Kapitel B

Mechanik der Massenpunkte

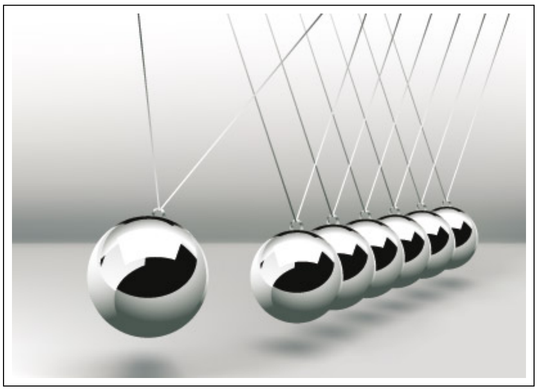
"Die Masse ist träge. Ein Gesetz der Physik.
Und der Psychologie.„
- Erhard Blanck

Die Mechanik befasst sich mit den Ursachen der Bewegung von Körpern sowie der Wirkung von Kräften auf diese Körper. In diesem ersten Kapitel werden die Körper als Massenpunkte betrachtet, was bedeutet, dass sie keine Ausdehnung haben. Dieses zentrale und wohl wichtigste Kapitel der Schulphysik ist in vier Unterkapitel unterteilt:

- die Kinematik,
- die Dynamik,
- Energie und Impuls sowie
- die Himmelsmechanik für Anfänger.

In den ersten drei Kapiteln werden grundlegende Konzepte und Begriffe eingeführt, die in allen nachfolgenden Kapiteln entweder erneut aufgegriffen oder in einem neuen Kontext betrachtet werden. Begriffe wie Kraft, Energie und Impuls sind universell und werden in der Mechanik eingeführt, weil sie in diesem Bereich am besten verstanden werden.

Das folgende Bild zeigt eines der Experimente, das wir am Ende dieses Kapitels vollständig verstehen werden: das sogenannte Newton-Pendel. Es ist vermutlich vielen bekannt, aber nur wenige wissen wirklich, wie es funktioniert.



Die Kapitel sollen in der erwähnten Reihenfolge erarbeitet werden, wobei zu beachten ist, dass die Inhalte der einzelnen Unterkapitel stark miteinander verknüpft sind. Dennoch werden sie aus rein didaktischen Überlegungen getrennt behandelt.

1 Kinematik

Lernziele

- Sie kennen den Unterschied zwischen einer kräftefreien und einer kräftebehafteten Bewegung und können Beispiele nennen.
- Sie verstehen den Begriff des Bezugssystems und wissen, wie ein Inertialsystem definiert ist.
- Sie erkennen die Tragweite des Uniformitätsgesetzes.
- Sie können Bahnkurven für verschiedene Bewegungen zeichnen.
- Sie sind vertraut mit den Definitionen von Geschwindigkeit und Beschleunigung und wissen, warum es sich dabei um Vektoren handelt.
- Sie können wesentliche Diagramme für gleichförmig geradlinige und gleichmässig beschleunigte Bewegungen erstellen.
- Sie beherrschen die Anwendung der drei kinematischen Formeln in verschiedenen Aufgaben.
- Sie sind in der Lage, die Formel für den freien Fall aus der allgemeinen Formel für beschleunigte Bewegungen abzuleiten.
- Sie verstehen den Unterschied zwischen vertikalem Wurf und freiem Fall.
- Sie erkennen, aus welchen Bewegungsarten der horizontale und der schiefe Wurf zusammengesetzt sind.
- Sie können unterschiedliche Aufgaben zu den Würfen lösen.

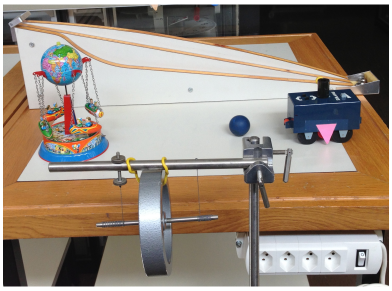
Die Kinematik ist die Lehre der Bewegung, wobei sie sich ohne Berücksichtigung der Ursache der Bewegung beschäftigt. Aus diesem Grund könnte man argumentieren, dass sie noch keine vollständige Physik ist, da in der Kinematik keine Gesetze die Bewegung bestimmen, sondern sie sich rein mathematisch aus zwei Grunddefinitionen ableitet.

In diesem Kapitel werden wir die unterschiedlichen *Bewegungsarten* und *Bewegungstypen* analysieren, wobei zwei davon vertieft: die *gleichförmig geradlinige* und die *gleichmässig beschleunigte* Bewegung. Danach können die unterschiedlichen Wurfbewegungen untersucht und formalisiert werden.

1.1 Bewegungsarten und Bezugssysteme

Wenn wir versuchen würden, eine abschliessende Liste der Vielfalt von Bewegungen im Alltag zusammenzustellen, wäre diese Liste sehr lang und dennoch höchstwahrscheinlich unvollständig. Die Vielfalt der Bewegungen im Alltag ist so umfangreich, dass selbst eine umfassende Liste nicht die gesamte Bandbreite der Bewegungen erfassen könnte.

Exp. 1: Verschiedene Bewegungsarten
Zuerst sollen einige Bewegungsarten demonstriert werden. Dabei sollte versucht werden, Unterschiede zwischen den Bewegungen zu identifizieren (siehe Abbildung).



Die Bewegungsform, die durch die Bewegung des Wagens dargestellt wird, ist die sogenannte *gleichförmig geradlinige Bewegung*. Mit dem Ball können mehrere Bewegungen demonstriert werden, zum Beispiel der *schiefe Wurf*. Das Karussell kann sowohl eine gleichförmige Kreisbewegung als auch eine beschleunigte Kreisbewegung zeigen. Gleiches gilt für die schiefen Ebenen: Zwei sind ungleichförmig beschleunigte Bewegungen und die dritte eine *gleichförmig beschleunigte Bewegung*. Zum Abschluss demonstriert das *Maxwell Rad*, dass Bewegungen auch kombiniert werden können.

Diese Vielfalt zwingt uns dazu, einen anderen Ansatz zu wählen. Wenn man sich alle möglichen Bewegungen etwas genauer ansieht und versucht, sie nach ihrer Ursache zu ordnen, erkennt man, dass im Wesentlichen zwei Bewegungsarten existieren:

- kräftefreie und
- kräftebehaftete Bewegungen.

1.1.1 Bewegungsarten

Diese beiden Bewegungsarten können kurz durch zwei beziehungsweise drei Bewegungstypen unterschieden werden. Im Unterricht werden wir nicht alle Typen behandeln können, da in gewissen Fällen die Mathematik der 5. und 6. Klasse notwendig ist.

Zum einen betrachten wir sogenannte kräftefreie Bewegungen, hier die Definition:

Def. 1: *(kräftefreie Bewegung) Eine kräftefreie Bewegung ist eine Bewegung, bei der sich weder der Betrag noch die Richtung der Geschwindigkeit ändert.*

Daraus erhalten wir nur zwei mögliche Bewegungen:

a. die gleichförmig geradlinige Bewegung, wie z. B ein Auto auf gerader Strecke mit konstanten Geschwindigkeit und

b. die Überlagerung von gleichförmigen geradlinigen Bewegungen, wie z. B. sich auf einem Förderband gleichförmig zu bewegen.

