

## 2 Mechanische Wellen

---

### Lernziele

- Sie kennen die Definition einer Welle und verstehen den Unterschied zwischen transversale und longitudinale Wellen.
  - Sie kennen die Begriffe Wellenlänge und Wellenzahl (resp. Wellenvektor) und können sie mit der Periode oder der Winkelgeschwindigkeit verknüpfen.
  - Sie können die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer mechanischen Welle ableiten.
  - Sie verstehen, wie stehende Wellen entstehen und kennen die Bedingungen für ein einseitig offenes Ende und zwei feste Enden (resp. zwei offene Enden).
  - Sie kennen das Brechungsgesetz von Wellen und wissen, was welche Grösse sich von einem Medium ins andere nicht verändert.
  - Sie kennen die Definition des Brechungsindexes.
  - Sie können den Totalreflexionswinkel aus dem Gesetz von Snellius herleiten.
  - Sie wissen, welche Bedingungen gelten müssen, damit Interferenz auftritt.
  - Sie kennen die Gesetzmässigkeiten beim Doppelpalt sowie beim Einzelpalt.
  - Sie können die Herleitung der Wellengleichung nachvollziehen.
- 

Nachdem wir uns ausführlich mit Schwingungen und vielen wichtigen Phänomenen beschäftigt haben, führen wir nun die mechanische Welle ein. Wellen gehören zu den wichtigsten Naturphänomenen. Beispiele sind Schall-, Licht- und Meereswellen.

In diesem Abschnitt werden wir zunächst den Wellenberg, die stehende Welle, die Brechung und die Beugung oder Interferenz von Wellen betrachten.

### 2.1 Wellenberge

Im Unterschied zur Schwingung, bei der sich ein Körper um einen ruhenden Gleichgewichtspunkt bewegt, breitet sich die Welle im Raum aus. Dazu betrachten wir folgendes Experiment.

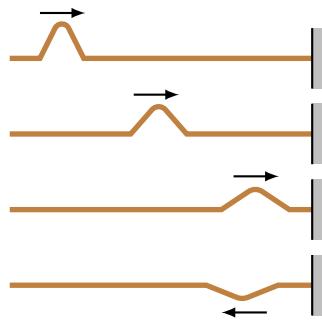
---

#### Exp. 1: Einfache Seilwelle

Ein Seil wird an der Tür befestigt (siehe Abbildung). Durch eine kurze Anregung auf der Seite mit lockerem Seil entsteht ein Wellenberg, der sich durch das Seil bewegt. Je nach Grösse des Wellenbergs und der Geschwindigkeit kann er auch noch reflektiert werden.



In der folgenden Bilderserie sieht man, wie sich der Wellenberg langsam durch das Seil bewegt. Dadurch wird er einerseits breiter und andererseits an der Wand reflektiert und gedreht.



In diesem Kapitel wird nicht behandelt, dass der Wellenberg kleiner und breiter wird. Dieser Effekt wird als Dispersion bezeichnet.

Der Wellenberg wird durch eine Reflexion an der Wand invertiert. Dies kann direkt durch das Wechselwirkungsgesetz verstanden werden. Die Welle trifft auf die Wand und übt eine Kraft nach oben aus. Die Wand übt eine entgegengesetzt gleiche Kraft auf das Seil aus, also nach unten. Man sagt auch, dass die Welle durch die Reflexion an der Wand einen Phasensprung von  $180^\circ \equiv \pi$  erfährt.

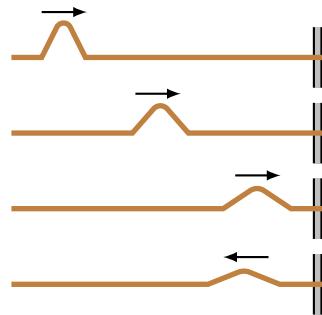
Wir werden nun den Fall untersuchen, wenn das Seil nicht mehr fest mit der Wand verbunden ist. Dies wird durch den folgenden Versuch getan.

### Exp. 2: Einfache Seilwelle

Ein Seil wird um eine Stange geschlungen (siehe Abbildung). Eine kurze Bewegung an der losen Seite erzeugt einen Wellenberg, welcher sich entlang des Seils ausbreitet. Die Grösse des Wellenbergs und seine Geschwindigkeit beeinflussen, ob er noch sichtbar reflektiert wird.



In der folgenden Bilderserie, sieht man wie sich der Wellenberg langsam durch das Seil bewegt.



In diesem Fall wird der Wellenberg nicht invertiert, da das Seil keine Kraft auf die Stange ausübt und es somit keine Gegenkraft gibt. Das Seil bewegt sich einfach auf und ab.

Wir fassen also zusammen:

- An den festen Enden werden die Wellen invertiert, d.h. sie erfahren einen Phasensprung von  $\varphi = 180^\circ$ .
- An den freien Enden werden die Wellen nicht invertiert, d.h. sie erfahren keinen Phasensprung.

Nachdem wir nun den Wellenberg und dessen Bewegung durch das Seil verstanden haben, können wir die Welle als solche definieren.

**Def. 1:** (Welle) Mit einer Welle werden zeitliche und räumliche Änderungen einer physikalischen Grösse (z. B. Auslenkung des Seils) beschrieben.

Wir unterscheiden zwei Arten von Wellen:

- transversale Wellen (Ausbreitungsrichtung senkrecht zur Schwingungsrichtung)  
z. B. Lichtwellen
- longitudinale Wellen (Ausbreitungsrichtung parallel zur Schwingungsrichtung)  
z. B. Schallwellen

Mit diesem Demonstrationsobjekt lassen sich beide Arten von Wellen zeigen:

---

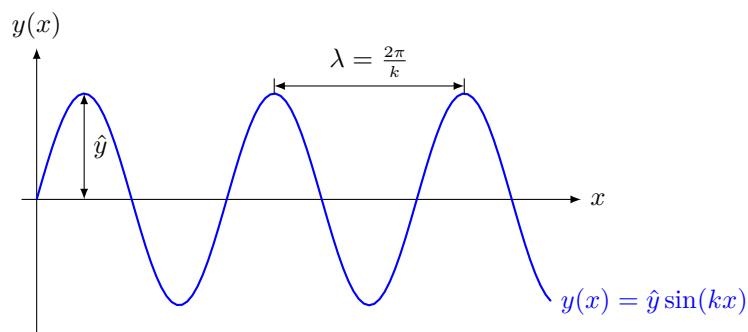
### Exp. 3: Wellen Simulation

Der Wellensimulator in Abbildung bietet die Möglichkeit, sowohl transversale als auch longitudinale Wellen zu demonstrieren.



Es handelt sich hierbei lediglich um eine Simulation, da es im Grunde genommen keine echte Welle gibt, sondern viele kleine Schwingungen. Die Welle wird lediglich durch eine optische Täuschung hervorgerufen. Es ist deutlich erkennbar, dass die scheinbare Welle in einem Fall längs der Bewegung schwingt und im anderen Fall senkrecht dazu.

Wenn wir die Schwingung anhand der Größen Periode  $T$  und Kreisfrequenz  $\omega$  beschreiben können, können wir auch die Welle anhand ähnlicher Größen beschreiben. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass sich die Welle sowohl räumlich als auch zeitlich verändert, d.h. wir benötigen zwei Koordinaten für die räumliche Veränderung und zwei Koordinaten für die zeitliche Veränderung. Das sind natürlich zu viele, um sie auf Papier darzustellen. Deshalb werden Wellen oft nur im Ortsraum dargestellt und die zeitliche Veränderung muss zusätzlich gedacht werden. Dazu betrachten wir also folgende Skizze:



Analog zur Periodendauer  $T$  definiert man die Wellenlänge  $\lambda$  und die Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  analog zur Kreisfrequenz  $\omega$ .

**Def. 2:** (Wellenlänge) Die Wellenlänge  $\lambda$  (griechisch: Lambda) einer periodischen Welle ist der kleinste Abstand zweier Punkte gleicher Phase. Dabei haben zwei Punkte die gleiche Phase, wenn sie im zeitlichen Ablauf die gleiche Auslenkung und die gleiche Bewegungsrichtung haben.

Die Einheit der Wellenlänge ist daher:  $[\lambda] = \text{m}$ .

**Def. 3:** (Wellenzahl resp. Wellenvektor) Die Wellenzahl  $k$  resp. der Wellenvektor  $\vec{k}$  einer periodischen Welle ist ein Vektor der senkrecht auf der Wellenfront steht und den Betrag

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

hat.

Da sich die Welle im Raum bewegt, ist es sinnvoll, eine Beziehung für die Geschwindigkeit zu finden. Die sogenannte *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*  $v$  ergibt sich daraus, dass die Welle während ihrer Dauer  $T$  die Strecke von  $\lambda$  zurücklegt.

$$v = \frac{\lambda}{T} = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{k}.$$

Bevor wir uns mit der stehenden Welle beschäftigen, lösen wir noch das folgende Beispiel.

Bsp. i.

Die Schallwellenlänge für einen hohen (1000 Hz) und tiefen (100 Hz) Ton haben eine unterschiedliche Wellenlänge. a) Weshalb? b) Bestimmen Sie die Wellenlgen für die beiden Töne, sofern die Schallgeschwindigkeit 340 m/s ist.

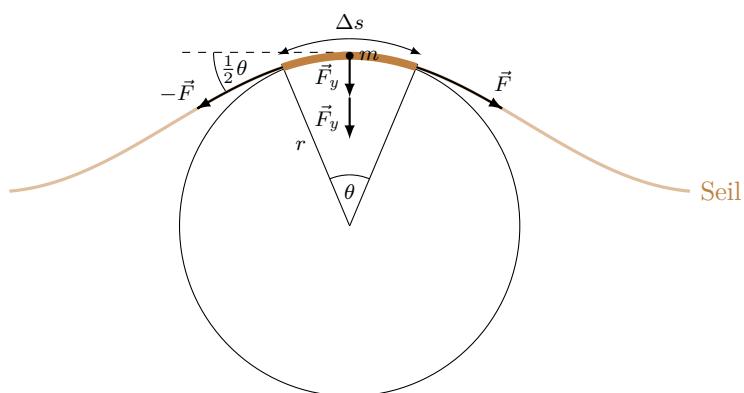
Lsg: a) -, b)  $\lambda \approx 0.34 \text{ m}, 3.4 \text{ m}$

## Lösung:

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit oder Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Seilwelle lässt sich gut mit mechanischen Überlegungen ermitteln. Im Folgenden wird dies anhand eines Beispiels erläutert.

### Bsp. ii.

Betrachten wir einen Wellenberg, der sich mit der Geschwindigkeit  $v$  fortpflanzt. Dazu verwenden Sie folgende Skizze:



Bestimmen Sie Geschwindigkeit als Funktion der Kraft  $F$  im Seil und der Massenbelegung  $\mu$ , d. h. Masse pro Länge. Lsg: —

Lsg: —

## Lösung:

Die stehende Welle ist von grundlegender Bedeutung innerhalb der Wellentheorie, da sie Anwendungen in sämtlichen Bereichen der Physik aufweist. Die meisten Instrumente erzeugen ihre Klänge durch stehende Wellen und selbst in der Quantenmechanik ist dieses Konzept von Bedeutung. Ohne stehende Wellen ist eine Erklärung des Casimir-Effekts nicht möglich. Aus diesem Grund werden wir uns nun dieses Phänomen genauer betrachten.

