Kapitel M

Mathematisches Werkzeug

1 Einleitung

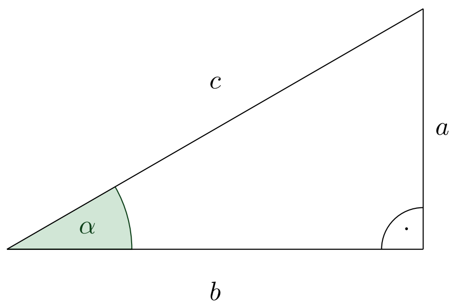
Schon die Physik der Mittelstufe benötigt einige mathematische Begriffe und Regeln, um einfachste Berechnungen durchführen zu können. Da dies von Seiten der Mathematik nicht oder erst sehr spät, um nicht zu sagen zu spät, behandelt wird, soll dieser Anhang den Schülern als Nachschlagewerk dienen. Gleichzeitig kann er auch dazu dienen, sich bestimmte Grundlagen selbst anzueignen. Dieses Skript erhebt keineswegs den Anspruch, mathematisch möglichst streng oder vollständig zu sein. In einigen Fällen ist das Gegenteil der Fall.

2 Geometrie

In diesem Kapitel über Geometrie werden hauptsächlich zwei Themen behandelt: rechtwinklige Dreiecke und Vektoren.

2.1 Trigonometrie im rechtwinklige Dreieck

Ein rechtwinkliges Dreieck, wie es in der folgenden Abbildung dargestellt ist, hat bestimmte Eigenschaften.



Satz 1: *Der Satz des Pythagoras besagt, dass die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sich wie folgt verhalten:*

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2.}$$

Sinus, Kosinus und Tangents
Seitenverhältnisse können als Funktion des Winkels geschrieben werden, d.h.

$$\frac{a}{c} = f_1(\alpha), \qquad \frac{b}{c} = f_2(\alpha), \qquad \frac{a}{b} = f_3(\alpha),$$

Da diese Funktionen (f_1, f_2 und f_3) häufig verwendet werden, werden ihnen eigene Namen gegeben.

Def. 1:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}.$$

wobei sich a, b und c auf die Abbildung von oben beziehen.

Mit den Definitionen aus **Def. 1** folgt:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{M.1}$$

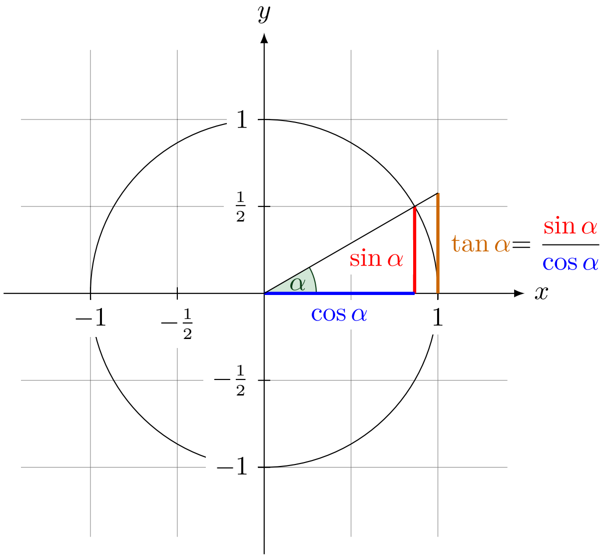
Aus dem **Satz 1** und den **Def. 1** folgt unmittelbar [1]

$$c^2 \sin^2(\alpha) + c^2 \cos^2(\alpha) \quad = \quad c^2.$$

Sofern $c \neq 0$, erhalten wir:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1. \tag{M.2}$$

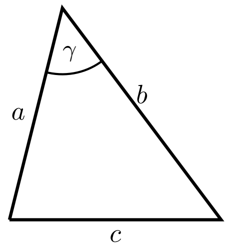
Dies ist eine Kreisgleichung [2] mit Radius 1.



2.2 Kosinussatz

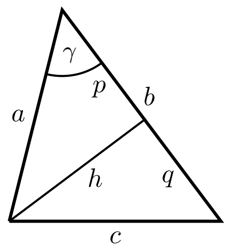
Der Kosinussatz verknüpft in einem allgemeinen Dreicheck drei Seiten mit einem Zwischenwinkel.

Satz 2: *(Kosinussatz) Für ein beliebiges Dreieck gilt folgender Zusammenhang*



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Der Beweis ist eine gute Übung und soll deshalb hier angefügt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\gamma < 90°$, dann gilt mit dem folgenden Dreieck



In den durch h getrennten Teildreiecken ist der Satz des Pythagoras anzuwenden.

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - p^2 \\ c^2 &= h^2 + q^2, \end{aligned}$$

wobei $q^2 = (b-p)^2 = b^2 - 2bp + p^2$ ist. Somit lässt sich c^2 direkt aus der Summe der zwei anderen Ausdrücke berechnen, d. h.

$$c^2 = a^2 - p^2 + b^2 - 2bp + p^2 = a^2 + b^2 - 2bp.$$

Mit $\cos\gamma = \frac{p}{a}$ erhalten wir was zu beweisen war.

[1] Notation: $\cos^2(\alpha) = (\cos(\alpha))^2$.
[2] Kreisgleichungen haben die Form: $x^2 + y^2 = r^2$, wobei $x = \cos(\alpha)$, $y = \sin(\alpha)$ gewählt werden kann und r der Radius ist.

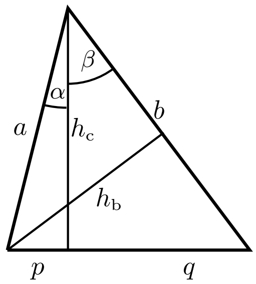
2.3 Additionstheoreme

Ein häufig verwendetes Additionstheorem für trigonometrische Funktionen ist das folgende:

Satz 3: *Das Additionstheorem für den Sinus lautet:*

$$\boxed{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta.}$$

Da der Beweis sehr einfach ist, soll er hier angefügt werden. Betrachten wir das folgende allgemeine Dreieck:



Die doppelte Fläche des Dreiecks ist:

$$2F = h_\mathrm{b} \cdot b = a\sin(\alpha + \beta) \cdot b$$

oder

$$2F = h_\mathrm{c} \cdot p + h_\mathrm{c} \cdot q = b\cos\beta \cdot a\sin\alpha + a\cos\alpha \cdot b\sin\beta.$$

Damit erhalten wir

$$ab\sin(\alpha + \beta) = ab(\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta).$$

Damit kann auch folgende Identität ebenfalls bewiesen werden:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha). \tag{M.3}$$

Der Beweis passt auf eine Zeile:

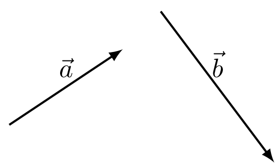
$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

2.4 Vektoren

Über Vektoren gäbe es sehr viel zu sagen und eine ausführliche Behandlung würde wohl fast ein Semester füllen. Für die Schulphysik sind jedoch nur einige Regeln von Bedeutung.

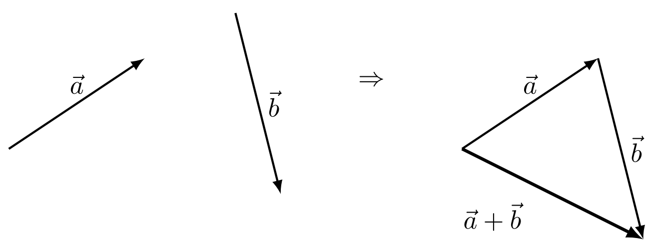
2.4.1 Darstellung

Ein Vektor wird durch einen Pfeil dargestellt, dessen Länge proportional zu seinem Wert ist. Hier zwei Beispiele.

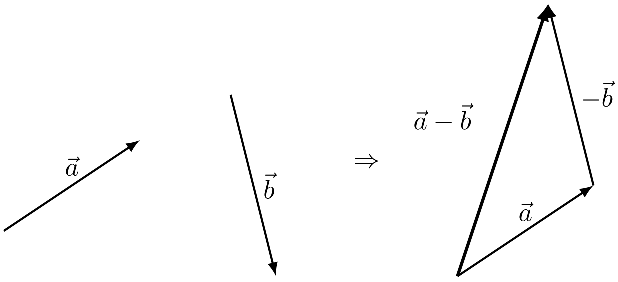


2.4.2 Addition und Subtraktion

Die Addition oder Subtraktion von Vektoren ist geometrisch sehr einfach. Es genügt, einen der beiden Vektoren parallel zum Anfangspunkt des anderen zu verschieben. Verbindet man nun den Anfangspunkt mit dem Endpunkt des zweiten Vektors, so erhält man die Summe der beiden Vektoren. Das sieht dann so aus:



Für die Subtraktion brauchen wir nur den zweiten Vektor um 180° zu drehen, der Rest bleibt gleich.



2.4.3 Komponenten

Jeder Vektor kann in seine rechtwinkligen Komponenten zerlegt werden. Um dies mathematisch sauber herzuleiten, müssen wir ein wenig ausholen.

Def. 2: *Ein Vektor $\vec{e}$ ist ein Einheitsvektor, falls der Betrag des Vektors $|\vec{e}| = 1$ ist.*

Eine Menge von Einheitsvektoren kann zu einer sogenannten Einheitsbasis zusammengefasst werden.

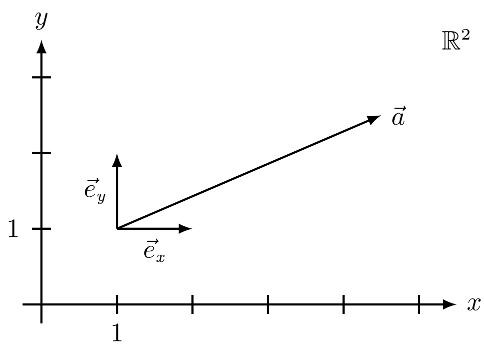
Def. 3: *Eine Basis ist eine Menge von Vektoren, welche einen Vektorraum aufspannen. Sind die Vektoren Einheitsvektoren, spricht man von einer Einheitsbasis.*

Die für uns wichtigsten Vektorräume[3] sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Eine häufig verwendete Einheitsbasis für $\mathbb{R}^2$ ist die sogn. *kanonische*[4] Einheitsbasis: $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ mit

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir ein einfaches Beispiel in $\mathbb{R}^2$.

Bsp. i.
Ein Vektor $\vec{a}$ soll in seine Einheitsvektoren zerlegt werden.



Lsg: –

Lösung:
Somit setzt sich der Vektor $\vec{a}$ zusammen aus:

$$\vec{a} = 3.5\,\vec{e}_x + 1.5\,\vec{e}_y,$$

d. h. $a_x = 3.5$ und $a_y = 1.5$. Damit versteht man die Komponentenschreibweise für Vektoren besser:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich folgende Verallgemeinerung nachvollziehen.

[3] Vegleichen Sie das nächste Kapitel für eine genaue Definition von Vektorräumen.
[4] Eine Definition nach [10] ist: *Ein Begriff unter einer Anzahl gleichartiger Begriffe heisst kanonisch, wenn er eine besonders grosse Bedeutung und eine besonders durchsichtige Gestalt hat.*

Satz 4: *Für jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ existieren $a, b \in \mathbb{R}$, sodass sich $\vec{v}$ als Linearkombination von Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ schreiben lässt, d. h.*

$$\boxed{\vec{v} = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y.}$$

Häufig werden a, b mit v_x und v_y bezeichnet. Somit lässt sich folgende Definition des Komponentenvektors verstehen.

Def. 4: *Der Komponentenvektor $\vec{v}_i$ ist definiert als*

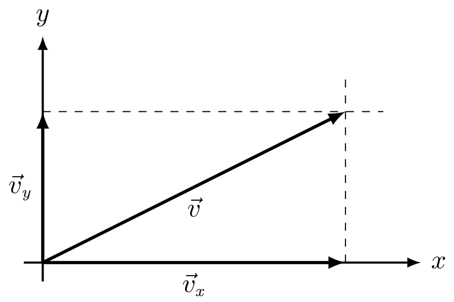
$$\boxed{\vec{v}_i = v_i \vec{e}_i,}$$

wobei $i = x, y, z$ sein kann.

Mit dieser Definition kann jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ geschrieben werden, als

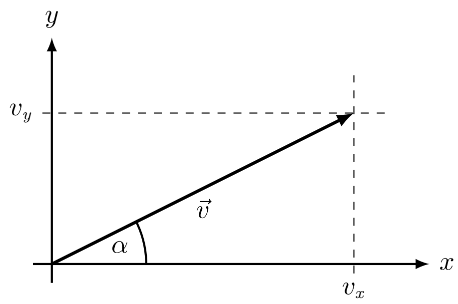
$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y.$$

In einem kartesischen Koordinatensystem sieht dies wie folgt aus.



2.4.4 Betrag

Um den Betrag eines Vektors $\vec{v}$ zu bestimmen, betrachten wir folgende Skizze, wobei v_x resp. v_y der Komponenten in x- resp. y-Richtung entsprechen.