Die Frage, weshalb diese Bewegung eine so wichtige Rolle einnimmt, ist berechtigt. Eine befriedigende Antwort kann erst mit dem Verständnis der mehrdimensionalen Bewegungen gegeben werden. An dieser Stelle sei angemerkt, dass Bewegungen oft trotz ihrer Unregelmässigkeit zu einer gleichförmigen Bewegung vereinfacht werden, um schnell eine Vorstellung von ihnen zu bekommen.

Nun die Definition der kräftebehafteten Bewegung:

Def. 2: *(kräftebehaftete Bewegung) Eine kräftebehaftete Bewegung ist eine Bewegung, bei der sich der Betrag und/oder die Richtung der Geschwindigkeit ändert.*

Davon gibt es viele verschiedene Beispiele. Hier eine nicht abschliessende Liste:

a. die ungleichförmige Bewegung,

b. die Kreisbewegung sowie

c. die beschleunigte Bewegung oder den Spezialfall: die gleichmässig beschleunigte Bewegung, wie z. B. eine fallende Kugel.

Man fragt sich jedoch berechtigterweise, was mit den komplizierteren Bewegungen wie dem Flug einer Fliege oder dem Fall eines Blattes im Wind ist. Es lässt sich zeigen, dass diese aus den zuvor genannten Bewegungen zusammengesetzt sind und daher keiner speziellen Behandlung bedürfen.

Die Begriffe kräftefrei und kräftebehaftet könnten noch verwirrend oder unklar sein. Um sie richtig zu verstehen, muss das Kapitel über Dynamik (Kapitel B.2) behandelt werden. Kinematik hingegen beschäftigt sich mit der Bewegung von Körpern, ohne deren Ursache zu hinterfragen. Das Verständnis der Ursache ist die Aufgabe der Dynamik.

1.1.2 Bezugssystem

Ein Bezugssystem ist ein Ort, von dem aus man ein physikalisches Ereignis betrachtet. Dieser Ort kann beliebig gewählt werden und muss nicht in Ruhe sein. Im Gegenteil, oft werden bewegte Bezugssysteme gewählt. Die Wahl des Bezugssystems kann das Ergebnis verändern, wie das folgende Experiment zeigt.

Exp. 2: Wagen auf fahrendem Tisch
In diesem Versuch wird ein Wagen auf einem Tisch mit Rollen in Bewegung gesetzt. Dabei soll der Tisch mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten zum Wagen bewegt werden (vgl. Bild).

Abhängig von der Bewegung des Tisches kann der Wagen relativ zu einem ruhenden Beobachter stillstehen, sich schneller vorwärts bewegen oder sogar rückwärts fahren.

Dieser Versuch zeigt deutlich, dass es äusserst wichtig ist, dass man sich immer im Klaren ist, in welchem Bezugssystem man gerade rechnet.

Bsp. i.
Welche Bezugssysteme kennen Sie bei einem fahrenden Zug? Lsg: –

Lösung:

Von allen Bezugssystemen nimmt das *Inertialsystem* eine besondere Rolle ein.

Def. 3: *(Inertialsysteme) Inertialsysteme sind ruhende oder gleichförmig geradlinig bewegte Bezugssysteme.*

Beispiele von Inertialsysteme sind

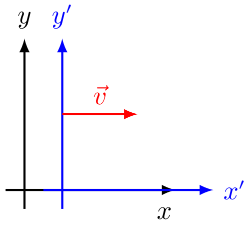
- das Schulzimmer resp. die Erde (sofern die Rotationsbewegung der Erde nicht stört; vgl. Sie das Video zum Faucaultschen Pendel);
- das Sonnensystem (sofern die Evolution der Erde um die Sonne nicht stört);
- die Fixsterne (sofern die Bewegung der Sterne nicht stört).

Die Liste verdeutlicht, dass im Grunde keine Inertialsysteme existieren, da eine beschleunigte Bewegung das System in der Regel beeinträchtigt. Nichtsdestotrotz formulieren wir damit eines der wichtigsten Gesetze der Physik.

Ges. 1: *(Uniformität) Die Gesetze der Physik haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.*

Bezugssysteme können häufig als Inertialsysteme betrachtet werden, da Störeffekte in der Regel gering oder kontrollierbar sind. Mögliche Störfälle, wie beispielsweise Beschleunigungen von Bezugssystemen, werden später genauer erläutert. In unseren Experimenten gilt das Schulzimmer nahezu immer als Inertialsystem. Doch wie kann man von einem Inertialsystem in ein anderes wechseln? Um dies zu verdeutlichen, soll das folgende Beispiel dienen.

Bsp. ii.
Wir gehen von zwei unterschiedlichen Inertialsystemen S mit den Koordinaten (x, y, t) und S' mit den Koordinaten (x', y', t') aus. Die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Inertialsystemen ist v und die Bewegung erfolgt entlang ihrer x-Achsen. Die Uhren in beiden Inertialsystemen sind synchronisiert und zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ überlappen sich beide Inertialsysteme (vgl. Abb.).

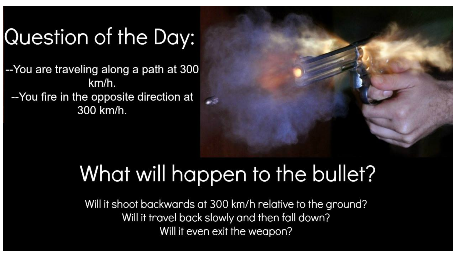


Welche Transformation muss zwischen x und x' sowie y und y' gelten, damit man von einem Koordinatensystem S ins andere S' wechseln kann? Lsg: –

Lösung:

Im Kapitel I.1 werden wir die Galilei-Transformationen näher betrachten und feststellen, dass sie die Physik nicht fehlerfrei beschreiben. Abschliessend betrachten wir das folgende Experiment, das noch mit den Galilei-Transformationen übereinstimmt.

Exp. 3: Schuss aus Kanone
Dieses Bild aus dem Forum *From Quarks to Quasars*, erschienen am 13.03.2014 auf Facebook, schildert die Ausgangslage sehr einfach und deutlich (vgl. Abb.).



Beantworten Sie folgende Frage: "What will happen to the bullet?".

Nach dem soeben Gelernten sollte die Antwort auf der Hand liegen: Die Kugel wird sich nicht von der Stelle bewegen. Doch stimmt das wirklich? Es handelt sich schliesslich "nur" um eine physikalische Theorie. Wieso sollte sich die Natur daran halten?

Dieser Film Mythbusters - Shot from Truck überprüft das Experiment und schiesst eine Kugel aus einem Lastwagen mit der gleichen Geschwindigkeit mit welcher der Lastwagen fährt.

Der Film zeigt auf eindrückliche Art und Weise, dass die Kugel tatsächlich *wie in einem Trickfilm* in der Luft stehen bleibt.

Mit dem erlangten Bewusstsein, dass eine Bewegung immer vom Bezugssystem abhängt, wenden wir uns nun den verschiedenen Bewegungstypen zu.