## 2.2 Stehende Welle

Bevor wir uns mit dem Formalismus der stehenden Welle befassen, betrachten wir noch einmal das einführende Experiment.

---

### Exp. 4: Nicht so einfache Seilwelle

Ein Seil wird an der Tür befestigt (vgl. Abb.) und durch an eine periodische Anregung auf der losen Seite, so in Schwingung versetzt, dass sich eine stehende Welle bildet.



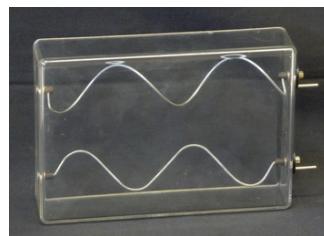
Man erkennt, dass sich anscheinend nichts mehr in Längsrichtung bewegt. Nun stellt sich die Frage, ob es sich überhaupt noch um eine Welle handelt.

Das folgende simple Demonstrationsobjekt illustriert den Unterschied zwischen stehenden und fortlaufenden Wellen prägnant.

---

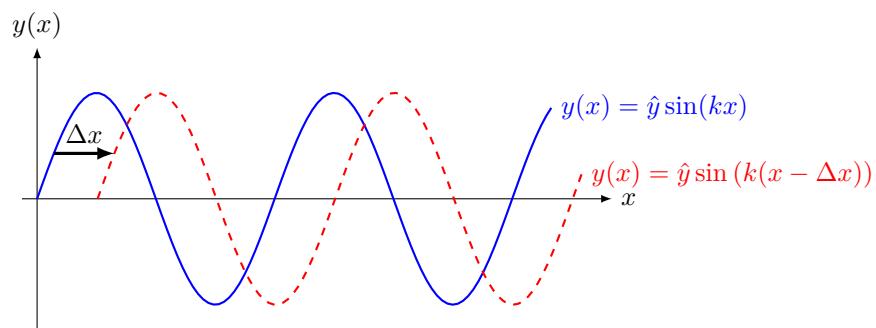
### Exp. 5: Stehende vs. fortlaufende Welle

Einer der Drähte ist gebogen, sodass eine Scheinwelle durch Drehung entsteht, während der andere Wire so geformt ist, dass eine stehende Welle gebildet wird (siehe Abbildung).



Auch hier stellt sich die gleiche Frage: Handelt es sich hierbei noch um eine Welle?

Bevor wir uns mit der Fragestellung beschäftigen können, müssen wir klären, welche Regelung eine Welle hat, die sich nach rechts und links bewegt. Hierzu betrachten wir eine Skizze, auf der die blaue Kurve die Welle zu Zeitpunkt  $t = 0$  darstellt und die rote gestrichelte Linie die Welle zu einem späteren Zeitpunkt  $t > 0$  abbildet.



Nach einer bestimmten Zeit  $t > 0$  verschiebt sich die Welle um  $\Delta x = vt$  nach rechts, sofern die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  beträgt. Es kann also folgendes festgehalten werden:

$$\begin{aligned} y(x) &= \hat{y} \sin(kx - k\Delta x) \\ &= \hat{y} \sin(kx - kvt) \end{aligned}$$

Mit der Beziehung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v = \omega/k$  erhalten wir für eine nach *rechts laufende Welle*:

$$y_R(x, t) = \hat{y} \sin(kx - \omega t).$$

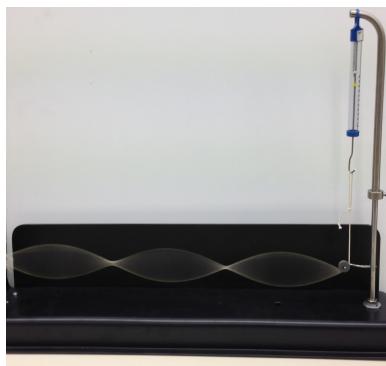
Analog findet man für eine nach *links laufende Welle*:

$$y_L(x, t) = \hat{y} \sin(kx + \omega t).$$

Nun betrachten wir ein weiteres Demonstrationsobjekt, mit dem sich stehende Wellen schön erzeugen lassen.

### Exp. 6: Stehende Welle

Mit diesem Gerät kann man eine periodische Anregung erzeugen, die durch Anpassung der Federwaage eine stehende Welle erzeugt (vgl. Abb.).



Im vorliegenden Fall weist die stehende Welle zwei Knoten und drei Wellenberge auf. Es ist möglich, durch eine Lockerung des Seils weitere Wellenberge und Knoten zu erzeugen, jedoch handelt es sich hierbei stets um natürliche Zahlen.

Die stehende Welle entsteht durch die Überlagerung einer nach rechts und einer nach links laufenden Welle. Die stehende Welle  $y_s$  ergibt sich als Summe von  $y_R + y_L$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} y_s &= y_R + y_L \\ &= \hat{y} \sin(kx - \omega t) + \hat{y} \sin(kx + \omega t) \end{aligned}$$

Mit dem Additionstheorem  $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$  erhalten wir direkt für die stehende Welle<sup>1</sup>:

$$y_s(x, t) = 2\hat{y} \sin(kx) \cos(\omega t).$$

Wir erhalten eine Schwingung  $\cos(\omega t)$  mit einer ortsabhängigen Amplitude  $2\hat{y} \sin(kx)$ . Somit handelt es sich bei einer stehenden Welle grundsätzlich um eine Schwingung mit einer ortsabhängigen Amplitude.

Um jedoch die Knoten und Bäuche verstehen und nachvollziehen zu können, müssen wir die Randbedingungen für  $y_s$  erfüllen. Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten:

- zwei feste Enden:  
z. B. Gitarrensaite, Klaviersaite, usw.
- ein freies und ein festes Ende:  
z. B. gedeckte Flöte

<sup>1</sup>Der aufmerksame Leser wird sich gefragt haben, wo der Phasensprung für eine an der Wand reflektierten Welle geblieben ist. Der Grund für diese Verwirrung liegt in der Wahl der nach links laufenden Welle. Diese enthält in dieser Form bereits den Phasensprung. Gehen wir von einer nach recht laufenden Welle aus  $\sin(kx - \omega t)$  dann ändert sich die Richtung durch die Transformation  $k \mapsto -k$ . Bedenken Sie, dass  $k$  im Grunde ein Vektor ist. Der Phasensprung erhält man durch Addition von  $\pi$ . Damit ist die nach links laufenden Welle:

$$\sin(-kx - \omega t + \pi) = -\sin(-kx - \omega t) = \sin(kx + \omega t).$$

- zwei freie Enden:  
z. B. Trompete, Oboe, Klarinete usw.

Beginnen wir mit den beiden festen Enden, wie es im Versuch dargestellt wurde. Die Randbedingungen lauten wie folgt:

$$y_s(x = 0, t) = 0 \quad \text{und} \quad y_s(x = l, t) = 0,$$

wobei  $l$  der Abstand zwischen den Enden ist. Die erste Bedingung ist bereits erfüllt, da der Wert von  $\sin(k \cdot 0)$  gleich Null ist. Die zweite Bedingung muss noch erfüllt werden. Da die Bedingungen immer (für alle Zeiten) erfüllt sein müssen, können wir einen Wert für  $t$  wählen, sodass der Wert von  $\cos(\omega t)$  gleich Eins ist. Es gilt:

$$y_s(x = l, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(kl) = 0 \quad \Rightarrow \quad kl = n\pi,$$

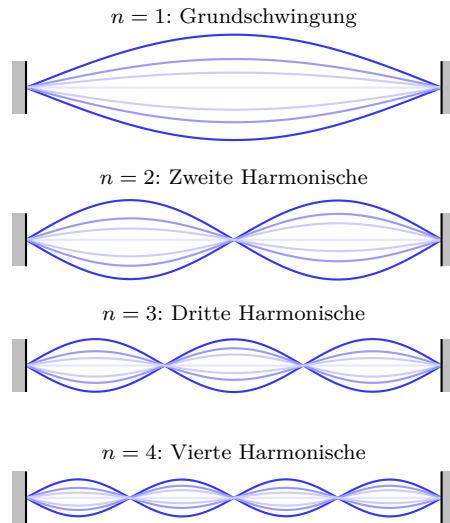
d. h. die Wellenzahl  $k$  kann nicht mehr alle Werte annehmen, sondern ist abhängig vom Abstand. Es gilt also:

**Ges. 1:** (Stehende Welle, 2 feste Enden) Für eine stehende Welle mit zwei festen Enden im Abstand  $l$  gilt für die Wellenzahl  $k_n$  und die Wellenlänge  $\lambda$

$$k_n = n \cdot \frac{\pi}{l} \quad \text{und} \quad l = n \cdot \frac{\lambda}{2},$$

wobei  $n = 1, 2, 3, \dots$  sein kann.

Dies bedeutet, dass für  $n = 1$  die *Grundschwingung* auftritt und  $l = \frac{\lambda}{2}$ , d. h. die Hälfte der Schwingung passt in die Enden. Für  $n = 2$  entsteht die *zweite Harmonische* und es gilt  $l = \lambda$ , d. h. eine Schwingung passt hinein. Man spricht auch von *Moden*, die hineinpassen. Das sieht dann so aus:



Betrachten wir nun ein festes Ende und ein freies Ende, wie es z.B. beim Resonanzkörper der Stimmgabel der Fall ist oder wie es der folgende Versuch zeigt.

---

#### Exp. 7: Stehende Welle mit einem freien Ende

Eine Schnur wird senkrecht aufgehängt und so in Schwingung versetzt, dass eine stehende Welle entsteht. Im Experiment erkennt man sehr schnell, dass sich am losen Ende ein Wellenbauch und am festen Ende natürlich ein Knoten bildet. Durch geschicktes Schwingen kann sogar ein  $l = \frac{3}{4}\lambda$  oder ein  $l = \frac{5}{4}\lambda$  erreicht werden.