Mit der Hilfe dieser Komponenten und dem Satz des Pythagoras können wir den Betrag, d. h. die Länge, eines Vektors berechnen.

Def. 5: *Der Betrag eines Vektors $\vec{v}$ ist:*

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.}$$

Nicht immer sind v_x und v_y bekannt. In vielen Fällen ist auch nur der Winkel α gegeben. In diesen Fällen benötigt man die trigonometrischen Funktionen. Es gilt:

$$v_x = v\cos\alpha \qquad v_y = v\sin\alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen der x-Achse und dem Vektor ist. Der umgekehrte Weg ist manchmal auch verlangt.

In physikalischen Gleichungen tritt häufig nur noch v auf. Dieses v entspricht *nicht nur* dem Betrag, sondern ist wie folgt definiert.

Def. 6: *Die physikalische Bezeichnung v eines $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ist ein sogn. Pseudoskalar*[5] *und ist definiert als*

$$\boxed{v = \operatorname{sgn}(\vec{v})\,|\vec{v}|,}$$

wobei die Funktion sgn *das Vorzeichen von $\vec{v}$ herausgibt.*

[5] Ein Pseudoskalar ist ein Skalar, der durch Punktspiegelung sein Vorzeichen ändert.

Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Bsp. ii.
Zwei Vektoren $\vec{v}$ (mit $|\vec{v}| = 5\,\mathrm{m/s}$) zeigt senkrecht nach oben und $\vec{g}$ (mit $|\vec{g}| = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$) zeigt senkrecht nach unten. Wählen Sie die Richtung nach oben als positiv und schreiben Sie die Vektoren als Komponenten. Lsg: –

Lösung:
Diese zwei Vektoren lassen sich als Komponenten wie folgt schreiben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\ \mathrm{m/s} \quad \text{und} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \end{pmatrix}\ \mathrm{m/s^2}.$$

In der Physik würden wir lediglich v und g schreiben, wobei

$$v = 5\,\mathrm{m/s} \quad \text{und} \quad g = -9.81\,\mathrm{m/s^2}$$

sind. Berücksichtige, dass $\mathrm{sgn}(\vec{v}) = +1$ und $\mathrm{sgn}(\vec{g}) = -1$ ist.

Was wir an diesem Beispiel erkennen, ist, dass die sgn-Funktion die Richtungen der Vektoren berücksichtigt.

2.4.5 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist ein Produkt aus zwei Vektoren, wobei im Gegensatz zum Vektorprodukt, das Resultat ein Skalar, also eine Zahl ist.

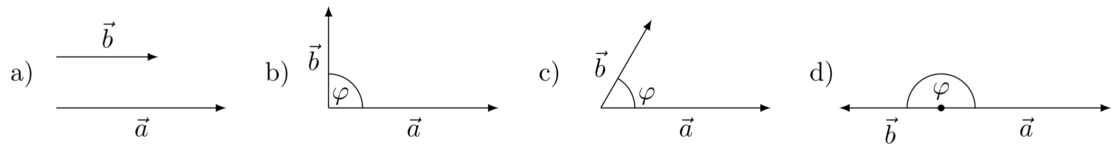
Def. 7: *(Skalarprodukt) Bezeichnet $a = |\vec{a}|$ und $b = |\vec{b}|$ die Beträge von zwei euklidische Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ dann ist das Skalarprodukt definiert als:*

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi,} \tag{M.4}$$

wobei $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ der Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

An den folgende Beispielen erkennt man einige Eigenschaften des Skalarprodukts.

Bsp. iii.
Betrachten wir zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wobei $a = 5$ und $b = 3$ ist. Bestimmen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$, falls a) $\varphi = 0°$, b) $\varphi = 90°$, c) $\varphi = 60°$ und d) $\varphi = 180°$ ist.



Lsg: –

Lösung:
a) Sind die beiden Vektoren parallel, d. h. der Zwischenwinkel 0° dann ist das Skalarprodukt eine einfache Multiplikation von zwei Zahlen, also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi = ab = 15.$$

b) Schliessen die beiden Vektoren einen Winkel von 90° ein, so ist das Skalarprodukt null, da der $cos(90°) = 0$ ist, d. h.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi = 0.$$

c) Schliessen die beiden Vektoren einen beliebigen Winkel ungleich 0° und 90° ein, erhalten wir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi = 3 \cdot 5 \cdot 0.5 = 7.5.$$

d) In der Winkel 180°, ist der $cos(180°) = -1$ und damit erhält man eine negative Lösung, d. h.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi = 3 \cdot 5 \cdot (-1) = -15.$$

2.4.6 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt auch Kreuzprodukt genannt ist ein Produkt aus zwei Vektoren, wobei das Resultat ebenfalls ein Vektor ist.

Def. 8: *(Vektorprodukt) Das Vektorprodukt aus zwei Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist*

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix},}$$

wobei a_i resp. b_i für $i = 1, 2, 3$ die Komponenten vom Vektor $\vec{a}$ resp. $\vec{b}$ sind.

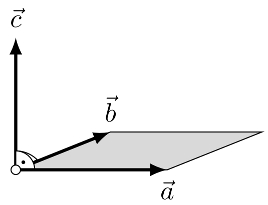
Der Betrag des Vektorprodukt ist:

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi,}$$

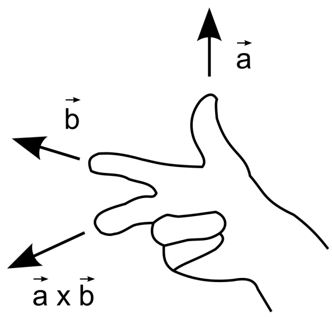
wobei $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ der Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Daraus folgt unmittelbar, dass das Vektorprodukt maximal ist, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen und das Produkt verschwindet, wenn sie parallel sind.

Interpretiert man die Lage des Vektors $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, dann kann man zeigen, dass dieser stets senkrecht auf der Ebene steht, welche von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Sieht somit wie folgt aus:



Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ bildet ein Rechtssystem. Es kann auch mit der Rechten-Hand-Regel nachvollzogen werden. Sofern der Daumen für den Vektor $\vec{a}$, der Zeigfinger für den $\vec{b}$ und der Mittelfinger für den Vektor $\vec{c}$ steht. Das sieht wie folgt aus:



3 Algebra

Die Algebra ist ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik und befasst sich mit den Eigenschaften von Rechenoperationen. Ein wichtiges Teilgebiet ist die *lineare Algebra*, welche sich mit den Eigenschaften von linearen Gleichungen befasst.

3.1 Lineare Algebra

In diesem Abschnitt werden wir nur die wichtigsten Grössen und Gesetze einführen. Wir werden uns auf die Physik konzentrieren und nicht zu tief in die Mathematik eintauchen.

Die Lineare Algebra ist ein essenzielles Werkzeug in der Physik. Sie erlaubt es, physikalische Systeme zu modellieren, Gleichungen kompakt zu formulieren und komplexe Probleme effizient zu lösen. Insbesondere spielen Vektoren und Matrizen eine zentrale Rolle in der Mechanik, Elektrodynamik und Quantenmechanik. Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Grundlagen der Linearen Algebra mit Anwendungen in der Physik.

3.1.1 Lineare Gleichungssysteme

Immer wieder kommt es in Physik vor, dass man Lösungen für lineare Gleichungssysteme finden soll, wie z.B. für das folgende System:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 6 \\
-2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 2 \\
12x_1 - 7x_2 - 5x_3 &= -3
\end{aligned}
$$

Das könnte von den Kirchhoff'schen Gesetzen kommen oder von einem Kräftegleichgewichtsproblem. Es gibt noch viele andere Möglichkeiten. Daher ist es wichtig, dass man ein Verfahren entwickelt wie man diese System effizient lösen kann. Matrizen sind zu einen unverzichtbaren Werkzeug der Mathematik aber auch der Physik geworden. Diese Gleichung kann durch eine Matrix wie folgt geschrieben werden:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 12 & -7 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Jede Gleichung, welche in dieser Form geschrieben werden kann, nennt man *lineare Gleichung*. Das folgende Schema zeigt, wie man eine Matrix mit einem Vektor multipliziert: Die Matrix-Vektor-Multiplikation wird wie folgt berechnet:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{\longrightarrow} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{red}{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Für die 2. Zeile erhalten wir ganz analog:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \color{blue}{\longrightarrow} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{blue}{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \color{blue}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3} \\ \\ \end{pmatrix}$$

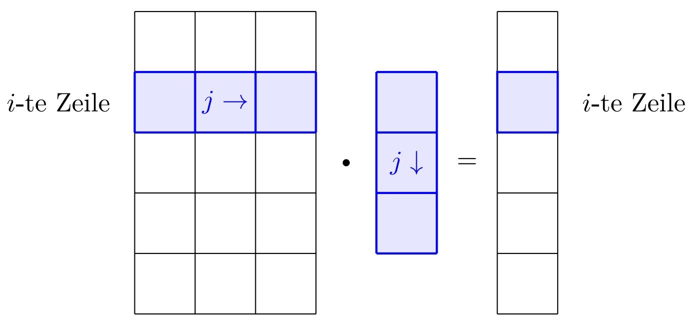
und schliesslich für die 3. Zeile:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \color{green}{\longrightarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{green}{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \color{green}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3} \end{pmatrix}.$$

Die Formel für die Multiplikation lautet ausgehend von der Gleichung $Ax = b$:

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Die folgende Darstellung illustriert diese Multiplikation ebenfalls sehr deutlich:



Eine $m \times n$-Matrix kann man nur mit einem n-Komponenten-Vektor multiplizieren. Das Ergebnis ist dann ein m-Komponenten-Vektor. Meistens haben wir $n \times n$-Matrizen und damit n-dimensionale Vektoren.

Wie löst man eine lineare Gleichung? Die einfachste Methode ist, die Gleichung mit der inversen Matrix zu multiplizieren.

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1}b,$$

weil $A^{-1}A = I$ die Identitätsmatrix[6] ist und $Ix = x$ ist. Damit haben wir das Problem reduziert auf das finden der inversen Matrix A^{-1}. Später zeigen wir, wie man die inverse Matrix berechnet. Jetzt wollen wir über den Zusammenhang zwischen Matrizen, Vektoren und Koordinaten sprechen. Dafür müssen wir zuerst den Vektorraum definieren. Doch dafür braucht es etwas Vorbereitung. Wir müssen zuerst die Gruppe und dann den Körper definieren. Erst mit diesen zwei Definitionen können wir den Vektorraum definieren.

Def. 9: *(Gruppe) Eine Gruppe ist ein geordnetes Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer Menge G und einer inneren Verknüpfungsoperation $\circ$ auf G. Dabei müssen die folgenden Gruppenaxiome erfüllt sein:*

– *Assoziativität: für alle $a, b, c \in G$ gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.*

– *Neutrales Element: es existiert genau ein Element $e \in G$, so dass $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in G$ ist.*

– *Inverses Element: für jedes $a \in G$ existiert genau ein inverses Element $a^{-1} \in G$, so dass $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ ist.*

Es gibt sehr kleine Gruppen und es gibt unendlich große Gruppen. Gruppen haben in den letzten achtzig bis hundert Jahren eine sehr wichtige Rolle in der Physik gespielt. Im Kapitel über Teilchenphysik wird ihre Bedeutung nur angedeutet. Betrachten wir zwei einfache Beispiele.

Bsp. iv.
Zeigen Sie, dass a) die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ keine Gruppe und b) die ganzen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der Addition eine Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ sind. Lsg: –

Lösung:
a) Die natürlichen Zahlen haben zwar ein neutrales Element, nämlich die 0, doch sie haben kein inverses Element. Daher sind sie keine Gruppe.
b) Die ganzen Zahlen sind natürlich assoziativ, haben das gleiche neutrale Element wie die natürlichen Zahlen und sie haben auch ein inverses Element. Sei $q \in \mathbb{Q}$, dann ist $q^{-1} = -q \in \mathbb{Q}$ und $q + (-q) = 0$.

Das nächste Beispiel ist schon etwas schwieriger.

Bsp. v.
Suchen Sie die kleinste Gruppe und schreiben Sie sie explizit auf. Lsg: –

Lösung:
Die kleinste Gruppe ist die sogenannte *triviale* Gruppe. Sie besteht nur aus einem Element, nämlich dem neutralen Element, also $G = \{e\}$. Die Assoziativität ist klar. Ein neutrales Element hat es auch und das neutrale Element ist auch gleich das inverse Element, da die Verknüpfung mit sich selbst, wieder das neutrale Element ergibt.

Wenn Sie folgende Gruppe geschrieben haben, ist das auch irgendwie richtig: $G = \{a, e\}$. Denn diese Gruppe ist die kleinste nicht triviale Gruppe.

Die folgende Definition ist eine Erweiterung der Definition der Gruppe, die in vielen Bereichen der Mathematik und Physik wichtig ist.