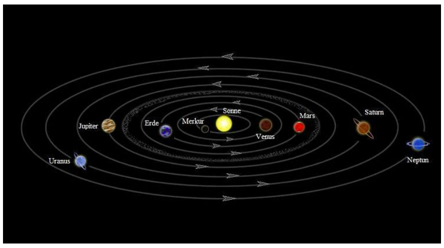
1.2 Bewegungstypen

In diesem Abschnitt werden zwei Bewegungstypen unterschieden: die gleichförmig geradlinige Bewegung und die gleichmässig beschleunigte Bewegung.

Bevor wir uns diesen Bewegungen und deren Beschreibung zuwenden, sollte der Begriff der Bahnkurve eingeführt werden. Dazu folgt die folgende Definition:

Def. 4: *(Bahnkurve) Die Bahnkurve ist die Gesamtheit aller Orte, an denen sich ein Objekt bei seiner Bewegung befindet.*

Anbei sind drei Kurven aus dem Alltag dargestellt. Von links nach rechts verfolgen wir die Bewegung eines Wasserstrahls, eines Kondensstreifens, den Flugzeuge bei besonderen Wetterbedingungen hinterlassen sowie die Bahnen der Planeten in unserem Sonnensystem.



Zur Veranschaulichung wird der Ort der Bewegung häufig auch als Funktion der Zeit dargestellt[1].

1.2.1 Gleichförmig geradlinige Bewegung (ggB)

Wie zuvor erwähnt, ist die gleichförmig geradlinige Bewegung eine Bewegung, bei der sich die Geschwindigkeit weder in Richtung noch Betrag ändert. Zum Beispiel ein Zug auf gerader Strecke, der mit gleichbleibender Geschwindigkeit fährt.

Es ist nun an der Zeit, die Geschwindigkeit zu definieren[2].

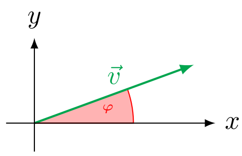
Def. 5: *(Geschwindigkeit) Die mittlere Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist die Ortsänderung $\Delta\vec{x}$ pro Zeitänderung Δt, d. h.*

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}}$$

Die Einheit ergibt sich direkt zu: $[v] = \mathrm{m/s}$.

Somit ist die Geschwindigkeit die Änderung[3] (Δ) der Position/Ortes in der Zeit. Hinzu kommt, dass die Geschwindigkeit ein Vektor (vgl. Kapitel M.2.4) ist und sowohl eine Richtung als auch einen Betrag hat. Betrachten wir zwei Beispiele im Rahmen dieses kurzen Exkurses über Vektoren.

Bsp. iii.
Bestimmen Sie für die folgende Geschwindigkeit $|\vec{v}| = v = 30\,\mathrm{m/s}$ die x- und y-Komponente der Geschwindigkeit, sofern der Winkel zwischen der Geschwindigkeit $\vec{v}$ und der Horizontalen 20° ist.



Damit würde ein Körper mit der Geschwindigkeit v_x in horizontaler und mit v_y in vertikaler Richtung sich bewegen.
Lsg: $v_\mathrm{x} \approx 28\,\mathrm{m/s}, v_\mathrm{y} \approx 10\,\mathrm{m/s}$.

---

[1] Mathematisch gesprochen, stellt die Bahnkurve eine Veranschaulichung der Bahn im reinen Ortsraum dar. Wohingegen die anderen Diagramme, häufig die Veränderung einer Grösse in Abhängigkeit der Zeit darstellen.

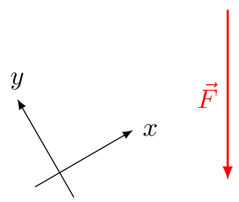
[2] Eine Definition ist eine mathematische Formel, welche keinem Naturphänomen entspringt. Eine Definition ist willkürlich oder anders gesagt: Es kann alles definieren werden, was man will! Was schränkt die Definitionsfreiheit ein? Nichts! Es zeigt sich jedoch, dass es sinnvolle und weniger sinnvolle Definitionen gibt, z. B. Definitionen die sich gegenseitig ausschliessen. Aus diesen und anderen Gründen versucht der Wissenschaftler die Anzahl der Definitionen so klein wie möglich zu halten.

[3] Das Zeichen Δ steht in der Regel für eine Änderung. Änderungen sind immer: *Zustand nachher minus Zustand vorher.*

Lösung:

Nun betrachten wir, wie ein Vektor in seine Komponenten zerlegt werden kann, während das Koordinatensystem bewusst nicht in horizontaler und vertikaler Ausrichtung gewählt wird.

Bsp. iv.
Betrachten Sie den folgenden Vektor und teilen Ihn gemäss dem gegebenen Koordinatensystem auf.



Beachten Sie, dass das Koordinatensystem irgendwo gezeichnet werden kann! Das einzige was zählt ist die Orientierung.
Lsg: –

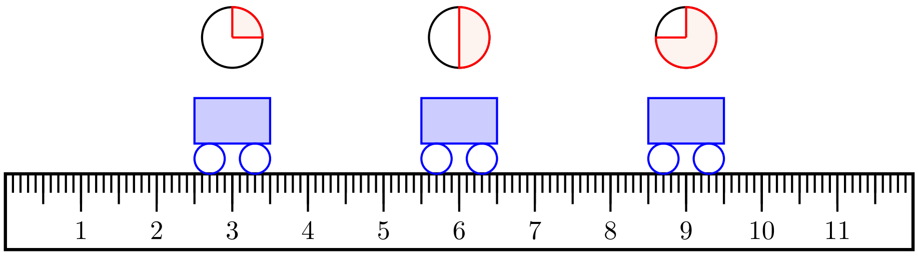
Lösung:

Solange man sich nur in einer Richtung (genauer: einer Dimension) bewegt, spielt der Vektorcharakter der Geschwindigkeit keine Rolle. Wenn immer möglich, werden wir versuchen auf den Vektorcharakter zu verzichten und nur eine Richtung betrachten.

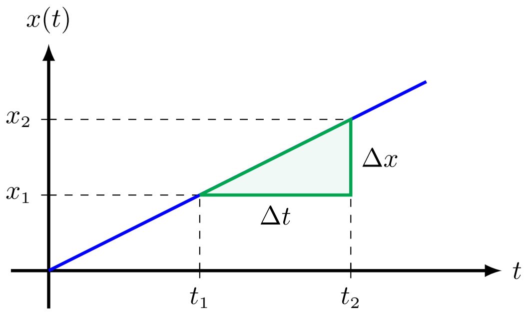
Bsp. v.
Der IC von Zürich nach Bern braucht für die Strecke von 117 km knapp 55 min. Bestimmen Sie seine mittlere Geschwindigkeit.
Lsg: $v \approx 130\,\mathrm{km/h}$

Lösung:

Betrachten wir die gleichförmige geradlinige Bewegung genauer. Was bedeutet es, wenn die Geschwindigkeit konstant ist? Anhand der Definition wird deutlich, dass das Verhältnis von zurückgelegter Strecke und Zeitabschnitt immer gleich ist. Der Körper legt immer dieselbe Strecke in derselben Zeit zurück. Das sieht anschaulich wie folgt aus:



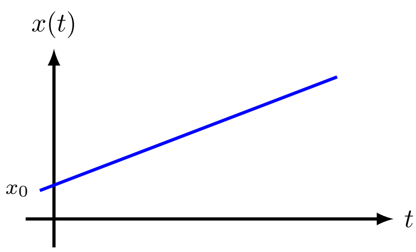
In der Mathematik ist es üblich, ein Koordinatensystem zu verwenden, um Sachverhalte darzustellen. Dabei werden die Achsen typischerweise mit x für die Abszisse und y für die Ordinate beschriftet. In der Physik ist das jedoch kaum der Fall. Stattdessen verwenden wir die physikalischen Grössen als Achsenbeschriftung, also in diesem Fall t für die Zeit und x für den Ort. Auf diese Weise sieht das Diagramm, auch bekannt als x-t-Diagramm, wie folgt aus.