Um dies mit der Wellenfunktion nachvollziehen zu können, müssen auch hier die Randbedingungen betrachtet werden.

$$y_s(x = 0, t) = 0 \quad \text{und} \quad y_s(x = l, t) = 2\hat{y}.$$

Auch in diesem Fall ist nur die zweite Bedingung zu berücksichtigen. Sie gilt:

$$y_s(x = l, t) = 2\hat{y} \quad \Rightarrow \quad \sin(kl) = 1 \quad \Rightarrow \quad kl = n\frac{\pi}{2},$$

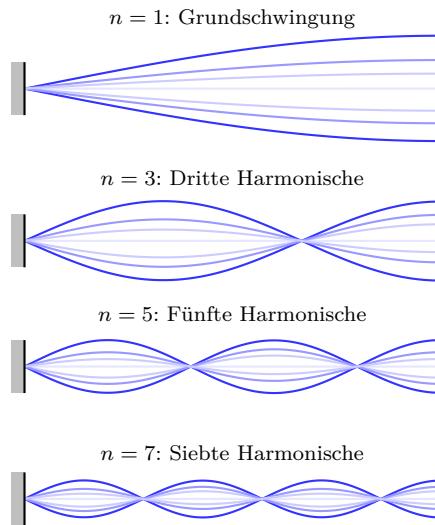
wobei  $n$  nur noch ungerade Werte annehmen kann. Wir erhalten somit:

**Ges. 2:** (Stehende Welle, 1 festes und 1 freies Ende) Für eine stehende Welle mit einem festen und einem freien Enden im Abstand  $l$  gilt für die Wellenzahl  $k_n$  und die Wellenlänge  $\lambda$

$$k_n = n \cdot \frac{\pi}{2l} \quad \text{und} \quad l = n \cdot \frac{\lambda}{4},$$

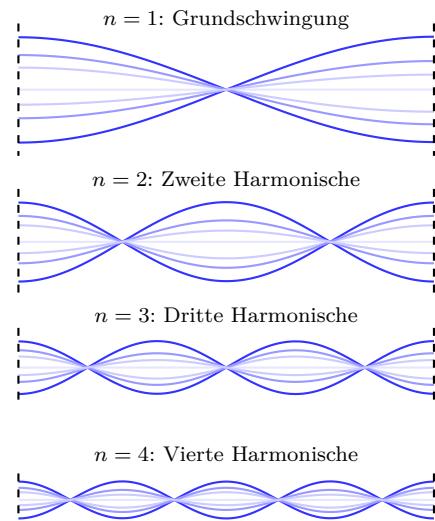
wobei  $n = 1, 3, 5, \dots$  sein kann.

Dies bedeutet, dass auch hier für  $n = 1$  die *Grundschwingung* entsteht und es gilt  $l = \frac{\lambda}{4}$ , d.h. eine Viertelschwingung passt in die Enden. Für ein offenes Ende können nur die ungeraden Zahlen verwendet werden. Der erste angeregte Zustand ist für  $n = 3$  und heisst *dritte Harmonische* und es gilt  $l = \frac{3\lambda}{4}$ . Dies sieht wie folgt aus:

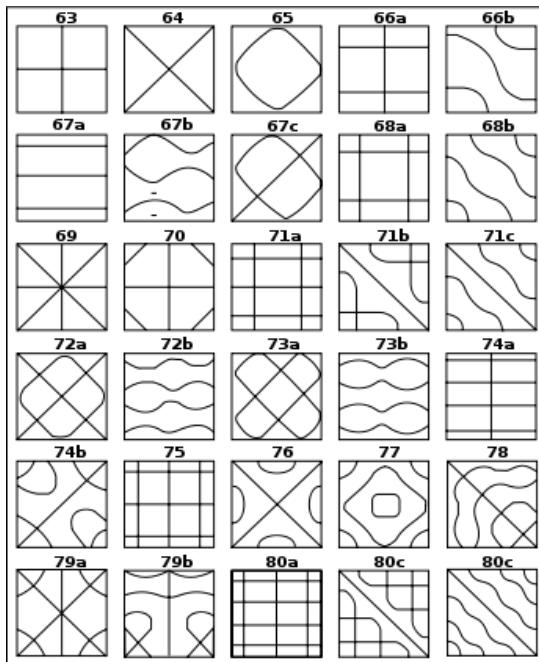


Abschliessend soll noch die stehende Welle mit zwei freien Enden betrachtet werden. Leider ist diese mechanisch sehr schwierig zu realisieren und soll daher nur theoretisch nachvollzogen werden.

Für die stehende Welle mit zwei freien Enden gelten im Prinzip die gleichen Bedingungen, nur dass die Welle um  $\frac{\lambda}{4} = \frac{l}{2n}$  verschoben ist. Man erhält dann



Alle diese Beispiele beschränken sich auf eindimensionale stehende Wellen. Natürlich gibt es auch zwei- und dreidimensionale stehende Wellen. Zweidimensionale stehende Wellen bilden sich z.B. an Oberflächen. Da es mehr Freiheitsgrade gibt, gibt es auch mehr Moden, wie das folgende Beispiel zeigt:



Die dargestellten chladnischen<sup>2</sup> Klangfiguren entstehen, wenn eine schwingende Membran mit Mehl oder Sand bestreut wird. Das Mehl oder der Sand sammelt sich entlang der Knotenlinien, wodurch die Schwingungsmoden der Membran sichtbar gemacht werden können. Nachfolgend ist ein Beispiel für quadratische Platten aus [32] dargestellt. Der folgende Kurzfilm zeigt die Entstehung solcher Muster: [Chladni-Film](#).

Ähnliches kann mit einem dreidimensionalen Körper erzeugt werden, aber die Veranschaulichung ist viel schwieriger. Beispielsweise entstehen in den meisten Hohlkörpern von Musikinstrumenten dreidimensionale stehende Wellen.

Zum Abschluss der stehenden Wellen betrachten wir noch ein Beispiel mit einer Geige, bei der die Saite vom Spieler heruntergedrückt werden muss.

### Bsp. iii.

Die G-Saite einer Geige hat eine Länge von 30 cm. Wenn sie ohne Griff gespielt wird, schwingt sie mit einer Frequenz von 196 Hz. Die nächsthöheren Schwingungsformen sind die Geigentöne a (220 Hz, Grundschwingung), h (247 Hz), c (262 Hz) und d (294 Hz). Wie weit muss der Finger jeweils vom Saitenende entfernt sein, um diese Töne spielen zu können? Lsg: 3.27 cm, 6.19 cm, 7.56 cm, 10 cm

Lsg: 3.27 cm, 6.19 cm, 7.56 cm, 10 cm

## Lösung:

Damit schliessen wir diesen Abschnitt ab und wenden uns der Brechung zu.

## 2.3 Brechung von Wellen

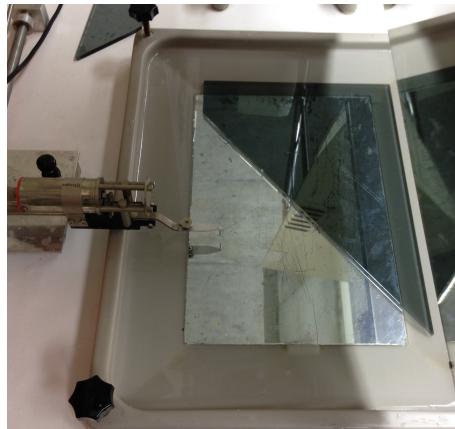
Bisher wurde nur die Wellenausbreitung in einem homogenen Medium betrachtet. In diesem Abschnitt geht es vor allem darum zu verstehen, was beim Übergang von einem Medium in ein anderes passiert. Aus dem Optik-Praktikum wissen Sie wahrscheinlich, dass die Welle ihre Ausbreitungsrichtung ändert. Diese abrupte Richtungsänderung nennt man Brechung, z.B. spricht man beim Licht davon, dass der Lichtstrahl gebrochen

<sup>2</sup>Chladnischen Klangfiguren sind benannt nach Ernst Florens Friedrich Chladni, der 1787 die Schrift *Entdeckungen über die Theorie des Klanges* veröffentlichte, in der er Klangfiguren darstellt und beschreibt, wie man sie erzeugen kann.

wird. Betrachten wir das folgende Experiment. Obwohl es sich hier um Wasserwellen handelt, gelten die Gesetze für alle Arten von Wellen.

#### Exp. 8: Wasserwellenwanne

In einer Wasserwellenwanne wird eine Glasplatte so eingelegt, dass die Wassertiefe in einem Teil der Wanne abnimmt (siehe Abbildung). Dann lässt man eine ebene Welle senkrecht über die Grenzfläche zwischen tiefem und flachem Wasser laufen.



Man sieht, leider nicht sehr deutlich, dass sich Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit ändern. Daher hier noch eine Aufnahme aus [33], die den Effekt der Wellenlängenänderung deutlicher zeigt.



Da an der Grenzfläche keine Wellenzüge verschwinden können, treten ebenso viele Wellen in die Grenzfläche ein wie aus ihr austreten. Daher kann sich die Frequenz beim Übergang von einem Medium in das andere nicht ändern.

Aus der letztgenannten Stetigkeitsbedingung und dem Zusammenhang zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit, Wellenlänge und Frequenz lässt sich das folgende Gesetz ableiten:

**Ges. 3:** (*Brechungsgesetz*) Beim Übergang von einem Medium A in ein Medium B bleibt die Frequenz  $f_A$  resp.  $f_B$  einer Welle konstant, d. h.

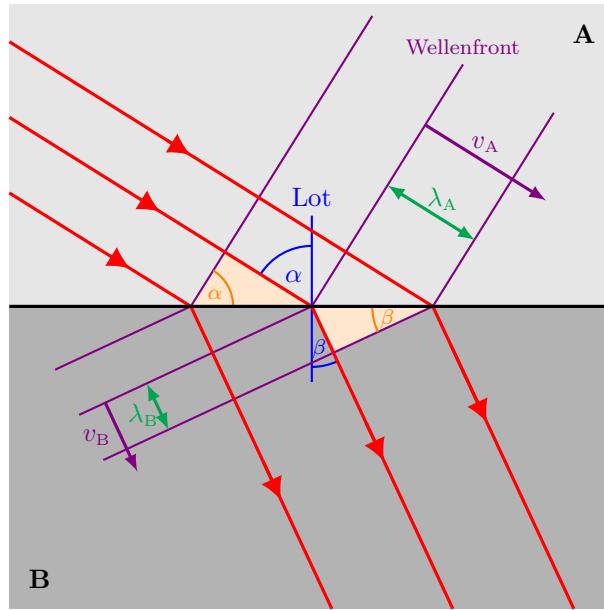
$$f_A = f_B \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B},$$

wobei  $v_{A,B}$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit und  $\lambda_{A,B}$  die Wellenlänge in Medium A resp. B sind.

Wir alle kennen das Phänomen der optischen Anhebung (s. Abb. unten), bei dem z. B. ein Stab geknickt erscheint, wenn er in Wasser getaucht wird.