Def. 10: *(abelsche Gruppe) Eine abelsche Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Gruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft:*

– *Kommutativität: für jedes $a, b \in G$ gilt: $a \circ b = b \circ a$.*

[6] Die Identitätsmatrix nennt man auch die Einsmatrix, da sie folgende Form hat:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bsp. vi.
Finden Sie eine Gruppe die a) abelsch und b) nicht abelsch ist. Lsg: –

Lösung:
a) Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe und b) die Gruppe $(\mathbb{Z}, -)$ ist nicht abelsch, da die Operation auf der Gruppe nicht kommutativ ist: $a - b \neq b - a$.

In vielen Situationen haben wir mehr als eine Operation auf einer Gruppe. Lässt man zwei Operationen zu, dann erhält man einen Körper.

Def. 11: *(Körper) Ein Körper K ist eine Menge K versehen mit zwei inneren Verknüpfungen $\oplus, \otimes$, für die folgendes gelten muss:*

– *$(K, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $e_\oplus$.*

– *$(K \setminus \{e_\oplus\}, \otimes)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $e_\otimes$.*

– *Distributivität: für alle $a, b, c \in K$ gilt: $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$ und $(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c \oplus b \otimes c$.*

Bsp. vii.
Zeigen Sie, dass a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper und b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Lsg: –

Lösung:
a) Es ist klar, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper ist, da $(\mathbb{Z}, +)$ zwar eine Gruppe ist, aber $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ nicht, weil das inverse Element fehlt.
b) In diesem Fall sind $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ beides Gruppen. Assoziativität ist klar, neutrales Element ist zum einen die 0 und in der anderen Gruppe die 1. Das inverse Element ist zum einen $-a$ von $(\mathbb{Q}, +)$ und $\frac{1}{a}$ von $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Jetzt haben wir alles definiert, um schliesslich den Vektorraum zu definieren.

Def. 12: *(Vektorraum) Es sei V eine Menge und $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $\oplus : V \times V \to V$ eine innere zweistellige Verknüpfung, genannt Vektoraddition, und $\otimes : K \times V \to V$ eine äussere zweistellige Verknüpfung, genannt Skalarmultiplikation. Man nennt dann $(V, \oplus, \otimes)$ einen Vektorraum über den Körper K oder kurz K-Vektorraum, wenn für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in K$ die folgenden Eigenschaften gelten:*

– *$(V, \oplus)$ ist eine ablesche Gruppe.*

– *Distributivität I: $(\alpha + \beta) \otimes (u \oplus v) = \alpha \otimes u \oplus \beta \otimes u \oplus \alpha \otimes v \oplus \beta \otimes v$*

– *Distributivität II: $(\alpha \cdot \beta) \otimes u = \alpha \otimes (\beta \otimes v)$*

Beachten Sie, dass die Operationen sich umwandeln, sobald sie auf die Menge V wirken. Im Allgemeinen müssen diese Operationen nicht gleich sind. In unseren Fällen, wenn wir mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ arbeiten und den Körper $\mathbb{R}$ verwenden, dann sind die Operationszeichen natürlich die gleichen.

Bsp. viii.
Erklären Sie, weshalb bei der Distributivität I und II die Operationszeichen ändern. Lsg: –

Lösung:
Die äusseren Operationen sind im Allgemeinen nicht gleich wie die inneren Operationen und sobald die äusseren auf die inneren wirken, werden Sie auf die inneren umgewandelt.

Eine wichtige Grösse eines Vektorraums ist die Basis eines Vektorraums. Es gilt:

Def. 13: *Eine Basis eines Vektorraums V ist eine Teilmenge B von V mit der folgenden Eigenschaften:*

– *Jedes Element $v \in V$ lässt sich als Linearkombination von Vektoren aus $B = \{b_i : i \in I\}$ (I = Indexmenge) darstellen und diese Darstellung ist eindeutig, d.h.*

$$\boxed{v = \sum_i \alpha_i b_i,}$$

wobei α_i mit $i \in I$ Elemente aus K sind.

3.2 Komplexe Zahlen

Im Grunde braucht die Mathematik keine Motivation um einen Zahlenraum zu erweitern, da sie als abstrakte Wissenschaft einfach alles ohne Grund und vorrangiges Ziel ausprobieren und erforschen kann. Dennoch soll hier eine Motivation gegeben werden.

Der Italiener Gerolamo Cardano (1501-1576) hat sich folgende Frage gestellt: *"Gibt es zwei Zahlen, deren Produkt 40 und deren Summe 10 sind?"*

Heute würde man dieses Problem wie folgt aufschreiben:

$$x \cdot y = 40 \quad \text{und} \quad x + y = 10.$$

Durch einsetzen der zweiten Gleichung in die erste Gleichung erhält man diese quadratische Gleichung:

$$x(10 - x) = 40 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$x_\pm = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Seine Antwort war: *"Das Problem ist unlösbar, ausser man würde die Zahl $\sqrt{-15}$ als normale Zahl erlauben und genauso rechnen wie mit anderen Zahlen."* Weiter ist er jedoch nicht gegangen.


C. Gauss (1777-1855)

Der nächste, der sich damit beschäftigt hat und vieles zum Verständnis der komplexen Zahlen beigetragen hat, war Carl F. Gauss. Er war ein bedeutender deutscher Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Geboren am 30. April 1777 in Braunschweig, Deutschland, und gestorben am 23. Februar 1855 in Göttingen, war Gauss eine herausragende Figur in der Geschichte der Mathematik. Zu seinen bemerkenswertesten Errungenschaften gehört die Entdeckung der Methode der kleinsten Quadrate, die Entwicklung der komplexen Zahlen, die Entdeckung der Gauss'schen Normalverteilungskurve in der Statistik und seine Arbeit an der Astronomie, einschliesslich der Berechnung der Bahn des Asteroiden Ceres.

Gauss hat unteranderem das Problem von Cardano reduziert auf die Gleichung:

$$x^2 + 1 = 0$$

und daraus die neue Zahl $\sqrt{-1}$ eingeführt. Daneben kennen wir heute auch die komplexe Zahlenebene, welche auch Gausssche Zahlenebene genannt wird. Der Schweizer Leonard Euler führte dann schliesslich die heute geltende Notation ein:

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$


L. Euler (1707-1783)

Leonhard Euler war ein herausragender Schweizer Mathematiker des 18. Jahrhunderts, der für seine vielseitigen Beiträge auf vielen Gebieten der Mathematik und Physik bekannt ist. Geboren am 15. April 1707 in Basel, Schweiz, und gestorben am 18. September 1783 in Sankt Petersburg, Russland, gilt Euler als einer der produktivsten und einflussreichsten Mathematiker aller Zeiten. Euler machte bedeutende Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie, zur Geometrie, zur Mechanik, zur Optik und zur Astronomie. Er war bekannt für seine Fähigkeit, komplexe Probleme zu lösen und innovative mathematische Techniken zu entwickeln.

Die nach René Descartes benannte Darstellung einer komplexen Zahl ist wohl neben der polaren Darstellung, die meist verbreitete. Daher definieren wir eine komplexe Zahl auch so:

Def. 14: *Eine komplexe Zahl ($z \in \mathbb{C}$) kann in der kartesischen Form als:*

$$\boxed{z = x + \mathrm{i}y}$$

dargestellt werden, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ sind.

Um die Allgemeinheit dieser Definition zu verdeutlichen den folgenden Satz ohne Beweis:

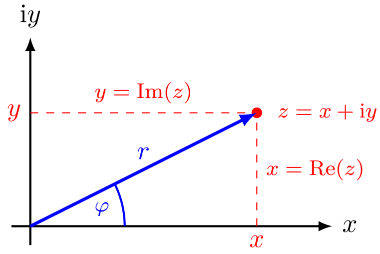
Satz 5: *Jede Darstellung einer komplexen Zahl ist isomorph zur kartesischen Darstellung.*

Folgende Regeln resp. Eigenschaften gelten für komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \in \mathbb{C}$:

- Addition und Subtraktion: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$
- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$
- Komplexkonjugiert: $\bar{z}_1 = x_1 - \mathrm{i}y_1$

- Betragsquadrat: $|z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = x_1^2 + y_1^2$
- Polardarstellung: $z_1 = r_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ mit $r_1 = |z_1|$ und $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$

Abschliessend betrachten wir noch die komplexe Zahlenebene und leiten daraus eine wichtige Identität her.



Die Bezeichnungen $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ bedeutet Realteil von z und Imaginärteil von z. Beschreiben wir nun den Punkt z mit Kosinus und Sinus, dann erhalten wir, für $r = 1$, folgende Identität:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Setzen wir für $\varphi = \pi$ ein, so erhalten wir wohl einer der schönsten Gleichungen der Mathematik:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} - 1 = 0.}$$

Darin sind fünf der wichtigsten Zahlen in einer einzigen Gleichung vereint.

4 Analysis

In diesem Abschnitt werden wir nicht die gesamte Funktionentheorie aufrollen, sondern nur auf ein oder zwei ausgewählte Themen eingehen. Das zentrale Thema der Analysis ist die Infinitesimalrechnung, womit wir auch beginnen werden.

4.1 Infinitesimalrechnung

Die Infinitesimalrechnung besteht aus der Differential- und Integralrechnung. In der Regel beginnt man mit der etwas einfacheren Theorie, der Differentialrechnung oder wie sie auch genannt wird, dem Ableiten.

4.1.1 Differentialrechnung

Die Differentialrechnung befasst sich mit unendlich keinen Änderungen. Entwickelt wurde dies von Gottfried W. Leibniz[7] und Sir I. Newton unabhängig voneinander. Newtons Motivation war es eine beschleunigte Bewegungen kontinuierlich Beschreiben zu können. Dies verlangt, die Zeitschritte unendlich klein zu machen. Daraus ergibt sich z. B. für die Geschwindigkeit folgenden Überlegung. Anstelle der mittleren Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$$

erhält man durch eine unendlich kleine Zeiteinheit folgenden Term:

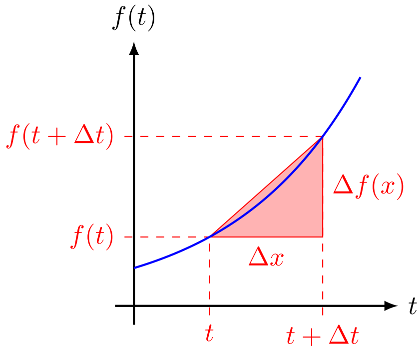
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}.$$

Den Term mit der makroskopischen Zeitdifferenz nennt man Differenzenquotienten und der Grenzwert davon den Differentialquotienten. Dies kann gekürzt wie folgt geschrieben werden.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Nehmen wir nun also eine beliebige Funktion $f(t)$ (dies könnte auch $x(t)$ sein) und bilden zuerst den Differenzenquotienten und danach den Differentialquotienten. Betrachten wir diese Situation zuerst grafisch:

[7] Gottfried Wilhelm Leibniz (1. Juli 1646 (greg.) in Leipzig - 14. November 1716 in Hannover) war ein deutscher Philosoph, Mathematiker, Diplomat, Historiker und politischer Berater der frühen Aufklärung. Er gilt als der universale Geist seiner Zeit und war einer der bedeutendsten Philosophen des ausgehenden 17. und beginnenden 18. Jahrhunderts sowie einer der wichtigsten Vordenker der Aufklärung. Im 18. Jahrhundert wird er vielfach als Freiherr bezeichnet; doch bislang fehlt eine Beurkundung über eine Nobilitierung.



Daran erkennt man, dass der Differenzenquotient die Steigung des Steigungsdreiecks (hier rot) darstellt. Es gilt also:

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Damit lässt sich nun der Differentialquotient definieren. Wir erhalten:

Def. 15: *(Differentialquotient) Der Differentialquotient einer Funktion $f(t)$ ist definiert als:*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

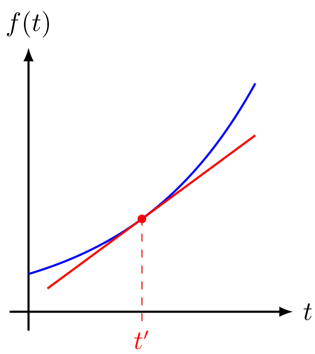
Eine einfachere Notation, welche in der Physik sehr verbreitet ist, ist:

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t},$$

wobei hier der Punkt verwendet wird, da es sich um eine Funktion handelt, die von der Zeit abhängig ist. Ist die Funktion vom Ort abhängig, also z. B. $g(x)$, dann schreibt man für den Differentialquotienten oder kurz die Ableitung:

$$g'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Was bedeutet dies nun anschaulich für die Funktion $f(t)$? Nun da das Δt immer kleiner wird, rücken die zwei Punkte in der Graphik oben immer näher zusammen, bis sie schliesslich beim Grenzwert aufeinander liegen und aus der Hypothenuse des Steigungsdreiecks wird eine Tangente. Dies sieht wie folgt aus:



Damit erhalten wir die Steigung der Funktion an einem bestimmten Punkt. Betrachten wir gleich ein einfaches Beispiel. Nehmen wir die Funktion $f(t) = kt^2$, wobei k ein Parameter ist. Versuchen wir nun mit der Definition die Ableitung von $f(t)$ also $\dot{f}(t)$ zu finden. Es gilt:

$$\dot{f}(t) = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Setzen wir die explizite Funktion ein, erhalten wir:

$$\dot{f}(t) = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{k(t+\Delta t)^2 - kt^2}{\Delta t}$$

Durch ausmultiplizieren erhalten wir:

$$\begin{aligned}\dot{f}(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{kt^2+2kt\Delta t+k\Delta t^2-kt^2}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2kt\Delta t+k\Delta t^2}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0} 2kt+k\Delta t\end{aligned}$$

Nun kann der Grenzwert ohne Divergenzen gebildet werden und wir erhalten:

$$\dot{f}(t) = 2kt.$$

Daraus können wir zwei wichtige Resultate ableiten. Zum einen ist die Ableitung unabhängig von einem konstanten Faktor. In der ganzen Herleitung hat es keine Rolle gespielt, dass der Parameter k vorhanden war. Man erkennt auch sofort aus der Definition, dass der Parameter ausgeklammert werden kann. Es gilt also allgemein:

$$\boxed{f'(kx) = kf'(x).}$$

Das zweite Ergebnis aus diesem Beispiel hat etwas mit dem Faktor 2 in der Ableitung zu tun. Die Frage, welche sich hier stellt, ist, ob es Zufall ist, dass der Faktor 2 vorkommt, wenn man eine quadratische Funktion hat. Betrachten wir gleich noch ein Beispiel, um daraus vielleicht eine allgemeine Regel abzuleiten.