Die Steigung dieser Geraden entspricht exakt der Definition der Geschwindigkeit. Gemäss der mathematischen Definition ist die Steigung m einer Kurve durch folgende Formel definiert:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 t.$$

Beachten Sie, dass hier v_0 eine Abkürzung für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Grafisch betrachtet handelt es sich bei der gleichförmig geradlinigen Bewegung um eine lineare Funktion. Die Steigung dieser Funktion gibt die Geschwindigkeit an. Je steiler die Kurve, desto höher ist somit die Geschwindigkeit. Wichtig zu erwähnen ist, dass der Startpunkt der Bewegung nicht zwangsläufig im Koordinatenursprung liegen muss, was zu folgendem Ergebnis führt:

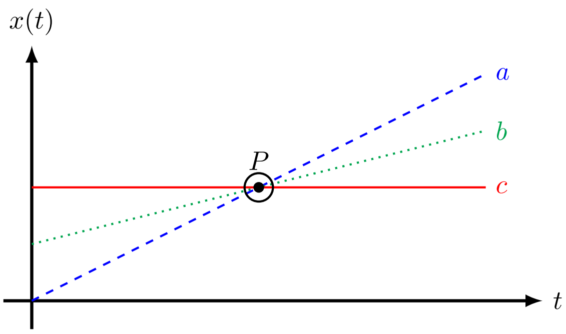


Für die Kurve gilt die folgende Gleichung:

$$\boxed{x(t) = v_0 t + x_0}$$

Betrachten wir dazu folgendes Beispiel zur gleichförmig geradlinigen Bewegung.

Bsp. vi.
Betrachten Sie diese drei Kurven a, b und c sowie den Punkt P.



Jede dieser Kurven beschreibt eine Bewegung im Raum. Beschreiben Sie kurz diese drei Bewegungen und inwiefern sie sich unterscheiden. Was passiert am Punkt P? Lsg: –

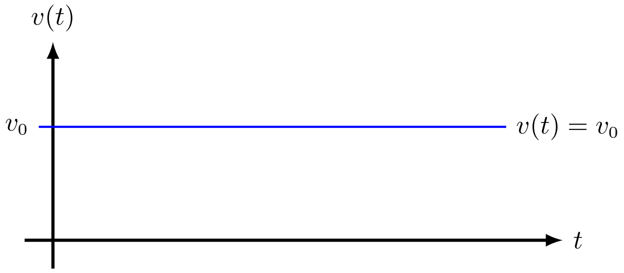
Lösung:

Betrachten wir ein Beispiel, in dem wir rechnen müssen. Wir werden versuchen, den zuvor eingeführten Formalismus möglichst genau anzuwenden.

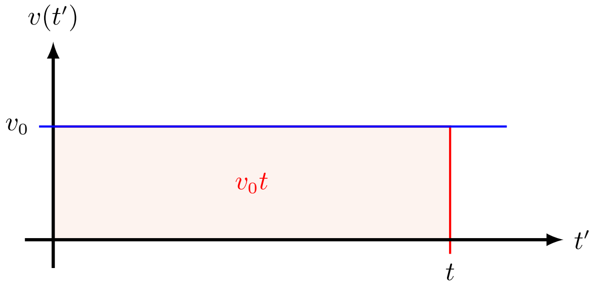
Bsp. vii.
Ein Auto fährt mit der konstanten Geschwindigkeit von $13.9\,\mathrm{m/s}$ auf einer geraden Strasse. Zum Zeitpunkt $t = 0$ war es am Ort $x = 0$. Welche Strecke hat es a) nach $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, b) nach $t_2 = 2$ min und c) $t_3 = 2\,\mathrm{h}$ zurückgelegt?
Lsg: a) $x_1 \approx 140\,\mathrm{m}$, b) $x_2 \approx 1700\,\mathrm{m}$, c) $x_2 \approx 100\,\mathrm{km}$

Lösung:

Es ist von Interesse zu wissen, wie sich die Geschwindigkeit im Laufe der Zeit verändert. Für eine gleichförmig geradlinige Bewegung ist es besonders einfach. Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm oder kurz v-t-Diagramm für den Zug nach Bern sieht wie folgt aus.



In vielen physikalischen Diagrammen ist nicht nur die Kurve von Interesse,[4], sondern auch die Bedeutung der Fläche unter dieser Kurve. Besonders einfach ist die Bestimmung der roten Fläche unter der Kurve in diesem Fall!



Die zurückgelegte Strecke lässt sich im vt-Diagramm durch die Fläche unter der Kurve darstellen. Diese Aussage ist von grosser Bedeutung und sollte verinnerlicht werden, da sie bei der beschleunigten Bewegung äusserst hilfreich ist.

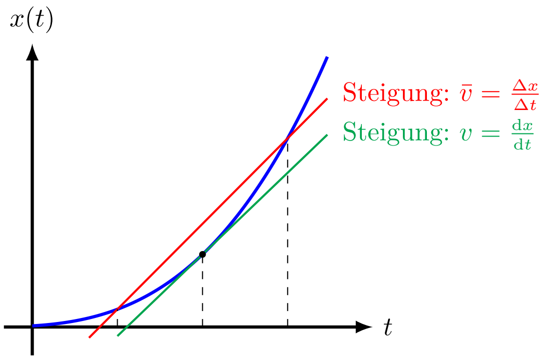
Diese Darstellung suggeriert, dass der Zug immer die gleiche Geschwindigkeit hat. Ist das tatsächlich der Fall? Und wenn ja, wann erreicht er diese Geschwindigkeit? Einige Leser werden vielleicht überrascht sein, zu erfahren, dass der Zug diese Geschwindigkeit praktisch nie erreicht. Wie können wir also die aktuelle oder momentane Geschwindigkeit messen? Die Antwort liegt auf der Hand. Die Zeitintervalle müssen in immer kürzeren Schritten gewählt werden, bis sie schliesslich *unendlich* kurz sind. Reduzieren wir das Zeitintervall Δt konsequent immer weiter[5], schreiben wir $\mathrm{d}t$, analog dazu $\mathrm{d}\vec{x}$.

Def. 6: *(momentane Geschwindigkeit) Die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist definiert als*

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t},}$$

wobei $\mathrm{d}\vec{x}$ die unendlich kleine (infinitesimal) Orts- und $\mathrm{d}t$ Zeitänderungen sind.

