen kinetischen Energie der Gaspartikel.
☐ Die Masse der Gaspartikel hat keinen Einfluss auf ihre Geschwindigkeit.
☐ Gaspartikel nehmen während ihrer Bewegung immer denselben Pfad durch den Raum.
☐ Bei der Kollision von Gaspunkten verlieren sie immer ihre gesamte kinetische Energie.
☐ Keine der oberen Aussagen ist richtig.

Aufgaben Kapitel F2

Weitere einfachere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:

<https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0> in den Kapiteln 16 & 17.



1. Auf welchen Wert steigt der bei 15°C und 250 Pa betragende Fülldruck einer Glühlampe, wenn sich dieser bei Betrieb auf durchschnittlich 120°C erwärmt?

Lsg: $p_2 \approx 341\text{ Pa}$

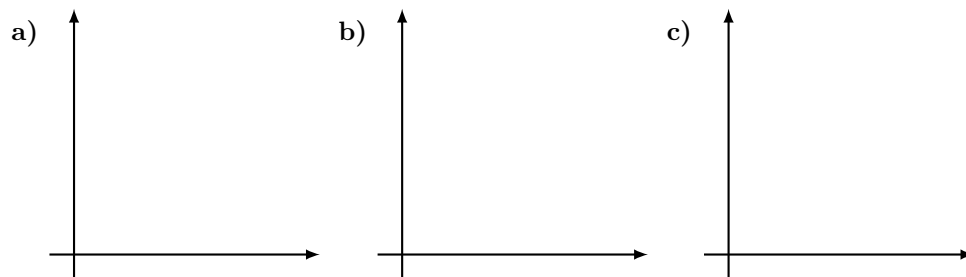
2. Um wieviel Prozent nimmt das Volumen eines Gases zu, wenn die Celsiusstemperatur bei gleichbleibendem Druck von anfänglich 80°C auf den doppelten Wert steigt?

Lsg: $\sim 23\%$

3. Aus dem Atemgerät eines Tauchers entweiche in $h = 40\text{ m}$ Tiefe, bei einer Temperatur von $\vartheta = 5^\circ\text{C}$, eine Luftblase mit dem Volumen $V_0 = 15\text{ cm}^3$ und steige nach oben. An der Oberfläche betrage die Temperatur $\vartheta = 25^\circ\text{C}$. Welches Volumen hat die Luftblase kurz bevor sie die Wasseroberfläche erreicht? (Druckänderung nicht vernachlässigen!)

Lsg: $V_1 \approx 80\text{ cm}^3$

4. Stellen Sie die drei Gesetze a) Boyle-Mariotte, b) Gay-Lussac und c) Amontons graphisch dar, wobei Sie auch die Achsen beschriften und der Kurve den richtigen Namen geben müssen.



Lsg: –

5. Ein Neon-Gas habe einen Druck von 0.5 bar und sei in einem Volumen von einem Liter bei einer Temperatur von 20°C .

- a. Welche Masse hat dieses Gas?
- b. Aus wie vielen Teilchen besteht dieses Gas?

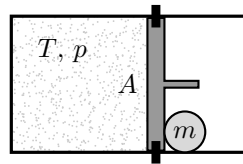
Lsg: a. $m \approx 0.41\text{ g}$ b. $N \approx 1.24 \cdot 10^{22}$

6. Ein Sauerstoff-Gas und ein Helium-Gas werden bei gleicher Temperatur von 20°C in einem *Kasten* eingeschlossen.

- a. Bestimmen Sie die mittlere kinetische Energie der Moleküle.
- b. Begründen Sie, weshalb die Energien gleich oder ungleich sind, je nach Resultat.

Lsg: a. $E_{\text{He}} \approx 6.1 \cdot 10^{-21}\text{ J}$ und $E_{\text{O}_2} \approx 10.1 \cdot 10^{-21}\text{ J}$ b. –

7. Ein Gas (T, p , wobei p der Überdruck ist, d. h. der Druck über dem Luftdruck) werde bei konstantem Volumen um die Temperatur ΔT erwärmt. Danach löst man die Verankerungen, welche das Volumen begrenzen und das Gas expandiert in sehr kurzen Zeit. Eine Kugel der Masse m , welche vor dem Kolben (Fläche-Kolben A) liegt, werde dabei beschleunigt. Bestimmen Sie die Beschleunigung der Masse als Funktion der gegebenen Größen, wobei die Masse des Kolbens vernachlässigt werden kann (vgl. Abb.). Nehmen Sie vereinfachend eine konstante Kraft an.



Lsg: $a = \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \cdot \frac{pA}{m}$

8. Eine Chemikerin möchte in einem Gefäss ein Gas erhitzen. Sie benutzt dazu eine elektrische Heizung. Damit kann sie die zugeführte Energie gut messen. Im Gefäss mit konstantem Volumen von $V = 800 \text{ ml}$ befinden sich bei $\vartheta = 20.0^\circ\text{C}$ und Normaldruck $m = 1.33 \text{ g}$ Argon.