Was ist die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$. Nun setzen wir dies in die Definition ein, dann erhalten wir direkt:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)^2-x^3-x^2}{\Delta x}.$$

Durch ausmultiplizieren erhalten wir:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3+x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^3-x^2}{\Delta x}.$$

Durch vereinfachen und kürzen erhalten wir schliesslich:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} 3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2+2x+\Delta x$$

und somit können wir wieder ohne bedenken den Grenzwert bilden und erhalten:

$$f'(x) = 3x^2+2x.$$

Wir erkennen daraus also, dass es kein Zufall war, dass der Faktor 2 nach vorne kam. Hier kommt für den qubischen Term (x^3) der Faktor 3 nach vorne und der Exponent wird um eins reduziert. Dies war uns vielleicht bei der quadratischen Funktion nicht aufgefallen, ist jedoch auch dort der Fall. Kein expliziter Exponent heisst, dass der Exponent den Wert 1 hat und damit auch um 1 reduziert worden ist. Daraus lässt sich eine allgemeine Ableitungsregel für Potenzen festlegen.

Satz 6: *(Potenzregel der Ableitung) Eine allgemeine Potenzfunktion der Form $f(x) = x^n$ hat die Ableitung:*

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

Vielleicht haben sie noch eine weitere Regel erkennt. Es war kein Zufall, dass wir beim zweiten Beispiel eine Summe hatten. Aus der Herleitung wird klar, dass diese zwei Teilfunktionen völlig unabhängig behandelt werden können. Es gilt also:

$$\boxed{[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x).}$$

Eine Abbildung, welche diesen zwei blau eingerahmten Bedingungen erfüllt, nennt man *linear*. Wie sieht es aus, wenn wir zwei Funktionen miteinander multiplizieren. Betrachten wir dazu die Funktion $f(x) = x^3$ und schreiben sie etwas verändert hin: $f(x) = x \cdot x^2$. Wir kennen die Ableitung bereits. Es gilt:

$$f'(x) = 3x^2 = (x\cdot x^2)'.$$

Der einfachst mögliche Fall ist wohl, dass das Ergebnis eine Summe aus zwei Termen ist. Ein möglicher Ansatz wäre also:

$$f'(x) = x^2 + 2x^2 = (x\cdot x^2)'.$$

Die Frage die sich stellt ist, wie kommt man aus:

$$(x \cdot x^2)' \to x^2 \quad \text{und} \quad (x \cdot x^2)' \to 2x^2.$$

Für den ersten Summand sieht es so aus, als ob der erste Faktor abgeleitet wird und der zweite nicht und für den zweiten Summanden wird der zweite Term abgeleitet und der erste nicht. Allgemein könnte man also folgende Regel - sogenannte Produktregel - aufschreiben:

$$\boxed{[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).}$$

Damit ist Sie diese wichtige Ableitungsregel wirklich glauben, soll sie hier kurz bewiesen werden. Setzen wir den Term $[f(x) \cdot g(x)]'$ in die Definition ein, dann erhalten wir:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}.$$

Ein beliebter Trick in der Beweisführung ist das Einsetzen einer null oder einer Eins. In diesem Fall setzen wir eine null so ein, dass wir links und rechts das gewünschte Resultat kriegen, nämlich einen Differenzenquotienten. Es gilt für links:

$$0 = -f(x) + f(x)$$

und rechts

$$0 = -g(x + \Delta x) + g(x + \Delta x).$$

Damit erhalten wir den sehr langen Term:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x) + f(x)] \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot [g(x) - g(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)]}{\Delta x}.$$

Daraus ergibt sich der einfachere Term:

$$\begin{aligned}[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \Bigg[& \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) \quad + \quad \frac{f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x} + \\ & f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad - \quad \frac{f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x} \Bigg].\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir, was zu beweisen war.

Die Produktregel ist zwar eine sehr wichtige Regel, doch die Kettenregel ist noch viel wichtiger. Wir möchten sie anhand eines einfachen Beispiels erklären. Betrachten wir die Funktion $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$. Mit der Potenzregel für Ableitungen erhalten wir direkt:

$$f'(x) = 8x + 12.$$

Vielleicht haben Sie es bereits erkannt, dass man die Funktion $f(x)$ auch in der Form schreiben kann: $f(x) = (2x + 3)^2$. Nun die Ableitung kennen wir bereits. Sie ist $f'(x) = 8x + 12$. Klammern wir die gleiche Klammer aus, dann erhalten wir:

$$f'(x) = 4(2x + 3).$$

Die Frage, die sich stellt, ist, wie kommt man von:

$$f(x) = (2x + 3)^2 \longrightarrow f'(x) = 4(2x + 3).$$

In erster Linie sieht es so aus, als würde man die Klammer ignorieren und einfach die Potenzregel anwenden. Dies führt doch auf:

$$f(x) = (\qquad)^2 \longrightarrow f'(x) = 2(\qquad).$$

Es fehlt uns noch ein Faktor zwei. Diesen erhalten wir doch, wenn wir den Inhalt der Klammer ableiten, d. h.

$$(2x + 3)' \longrightarrow 2.$$

Damit lässt sich die Kettenregel wir folgt verallgemeinern:

$$\boxed{\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).}$$

D. h. wir leiten zuerst die äussere Funktion ab und multiplizieren es mit der inneren Funktion. Da der Beweis sehr kurz und einfach ist, soll er hier auch gezeigt werden. Wir setzen die Definition ein:

$$\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta x},$$

wobei einfachheitshalber $y \equiv g(x)$ gesetzt wurde. Nun wir der Bruch mit 1 erweitert, wobei für die 1 folgendes gilt:

$$1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \bigg/ \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Daraus erhalten wir:

$$\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right].$$

Da $y = g(x)$ geht für $\Delta x \to 0$ auch $\Delta y \to 0$. Damit ist der erste Term in der Klammer einfach die Ableitung nach $y = g(x)$:

$$\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'\left(g(x)\right) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right].$$

Schreibt man den zweiten Term wieder um, erkennt man auch da sofort, dass es sich um die Ableitung der Funktion $g(x)$ nach x handelt. Es gilt:

$$\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'\left(g(x)\right) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right].$$

Damit haben wir den gesuchten Term gefunden. Zum Schluss schauen wir uns noch ein paar Beispiele aus der Physik an.

Bsp. ix.
Nehmen Sie die allgemeine Funktion für eine gleichmässig beschleunigte Bewegung, z. B. der freie Fall mit Anfangsgeschwindigkeit. Die Ortsfunktion lautet:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0.$$

Zeigen Sie, dass die Beschleunigung $\ddot{y} = g$ ist. Lsg: –

Lösung:
Um die Beschleunigung zu erhalten leiten wir die Funktion zweimal nach der Zeit ab. Die erste Ableitung ergibt:

$$\dot{y} = gt + v_0.$$

Dies entspricht der Geschwindigkeitfunktion $v(t)$. Leiten wir diese Funktion nochmals ab, dann erhalten wir:

$$\ddot{y} = \dot{v} = g.$$

Damit sehen wir, dass die Beschleunigung nicht anderes ist, als die zweite Ableitung der Ortsfunktion.

Es gibt in der Physik eine Grösse, welche in der Schulphysik leider kaum Beachtung bekommt, und zwar weil man mit ihr erst richtig etwas anfangen kann, wenn man ableiten kann. Da wir nun in der Lage sind eine Funktion abzuleiten, werden wir diese Grösse nun einführen.

Bevor wir dies tun soll noch auf einen kleinen aber feinen Unterschied aufmerksam gemacht werden. Nehmen wir an, wir haben eine Funktion $f(x,y)$ und möchten diese nur nach x ableiten, dann verwenden wir ein neues Symbol. Dieses Symbol leitet die Funktion nur partiell nach einer Variablen ab und nicht vollständig. Daher nennt man diese Ableitung auch *partielle* Ableitung. Es gilt:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Der Zusammenhang zur vollständigen resp. totalen Ableitung ist der folgende:

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Nun betrachten wir das folgende Beispiel zur sogenannten *Lagrange* Funktion L.

Bsp. x.
Die Lagrange Funktion L ist definiert als die Differenz zwischen der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V, also:

$$L(\dot{y}, y) = T - V.$$

Lassen sich von den neuen Buchstaben nicht irritieren. Es soll hier nur der gleiche Formalismus verwendet werden, wie er üblicherweise verwendet wird. Aus dem sogenannten *Prinzip der kleinsten Wirkung* folgt eine Differentialgleichung für die Lagrange Funktion. Diese Differentialgleichung heisst *Euler-Lagrange-Gleichung* und hat die folgende Form:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y}.$$

Wenden Sie diese Gleichung auf die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ und $V = mgy$ an. Was erhalten Sie? Weshalb erhalte Sie diese Lösung? Lsg: –

Lösung:
Nun die explizite Lagrange-Funktion lautet:

$$L(\dot{y}, y) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy.$$

Nun Bestimmen wir die einzelnen Ableitungen. Es gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) = m\ddot{y}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = mg.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$m\ddot{y} = mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = g.$$

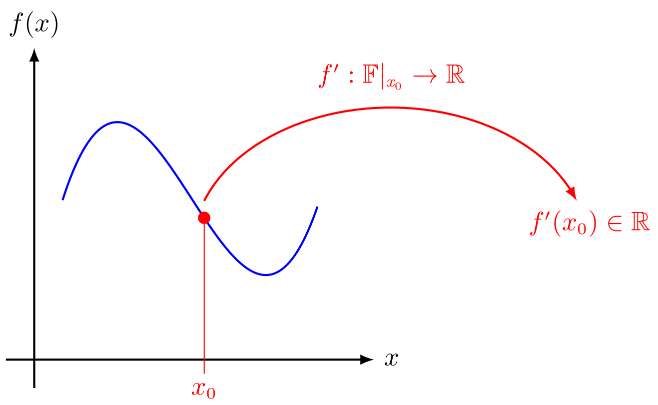
Wir erhalten die Bewegungsgleichung eines Körper im freien Fall. D. h. die Euler-Lagrange Gleichungen sind die Bewegungsgleichungen für eine Bestimmte kinetische Energie und eine bestimmte potentielle Energie.

Nun kommen wir zum nächsten Thema, der Integralrechnung. Nachdem es bei der Differentialrechnung um Veränderungen von Funktionen ging, geht es bei der Integralrechnung um Flächen unter der Funktionskurve.

4.1.2 Integralrechnung

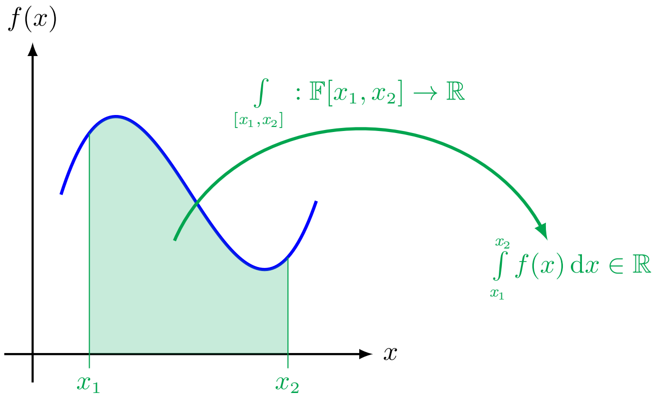
Wie bereits angedeutet, befasst sich die Integralrechnung anschaulich gesprochen mit dem Bestimmen von Flächen unter einer Funktion. So gesehen weist das Integral einer Funktion eine reelle Zahl zu. Das ist ja das gleiche wie die Ableitung, die weisst auch einer Funktion eine reelle Zahl zu! Dieser Einwand ist vollkommen berechtigt. Der Unterschied liegt daran, dass die Ableitung einer Funktion eine reelle Zahl an einem Punkt resp. Stelle zuordnet. Das Integral hingegen, ordnet jeder Funktion eine reelle Zahl für einen Bereich resp. Intervall zu.