Wir können die momentane Geschwindigkeit auch visuell von der mittleren Geschwindigkeit klar unterscheiden, wenn wir uns die abgebildete Grafik ansehen.

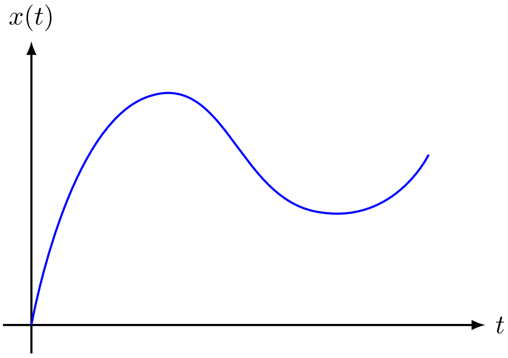


Die durchschnittliche Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Sekanten und die momentane Geschwindigkeit der Steigung der Tangente. Man erkennt, dass die mittlere Geschwindigkeit zwei Punkte und die Momente nur einen Punkt benötigen, um die Steigung zu bestimmen.

[4] Wir sprechen allgemein immer von Kurven, auch wenn die Kurven Geraden sind.

[5] Präzis wird dieser Sachverhalt wie folgt geschrieben (vgl. Mathe: Sem. 5.2): $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

Bsp. viii.
Im folgenden Ort-Zeit-Diagramm ist eine Bewegung eingezeichnet, welche nicht gleichförmig geradlinig ist und auch nicht gleichmässig beschleunigt. Es ist eine ganz allgemeine Bewegung (vgl. Abb.).



Markieren Sie alle Punkte, an denen der Körper keine Geschwindigkeit hat, d. h. die Steigung der Tangente Null ist. Lsg: –

Lösung:

In der folgenden Tabelle sind einige Geschwindigkeitswerte aufgelistet, von sehr langsam bis zur maximal möglichen Geschwindigkeit.

Beschreibung	Geschwindigkeit
Haarwuchs beim Menschen	7 mm/Mt
Schnecke	2 mm/s
Regentropfen	11 – 14 km/h
Schnellzug	160 km/h
Verkehrsflugzeug	900 km/h
Schall in der Luft	340 m/s
Gewehrgeschoss	3 000 km/h
Fluchtgeschwindigkeit von der Erde	40 000 km/h
Erde um die Sonne	110 000 km/h
⋮	
Lichtgeschwindigkeit	300 000 km/s

Wenn gleichmässige geradlinige Bewegungen überlagert werden, muss darauf geachtet werden, ob sich die Geschwindigkeiten addieren (gleichgerichtet) oder subtrahieren (entgegengesetzt gerichtet). Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir das folgende Beispiel.

Bsp. ix.
Das Förderband am Flughafen wird in der Regel in die gleiche Richtung begangen, wie es sich bewegt. Nehmen wir an, dass Sie im Schritttempo, also mit etwa 1 m/s unterwegs sind und das Band etwas schneller, also 3 m/s. Welche Geschwindigkeit haben Sie auf dem Band? Lsg: –

Lösung:

An diesem Beispiel wird klar, dass die Frage nach dem Bezugssystem von Bedeutung ist. Im Folgenden lösen wir ein einfaches Beispiel zu dieser Bewegungsart.

Bsp. x.
Ein Zug fährt 30 min mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h und weitere 15 min mit einer Geschwindigkeit von 160 km/h. a) Wie weit kommt der Zug während der gesamten Zeit? b) Was ist seine durchschnittliche Geschwindigkeit während der gesamten Fahrt? Lsg: a) $x_{\text{ges}} \approx 90\,\text{km}$, b) $\bar{v} \approx 120\,\text{km/h}$

Lösung:

Damit verlassen wir vorerst die gleichförmig geradlinige Bewegung und wechseln zur beschleunigten Bewegung.

1.2.2 Gleichmässig beschleunigte Bewegung (gbB)

Eine gleichmässig beschleunigte Bewegung ist eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit nicht konstant ist, sondern die Beschleunigung gleichmässig (also konstant) ändert. Dazu gehören zum Beispiel der freie Fall, die Bewegung auf der schiefen Ebene, das Karussell und weitere Beispiele.

Bevor wir uns mit den verschiedenen Bewegungen befassen, müssen wir zunächst die Definition der Beschleunigung klären.

Def. 7: *(Beschleunigung) Die mittlere (resp. momentane) Beschleunigung $\vec{a}$ ist definiert als die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$ pro Zeit Δt, d. h.*

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \left(\textit{resp.}\ \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)}$$

Die Einheit ist somit: $[a] = \text{m/s}^2$.

Die Beschleunigung ist also die Änderung (Δ) der Geschwindigkeit pro Zeit. Dazu betrachten wir folgendes sehr einfaches Beispiel:

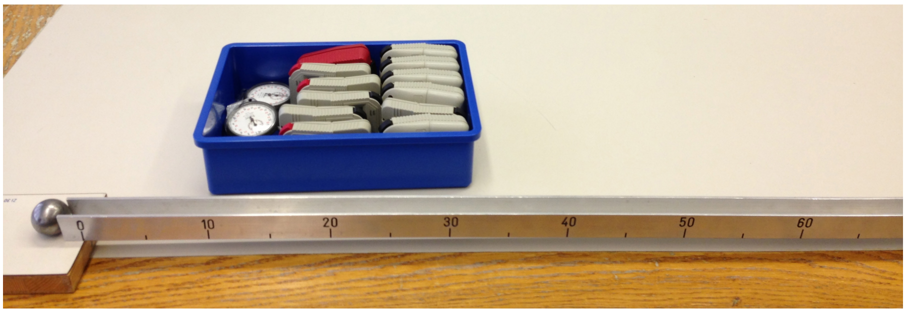
Bsp. xi.
Bei der Einfahrt auf die Autobahn beschleunigt ein Auto von 50 km/h auf 120 km/h in 10 s und bei der Ausfahrt von 100 km/h auf 60 km/h in 2.0 s. Bestimmen Sie die Beschleunigung a) bei der Einfahrt und b) bei der Ausfahrt. Lsg: a) $a_1 \approx 1.9\,\text{m/s}^2$, b) $a_2 \approx -5.6\,\text{m/s}^2$

Lösung:

Wir erkennen also, dass die Beschleunigung auch negativ sein kann, zum Beispiel wenn wir bremsen oder die Geschwindigkeit abnimmt. Wenn man sich an die Konvention der Veränderung (*nachher minus vorher*) hält, ergibt sich das Vorzeichen automatisch korrekt.

Für ein besseres Verständnis der graphischen Darstellung der beschleunigten Bewegung dient das folgende einfache Experiment.

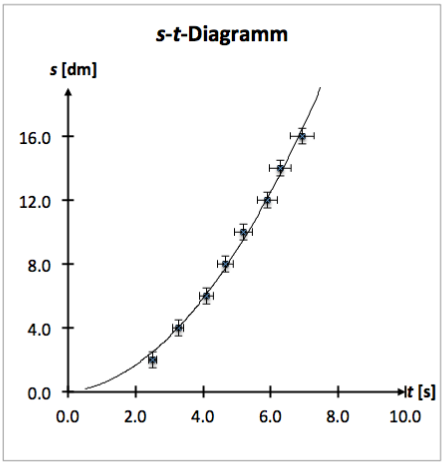
Exp. 4: Beschleunigte Bewegung
Eine Kugel wird mehrmals auf einer schiefen Ebene mit geringem Neigungswinkel (siehe Abbildung) heruntergerollt, während die Zeit manuell gemessen wird.