Dieses Phänomen ist eine Folge des Brechungsgesetzes, wobei hier zum einen Lichtwellen und nicht Wasserwellen gebrochen werden und zum anderen das Licht nicht senkrecht, sondern unter einem anderen Winkel auf die Grenzfläche trifft. Um diese Gesetzmässigkeit zu verstehen, betrachten wir diese Skizze:



Da die Ausbreitungsrichtung zum Lot hin gebrochen ist, ist die Geschwindigkeit  $v_B$  und die Wellenlänge  $\lambda_B$  im Medium B kleiner. Betrachtet man die beiden hervorgehobenen rechtwinkligen Dreiecke, so erkennt man, dass für beide Dreiecke die Hypotenosen ( $HY$ ) gleich lang sind und somit gilt

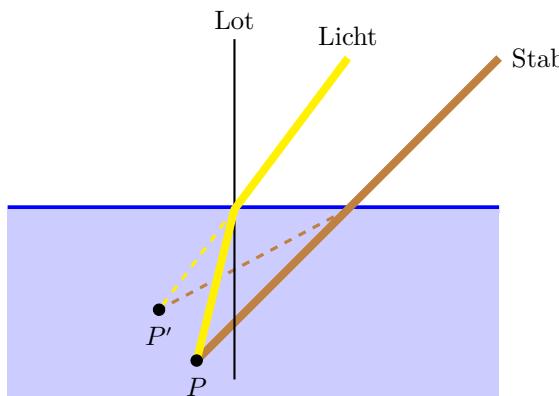
$$HY = \frac{\lambda_A}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad HY = \frac{\lambda_B}{\sin \beta}.$$

Daraus lässt sich aber nun das Brechungsgesetz von Snellius<sup>3</sup> ableiten. Es gilt nämlich:

**Ges. 4:** (Brechungsgesetz von Snellius) Tritt eine Welle unter einem schießen Winkel in ein anderes Medium mit unterschiedlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit ein, so wird sie gebrochen. Für das Verhältnis der Winkel gilt:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{v_A}{v_B}.$$

Wir sind nun in der Lage, die optische Hebung zu erklären. Dazu betrachten wir diese Skizze:



Der Stab macht natürlich keinen Knick. Das Licht, das z. B. vom Punkt  $P$  kommt, wird nach Snellius vom Lot weg gebrochen, da es von einem dichten in ein dünneres Medium übergeht. Dies hat aber zur Folge, dass wir den Punkt  $P$  scheinbar im Punkt  $P'$  sehen, wodurch der Stab scheinbar angehoben wird.

Wir sehen also, dass sich Wellen nicht immer mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreiten. Das gilt auch für Licht oder Schall. Schallwellen zum Beispiel breiten sich im Wasser mehr als viermal so schnell aus wie in der Luft. Lichtwellen dagegen breiten sich nur etwa 1.3-mal so schnell aus wie in Luft.

<sup>3</sup>Willebrord van Royen Snell (auch Willebrordus Snel van Royen oder Snellius; 13. Juni 1580 in Leiden, Spanische Niederlande - 30. Oktober 1626), war ein niederländischer Astronom und Mathematiker. Er ist bekannt für die Entwicklung des optischen Brechungsgesetzes, nach ihm als snelliussches Brechungsgesetz bezeichnet. Er gebrauchte den Namen Snellius für wissenschaftliche Veröffentlichungen.

**Def. 4:** (Brechungsindex) Der Brechungsindex (auch Brechzahl)  $n_A$  für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle in einem Medium A  $v_{\text{Medium},A}$  und im Vakuum  $v_{\text{Vakuum}}$  ist definiert als:

$$n_A = \frac{v_{\text{Vakuum}}}{v_{\text{Medium},A}}.$$

In der folgenden Tabelle sind einige Werte für Schall- und Lichtwellen aufgeführt:

Schallwellen		Lichtwellen	
Medium	Brechzahl $n$	Medium	Brechzahl $n$
		Vakuum	1
Luft	1	Luft	1.0003
Wasser	4.3	Wasser	1.33
Helium	2.86	Caesium	0.345
Eisen	15.1	Fensterglas	1.52

Es ist klar, dass es keinen Wert für Schallwellen im Vakuum gibt, da sich Schallwellen im Vakuum nicht ausbreiten können. Es stellt sich aber die Frage, wie man den Brechungsindex für Schallwellen definiert. Auch dies ist aus der Tabelle ersichtlich. Man verwendet einfach die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Luft. In erster Näherung kann man auch für Lichtwellen die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Luft verwenden, wie man an dem Wert leicht erkennen kann.

Mit dieser Definition lässt sich das Gesetz von Snellius auf das Verhältnis der Brechungsindizes der Medien reduzieren. Es gilt in der Tat:

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta,$$

wobei  $n_{A,B}$  die Brechungsindizes der jeweiligen Medien sind.

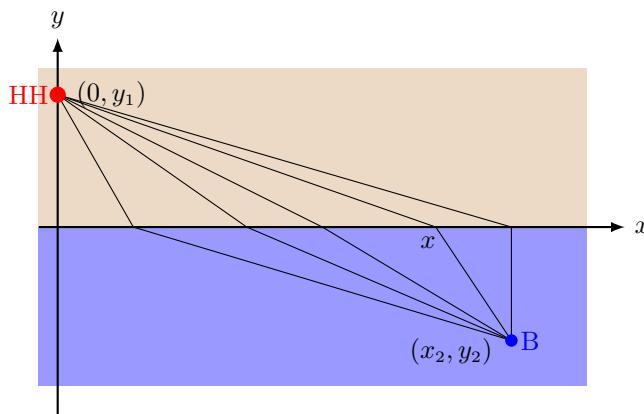
Warum wird das Licht überhaupt gebrochen? Warum bewegt sich das Licht nicht auf dem kürzesten Weg zwischen zwei Punkten? Die Antwort gibt das Fermatsche Prinzip<sup>4</sup>:

**Ges. 5:** (Prinzip von Fermat) Eine Welle läuft zwischen zwei Punkten so, dass die Laufzeit minimal wird.

Wir betrachten dazu ein Beispiel aus der Tierhaltung, wo verschiedene Experimente die Theorie bestätigt haben.

#### Bsp. iv.

Ein Herrchen geht mit seinem Hündchen (HH) am Strand spazieren. Dabei bewegen sie sich parallel zur Küste in einem Abstand  $y_1$ . Das Herrchen wirft einen Ball (B) ins Meer, wobei dieser im Abstand  $y_2$  von der Küste und im Abstand  $x_2$  von der Abwurfstelle landet. Dies sieht also wie folgt aus:



Welchen Weg wählt der Hund wohl aus? Experimente haben gezeigt, dass der Hund den Weg so wählt, dass er den Ball am schnellsten hat, also genauso wie das Prinzip von Fermat es für Wellen voraussagt. Hier ist natürlich zu beachten, dass der Hund am Strand schneller rennen kann, als im Wasser  $v_S > v_W$ .

Zeigen Sie, dass durch die Minimierung der Zeit, dass Brechungsgesetz herauskommt. Tipp: Betrachten Sie einen allgemeinen Weg durch den Punkt  $(x, 0)$ . Lsg: –

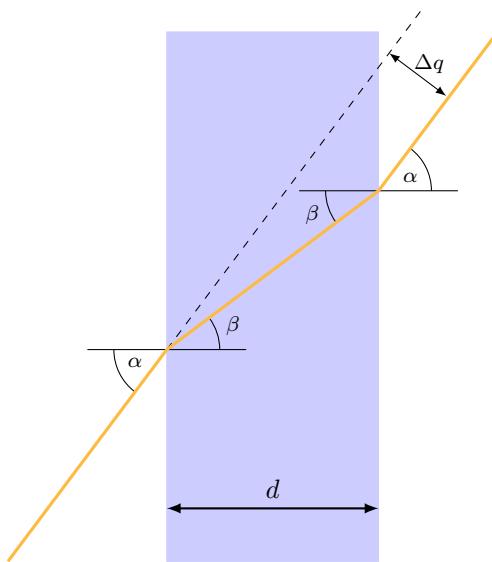
<sup>4</sup>Pierre de Fermat (in der zweiten Hälfte des Jahres 1607 in Beaumont-de-Lomagne, heute im Département Tarn-et-Garonne - 12. Januar 1665 in Castres) war ein französischer Mathematiker und Jurist.

## Lösung:

Mit dem nächsten Beispiel kehren wir zur Brechung von Lichtwellen zurück. Der Lichtstrahl soll durch ein Medium geführt werden.

Bsp. v.

Ein Lichtstrahl, der durch eine parallele Platte hindurch geht, erfährt eine Querverschiebung, sofern er schief auf die Platte trifft (vgl. Abb.).



- a) Begründen Sie, weshalb der austretende Lichtstrahl den gleichen Winkel wie der eintretende hat. b) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Querverschiebung  $\Delta q$  an, d. h.  $\Delta q = f(d, \alpha, \beta)$ . c) Berechnen Sie  $\Delta q$  für  $d = 2\text{ cm}$ ,  $\alpha = 40^\circ$  und  $n = 1.5$ .

Lsg: a) =, b) =, c)  $\Delta q \approx 0.56$  cm

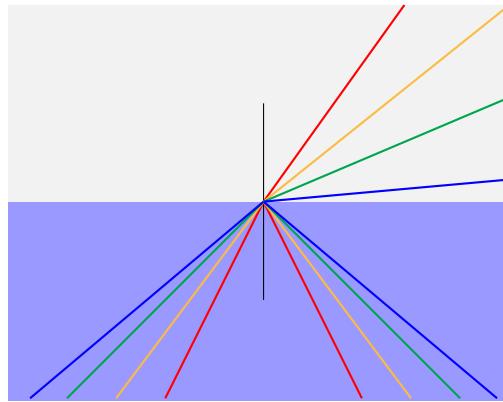
## Lösung:

Schliesslich betrachten wir einen Sonderfall der Brechung, die sogenannte Totalreflexion.

### 2.3.1 Totalreflexion

Von Totalreflexion spricht man, wenn ein Lichtstrahl nicht gebrochen, sondern nur reflektiert wird. Betrachten wir dazu den Fall, dass ein Lichtstrahl von einem dichteren Medium in ein dünneres Medium übergeht. Wie wir

bereits gelernt haben, muss in diesem Fall der Winkel grösser werden. Betrachten wir dazu die folgende Skizze:



Wird der Winkel zur Senkrechten noch grösser als der Winkel des blauen Strahls, so muss der gebrochene Lichtstrahl grösser als  $90^\circ$  werden, was aber im reflektierten Bereich liegt. Diesen Winkel, bei dem keine Transmission mehr stattfindet, nennt man *Totalreflexionswinkel*.

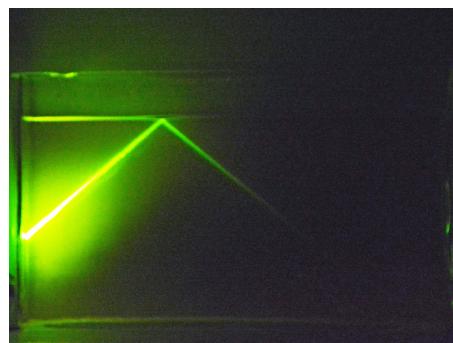
Dies soll nun anhand des folgenden Experiments demonstriert werden.

#### Exp. 9: Totalreflexion in Wasser

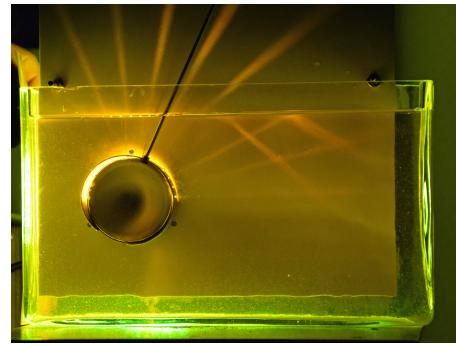
Dazu wird eine Lichtquelle in gefärbtem Wasser verwendet. Die Lichtquelle kann so manipuliert werden, dass nur ein Lichtstrahl oder mehrere Lichtstrahlen austreten (siehe Abbildung).



Stellt man nun den richtigen Winkel ein, so tritt das Licht nicht mehr aus dem Wasser aus, sondern wird nur noch reflektiert, wie auf dem folgenden Bild schön zu sehen ist.