Bevor wir die Situation beim Integral betrachten, schauen wir uns nochmals die Ableitung an und versuchen sie ganz allgemein zu definieren. Betrachen wir dies dazu anschaulich. Sei eine beliebige Funktion $f(x) \in \mathbb{F}$, wobei $\mathbb{F}$ die Menge aller reellen Funktionen ist, dann gilt für die Ableitung:

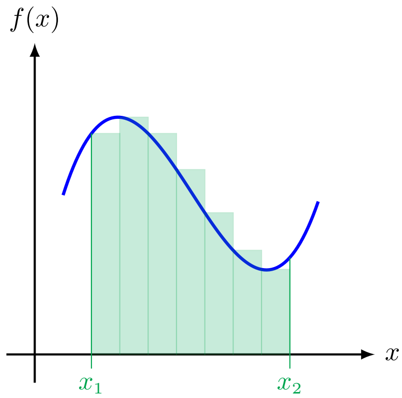


Eine Möglichkeit einer solchen Abbildung wäre natürlich der Funktionswert an dieser Stelle selbst. Doch es ist wohl klar, dass dies nicht besonders interessant ist, da dies bereits durch die Funktion selbst erfüllt wird. Eine andere Möglichkeit, welche auf der Hand liegt, ist die Steigung der Funktion an diesem Punkt.

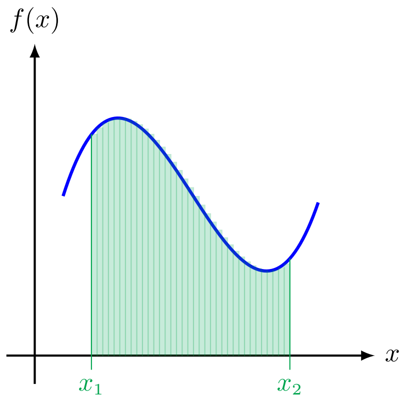
Ganz analog soll nun das Integral eingeführt werden. Wie bereits erwähnt, ist das Integral nicht für einem bestimmten Punkt definiert, sondern für ein Intervall. Das sieht also wie folgt aus:



Auch hier gibt es bestimmte noch andere Möglichkeiten diese Abbildung zu definieren. Doch da diese Abbildung für die Funktion eindeutig sein soll, reduzieren sich die Möglichkeiten stark und eine sinnvoll ist die Fläche unter der Kurve. Doch wie berechnet man die Fläche unter einer Kurve? Dazu teilen wir die Fläche in kleine Rechtecke auf, dies sieht dan für die obere Funktion wie folgt aus:



Es scheint offensichtlich, dass wenn man die Breiten schmaler macht, dass die Summe der Rechtecksflächen näher an das Integral, also der Fläche unter der Kurve kommt. In der folgenden Graphik sind die Breiten nur noch einen Fünftel so breit.



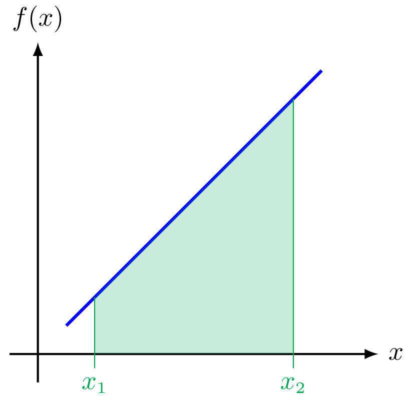
Damit ist klar, dass die Fläche unter der Kurve erreicht wird, wenn man die Breiten unendlich klein macht. Damit können wir also das Integral wie folgt definieren:

Def. 16: *(Integral) Das Integral* $\int_{[x_1,x_2]}$ *einer Funktion* $f(x) \in \mathbb{F}$ *ist definiert als:*

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$$

mit $\Delta x = \frac{x_n - x_1}{n}$ *die Breite der Rechtecke ist.*

Versuchen wir diese Definition gleich anzuwenden und berechnen wir damit das Integral für eine lineare Funktion $f(x) = x$. Bei einer linearen Funktion wissen wir auch bereits was herauskommen sollte:



Die Fläche erhält man direkt mit der Trapezformel, daher müsste das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} x \,\mathrm{d}x = \frac{x_2 + x_1}{2} \cdot (x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Nun versuchen wir dies mit der Definition zu berechnen:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} x \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} [x_1\Delta x + (x_1 + \Delta x) \cdot \Delta x + (x_1 + 2\Delta x) \cdot \Delta x + ... + (x_1 + (n-1)\Delta x) \cdot \Delta x]\end{aligned}$$

Wenn wir uns diesen Term etwas genauer anschauen, dann sehen wir, dass der Term $x_1 \Delta x$ n-Mal vorkommt. Der zweite Terme, der mehrfach vorkommt, ist $(\Delta x)^2$. Dieser kommt $(n-1)$-Mal vor, jedoch in aufsteigender Form. Damit erhalten wir: $\frac{1}{2}n(n-1)(\Delta x)^2$. Somit vereinfacht sich diese Summe zu:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} x \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \left[n x_1 \Delta x + \frac{1}{2}n(n-1)(\Delta x)^2\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[n x_1 \frac{x_2 - x_1}{n} + \frac{1}{2}n(n-1)\left(\frac{x_2 - x_1}{n}\right)^2\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[x_1 x_2 - x_1^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2)\right]\end{aligned}$$

Nun bilden wir den Grenzwert und erhalten, da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist,

$$\int_{x_1}^{x_2} x \,\mathrm{d}x = x_1 x_2 - x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2) = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Damit fassen wir zusammen, wobei wir die folgende Notation verwenden:

$$f(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = f(x_2) - f(x_1).$$

Der senkrechte Strich heisst, dass man die Funktion an den zwei Punkten x_2 und x_1 auswertet und diese zwei Werte voneinander abzieht, wobei der Untere vom Oberen abgezogen wird. Somit lautet das erste Integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Die Funktion ohne dass man sie an den Grenzen auswertet, nennt man unbestimmtes Integral, es gilt:

$$\int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + c.$$

Es existiert also eine Abbildung - genannte Integral - die eine Funktion $x \to \frac{1}{2}x^2$ abbildet, vergessen wir mal die Konstante c. Nun könnte man sich doch fragen, ob es auch eine Abbildung gibt, die von $\frac{1}{2}x^2 \to x$ führt und damit die inverse Abbildung der Integration wäre. Natürlich gibt es diese. Es ist die Ableitung! Damit können wir auf einen Schlag alle Potenzfunktionen integrieren, es gilt nämlich:

$$\boxed{\int x^n \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c}$$

Bsp. xi.
Zeigen Sie mithilfe der Definition, dass die Formel für Potenzfunktionen für den Fall $n = 2$ stimmt, also:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3,$$

wobei $c = 0$ gesetzt wird. Lsg: –

Lösung:
Durch einsetzen in die Definition erhalten wir:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x.$$

Wir schreiben die Summe aus, dann sehen wir besser was sich verändert.

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left[x_1^2\Delta x + (x_1+\Delta x)^2 \cdot \Delta x + (x_1 + 2\Delta x)^2 \cdot \Delta x + ... + (x_1 + (n-1)\Delta x)^2 \cdot \Delta x\right].$$

Durch das Quadrat entstehen hier im Gegensatz zur linearen Funktion drei Terme. Der k-Term hat die Form:

$$x_1^2\Delta x + 2 \cdot k x_1 (\Delta x)^2 + k^2(\Delta x)^3.$$

Damit erhalten wir wieder n-Mal den Term $x_1^2\Delta x$. Den zweiten Term erhalten wir ebenfalls $(n-1)$-Mal, jedoch auch hier mit aufsteigendem k Wert, also $(n-1)n/2$. Der Faktor 2 kürzt sich mit dem Faktor 2 im Term. Der letzte Term erhalten wir $(n-1)$-Mal, damit müssen wir folgende Summe bestimmen:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Dies kann in praktisch allen mathematischen Nachschlagewerke gefunden werden und ist:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Setzen wir alles ein, dann erhalten wir:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left[n x_1^2 \Delta x + n(n-1)x_1(\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}(\Delta x)^3\right].$$

Durch ausschreiben von $\Delta x = (x_2 - x_1)/n$ erhalten wir für die rechte Seite:

$$\lim_{n\to\infty} \left[x_1^2(x_2 - x_1) + n(n-1)x_1 \frac{x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \frac{x_2^3 - 3x_2^2x_1 + 3x_2x_1^2 - x_1^3}{n^3}\right].$$

Dies ist natürlich äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} \left[x_1^2(x_2 - x_1) + (1 - 1/n)x_1(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2) + \frac{1}{6}(2 - 3/n + 1/n^2)(x_2^3 - 3x_2^2x_1 + 3x_2x_1^2 - x_1^3)\right].$$

Nun können wir den $\lim_{n\to\infty}$ bilden und alle Terme mit a/n^α gleich null setzen. Damit vereinfacht sich der Term zu:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 \,\mathrm{d}x = x_1^2(x_2 - x_1) + x_1(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2) + \frac{1}{3}(x_2^3 - 3x_2^2x_1 + 3x_2x_1^2 - x_1^3).$$

Durch Ausklammern erhalten wir:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 \,\mathrm{d}x = x_1^2x_2 - x_1^3 + x_1x_2^2 - 2x_1^2x_2 + x_1^3 + \frac{1}{3}x_2^3 - x_2^2x_1 + x_2x_1^2 - \frac{1}{3}x_1^3$$

und daher

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Wir haben weiter oben behauptet oder besser gesagt angedeutet, dass die Ableitung die inverse Abbildung der Integration ist. Die wird durch den Fundamentalsatz der Analysis deutlich:

Def. 17: *(Stammfunktion) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, so ist für alle $x_0 \in [a,b]$ die Integralfunktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$\boxed{F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t}$$

differenzierbar und eine Stammfunktion von f, d. h., es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Zu beachten ist, dass die Funktion F aufgrund der Existenz des Riemann-Integrals für stetige Funktionen an allen Stellen in $[a,b]$ definiert ist.

(Fundamentalsatz der Analysis) Dies war zuerst die Definition der Stammfunktion. Nun kommt der Fundamentalsatz der Analysis.

Satz 7: *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, dann gilt die Newton-Leibniz-Formel:*

$$\boxed{\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a).}$$

Da der Beweis nicht besonders schwierig ist, soll er dem Leser selbst überlassen werden.

Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Analysis, wobei sie am einfachsten mit der Definition des Integrals und der Definition der Ableitung arbeiten. Ob Sie das eine in das andere oder das andere in das eine einsetzen spielt hier keine Rolle, beides führt sehr schnell zum gewünschten Resultat.

Damit können wir nun viele Integrale bilden, sofern wir von der Funktion die Stammfunktion kennen oder anders gesagt, suchen wir das Integral einer Ableitung der Stammfunktion, dann kennen wir das Integral unmittelbar.

Es gibt aber noch drei weitere wichtige Gesetze, dass eine ist die Linearität, dann die Partielle Integration und schliesslich die Integration durch Substitution. Beginnen wir bei der Linearität:

Ges. 1: *(Linearität des Integrals) Sein $f(x)$ und $g(x)$ zwei reellwertige stetige Funktionen und seinen a und b zwei reelle Zahlen, dann gilt:*

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} [af(x) + bg(x)] \, \mathrm{d}x = a \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, \mathrm{d}x + b \int_{x_1}^{x_2} g(x) \, \mathrm{d}x.}$$

Aus der Definition wird klar, dass das Integral linear sein muss, da die Summe linear ist. Die zweite Regel ist nicht mehr ganz so naheliegen, es gilt:

Ges. 2: *(Partielle Integration) Seien $f'(x)$ und $g(x)$ zwei reellwertige stetige Funktionen im Interval $[x_1, x_2]$ dann gilt:*

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x.}$$

Dieses Gesetz folgt direkt aus dem Produktregel von Ableitungen, d. h.