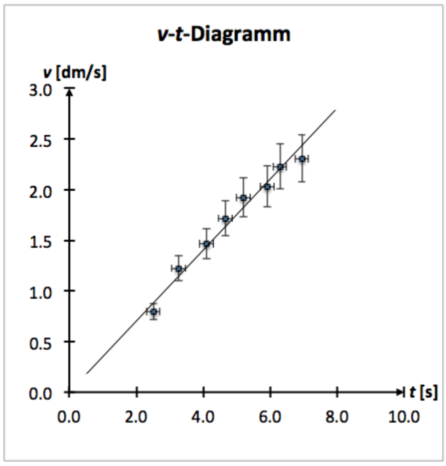


In der Google Sheets-Tabelle (BeschleunigteBewegung) sollten die Daten direkt eingetragen werden. Hier ist eine mögliche Datenvariante:

Experiment zur gleichmässig beschleunigten Bewegung

Strecke [dm]	Zeit1 [s]	Zeit2 [s]	Zeit3 [s]	Zeit4 [s]	Zeit5 [s]	Zeit6 [s]	Zeit7 [s]	Zeit8 [s]	Zeit9 [s]	Zeit10 [s]	Zeit [s]	Geschwindigkeit [dm/s]
2.0	2.5	2.4	2.3	2.6	2.7	2.6	2.5	2.4	2.5	2.6	2.5	0.8
4.0	3.3	3.2	3.1	3.0	3.5	3.4	3.3	3.4	3.3	3.2	3.3	1.2
6.0	4.1	4.2	4.3	4.1	4.0	4.1	3.9	4.2	4.1	4.0	4.1	1.5
8.0	4.7	4.6	4.5	4.8	4.9	4.5	4.4	4.7	4.8	4.7	4.7	1.7
10.0	5.2	5.1	5.2	5.3	5.1	5.2	5.4	5.0	5.2	5.3	5.2	1.9
12.0	5.9	5.8	5.7	5.9	6.0	6.1	5.9	6.2	5.7	5.9	5.9	2.0
14.0	6.3	6.2	6.1	6.5	6.6	6.2	6.3	6.4	6.2	6.1	6.3	2.2
16.0	6.9	7.0	7.1	6.8	6.7	6.9	7.0	6.8	7.2	7.0	6.9	2.3





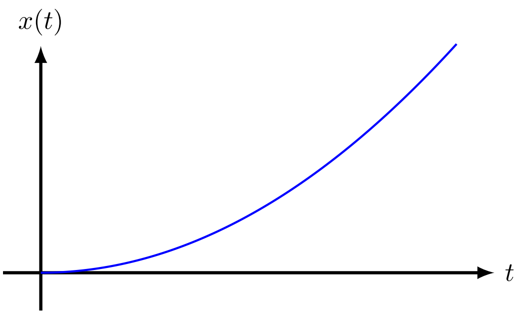
Das Diagramm zeigt deutlich, dass eine beschleunigte Bewegung nicht mehr linear verläuft. Der Fit bzw. die Leitkurve entspricht einer quadratischen Funktion. Um eindeutig zu bestimmen, dass es sich tatsächlich um eine quadratische Funktion handelt, muss man folgenden Quotienten berechnen:

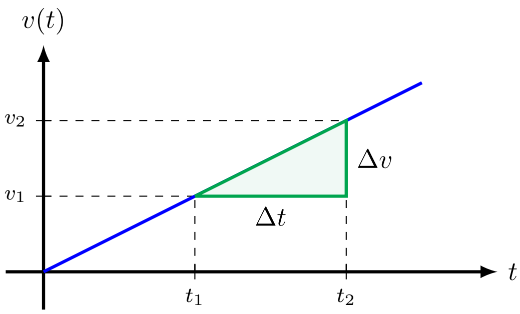
$$\frac{x}{t^2} = \text{konst.}$$

Falls dieser Wert tatsächlich konstant bleiben, ergibt sich eine quadratische Funktion.

Im Gegenzug zeigt sich, dass eine lineare Funktion im v-t-Diagramm dargestellt werden kann. Diese Erkenntnis soll als Anstoss für die nachfolgenden allgemeinen Formeln dieser Bewegung dienen.

Betrachten wir das Diagramm der Geschwindigkeit-Zeit etwas genauer, so ist eine konstante Steigung erkennbar.



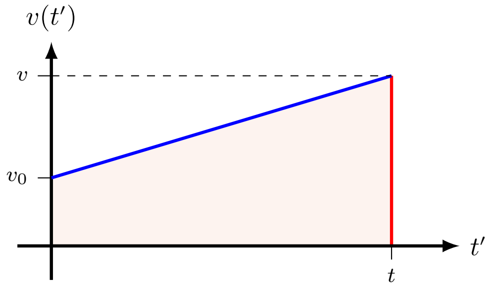


Eine ähnliche Überlegung wie zuvor zeigt, dass die Steigung dieser Funktion durch den Parameter m bestimmt wird:

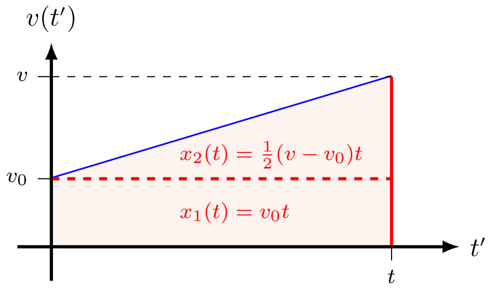
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv a \quad \Rightarrow \quad v(t) = at.$$

Somit ist die Steigung im v-t-Diagramm gleich der Beschleunigung der Bewegung. Eine unveränderte Steigung bedeutet eine konstante Beschleunigung und somit eine gleichmässig beschleunigte Bewegung.

Nachdem wir gelernt haben, was die Steigung einer Kurve im xt- und vt-Diagramm ist, betrachten wir nun genauer die Fläche unter der Kurve. Dabei interessiert uns ausschliesslich die Fläche unter der Kurve im vt-Diagramm. Wir betrachten hierfür folgende Situation: Ein Auto fährt mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf die Autobahn und beschleunigt gleichmässig auf die Geschwindigkeit v. Das vt-Diagramm sieht wie folgt aus:



Die Fläche lässt sich in ein Rechteck und ein Dreieck unterteilen. Das Rechteck hat eine Grösse von $v_0 t$ und das Dreieck von $\frac{1}{2}(v - v_0)t$. Betrachten wir die Einheit dieser Fläche, erkennen wir, dass es sich um eine Länge handelt. Daher können wir diese Fläche als zurückgelegte Strecke identifizieren. Dies sieht folgendermassen aus:



Mit Hilfe der zweiten kinematischen Formel können wir den Term $v - v_0$ auch als at schreiben. Folglich ergibt sich für die Dreiecksfläche die Gleichung: $x_2(t) = \frac{1}{2}at^2$. Somit haben wir die kinematische Formel für den Ort aus dem Diagramm abgeleitet.