Das folgende Bild zeigt sehr schön den Übergang von transmittierten und reflektierten Strahlen zu nur reflektierten Strahlen.



Nachdem wir nun eine eher geometrische Überlegung zur Erklärung herangezogen haben, möchten wir nun das Gesetz von Snellius zur Verdeutlichung heranziehen. Gemäss dem Gesetz von Snellius besagt dies:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_B}{n_A},$$

wobei in diesem Fall  $n_B$  das dünnerne und  $n_A$  das dichtere Medium ist. Beim Totalreflexionswinkel  $\alpha_T$  ist  $\beta = 90^\circ$  und damit gilt:

$$\sin \alpha_T = \frac{n_B}{n_A} \quad \Rightarrow \quad \alpha_T = \arcsin \left( \frac{n_B}{n_A} \right).$$

Diese Formel zeigt schnell, dass die Totalreflexion nur bei einem Übergang von einem dichteren zu einem dünneren Medium auftritt. Andernfalls wäre das Arcussinus-Argument grösser als eins und somit nicht definiert.

Ein Beispiel für die Anwendung der Totalreflexion sind Glasfaserkabel. Darin wird Licht als Träger von Informationen genutzt. Das Licht wird am Rand der Faser immer wieder total reflektiert und tritt somit nie seitlich aus, wie das folgende Versuchsstück zeigt.

---

#### Exp. 10: Glasfaserkabel

Ein gebündeltes Glasfaserkabel und dessen Vergrösserung werden mithilfe eines Lasers oder einer anderen leistungsstarken Lichtquelle beleuchtet (siehe Abbildung).



Das Licht im Leiter bleibt, da jeder Einfallswinkel des Lichts grösser als der Totalreflexionswinkel ist. Die Geometrie des Leiters wurde so gewählt, dass kein Licht entweichen kann.

---

Damit beenden wir diesen Abschnitt zur Lichtbrechung. Weitere Anwendungen und Beispiele aus der Optik gibt es natürlich noch viele, jedoch können wir aus Zeitgründen nicht alle behandeln. Wir fahren nun fort und besprechen die Interferenz und Beugung von Wellen.

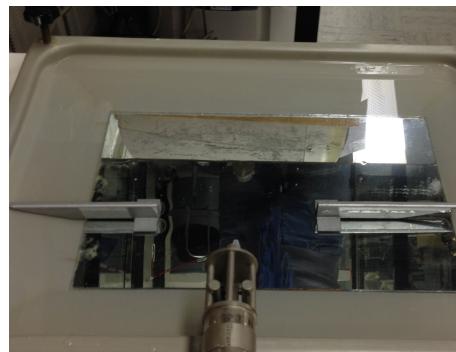
## 2.4 Interferenz und Beugung von Wellen

Dieser Abschnitt behandelt die Interferenz und Beugung von Materiewellen. Licht wird in Kapitel H zur Optik behandelt. Die Grundidee und der Doppelpalt werden hier erläutert. Bevor wir den Doppelpalt betrachten können, schauen wir uns das folgende Experiment an.

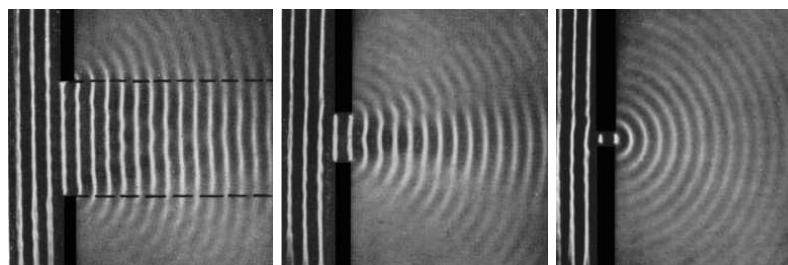
---

#### Exp. 11: Wasserwellenwanne II

In der Wasserwellenwanne wird ein Hindernis mit variabler Öffnung platziert. Anschliessend wird die Welle untersucht, indem die Breite der Öffnung Stück für Stück reduziert wird (siehe Abbildung).



Die Muster der Wellen, die sich aus der Veränderung der Öffnung ergeben, werden in der folgenden Bildsequenz dargestellt. Die Öffnung wird von links nach rechts verringert, bis sie in der Größenordnung der Wellenlänge liegt.



Es ist zu erkennen, dass die Welle immer stärker in den Wellenschatten hinter dem Hindernis vordringt. Ganz rechts auf dem Bild breitete sich die Welle über den gesamten Bereich aus und es bleibt kein geometrischer Schattenraum mehr übrig.

Was hier geschieht, nennt man Beugung. Die Welle breitet sich im geometrischen Schattenraum aus, was uns ermöglicht, das Gesetz der Beugung wie folgt zu formulieren:

**Ges. 6:** (Beugung) Unter dem Begriff der Beugung versteht man das Eindringen einer Welle in den geometrischen Schattenraum. Beugungsphänomene treten dann auf, wenn die Breite  $b$  der Öffnung (resp. Hindernis) die gleiche Größenordnung hat wie die Wellenlänge  $\lambda$ , d. h.

$$b \simeq \lambda.$$

Wenn eine Öffnung in der Größenordnung der Wellenlänge ist, kann sie als Quelle einer neuen Elementarwelle betrachtet werden. Eine mögliche Konsequenz sieht man im folgenden Beispiel.

### Bsp. vi.

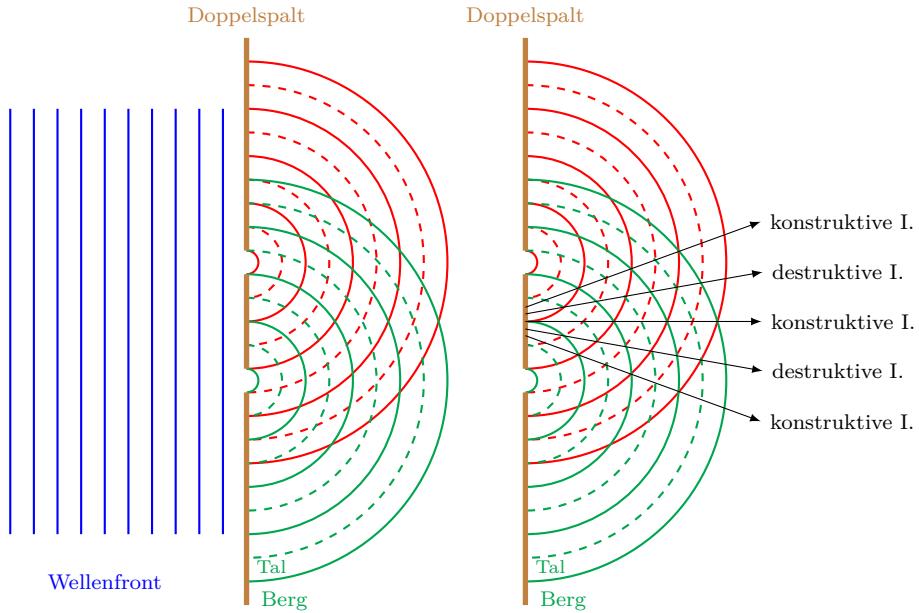
Begründen Sie qualitativ und quantitativ weshalb man durch Zimmer hindurch hören, aber nicht sehen kann.

Lsg: —

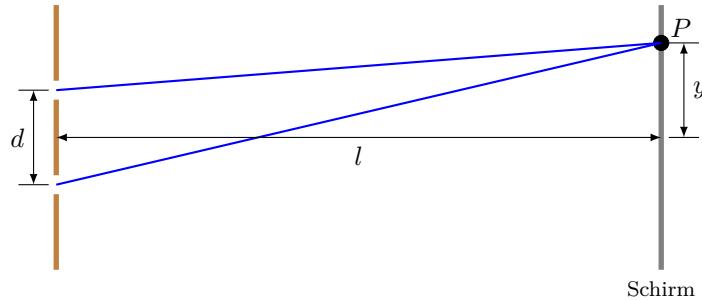
#### 2.4.1 Doppelspalt

Wir betrachten nun das Beugungsmuster an einem Doppelspalt. Im Experiment haben wir erkannt, dass die Öffnung als Quelle einer neuen Welle betrachtet werden kann, wenn die Öffnungsbreite im Bereich der Wellenlänge

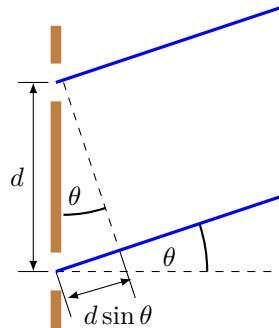
liegt. Man kann sich das etwa so vorstellen:



Wo entstehen Interferenzmaxima und -minima sowie welches Muster zeigt sich? Nun, wir betrachten einen Punkt  $P$  auf dem Schirm in einem Abstand von  $y$ .



Wir betrachten die Spalten genauer und vereinfachen die Annahme, dass der Abstand des Schirms im Vergleich zu  $d$  sehr gross ist. Dies führt zur Parallelität der Strahlen.



Am Schirm an Position  $P$  tritt eine konstruktive Interferenz auf, was zu einem Interferenzmaximum führt, wenn der Gangunterschied  $d \sin \theta$  genau einem Vielfachen der Wellenlänge entspricht.

$$d \sin \theta_m = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Dekonstruktive Interferenz und ein Interferenzminimum treten auf, wenn der Gangunterschied einem halben Wellenlängenabstand oder einem ungeraden Vielfachen davon entspricht.

$$d \sin \theta_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Nun müssen wir die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Maxima berechnen. Dazu bezeichnen wir den Abstand des  $m$ -ten Interferenzmaximums als  $y_m$ . Wie aus den oben gezeigten Abbildungen ersichtlich ist, gilt:

$$\tan \theta_m = \frac{y_m}{l}.$$

Da für  $l \gg d$  der Winkel  $\theta_m$  klein ist, gilt:

$$\sin \theta_m \approx \tan \theta_m = \frac{y_m}{l} \quad \Rightarrow \quad d \sin \theta_m \approx d \frac{y_m}{l}.$$

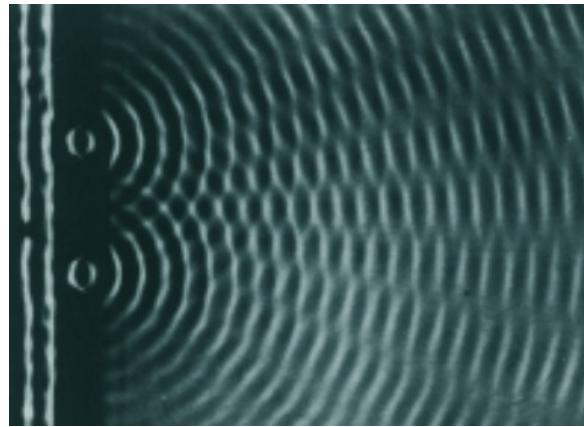
Eingesetzt in die Beziehung für konstruktive Interferenz ergibt sich für den  $m$ -ten hellen Streifen auf dem Schirm:

$$y_m \approx m \frac{\lambda l}{d}.$$

Daraus folgt, dass die Abstände zwischen den Interferenzmaxima gleichmäßig sind. Es gilt:

$$\Delta y = \frac{\lambda l}{d}.$$

Durch einen Doppelpalt entsteht ein gleichmässiges Muster aus Interferenzmaxima und -minima, welches für Wasserwellen wie folgt aussehen könnte (siehe Abbildung in [34]).