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integriert man diese Gleichung, dann erhält man:

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x)g(x)]' \, \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Mit dem Fundamentalsatz der Analysis erhalten wir links:

$$f(x)g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x,$$

woraus die Behauptung unmittelbar durch Umstellen der Gleichung folgt. Das letzte Gesetz ist wohl das schwierigste und verlangt auch eine anschauliche Erklärung. Hier vorerst mal das Gesetz:

Ges. 3: *(Integration durch Substitution) Seien $f(x)$ und $g(t) = x$ zwei reellwertige stetige Funktionen im Interval $[x_1, x_2]$ dann gilt:*

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(x_1)}^{g^{-1}(x_2)} f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Zuerst schauen wir mal, wie diese rechte Seite zustande kommt. Dies ist formal relativ leicht einzusehen. Betrachten wir zunächst die Grenzen. Es ist klar, dass die Grenze $x_1 \to t_1$ und $x_2 \to t_2$ werden muss, damit gilt aber:

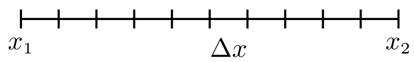
$$x_1 = g(t_1) \quad \text{und} \quad x_2 = g(t_2) \quad \Rightarrow \quad g^{-1}(x_1) = t_1 \quad \text{und} \quad g^{-1}(x_2) = t_2$$

und damit sind die Grenzen schon mal geklärt. Nun, dass aus $f(x)$ für $x = g(t) \Rightarrow f\big(g(t)\big)$ wird ist klar, bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$ ist. Dies ist jedoch auch klar, sofern man die Notation für $g'(t)$ ändert. Es gilt:

$$g'(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad g'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}g(t) = \mathrm{d}x.$$

Damit ist dieses Gesetz im Grunde gar kein Gesetz, sondern eine Identität, man schreibt einfach die linke Seite um.

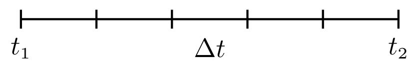
Nun möchten wir jedoch anschaulich verstehen, woher dieser Term $g'(t)\,\mathrm{d}t$ kommt. Betrachten wir dazu folgende Gerade:



Die Länge dieser Strecke lässt sich bestimmen aus der Anzahl Teilsegmente n (hier $n = 10$) multipliziert mit der Breite eines Segments Δx, d. h.

$$x_2 - x_1 = n\Delta x = 10\Delta x.$$

Durch eine sehr einfache Transformation ($x = \frac{1}{2}t$), welche die Randpunkte nicht verändern soll, d. h. $t_1 = x_1$ und $t_2 = x_2$ erhalten wir folgende Strecke:



Auch hier erhalten wir die Länge der Strecke natürlich durch die Anzahl Segmente $\tilde{n}$ (hier $\tilde{n} = 5$) multipliziert mit der Breite eines Segments Δt, also

$$t_2 - t_1 = \tilde{n}\Delta t = 5\Delta t.$$

Dieses Resultat muss jedoch, da die Endpunkte nicht verschoben worden sind, gleich sein wie oben, d. h.

$$\tilde{n}\Delta t \equiv n\Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{n}}{n}\Delta t = \Delta x.$$

Daran erkennen wir bereits, dass man nicht einfach die Abschnitte verändern kann, ohne dass man einen Faktor $\tilde{n}/n$ braucht. Dieser Faktor lässt sich in diesem Beispiel sehr einfach bestimmen. Er ist natürlich $\tilde{n}/n = 1/2$. Gleichzeitig erkennen wir, dass er dem Verhältnis aus den Abschnitten entspricht, also:

$$\frac{\tilde{n}}{n} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Bilden wir für unendlich kleine Abschnitte den Grenzwert für $\Delta t \to 0$ erhalten wir:

$$\frac{\tilde{n}}{n} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{n}}{n} = \frac{1}{2},$$

was direkt aus $x = \frac{1}{2}t$ durch Ableiten nach t folgt. Im Allgemeinen schreiben wir $x = g(t)$ und dann ist:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t),$$

was genau diesem zusätzlichem Term entspricht. Wenn wir zurück zur Definition des Integrals gehen, dann sehen wir, dass der wesentliche Term Δx ist und daher ist diese einfache Betrachtung im Grunde ausreichend, um dies zu beweisen.

Vielleicht noch eine letzte abschliessende Bemerkung zur Integration durch Substitution. Falls Sie immer noch nicht davon überzeugt sind, dass es den Term $g'(t)$ braucht, dann überlegen Sie mal folgendes. Nehmen wir an, dieser Term bräuchte man nicht, dann könnte man jedes Integral auf ein Integral von e^t überführen, durch die einfache Transformation $f(x) = e^t$. Da aber das Integral von e^t gleich e^t ist, könnte man zeigen, dass das Integral jeder Funktion gleich der Funktion ist. Anders ausgedrückt, das Integral wäre eine Identitätsabbildung und hätte also keinen Effekt, was natürlich nicht sein kann. Diese Bemerkung ist zwar kein Argument dafür wie der Term aussieht, wohl aber dass es einen Term braucht.

Vor dem Hintergrund der bisherigen Ausführungen sei an dieser Stelle ein Beispiel genannt, bei dem sämtliche Gesetze der Integration zur Anwendung kommen.

Bsp. xii.
Bestimmen Sie durch Substitution und anschliessender partieller Integration die Stammfunktion von:

$$\int \ln\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x,$$

und zeigen Sie anschliessend, dass die Umkehrung ebenfalls richtig ist. Lsg: $x \ln\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}x + c$

Lösung:
Die Substitution liegt auf der Hand: $u = \sqrt{x}$. Nun müssen wir $\mathrm{d}x$ bestimmen. Dafür berechnen wir die folgende Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u = 2u\,\mathrm{d}u.$$

Eingesetzt erhalten wir:

$$\int 2u \ln(u)\,\mathrm{d}u.$$

Dieser Term kann nun durch partielle Integration bestimmt werden. Es gilt:

$$\int \underbrace{2u}_{f'(u)} \cdot \underbrace{\ln(u)}_{g(u)}\,\mathrm{d}u = \Big[\underbrace{u^2}_{f(u)} \cdot \underbrace{\ln(u)}_{g(u)}\Big] - \int \underbrace{u^2}_{f(u)} \cdot \underbrace{\frac{1}{u}}_{g'(u)}\,\mathrm{d}u = u^2\ln(u) - \frac{1}{2}u^2 + c.$$

Durch die Rücksubstitution erhalten wir schliesslich, dass

$$\int \ln\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = x \ln\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}x + c.$$

Durch ableiten dieser Funktion erhält man natürlich wieder die ursprüngliche Funktion.

In einer Dimension scheint die Substitution relativ einfach zu sein und auch der Beweis ist recht einfach. In höherdimensionalen Räumen gestaltet sich die Situation hingegen als komplexer. In solchen Fällen wird nicht mehr von einer Substitution, sondern eher von einer Transformation, respektive Koordinatentransformation, gesprochen.

Satz 8: *(Allgemeine Koordinatentransformation) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $\Phi\colon \Omega \to \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Koordinatentransformation. Dann ist die Funktion f auf $\Phi(\Omega)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $x \mapsto f(\Phi(x)) \cdot |\det(D\Phi(x))|$ auf Ω integrierbar ist. In diesem Fall gilt:*

$$\boxed{\int_{\Phi(\Omega)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) \cdot |\det(D\Phi(x))|\,\mathrm{d}x.}$$

Dabei ist $D\Phi(x)$ die Jacobi-Matrix und $\det(D\Phi(x))$ die Determinante davon.

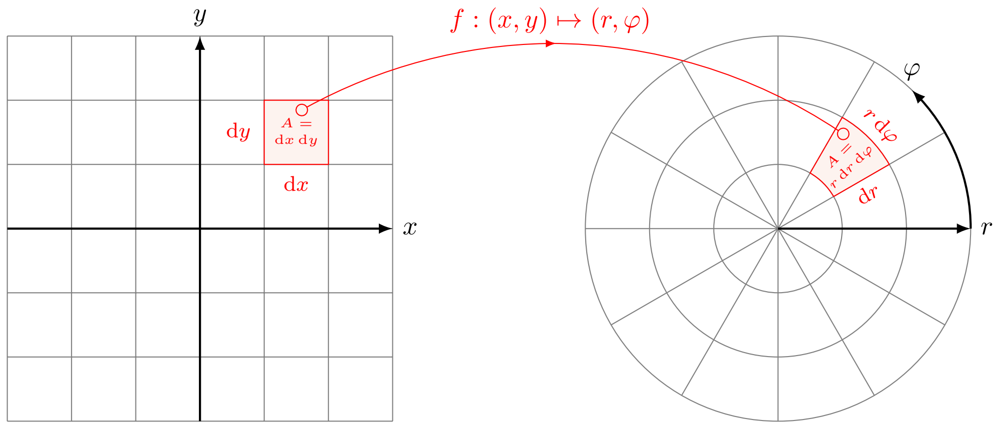
Die Gültigkeit dieser Aussage soll an dieser Stelle nicht nachgewiesen werden, gleichwohl wird die Plausibilität des Satzes durch die angeführten Beispiele untermauert. Bevor wir das tun, soll noch die Jacobi-Matrix definiert werden.

Def. 18: *(Jacobi-Matrix) Sei $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, deren Komponentenfunktionen mit $f_1, \dots, f_m$ bezeichnet seien und deren partielle Ableitungen alle existieren sollen. Für einen Raumpunkt x im Urbildraum $\mathbb{R}^n$ seien $x_1, \dots, x_n$ die jeweils zugehörigen Koordinaten. Dann ist für $a \in U$ die Jacobi-Matrix im Punkt a durch*

$$\boxed{Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}}$$

definiert.

An dieser Stelle ist es von essentieller Bedeutung, dass wir uns mit einigen Transformationen auseinandersetzen. Beginnen wir mit den Polarkoordinaten. Anschaulich sieht die Transformation einer Fläche wie folgt aus:



Geometrisch erkennt man sehr schön, dass $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \neq \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ ist. Da $\mathrm{d}\varphi$ keine Länge besitzt, benötigt man für die Länge der Seite noch den Faktor r. Dieser Faktor entspricht natürlich der Determinante der Jacobi-Matrix, was hier nun ebenfalls hergeleitet werden soll.

Die Transformationen lauten:

$$x = f_1(r,\varphi) = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = f_2(r,\varphi) = r\sin\varphi$$

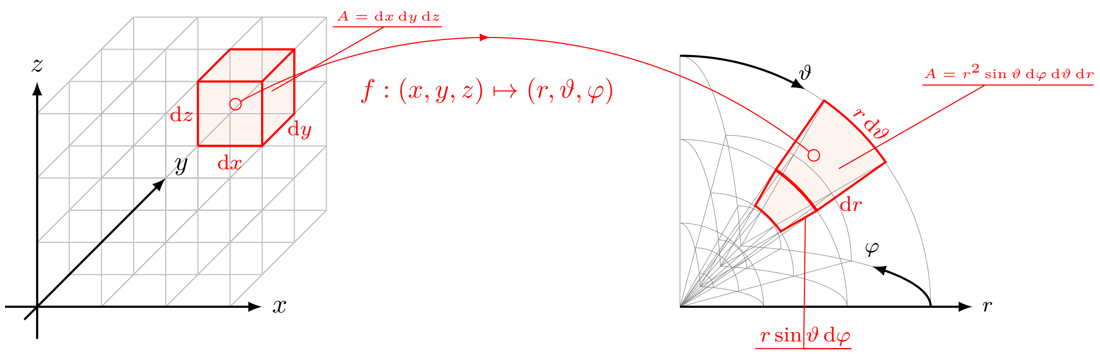
Damit ist die Jabobi-Matrix:

$$Df(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\varphi) & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(r,\varphi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\varphi) & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

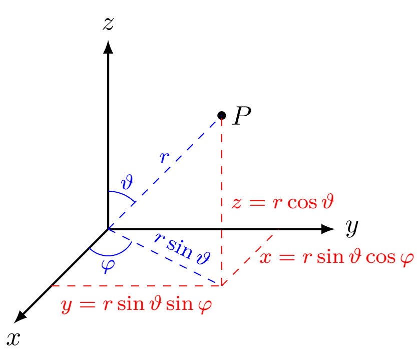
und damit ist die Determinante der Jacobi-Matrix:

$$|\det Df(r,\varphi)| = \left|\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\right| = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Analog soll es nun noch für die Kugelkoordinaten hergeleitet werden.



Obgleich in Kugelkoordinaten die einzelnen Teilstrecken ähnlich den in Polarkoordinaten sind, ist dennoch etwas Vorstellungskraft erforderlich, um den Term $r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$ zu erkennen. Der Sinus-Term wird durch die Senkung des Elements um den Winkel ϑ modifiziert, was eine Verkürzung des Radius zur Folge hat. Die folgende Darstellung veranschaulicht den Sachverhalt etwas besser:



Die Transformationen lauten damit:

$$x = f_1(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = f_2(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad \text{und} \quad z = f_3(r,\vartheta,\varphi) = r\cos\vartheta$$

Damit ist die Jabobi-Matrix:

$$Df(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta}(r,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(r,\vartheta,\varphi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta}(r,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}(r,\vartheta,\varphi) \\ \frac{\partial f_3}{\partial r}(r,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial f_3}{\partial \vartheta}(r,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi}(r,\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

und damit ist die Determinante der Jacobi-Matrix:

$$\begin{aligned} |\det Df(r,\vartheta,\varphi)| = \sin\vartheta\cos\varphi & \left| \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \right| \\ - \sin\vartheta\sin\varphi & \left| \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \right| \\ + \cos\vartheta & \left| \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix} \right| \\ &= \sin\vartheta\cos\varphi(r^2\sin^2\vartheta\cos\varphi) - \sin\vartheta\sin\varphi(-r^2\sin^2\vartheta\sin\varphi) \\ &\quad + \cos\vartheta\cdot(r^2\cos\vartheta\sin\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi) = r^2\sin\vartheta \end{aligned}$$

Natürlich gibt es noch mehr Koordinatensysteme und jedes hat seine eigene Transformation und damit verbunden seine Jacobi-Matrix. Doch an dieser Stelle sollten diese zwei Beispiele ausreichend sein, um das Vorgehen bei solchen Transformationen in Zukunft zu verstehen.