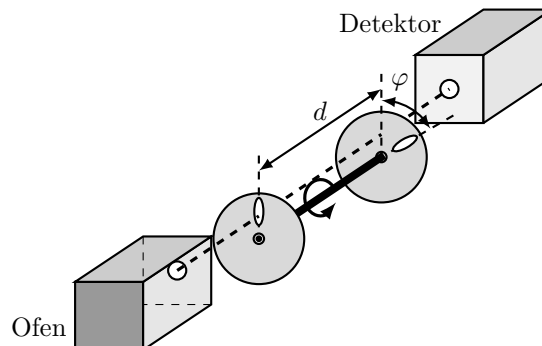
- Wie gross ist die mittlere Geschwindigkeit v_{RMS} der Gasteilchen vor der Energiezufuhr?
- Wie gross ist die Temperatur nach der Zufuhr von $\Delta U = 100 \text{ J}$ Energie?
- Wie gross ist die mittlere Geschwindigkeit v_{RMS} der Gasteilchen nach der Zufuhr der Energie?
- Wie gross wäre die Energiezufuhr im Falle einer Verdoppelung der Teilchengeschwindigkeit?

Lsg: a. $v_{\text{RMS}} \approx 428 \text{ m/s}$ b. $\vartheta = 261^\circ\text{C}$ c. $v'_{\text{RMS}} \approx 577 \text{ m/s}$ d. $\Delta U = 365 \text{ J}$

9. Ein Heliumballon werde aufgeblasen. Welchen Druck muss der Ballon aushalten, falls die Lufttemperatur 20°C , der Luftdruck 1 bar und der Ballon bei dieser Grösse gerade noch fliegt, d. h. er schwebt in der Luft. Die Masse der Hülle macht in diesem Zustand etwa 80% des Gewichts aus. (Tipp: Das Gas im Ballon hat die Lufttemperatur angenommen.)

Lsg: $\Delta p = 0.2 \text{ bar}$

10. Zur Messung der Geschwindigkeit von Atomen lässt man einen Atomstrahl aus einem Ofen austreten und auf eine sogenannte Chopperanordnung treffen. Diese Anordnung befindet sich im Vakuum. Chopperrad 1 und 2 sitzen auf derselben Achse rotieren mit der Frequenz f . Die beiden Schlitze haben die gleiche Entfernung von der Achse und sind um den Winkel φ gegeneinander verdreht. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit der Atome fliegen diese durch Schlitz 1 und - nachdem sich die Räder um den Winkel φ weitergedreht haben - durch Schlitz 2 und werden im Detektor registriert.



- Leiten Sie eine Beziehung zur Bestimmung der Geschwindigkeit v der Atome in Abhängigkeit von der Frequenz f , der Strecke d und dem Winkel φ her.
- Bei einer bestimmten Ofentemperatur soll mit obiger Anordnung die Geschwindigkeitsverteilung der Atome gemessen werden. Wie hat man dabei experimentell vorzugehen?
- Mit welcher Frequenz muss die Achse rotieren, damit bei der Ofentemperatur von $T = 2000 \text{ K}$ am Detektor gerade Cäsiumatome mit der mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ nachgewiesen werden? Daten der Anordnung: $d = 0.50 \text{ m}$, $\varphi = 15^\circ$. ($\langle v \rangle \approx 0.92 v_{\text{rms}}$)

Lsg: a. $v = \frac{2\pi f d}{\varphi}$ b. – c. $f \approx 47 \text{ Hz}$

Literaturverzeichnis

- [1] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter, Juni 2012
- [2] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem, Juni 2012
- [3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935>
- [4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007
- [5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807
- [6] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Steradian>, Juni 2012
- [7] Aristoteles,
- [8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590
- [9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997
- [10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955
- [11] URL: <http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html>, September 2013
- [12] URL: <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index>
- [13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011
- [14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG
- [15] URL: <http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/>, April 2013
- [16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007
- [17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG
- [18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994
- [19] URL: <https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical>
- [20] Hans Kammer, Irma Mgeladze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG
- [21] URL: <https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal>
- [22] Wikipedia, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid>, August 2013
- [23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010
- [24] URL: <http://www.schulserver.hessen.de/>, Oktober 2013
- [25] URL: <http://www.leifiphysik.de>, September 2013
- [26] URL: <http://photos.zoochat.com>, September 2013

- [27] URL: <http://www.lab-laborfachhandel.de>, Oktober 2013
- [28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,
- [29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014
- [30] URL: <https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen>, März 2024
- [31] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707>
- [32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press
- [33] URL: <http://ephex.phys.ethz.ch>, Februar 2015
- [34] URL: <http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html>, März 2015
- [35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas optischer Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962
- [36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004
- [37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018
- [38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001
- [39] URL: <https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en>, Juli 2018
- [40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998
- [41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869
- [42] URL: <http://www.tf.uni-kiel.de>, März 2014
- [43] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_\(Thermodynamik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik)), März 2014
- [44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014
- [45] URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png>, März 2014
- [46] URL: <http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscodes.htm>, August 2014
- [47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494
- [48] URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm>, Oktober 2014
- [49] URL: <http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm>, Oktober 2014
- [50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014
- [51] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639>, Oktober 2017
- [52] URL: <https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen>, Oktober 2017
- [53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022
- [54] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode>, September 2022
- [55] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg>, November 2023
- [56] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>, April 2024
- [57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor
- [58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.
- [59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.
- [60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

- [61] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitt_der_Gleichzeitigkeit, August 2018
- [62] URL: <http://static.a-z.ch>, Mrz 2015
- [63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925
- [64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413
- [65] URL: <http://www.peter-glowatzki.de>, Mai 2015
- [66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941
- [67] URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche>, Mai 2015
- [68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)
- [69] URL: <http://w3.pppl.gov/>, September 2015
- [70] O. Hfiling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wrme. 15. Auflage. Ferd. Dummlers Verlag, Bonn 1994
- [71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database, April 2018
- [72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)
- [73] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung>, April 2018
- [74] URL: <http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...>, Juni 2012
- [75] L. Susskind und G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics*, Basic Books, 2014