### Bsp. vii.

Ein Doppelspalt wird mit Laserlicht der Wellenlänge  $\lambda_1 = 620 \text{ nm}$  beleuchtet. Die beiden Maxima 2. Ordnung haben auf dem Schirm einen Abstand von 5.20 cm.

Beleuchtet man dagegen einen Doppelspalt bei gleicher Anordnung mit einem anderen Laser (Wellenlänge  $\lambda_2$ ), so haben in diesem Fall die beiden Maxima 2. Ordnung auf dem Schirm den Abstand 4.70 cm. Bestimmen Sie  $\lambda_2$ . Lsg:  $\lambda_2 \approx 560 \text{ nm}$

Lsg:  $\lambda_2 \approx 560$  nm

## Lösung:

Nach diesem kurzen Abschnitt zum Doppelspalt wechseln wir nun zum Einzelspalt.

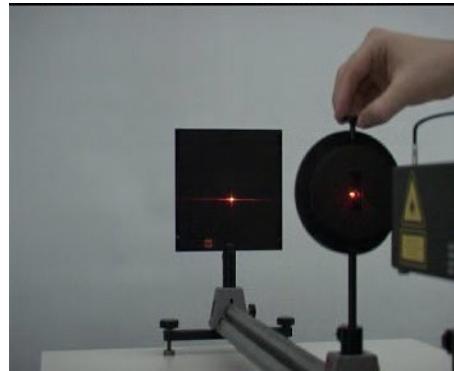
### 2.4.2 Einzelspalt

Im Experiment mit der Wasserwanne haben wir beobachtet, dass Beugung auftritt, wenn die Breite der Öffnung oder des Gegenstands in der Größenordnung der Wellenlänge der einfallenden Welle liegt. Wir betrachten das Beugungsmuster am Einzelspalt des Lichts experimentell und versuchen es anschliessend theoretisch zu erklären.

---

**Exp. 12: Laser am Einzelspalt**

Der Helium-Neon Laser erzeugt rotes kohärentes Licht mit einer Wellenlänge von etwa 630 nm. Das Laserlicht wird auf einen vertikalen Spalt gerichtet, dessen Breite ebenfalls im Bereich von Zehntel Mikrometern liegt. Hinter dem Spalt wird ein Schirm in einer Entfernung von etwa einem Meter positioniert.



Wenn der Laser durch den ausreichend schmalen Spalt hindurchtritt, wird das charakteristische Beugungsmuster sichtbar, wobei das zentrale Maximum am hellsten und am breitesten ist (siehe Abbildung aus [35]).



Neben dem zentralen Maximum treten weitere Interferenzmaxima auf, die sich mehrfach wiederholen, bis die Lichtintensität so schwach ist, dass sie nicht mehr erkennbar sind.

---

Wie entstehen Minima und Maxima, obwohl nur eine Welle durch die Öffnung geht? Wie kann eine Welle mit sich selbst interferieren, wenn sie durch dieselbe Öffnung geht? Um diese Fragen beantworten zu können, betrachten wir einmal, was Christiaan Huygens<sup>5</sup> dazu zu sagen hat.

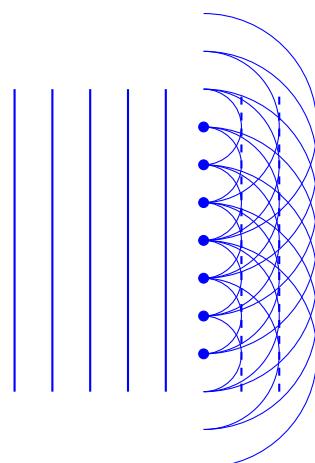


Ch. Huygens  
(1629-1695)

Huygens gilt, obwohl er sich niemals der noch zu seinen Lebzeiten entwickelten Infinitesimalrechnung bediente, als einer der führenden Mathematiker und Physiker des 17. Jahrhunderts. Er ist der Begründer der Wellentheorie des Lichts, formulierte in seinen Untersuchungen zum elastischen Stoß ein Relativitätsprinzip und konstruierte die ersten Pendeluhrn. Mit von ihm verbesserten Teleskopen gelangen ihm wichtige astronomische Entdeckungen. Er formulierte als erster das nach ihm benannte Huygenssche Prinzip, das als Grundlage der Wellenoptik gilt.

**Ges. 7:** (*Huygens-Prinzip*) *Jeder Punkt einer beliebig geformten Wellenfront kann als Ausgangspunkt von Elementarwellen gesehen werden, die sich mit gleicher Phasengeschwindigkeit und Frequenz wie die ursprüngliche Wellenfront ausbreiten. Die Überlagerung aller einzelnen Elementarwellen bildet die neue Wellenfront.*

Was dies bedeutet, sieht man im folgenden Bild. Eine ebene Welle ist eine Überlagerung von vielen Elementarwellen.

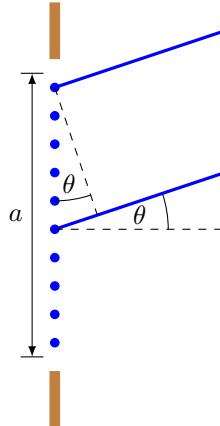



---

<sup>5</sup>Christiaan Huygens (14. April 1629 in Den Haag - 8. Juli 1695), auch Christianus Hugenius, war ein niederländischer Astronom, Mathematiker und Physiker.

Es wird erkannt, dass die Überlagerungen von ausgehenden Kugelwellen auch eine ebene Wellenfront bilden. Mit diesem Prinzip können einige Phänomene erklärt werden, die ansonsten sehr aufwendig zu erklären wären. Das Prinzip wurde von Fresnel<sup>6</sup> erweitert und durch die Wellengleichung (siehe nächsten Abschnitt) präzisiert.

Nun können wir möglicherweise das Beugungsverhalten am Einzelspalt verstehen. Die Antwort auf die Frage, wie eine Welle mit sich selbst interferieren kann, ist nun klar, da jede Welle aus der Überlagerung mehrerer Wellen besteht. Wir betrachten nun den Einzelspalt:



Der Gangunterschied zwischen der ersten und sechsten Punktquelle im Spalt beträgt in diesem Fall  $\frac{a}{2} \sin \theta$ . Um das erste Minimum zu bestimmen, müssen diese beiden Wellen destruktiv interferieren, was bedeutet, dass  $\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$ . Das gleiche gilt selbstverständlich auch für die zweite und siebte Punktquelle sowie für alle weiteren. Daher gilt:

$$a \sin \theta_1 = \lambda.$$

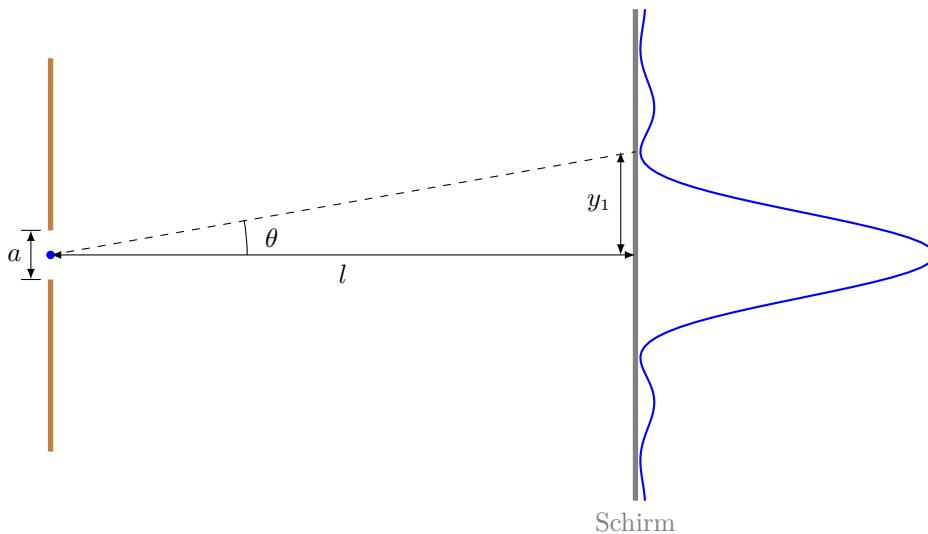
Eine ähnliche Argumentation lässt sich anführen, wenn wir uns die nächste Nullstelle betrachten. Diese tritt auf, wenn der Spalt in vier Viertel aufgeteilt wird. Der dadurch entstehende Gangunterschied beträgt  $\frac{a}{4} \sin \theta$ , sodass für die destruktive Interferenz  $\frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$  gilt. Analog dazu lässt sich die Nullstelle für die anderen Punkte bestimmen.

$$a \sin \theta_2 = 2\lambda.$$

Daraus lässt sich eine allgemeine Formel für die Nullstellen ableiten.

$$a \sin \theta_m = m\lambda.$$

Die Intensitätsverteilung sieht, ohne dass sie in diesem Abschnitt hergeleitet wird, wie folgt aus:



Eine ähnliche Berechnung wie beim Doppelspalt führt zur folgenden Beziehung:

$$y_m \cong m \frac{\lambda l}{a}.$$

<sup>6</sup>Augustin Jean Fresnel (10. Mai 1788 in Broglie (Eure) - 14. Juli 1827 in Ville-d'Avray bei Paris) war ein französischer Physiker und Ingenieur, der wesentlich zur Begründung der Wellentheorie des Lichts und zur Optik beitrug. Er studierte sowohl theoretisch als auch experimentell das Verhalten von Licht.

Diese Formel illustriert das im Experiment Beobachtete klar und einfach. Je kleiner die Breite des Spaltes, desto grösser das erste Maximum.

### Bsp. viii.

Beim letzten Experiment zum Einzelpunkt haben wir mit einem Helium-Neon Laser mit einer Wellenlänge von 630 nm gearbeitet. Die Spaltenbreite war 0.05 mm breit und der Schirm stand etwa einen Meter entfernt. Wie breit war wohl das Hauptmaximum oder anders gesagt, der Abstand der ersten beiden Minima. Lsg:  $2 \cdot y_1 \approx 2.5 \text{ cm}$

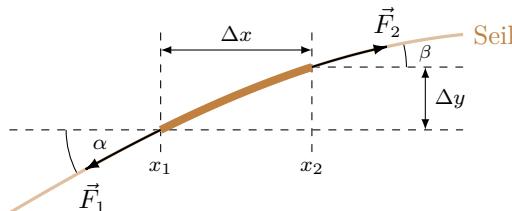
## Lösung:

## 2.5 Wellengleichung

Bisher haben wir für jedes spezifische Problem die Differentialgleichung aufgestellt und versucht, sie zu lösen. Dabei haben wir jeweils eine Wellenfunktion als Lösung erhalten. Die Frage, die sich nun stellt, ist, ob es eine Gleichung gibt, die alle Wellen als Lösungen enthält und auf dem Aktionsgesetz basiert. Die Antwort lautet natürlich ja und diese Gleichung nennt sich *Wellengleichung*. Die Wellengleichung folgt direkt aus dem Aktionsgesetz.

$$F_{\text{res}} = ma.$$

Obwohl wir die Wellengleichung aus der Mechanik herleiten, gilt sie für alle Arten von Wellen, einschliesslich akustischer oder elektromagnetischer Wellen. Der Ausgangspunkt dieser Herleitung ist ein Stück Seil, das gerade ausgelenkt wird (siehe Skizze).