Nachdem wir nun sowohl die Integral- als auch die Differentialrechnung besprochen haben, ist es naheliegen, dass wir auch Gleichungen betrachten, welche Ableitungen beinhalten und durch Integration gelöst werden können. Solche Gleichungen nennt man Differentialgleichungen (DGL), wobei wir nur auf ein paar wenige Typ von DGL eingehen können.

4.2 Lineare Differentialgleichungen

Die am häufigsten verwendeten DGL in der Physik sind lineare DGL 1. oder 2. Ordnung. Da das Lösen von inhomogenen DGL in der Regel durch das Lösen von homogenen DGL erfolgt, werden wir uns hier mit dem Lösen von homogenen linearen DGL begnügen.

Bevor wir das tun, schauen wir uns noch ein paar nicht lineare DGL an, welche durch Separation der Variablen gelöst werden können. Diese sind in der Physik auch sehr häufig, doch bilden keine abgeschlossene Gruppe.

4.2.1 Separation der Variablen

Diese Methode ist nur dann möglich, wenn die Differentialgleichung eine ganz spezielle Form hat. Sie wird hier nur behandelt, weil DGL in der Physik immer wieder eine solche Form haben.

Ges. 4: *(Separation der Variablen) Eine Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar, sofern sie die folgende Form hat:*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\cdot g(y),}$$

sofern $y = y(x)$ die gesuchte Funktion ist.

Es ist leicht einzusehen, dass falls die Differentialgleichung diese Form hat, man sie schnell auf die folgende Form bringen kann:

$$\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Durch Integration auf beiden Seiten findet man schnell die Lösung, d. h.

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Eine ähnliche Methode wird bei partiellen Ableitungen verwendet, falls die verschiedenen Ableitungen unabhängig sind voneinander. Also zum Beispiel diese Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = kf(x,y).$$

Auch in diesem Fall lässt sich die Differentialgleichung separieren. Dies liegt daran, dass keine Mischterme wie $(\partial x \partial y)$ vorkommen. Dann führt der folgende Ansatz ebenfalls zum Ziel:

$$f(x,y) = g(x)h(y).$$

Setzt man diesen Ansatz in die DGL ein, erhält man:

$$h(y)\frac{\partial g(x)}{\partial x} + g(x)\frac{\partial h(y)}{\partial y} = kg(x)h(y).$$

Dividiert man diese Gleichung noch durch $f(x,y) = g(x)h(y)$ erhält man schliesslich:

$$\frac{1}{g(x)}\frac{\partial g(x)}{\partial x} + \frac{1}{h(y)}\frac{\partial h(y)}{\partial y} = k.$$

Was steht hier eigentlich? Es ist eine Summe aus zwei Funktionen, die eine ist nur von x und die andere nur von y abhängig. Stark vereinfacht sieht diese Gleichung wie folgt aus:

$$\tilde{g}(x) + \tilde{h}(y) = k,$$

d. h. die Summe aus zwei Funktionen für beliebige x und y ist konstant. Dies ist natürlich nur möglich, wenn sowohl $\tilde{g}(x)$ als auch $\tilde{h}(y)$ konstant sind. Damit können wir das System entkoppeln und lösen nur noch zwei eindimensionale Systeme:

$$\frac{1}{g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = k_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = k_1 g(x) \quad \text{und} \quad \frac{1}{h(y)}\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y} = k_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y} = k_2 h(y),$$

mit $k_1 + k_2 = k$ und beachten Sie, dass die partiellen Ableitungen durch Differentiale ausgetauscht wurden. Dies führt schnell auf die Lösungen:

$$g(x) = e^{k_1 x} + c_1 \quad \text{und} \quad h(y) = e^{k_2 y} + c_2 \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = e^{k_1 x + k_2 y} + c.$$

Natürlich funktioniert dies auch für höherer Ordnung, sofern es keine Mischterme gibt.

4.2.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Jede lineare homogene DGL 2. Ordnung kann auf die Form:

$$y'' + ay' + by = 0,$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $y = y(x)$ gebracht werden. Ohne Beweis nehmen wir an, dass der Ansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

jede solche DGL löst. Die Lösung dieses Problems, wird zeigen, dass dies tatsächlich der Fall ist, sofern wir $\lambda \in \mathbb{C}$ zulassen.

Durch einsetzen in die DGL erhalten wir:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0,$$

wobei $y' = \lambda e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ sind. Da $e^{\lambda x} \neq 0$ können wir die Gleichung mit $e^{-\lambda x}$ multiplizieren und erhalten das sogenannte *charakteristische Polynom* $\chi(\lambda)$. Es gilt:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Es sollte sehr leicht einzusehen sein, dass man für jede Ordnung einer linearen DGL ein solches charakteristisches Polynom erhält. Der Fundamentalsatz der Algebra sagt uns, dass jedes Polynom eine Lösung hat, sofern wir komplexe Lösungen zulassen. Damit hat auch die lineare DGL n-Ordnung immer eine Lösung und somit ist der Ansatz gerechtfertigt. Da wie wir wissen, die Lösungen von DGL immer eindeutig sind.

Nun Lösen wir diesen einen Fall. Die Lösung des charakteristischen Polynoms ist:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Daraus lässt sich die Lösungsbasis aufschreiben. Wir unterscheiden drei Fälle:

a. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

b. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = e^{\lambda x},\ y_2(x) = xe^{\lambda x}$

c. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Mit dieser Basis lässt sich die allgemeine Lösung der DGL aufschreiben als:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wenn die DGL ein Anfangswertproblem ist, dann lassen sich die Konstanten c_1, c_2 aus den Anfangsbedingungen $y(x = 0)$ und $y'(x_0)$ bestimmen. Betrachten wir gleich ein Beispiel dazu.

Bsp. xiii.
Betrachten wir den Fall einer gedämpften Schwingung. Die DGL dieser Schwingung kann wie folgt aufgeschrieben werden.

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser DGL. Lsg: –

Lösung:
Zuerst bestimmen wir das charakteristische Polynom $\chi(\lambda)$:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Die Lösungen lauten:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Wir definieren: $\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, falls $\delta^2 > \omega_0^2$ und sonst $i\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Wir müssen daher drei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\delta^2 < \omega_0^2$
Die Lösungen von $\chi(\lambda)$ lauten:

$$\lambda_1 = -\delta + i\omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$$

und damit ist die Lösungsbasis:

$$y_1(t) = e^{-\delta t}\cos(\omega t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = e^{-\delta t}\sin(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Fall 2: $\delta^2 = \omega_0^2$
Die Lösungen von $\chi(\lambda)$ lauten:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$$

und damit ist die Lösungsbasis:

$$y_1(t) = e^{-\delta t} \quad \text{und} \quad y_2(t) = te^{-\delta t}.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Fall 3: $\delta^2 > \omega_0^2$
Die Lösungen von $\chi(\lambda)$ lauten:

$$\lambda_1 = -\delta + \omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\delta - \omega$$

und damit ist die Lösungsbasis:

$$y_1(t) = e^{-(\delta - \omega)t} \quad \text{und} \quad y_2(t) = e^{-(\delta + \omega)t}.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Beachten Sie für $\delta = 0$ haben wir den ungedämpften Fall, d. h.

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

und damit ist die Lösungsbasis:

$$y_1(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = \sin(\omega_0 t).$$

Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Im Folgenden werden wir kurz auf die Vektoranalysis eingehen. Sie ist quasi eine Verschmelzung der Vektoren aus der Geometrie mit den Funktionen aus der Analysis.

4.3 Vektoranalysis

Der Titel Vektoranalysis verspricht mehr, als effektiv gehalten werden kann. Es wird hier lediglich gezeigt, was ein Vektorfeld ist und welche Operationen für ein solches Feld wichtig sind. Um den Unterschied zwischen Funktionen und Vektorfelder klarer zu verstehen, hilft es, wenn man sich zuerst ein Skalarfeld anschaut.

4.3.1 Skalarfeld

Ein Skalarfeld ordnet jedem Punkt im Raum einen einzigen Wert zu. Ein solches Beispiel wäre das Temperaturfeld in der Atmosphäre. Betrachten wir der Einfachheitshalber einen kartesischen Raum, dann wäre das Skalarfeld der Temperatur im Grunde eine Funktion, die abhängig ist von drei Ortsvariablen, also z. B.

$$T(x, y, z) = T_0 - kz,$$

wobei $T_0 = T(0, 0, 0)$ und $k \approx 9.76 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K/m}$ sind. Das ist ein vergleichsweise einfaches Skalarfeld. Es ist natürlich nicht immer gegeben, dass das Feld nur von einer Variablen abhängt. Ein allgemeineres Skalarfeld Φ könnte wie folgt aussehen:

$$\phi(x, y, z) = x^2yz + y^2z - 2yz^2.$$

Genaus so wie wir eine Funktion ableiten können wir auch ein Skalarfeld ableiten. Die Ableitung nennt sich dann Gradient und wird wie folgt geschrieben.

$$\operatorname{grad}(\phi) = \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass der Grandient eines Skalarfeldes ein Vektor ist. Genauer handelt es sich hier um ein Vektorfeld, da die Einträge ebenfalls variable sind. Insofern könnte man sagen, dass der Gradient in einer Dimension der Ableitung einer Funktion entspricht. Bevor wir das Vektorfeld genauer betrachten, berechnen wir noch fuer das angegebene Beispiel den Gradienten. Es gilt explizit:

$$\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} 2xyz \\ x^2z + 2yz - 2z^2 \\ x^2y + y^2 - 4yz \end{pmatrix}.$$

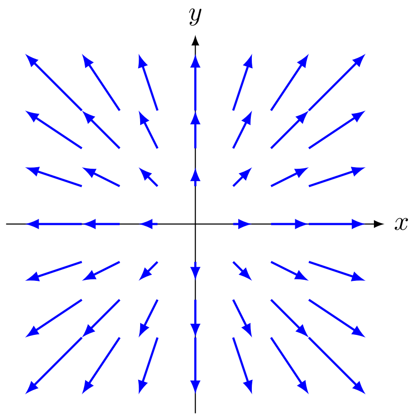
Dies ist ein Vektorfeld und ein eher kompliziertes.

4.3.2 Vektorfeld

Ein Vektorfeld ist, wie das Wort schon sagt, ein Feld, das - im Gegensatz zum Vektor - jedem Punkt im Raum einen ortsabhängigen Vektor zuordnet. Daraus entsteht dann ein sogenanntes Feld. Da Drei-Dimensionale Felder aufwendiger zu zeichnen sind, betrachten wir hier zwar Drei-Dimensionale Felder, doch wir setzen die z-Komponente gleich null. Betrachten wir zum Bespiel folgendes Feld:

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Vektorfeld $\vec{F}$ sieht wie folgt aus:



Nun auch von einem Vektorfeld kann man den Gradient nehmen. Tun wir dies für diese Funktion, dann erhalten wir:

$$\mathrm{grad}\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass zwischen dem Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ und dem Vektorfeld $\vec{F}$ kein Produkt steht, im Gegensatz zur Divergenz, welche wir gleich besprechen werden.

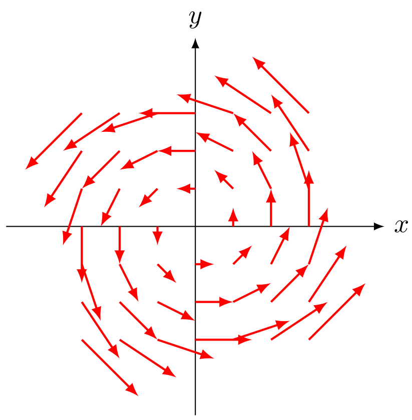
Die Divergenz eines Vektorfeldes gibt ein Skalar als Output und ist folgendermassen Definiert:

$$\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2.$$

Die Divergenz wird auch häufig mit der Quelle eines Feldes verglichen. Wieso dies so ist, sieht man auch an diesem Vektorfeld. Sucht man nach einer Ursache, so muss es eine im Ursprung geben. Da die Felder von dort aus in alle Richtungen ausströmen. Im Gegensatz dazu können wir auch dieses Feld betrachten:

$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es sieht wie folgt aus:



Der Gradient für dieses Vektorfeld ist:

$$\mathrm{grad}\vec{B} = \vec{\nabla}\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt das auch in der Darstellung. Für einen bestimmten Wert von y ändert sich die x Komponente des Vektorfeldes nicht. Analog für einen bestimmten x Wert.