Nach diesen Erläuterungen fällt es leichter, die beiden Grundformeln der Kinematik zu verstehen.[6] Sie lauten:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ v(t) &= at + v_0, \end{aligned}}$$

wobei a: die Beschleunigung, v_0: die Anfangsgeschwindigkeit und $x(t = 0) \equiv x_0$: Startpunkt sind. Eliminiert man aus diesen zwei Gleichungen die Zeit[7], findet man die folgende Gleichung:

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x,}$$

wobei $\Delta x = x - x_0$ ist.

Diese drei Formeln wurden absichtlich nicht als Gesetze oder Definitionen formuliert, da sie weder physikalischen

[6] Im Grunde hätten die zwei Definitionen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung - mit etwas Kenntnis der Differenzial- und Integralrechnung gereicht. Für Interessierte und Schwerpunktsklassen! Aus der Definition der Beschleunigung erhalten wir durch die Separationsmethode $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow a\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}v$. Durch Integration und vertauschen der Seiten ergibt sich: $v = at + v_0$. Setzen wir nun die Definition der Geschwindigkeit für v ein, erhalten wir $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = at + v_0$ und durch erneute Integration schliesslich:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0,$$

wobei häufig $x_0 = 0$ gewählt wird.

[7] Hier soll kurz diese Herleitung dargestellt werden. Mit $x(t) \equiv x$ und $v(t) \equiv v$ erhalten wir:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \quad \text{und} \quad v = at + v_0.$$

Die zweite Gleichung lösen wir nach t auf und setzen sie in die erste Gleichung ein. Daraus erhalten wir mit $t = \frac{v - v_0}{a}$:

$$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0.$$

Nun nehmen wir das x_0 auf die andere Seite und lösen die Klammer auf. Dabei erhalten wir:

$$x - x_0 = \frac{v^2}{2a} - \frac{2vv_0}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} + \frac{v_0 v}{a} - \frac{v_0^2}{a} \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a}.$$

Durch Multiplikation mit $2a$ erhalten wir die gesuchte Gleichung:

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2.$$

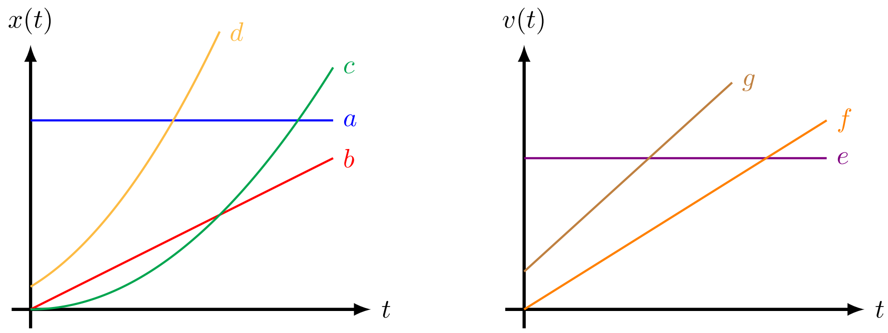
Gesetzen noch Definitionen entsprechen. Stattdessen ergeben sie sich einfach aus mathematischen Umformungen und sind somit bereits in den Definitionen enthalten.

Galileo Galilei (1564 – 1642)

Der Erste, der diese Gleichungen gefunden und formuliert hat, war Galileo Galilei (1564 – 1642). Seine grösste Herausforderung bestand darin, die Zeiten zu messen, während eine Kugel fällt oder hinunterrollt. Nachdem er vieles ausprobiert hatte, wie zum Beispiel seinen Herzschlag oder einen Trommler, kam ihm die Idee mit der schiefen Ebene. Erst durch diese Idee war es ihm möglich, die Zeitunterschiede zwischen den verschiedenen Messpunkten erheblich zu vergrössern und schliesslich eine geeignete Zeitmessung zu finden, die er in der klassischen Musik entdeckte.

Bevor wir mit dem Rechnen beginnen, möchten wir die Bewegungen grafisch unterscheiden können. Dazu dient das folgende Beispiel, das zahlreiche Varianten dieser Gleichungen zeigt. Es liegt an Ihnen, die richtigen Werte für die jeweiligen Grössen zu ermitteln.

Bsp. xii.
Analysieren Sie die folgenden Funktionen:



Finden Sie für jede der folgenden Graphen den Startpunkt x_0, die Anfangsgeschwindigkeit v_0, die Beschleunigung a und die Funktionsgleichung $x(t)$ resp. $v(t)$.

Hier ein Beispiel für die Funktion a: stillstand $x_0 \neq 0 \quad v_0 = 0 \quad a = 0 \quad x(t) = x_0$. Lsg: –

Lösung:

Eine oft gestellte Frage hier ist: Woran erkennt man, dass die Bewegung c keine und die Bewegung d eine Anfangsgeschwindigkeit hat? Um dies zu klären, müssen wir uns daran erinnern, dass die Steigung einer Kurve im x-t-Diagramm die Geschwindigkeit repräsentiert. Wir müssen daher die Steigung der Funktionen c und d im Ursprung messen. Diese ist bei c null und bei d ungleich null. Daraus folgt, dass die Anfangsgeschwindigkeit bei c null und bei d ungleich null ist.

Bevor wir uns den eigentlichen Anwendungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung zuwenden, sollten wir zunächst einige einfachere Berechnungen betrachten.

Bsp. xiii.
Eine Kugel rollt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $3\,\mathrm{m/s}$ auf eine schiefe Ebene zu, welche zu einer Beschleunigung von $5\,\mathrm{m/s^2}$ führt. a) An welchen Punkten der schiefen Ebene befindet sich die Kugel nach $2\,\mathrm{s}$, respektive nach $4\,\mathrm{s}$? b) Welche Geschwindigkeit hat die Kugel an diesen zwei Punkten? Eine andere Kugel rollt ebenfalls auf eine schiefe Ebene zu. c) Welche Beschleunigung hat die Kugel, wenn Sie zu Beginn die Geschwindigkeit von $5\,\mathrm{m/s}$ und nach $12\,\mathrm{m}$ eine von $7\,\mathrm{m/s}$ hat? Lsg: a) $x(t_1) = 16\,\mathrm{m}$, $x(t_2) \approx 52\,\mathrm{m}$ b) $v(t_1) = 13\,\mathrm{m/s}$, $v(t_2) = 23\,\mathrm{m/s}$ c) $a \approx 1\,\mathrm{m/s^2}$

Lösung:

Nun kommen wir zur eigentlichen Zielsetzung der Kinematik, die Untersuchung von Wurfbewegungen.

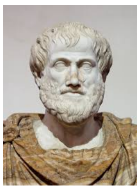
1.3 Wurfbewegungen

Im Folgenden werden die grundlegenden Würfe zur Mechanik - geordnet nach zunehmender Komplexität - beschrieben: Zunächst erfolgt eine Erklärung des *freien Falls*, gefolgt vom *vertikalen* und *horizontalen Wurf*. Die Ausführungen enden mit dem komplexeren *schiefen Wurf*.