Wie so oft müssen wir bei dieser Herleitung einige Vereinfachungen vornehmen, allerdings beeinflussen sie das Ergebnis nicht. Wir betrachten ein nicht-elastisches Seil, daher sind die beiden Kräfte gleich gross.

$$F_1 = F_2 = F$$

Das Seilsegment sollte sehr kurz sein, was bedeutet, dass  $\Delta y$  klein ist. Dadurch sind auch die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  klein. Das Segment mit der Länge  $\Delta l$  hat eine Masse von  $m$ .

$$m = \mu \Delta l$$

Die lineare Massendichte  $\mu$  gibt die Masse pro Längeneinheit an. Für die resultierende Kraft in vertikaler Richtung gilt:

$$F_{\text{res}} = F \sin \beta - F \sin \alpha = m \ddot{y}$$

und für  $\alpha, \beta \ll 1$  ist  $\sin \varphi \sim \tan \varphi$  und wir erhalten:

$$F_{\text{res.}} = F(\tan \beta - \tan \alpha) = m\ddot{y}.$$

Der Tangens der Steigung des Seils an den Enden des Segments entspricht hier. Das Seil wird durch die Funktion  $y(x, t)$  beschrieben, daher erhalten wir die Ableitung für die Steigung an den Punkten  $x_1$  und  $x_2$ .

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}(x_1) \equiv S_1 \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{dy}{dx}(x_2) \equiv S_2.$$

Damit können wir Newton II auch schreiben als:

$$F(S_2 - S_1) = m\ddot{y}$$

und durch einsetzen der Beziehung für die Masse erhalten wir:

$$F\Delta S = \mu\Delta l \cdot \ddot{y} \quad \Rightarrow \quad F \frac{\Delta S}{\Delta l} = \mu\ddot{y},$$

wobei  $S_2 - S_1 = \Delta S$  ersetzt wurde. Nun lassen wir das Segment weiter schrumpfen und bilden den Grenzwert für  $\Delta l \rightarrow 0$ , d. h. jedoch, dass  $\Delta l \sim \Delta x$  ist und damit erhalten wir:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Daraus erhalten wir die Wellengleichung und sie lautet:

**Ges. 8: (Wellengleichung)** Eine Funktion  $y(x, t)$ , welche eine Welle beschreibt, die sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  ausbreitet, muss immer Lösung sein der folgenden Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2},$$

wobei für die Geschwindigkeit  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$  gelten muss, sofern  $F$  die Kraft im Seil und  $\mu$  die Massenbelegung sind.

Die Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht derjenigen, die wir im Abschnitt 2.1 hergeleitet haben.

Beachten Sie, dass aus eindimensionalen Differentialgleichungen partielle Differentialgleichungen geworden sind. Dies ist darauf zurückzuführen, dass diese Funktion aus zwei Variablen besteht und wir nach beiden separaten Variablen ableiten müssen.

Bsp. ix.

Zeigen Sie, dass jede Funktion der Form  $y = y(x - vt)$  die Wellengleichung löst. Beachten Sie, dass es sich hierbei nicht um ein Produkt von  $y$  mit  $(x - vt)$  handelt, sondern um eine Funktion  $y$  mit dem Argument der Form  $(x - vt)$ . Lsg: –

Lsg: —

## Lösung:

Schauen Sie sich an, was sie hier gezeigt haben. Jede Funktion mit diesem Argument löst die Wellengleichung. Dabei spielt es keine Rolle, ob es sich um eine Sinusfunktion oder eine Wurzelfunktion handelt. Wie wir wissen, beschreibt die Wurzelfunktion keine Welle. Die Wellengleichung ist also eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung.

## Zusammenfassung Kapitel E2

1. Mit einer *Welle* werden zeitliche und räumliche Änderungen einer physikalischen Grösse beschrieben.
2. Man unterscheidet *transversale* resp. *longitudinale* Wellen, wobei bei ersten die Ausbreitungsrichtung senkrecht zur Schwingungsrichtung und beim zweiten parallel zur Schwingungsrichtung ist.
3. Die *Wellenlänge*  $\lambda$  einer periodischen Welle ist der kleinste Abstand zweier Punkte gleicher Phase. Dabei haben zwei Punkte die gleiche Phase, wenn sie im zeitlichen Ablauf die gleiche Auslenkung und die gleiche Bewegungsrichtung haben.
4. Die *Wellenzahl*  $k$  resp. der *Wellenvektor*  $\vec{k}$  einer periodischen Welle ist ein Vektor der senkrecht auf der Wellenfront steht und den Betrag

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

hat.

5. Für die Beziehung zwischen der *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*  $v$ , der Periode  $T$ , der Wellenlänge  $\lambda$  sowie der Kreisfrequenz  $\omega$ , dem Wellenzahl  $k$  und der Frequenz  $f$  gilt:

$$v = \frac{\lambda}{T} = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{k}.$$

6. Für eine harmonische Welle, die sich nach *rechts* resp. nach *links* bewegt, gilt die folgende *Wellenfunktion*:

$$y_R(x, t) = \hat{y} \sin(kx - \omega t + \varphi) \quad \text{resp.} \quad y_L(x, t) = \hat{y} \sin(kx + \omega t + \varphi).$$

7. Für eine *stehende Welle mit zwei festen Enden* im Abstand  $l$  gilt für die Wellenzahl  $k_n$  und die Wellenlänge  $\lambda$

$$k_n = n \cdot \frac{\pi}{l} \quad \text{und} \quad l = n \cdot \frac{\lambda}{2},$$

wobei  $n = 1, 2, 3, \dots$  sein kann.

8. Für eine *stehende Welle mit einem festen und einem freien Enden* im Abstand  $l$  gilt für die Wellenzahl  $k_n$  und die Wellenlänge  $\lambda$

$$k_n = n \cdot \frac{\pi}{2l} \quad \text{und} \quad l = n \cdot \frac{\lambda}{4},$$

wobei  $n = 1, 3, 5, \dots$  sein kann.

9. Bei der *Brechung* einer Welle, d. h. beim Übergang von einem Medium A in ein Medium B bleibt die Frequenz  $f_A$  resp.  $f_B$  einer Welle konstant, d. h.

$$f_A = f_B \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B},$$

wobei  $v_{A,B}$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit und  $\lambda_{A,B}$  die Wellenlänge in Medium A resp. B sind.

10. Das *Brechungsgesetz von Snellius* besagt, tritt eine Welle unter einem schießen Winkel in ein anderes Medium mit unterschiedlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit ein, so wird sie gebrochen. Für das Verhältnis der Winkel gilt:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{v_A}{v_B}.$$

11. Der *Brechungsindex* (auch Brechzahl)  $n$  für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle in einem Medium A  $v_{\text{Medium},A}$  und im Vakuum  $v_{\text{Vakuum}}$  ist definiert als:

$$n_A = \frac{v_{\text{Vakuum}}}{v_{\text{Medium},A}}.$$

12. Vereinfacht lässt sich das Brechungsgesetz von Snellius auch schreiben als:

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta,$$

wobei  $n_{A,B}$  die Brechungsindizes der jeweiligen Medien sind.

13. Das *Prinzip von Fermat* besagt, dass eine Welle zwischen zwei Punkten so verläuft, dass die Laufzeit minimal ist.
14. Der *Totalreflexionswinkel*  $\alpha_T$  ist der Austrittswinkel  $90^\circ$  und damit erhält man die Beziehung:

$$\alpha_T = \arcsin \left( \frac{n_B}{n_A} \right).$$

15. Unter dem Begriff der *Beugung* versteht man das Eindringen einer Welle in den geometrischen Schattenraum. Beugungsphänomene treten dann auf, wenn die Breite  $b$  der Öffnung die gleiche Größenordnung hat wie die Wellenlänge  $\lambda$ , d. h.

$$b \sim \lambda.$$

16. Bei Beugung am *Doppelspalt* erhalten wir *konstruktive Interferenz* und damit ein Interferenzmaximum, falls der Gangunterschied  $d \sin \theta$  genau einem natürlichen Vielfachen der Wellenlänge entspricht, d. h.

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Wir erhalten *destruktive Interferenz* und damit ein Interferenzminimum, falls der Gangunterschied der halben Wellenlänge oder einem ungeraden Vielfachen davon entspricht, d. h.

$$d \sin \theta = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

17. Das *Prinzip von Huygens* besagt, dass jeder Punkt einer beliebig geformten Wellenfront kann als Ausgangspunkt von Elementarwellen gesehen werden, die sich mit gleicher Phasengeschwindigkeit und Frequenz wie die ursprüngliche Wellenfront ausbreiten. Die Überlagerung aller einzelnen Elementarwellen bildet die neue Wellenfront.

18. Die *Interferenzminimas* beim Einfachspalt der Breite  $a$  unter dem Winkel  $\theta$  gehorchen der Beziehung:

$$a \sin \theta = m\lambda,$$

wobei  $\lambda$  die Wellenlänge und  $m$  ganze Zahlen sind.

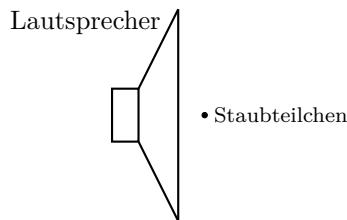
19. Eine Funktion  $y(x, t)$ , welche eine Welle beschreibt, die sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  ausbreitet, muss immer Lösung sein der folgenden *Wellengleichung*:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2},$$

wobei für die Geschwindigkeit  $v = \sqrt{F/\mu}$  gelten muss, sofern  $F$  die Kraft im Seil und  $\mu$  die Massenbelegung sind.

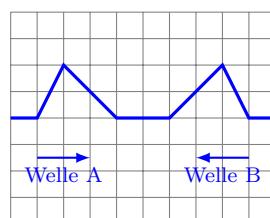
## Konzeptfragen Kapitel E2

1. Zwei Schüler singen gleich laut. Schüler X singt in einer hohen Tonlage, Schüler Y singt in einer tiefen Tonlage. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
  - Die beiden Frequenzen sind gleich, aber die Amplituden sind unterschiedlich.
  - Die beiden Amplituden sind gleich, aber die Frequenzen sind unterschiedlich.
  - Die beiden Frequenzen sind gleich und die Amplituden sind gleich gross.
  - Die beiden Frequenzen sind unterschiedlich und die Amplituden sind ebenfalls unterschiedlich.
  