Hier erkennt man, dass die Quelle dieses Feldes nicht im innern des Feldes sitzt. Demzufolge überrascht es nicht mehr, wenn wir die Divergenz bestimmen und diese verschwindet.

$$\mathrm{div}\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Wenn sowohl der Gradient als auch die Divergenz des Vektorfeldes verschwindet. Wann ist denn das Vektorfeld nicht null? Die Antwort liegt auf der Hand, nämlich die Rotation des Vektorfeldes. Es gilt nämlich:

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie diese Kurzform: $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$. Sie erkennen, am Vektorfeld, dass die Koordinaten vertauscht sind. Nun bilden wir die Rotation und schauen, was dabei herauskommt. Es gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, wie sich die Rotation bildet; sie vertauscht ebenfalls die Koordinaten. Daher ist es nicht überraschend, dass eine Vektorfeld wie es $\vec{F}$ eines ist, die Rotation null hat und ein solches wie $\vec{B}$ die Rotation ungleich null.

Abschliessen betrachten wir noch zwei wichtige Sätze, die diese Operatoren und Vektorfelder verknüpfen. Zum einen den Satz von Gauss und zum anderen den Satz von Stokes.

4.3.3 Satz von Gauss

Bevor wir uns dem Satz von Gauss widmen, schauen wir uns den Fundamentalsatz der Analysis an. Der besagt, dass das Integral für eine Funktion $f(x)$ von a nach b gleich ist, wie die Stammfunktion $F(x)$ mit $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ ausgewertet an den Grenzen a und b. Formal sieht dies wie folgt aus (vgl. Integralrechnung):

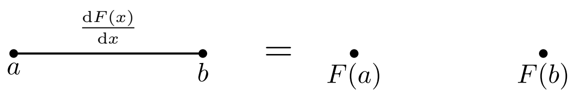
$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

oder noch ähnlicher zum Satz von Gauss:

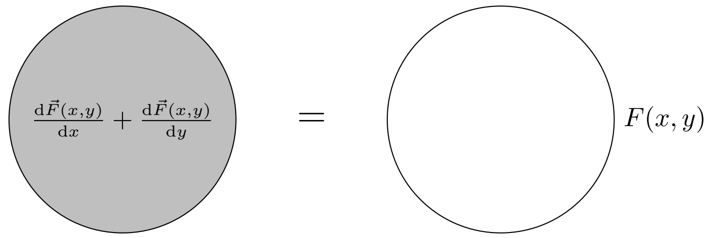
$$\int_{[\mathrm{a,b}]} \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_{\partial[\mathrm{a,b}]},$$

wobei $\int_{[\mathrm{a,b}]}$ nichts anderes bedeutet, als das Integral über den Bereich von a nach b und dies $\big|_{\partial[\mathrm{a,b}]}$ die Funktion ausgewertet auf dem Rand (∂) des Intervals ($[a,b]$).

Was bedeutet diese Gleichung geometrisch. Die linke Seite der Gleichung ist eine Aussage über eine Strecke und die rechte Seite nur über die Randpunkte dieser Strecke, d. h.



Da könnte man doch versucht sein, diese Aussage zu verallgemeinern, d. h. anstelle eines Intervalls könnte man eine Fläche nehmen und anstelle von zwei Punkte, welche den Rand des Intervals darstellen, könnte man den Rand der Fläche nehmen. Dies müsste für eine Kreisfläche wie folgt aussehen:



Formal sieht dies wie folgt aus, wobei wir die Fläche mit A und der Kreis, also den Rand der Fläche mit ∂A darstellen werden.

$$\int_A \left(\frac{\mathrm{d}\vec{F}(x,y)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\vec{F}(x,y)}{\mathrm{d}y} \right) \mathrm{d}(x,y) = \oint_{\partial \mathrm{A}} \vec{F}(x,y)\,\mathrm{d}\vec{s}$$

oder

$$\int_A \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x,y)\,\mathrm{d}\vec{A} = \oint_{\partial \mathrm{A}} \vec{F}(x,y)\,\mathrm{d}\vec{s}$$

Das ist bereits der Satz von Gauss in zwei Dimensionen. Nun kann man das ganze noch um eine weitere Dimension erhöhen und bekommt dann schliesslich die Version des Satzes von Gauss, welche am häufigsten verwendet wird. Allgemein gilt jedoch:

Satz 9: *(Satz von Gauss) Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit abschnittsweise glattem Rand $S = \partial V$, der Rand sei orientiert durch ein äusseres Normaleneinheitsfeld $\vec{n}$. Ferner sei das Vektorfeld $\vec{F}$ stetig differenzierbar auf einer offenen Menge U mit $V \subseteq U$. Dann gilt*

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, \mathrm{d}^{(n)} V = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}^{(n-1)} S \,.}$$

Für $n = 3$ erhalten wir den Satz von Gauss in drei Dimensionen und für $n = 2$ in zwei und für $n = 1$ in einer Dimension, was dem Fundamentalsatz der Analysis entspricht.

Bsp. xiv.
Ist $V := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon |\vec{x}| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$, dann gilt $S = \partial V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon |\vec{x}| = 1\}$ sowie $\vec{n}(\vec{x}) = \vec{x}$. Das Vektorfeld ist $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$. Zeigen Sie, dass der Satz von Gauss hier zutrifft.
Lsg: –

Lösung:
Für das Vektorfeld $\vec{F}$ gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = 3.$$

Es folgt

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, \mathrm{d}^3 V = \int_V 3 \, \mathrm{d}^3 V = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

sowie

$$\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}^2 S = \oint_S \vec{x} \cdot \vec{x} \, \mathrm{d}^2 S = \oint_S 1 \, \mathrm{d}^2 S = 4\pi \,.$$

Bei der Rechnung wurde verwendet, dass $\vec{x} \cdot \vec{x} = 1$ für alle $\vec{x} \in S$ gilt und dass die dreidimensionale Einheitskugel das Volumen $\frac{4}{3}\pi$ und die Oberfläche 4π haben.

Der Nutzen dieses Satzes liegt natürlich nicht darin, dass man zeigen kann, dass man gleiche Ergebnisse generieren kann, sondern, dass man das einfachere Integral wählen kann. Dennoch braucht es etwas Erfahrung, bis man erkennt, welches Integral einfacher ist. Aus diesem Grund werden wir noch einmal beide Seiten getrennt berechnen.

Bsp. xv.
Überprüfen Sie den Satz von Gauss für die Kugel mit Radius $R > 0$ in $\mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld:

$$\vec{w}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Lsg: $4\pi R^4$

Lösung:
Betrachten wir zuerst das Volumenintegral, d.h. $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{w} \, \mathrm{d}^3(x, y, z)$. Dafür müssen wir die Divergenz bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{w} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\dots} + \frac{x^2}{\sqrt{\dots}} + \sqrt{\dots} + \frac{y^2}{\sqrt{\dots}} + \sqrt{\dots} + \frac{z^2}{\sqrt{\dots}} \\ &= 3\sqrt{\dots} + \frac{1}{\sqrt{\dots}}(x^2 + y^2 + z^2) = 4\sqrt{\dots} = 4|\vec{x}|, \end{aligned}$$

wobei $|\vec{x}| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Aus Symmetriegründen ist es viel einfacher, wenn man dieses Integral in Kugelkoordinaten berechnet. Die Transformation lautet:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \text{ wobei } \quad r \in]0, R], \; \vartheta \in [0, \pi[\text{ und } \varphi \in [0, 2\pi]$$

somit erhalten wir:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{w}\ \mathrm{d}^3(x,y,z) = \int_V 4|\vec{x}|\ \mathrm{d}^3(x,y,z) = \int_{\Phi(V)} 4r\,|\det J_\Phi(r,\vartheta,\varphi)|\ \mathrm{d}^3(r,\vartheta,\varphi).$$

Wie bereits weiter oben gezeigt wurde, ist die Determinante der Jacobi-Matrix: $r^2\sin\vartheta$ und damit gilt:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{w}\ \mathrm{d}^3(x,y,z) = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 4r\,r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R 4r^3\underbrace{\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\theta\right)}_{-\cos\vartheta|_0^{\pi}\,=\,2}\mathrm{d}r = 4\pi R^4.$$

Jetzt kommen wir zur rechten Seite des Satzes von Gauss:

$$\int_{\partial V}\vec{w}\ \mathrm{d}\vec{\sigma}.$$

Wir verwenden die gleiche Transformation einfach für $r = R$: $\Phi_R(\vartheta,\varphi) = \Phi(R,\vartheta,\varphi)$, da wir nur noch über die Oberfläche (∂V) integrieren müssen. Also:

$$\int_{\partial V}\vec{w}\ \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\vec{w}(\Phi_R)\cdot\vec{n}\ |\det J_{\Phi_R}|\ \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{R\begin{pmatrix}R\sin\vartheta\cos\varphi\\ R\sin\vartheta\sin\varphi\\ R\cos\vartheta\end{pmatrix}}_{\vec{w}(\Phi_R)}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}}_{\vec{n}}R^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi,$$

da $\mathrm{d}\vec{\sigma} = \vec{n}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$ ist. Das Produkt der zwei Vektoren ist R und damit erhalten wir:

$$\int_{\partial V}\vec{w}\ \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^4\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi R^4,$$

was natürlich das gleiche Resultat ist, wie für die linke Seite.

5 Notationen

In diesem Abschnitt sollen einige wichtige Notationen eingeführt werden. Die erste Notation ist die Summennotation.

5.1 Summe und Produkt

Betrachten wir zuerst folgende Summe:

$$s_n = 1 + 2 + 3 + ... + n.$$

Anstelle, dass man jeden einzelnen Summand aufschreibt, kann man sich überlegen, ob es wohl eine Gesetzmässigkeit gibt, welche man stattdessen aufschreiben könnte. In diesem Fall ist es besonders einfach, die Summanden sind die natürlichen Zahlen in aufsteigender Form. Damit muss man ein Zeichen definieren, dass genau die natürlichen Zahlen abzählt. Ein solches Zeichen ist das Sigma $\sum$. Doch das Sigma alleine sagt noch nicht viel. Aus diesem Grund schreibt man unterhalb des Sigmas, welche Variable variiert wird und oberhalb bis wohin. Damit erhalten wir für die obere Summe:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} i.$$

Was ist nun, wenn die Summe nicht bis n geht, sondern bis unendlich, dann lautet die Summe:

$$s_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} i.$$

Natürlich kann man auch kompliziertere Summen in dieser Form aufschreiben, z. B. diese:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + ...$$

Mit dem Summenzeichen lautet diese Reihe:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Weitere Beispiele werden Sie im Mathematikunterricht behandeln.

Literaturverzeichnis

[1] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter, Juni 2012

[2] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem, Juni 2012

[3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935

[4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays* $B^0_{(s)} t\mu^+\mu^-$ *from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007

[5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron* $g-2$ *and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807

[6] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Steradiant, Juni 2012

[7] Aristoteles,

[8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590

[9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997

[10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955

[11] URL: http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html, September 2013

[12] URL: http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index

[13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011

[14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG

[15] URL: http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/, April 2013

[16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007

[17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG

[18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994

[19] URL: https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical

[20] Hans Kammer, Irma Mgeladze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG

[21] URL: https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal

[22] Wikipedia, URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid, August 2013

[23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010

[24] URL: http://www.schulserver.hessen.de/, Oktober 2013

[25] URL: http://www.leifiphysik.de, September 2013

[26] URL: http://photos.zoochat.com, Semptember 2013

[27] URL: http://www.lab-laborfachhandel.de, Oktober 2013

[28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,

[29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014

[30] URL: https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen, März 2024

[31] URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707

[32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press

[33] URL: http://ephex.phys.ethz.ch, Februar 2015

[34] URL: http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html, März 2015

[35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas opitscher Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962

[36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004

[37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018

[38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001

[39] URL: https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en, Juli 2018

[40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998

[41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869

[42] URL: http://www.tf.uni-kiel.de, März 2014

[43] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik), März 2014

[44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014

[45] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png, März 2014

[46] URL: http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscode.htm, August 2014

[47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494

[48] URL: http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm, Oktober 2014

[49] URL: http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm, Oktober 2014

[50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014

[51] URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639, Oktober 2017

[52] URL: https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen, Oktober 2017

[53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022

[54] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode, September 2022

[55] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg, November 2023

[56] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen, April 2024

[57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor

[58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.

[59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.

[60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

[61] Wikipedia, `https://de.wikipedia.org/wiki/Relativität_der_Gleichzeitigkeit`, August 2018

[62] URL: `http://static.a-z.ch`, März 2015

[63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925

[64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413

[65] URL: `http://www.peter-glowatzki.de`, Mai 2015

[66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941

[67] URL: `http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche`, Mai 2015

[68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)

[69] URL: `http://w3.pppl.gov/`, September 2015

[70] O. Höfling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wärme. 15. Auflage. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1994

[71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database`, April 2018

[72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)

[73] URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung`, April 2018

[74] URL: `http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...`, Juni 2012

[75] L. Susskind und G. Hrabovsky, The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics, Basic Books, 2014