2. Ein Staubteilchen schwebt vor einem stummen Lautsprecher (siehe Abbildung unten).



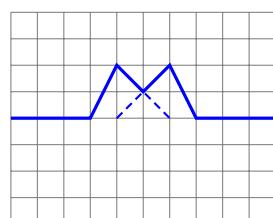
Der Lautsprecher wird eingeschaltet und spielt einen lauten Ton mit konstanter Tonhöhe ab. Wie wird sich das Staubkorn bewegen?

- Es bleibt an der gleichen Stelle.
  - Es bewegt sich zurück und vorwärts um dieselbe Position.
  - Es bewegt sich um dieselbe Position herum nach oben und nach unten.
  - Es bewegt sich vom Lautsprecher weg.
  - Er bewegt sich als Sinuskurve weg.
3. Zwei Pulse bewegen sich aufeinander zu. Jeder Impuls hat eine Geschwindigkeit von 1 cm/s. Die Abbildung rechts zeigt die Pulse zum Zeitpunkt  $t = 0\text{ s}$ . Jedes Quadrat entspricht  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ .

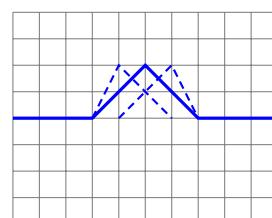


Die gestrichelten Linien zeigen die korrekten Positionen der einzelnen Impulse nach 2 s.

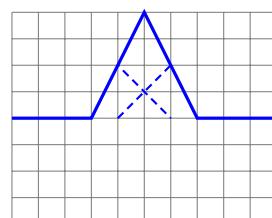
- a. Wählen Sie die Zeichnung, die der Form des resultierenden Impulses nach 2 s entspricht.



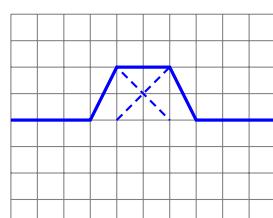
A



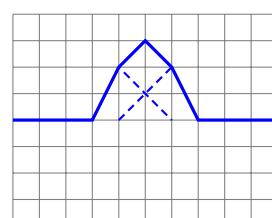
B



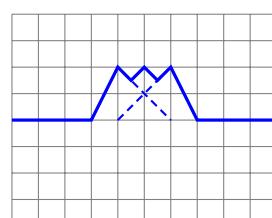
C



D



E

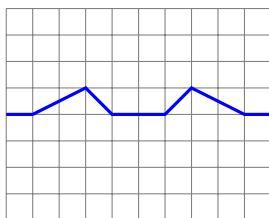


F

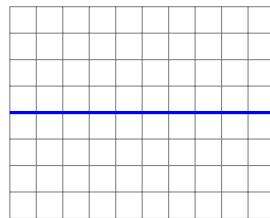
- b. Wählen Sie die Zeichnung und Erklärung, die der Form des resultierenden Impulses nach 5 s entspricht.



A: Die Wellen haben sich gegenseitig durchdrungen und ihre Form beibehalten.



B: Die Wellen sind kleiner geworden, weil sie kollidiert sind und dadurch Energie verloren haben.



C: Die Wellen haben sich gegenseitig ausgelöscht.

4. Zwei Rohre haben den gleichen Durchmesser und die gleiche Länge. Eine hat zwei offene Enden, die andere hat nur ein offenes Ende. Die Grundfrequenzen dieser beiden Rohre sind...
- gleich.  
 bei einem Rohr mit einem offenen Ende grösser.  
 grösser in einem Rohr mit zwei offenen Enden.
5. Luft wird über das obere Ende einer zu einem Drittel mit Wasser gefüllten Flasche geblasen, wodurch ein Geräusch entsteht. Wie würde sich die Tonhöhe des Geräusches ändern, wenn mehr Wasser hinzugefügt würde, um die Flasche halb voll zu machen? Die Tonhöhe würde...
- gleich bleiben.  
 höher werden.  
 niedriger werden.

## Aufgaben Kapitel E2

Weitere einfache Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:

<https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0> im Kapitel 22.



1. Ein  $l = 4$  m langes Seil besitze ein fest eingespanntes Ende und sei am anderen Ende mit einem leichten, frei beweglichen Seil verbunden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen auf dem Seil betrage  $v = 20$  m/s.

- a. Zeigen Sie für ein einseitig offenes Seil, dass die Grundfrequenz

$$f_1 = \frac{v}{4l}$$

ist, wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v = \frac{\omega}{k}$  ist.

- b. Bestimmen Sie die Frequenz  
 b<sub>1</sub>. der Grundschwingung und  
 b<sub>2</sub>. des ersten Obertons.

Lsg: a. – b. b<sub>1</sub>.  $f_1 = 1.25$  Hz b<sub>2</sub>.  $f_3 = 3.75$  Hz

2. Eine Gitarrensaite von 5.0 g habe eine Länge von 1.5 m. Aus der Wellengleichung haben wir einen Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  der Welle, der Zugspannung  $F$  und der Massenbeladung  $\mu$  hergeleitet, nämlich

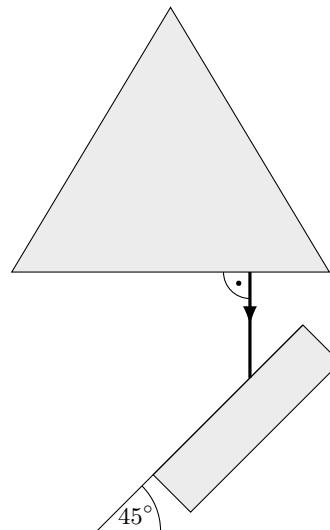
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

- a. Bestimmen Sie die Wellenlänge der Grundschwingung.  
 b. Bestimmen Sie die Zugspannung auf der Saite, damit der Kammerton A4 von 440 Hz zu hören ist, wobei dieser als Grundton schwingt.  
 c. Was müssen Sie an dieser Saite verändern, um den Ton A3 von 220 Hz zu bekommen?

Lsg: a.  $\lambda_1 = 3$  m b.  $F \approx 5.8$  kN c. –

3. Ein Lichtstrahl tritt wie skizziert aus einem Glasprisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, aus und trifft auf eine planparallele Platte. Beide haben den Brechungsindex von 1.53.

- a. Vervollständigen Sie den weiteren Weg des Strahls durch die planparallele Platte. Schreiben Sie die Grösse der Winkel in Grad an!  
 b. An welcher Stelle und unter welchem Winkel trat der skizzierte Strahl in das Glasprisma ein? Schreiben Sie die Grösse der Winkel in Grad an!



Lsg: –

4. Eine Saite sei an einem Ende fest eingespannt und schwinge mit dem zweiten Oberton. Ihre Wellenfunktion lautet

$$y(x, t) = 0.015 \cos(189t) \sin(0.262x),$$

wobei  $y$  und  $x$  in Metern und  $t$  in Sekunden angegeben sind.

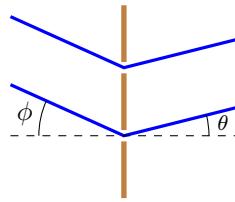
- a. Wie gross ist die Frequenz der Schwingung?
- b. Wie lang ist die Saite?

**Lsg:** a.  $f \approx 30 \text{ Hz}$  b.  $l \approx 30 \text{ m}$

5. Ein Laserstrahl mit der Wellenlänge 700 nm treffe auf einen vertikalen Spalt der Breite 0.2 mm, der 6 m von einem Schirm entfernt sei. Berechnen Sie die Breite des zentralen Beugungsmaximums auf dem Schirm.

**Lsg:**  $2y_1 \approx 4.2 \text{ cm}$

6. Licht falle unter dem Winkel  $\phi$  zur Normalen auf eine vertikale Ebene, die einen Doppelspalt mit dem Spaltenabstand  $d$  enthält (vgl. Abb.).



Zeigen Sie, dass die Interferenzmaxima bei Winkel  $\theta$  liegen, die durch

$$\sin \theta + \sin \phi = m \frac{\lambda}{d}$$

gegeben sind.

**Lsg:** –

# Literaturverzeichnis

- [1] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Mars\\_Climate\\_Orbiter](http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter), Juni 2012
- [2] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales\\_Einheitensystem](http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem), Juni 2012
- [3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,  
URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935>
- [4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays  $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007
- [5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron g–2 and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807
- [6] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Steradian>, Juni 2012
- [7] Aristoteles,
- [8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590
- [9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997
- [10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955
- [11] URL: <http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html>, September 2013
- [12] URL: <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index>
- [13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011
- [14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG
- [15] URL: <http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/>, April 2013
- [16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007
- [17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG
- [18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994
- [19] URL: <https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical>
- [20] Hans Kammer, Irma Mgelandze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG
- [21] URL: <https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal>
- [22] Wikipedia, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid>, August 2013
- [23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010
- [24] URL: <http://www.schulserver.hessen.de/>, Oktober 2013
- [25] URL: <http://www.leifiphysik.de>, September 2013
- [26] URL: <http://photos.zoochat.com>, Semptember 2013

- [27] URL: <http://www.lab-laborfachhandel.de>, Oktober 2013
- [28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,
- [29] URL: [https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm\\_data/lm\\_282/auto/kap09/cd259.htm](https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm), März 2014
- [30] URL: <https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen>, März 2024
- [31] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707>
- [32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press
- [33] URL: <http://ephex.phys.ethz.ch>, Februar 2015
- [34] URL: <http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html>, März 2015
- [35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas opitscher Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962
- [36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004
- [37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018
- [38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001
- [39] URL: <https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en>, Juli 2018
- [40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998
- [41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869
- [42] URL: <http://www.tf.uni-kiel.de>, März 2014
- [43] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie\\_\(Thermodynamik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik)), März 2014
- [44] URL: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616\\_Dampfmaschine.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg), März 2014
- [45] URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png>, März 2014
- [46] URL: <http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscode.htm>, August 2014
- [47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494
- [48] URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm>, Oktober 2014
- [49] URL: <http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm>, Oktober 2014
- [50] URL: [http://www.solstice.de/grundl\\_d\\_tph/exp\\_besch/exp\\_besch\\_04.html](http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html), Oktober 2014
- [51] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639>, Oktober 2017
- [52] URL: <https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen>, Oktober 2017
- [53] URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches\\_Spektrum](https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum), August 2022
- [54] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode>, September 2022
- [55] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg>, November 2023
- [56] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>, April 2024
- [57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor
- [58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.
- [59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.
- [60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

- [61] Wikipedia, [https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitat\\_der\\_Gleichzeitigkeit](https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitat_der_Gleichzeitigkeit), August 2018
- [62] URL: <http://static.a-z.ch>, März 2015
- [63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925
- [64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413
- [65] URL: <http://www.peter-glowatzki.de>, Mai 2015
- [66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941
- [67] URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche>, Mai 2015
- [68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)
- [69] URL: <http://w3.ppp1.gov/>, September 2015
- [70] O. Höfling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wärme. 15. Auflage. Ferd. Dummfers Verlag, Bonn 1994
- [71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge\\_Structural\\_Database](https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database), April 2018
- [72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)
- [73] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung>, April 2018
- [74] URL: <http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...>, Juni 2012
- [75] L. Susskind und G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics*, Basic Books, 2014