1.3.1 Freier Fall

Unter freiem Fall verstehen wir die Bewegung eines Körpers, der ausschliesslich von der Anziehungskraft der Erde beeinflusst wird und keine zusätzliche Widerstände erfährt. Diese Voraussetzung führt zu einer konstanten Beschleunigung des Körpers. Diese Beschleunigung wird *Fallbeschleunigung* genannt und mit dem Symbol $\vec{g}$ abgekürzt. Für den freien Fall gilt somit:

$$a = g, \quad g = \text{konstant.}$$


Aristoteles
(384 - 322)

Bevor wir das Experiment zur Messung der Fallbeschleunigung durchführen, soll an dieser Stelle ein bekanntes Gedankenexperiment durchgespielt werden.

Es war bekannt, dass Galileo Galilei (1564 – 1642) die Mechanik von Aristoteles (384 - 322 v. Chr.) kritisch betrachtete. Es ist dennoch erstaunlich, dass zuvor nur wenige gewagt haben, Aristoteles' Theorien zu hinterfragen und wenn überhaupt, dann nur zaghaft. Wie wir in Aristoteles' Werk zur Mechanik nachlesen können [7], vertrat er vereinfachend gesagt folgenden Standpunkt:

> *Schwere Körper fallen schneller als leichte Körper. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit mit der schwere Körper fallen, grösser ist, als die Geschwindigkeit mit der leichte Körper fallen.*

Was sagen Sie dazu? Schauen wir uns die folgende Clicker-Frage an: Ball Drop.

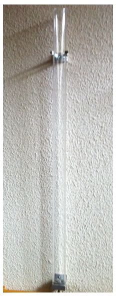
Mit einer sehr geistreichen Überlegung, zeigte Giovanni Benedetti[8] (1530 - 1590) und kurze Zeit später auch Galilei, dass die Aussage von Aristoteles zwingend zu einem Widerspruch führt. In [8] findet man folgendes Gedankenexperiment:

> *Nehmen wir an es gibt zwei Körper des gleichen Materials, der grössere ist A, der kleinere ist B. Nehmen wir - falls möglich - wie von unserem Gegner behauptet, an, dass A schneller fällt als B. Wir haben dann also zwei Körper, von denen sich einer schneller bewegt.*
> *Dann würde sich eine Vereinigung beider Teile, unserer Annahme entsprechend, langsamer bewegen als derjenige Teil, der sich allein schneller bewegt als der andere. Wenn also A und B vereint werden, würde die Vereinigung sich langsamer als A allein bewegen* (da der langsamere den schnelleren abbremst).
> *Da aber andererseits die Vereinigung von A und B schwerer ist, als A alleine müsste diese Vereinigung nach Aristoteles noch schneller als A fallen. Somit tritt ein Widerspruch auf, der die Theorie des Aristoteles infrage stellt.*

[8] Giovanni Battista Benedetti (* 14. August 1530 in Venedig; † 20. Januar 1590 in Turin) war Mathematiker, Physiker, Astronom, Architekt und Philosoph. Er ist bekannt als ein Vorläufer von Galileo Galilei in der Theorie des freien Falls und in der Kritik der Mechanik des Aristoteles.

Der einzige Weg, diesen Widerspruch aufzulösen, besteht darin, dass alle Körper im Vakuum mit gleicher Geschwindigkeit fallen. Dies wird nun mit einem Experiment bestätigt.

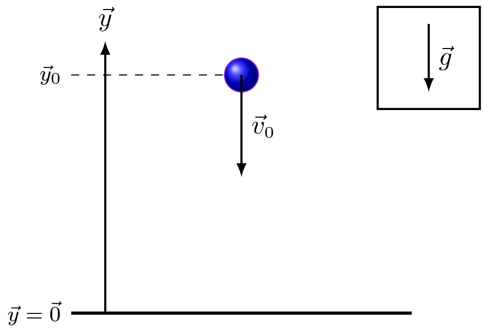
Exp. 5: Freier Fall in Vakuumröhre
In einer Vakuumröhre werden eine Feder und eine Münze fallen gelassen. Zunächst wird der Versuch im Normalzustand der Vakuumröhre durchgeführt. Anschliessend wird ein möglichst gutes Vakuum erzeugt, indem ein Druck von etwa 100 mPa angestrebt wird, und der Versuch wird wiederholt.



Das Experiment zeigt, dass in Luft die Gegenstände unterschiedlich schnell fallen und ohne gleich schnell.

Somit fallen alle Objekte im luftleeren Raum unabhängig von ihrer Grösse und Masse mit gleicher Geschwindigkeit[9]. Dazu schauen wir uns das folgende Video an: Brian Cox - Freier Fall.

Um den freien Fall etwas genauer zu analysieren, betrachten wir folgende Skizze:



Ein frei fallender Gegenstand, der aus der Höhe y_0 losgelassen wird, erfährt eine gleichmässige Beschleunigung. Die entsprechenden vektoriellen Gleichungen lauten:

$$\vec{y}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{y}_0 \quad \text{und} \quad \vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0.$$

Durch Elimination der Vektoren, also $\vec{g} \to -g$, $\vec{y} \to y$ und $\vec{y}_0 \to y_0$ und $\vec{v}_0 \to -v_0$, erhalten wir die folgende Gleichung[10]:

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t \quad \text{und} \quad v(t) = gt + v_0.$$

Diese Formeln sind die allgemeinen Gleichungen für einen freien Fall mit Anfangsgeschwindigkeit. Betrachten wir ein einfaches Beispiel dazu.

Bsp. xiv.
Es sei angenommen, dass ein Stein von einer 100 Meter hohen Brücke geworfen wird, wobei keine Anfangsgeschwindigkeit berücksichtigt wird. a) Nach wie vielen Sekunden trifft der Stein am Boden auf? b) Nach wie vielen Sekunden ist der Stein auf halber Höhe, also bei 50 Metern? Lsg: a) $t_1 \approx 4.5\,\mathrm{s}$, b) $t_2 \approx 3.2\,\mathrm{s}$

[9]Betrachten wir für den realen Fall Körper, die im Verhältnis zu ihre Grösse schwer sind, dann können wir den Luftwiderstand in erster Näherung vernachlässigen und das Konzept des freien Falles auch auf nicht freie Fälle anwenden.
[10]Natürlich ist die Änderung von $x \to y$ überflüssig. Dennoch soll damit die Richtung deutlich gemacht werden, wobei wir auch in Zukunft die horizontale Richtung mit x und die vertikale mit y bezeichnen werden.

Lösung:

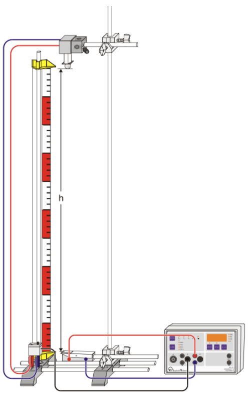
Im Folgenden wird die gleiche Situation erneut betrachtet, jedoch ohne die Verwendung von Zahlen.

Bsp. xv.
Bestimmen Sie die Formel für den freien Fall, sofern man die Zeit bis zum Auftreffen am Boden nimmt und keine Anfangsgeschwindigkeit wählt. Lsg: –

Lösung:

Im folgenden Experiment messen wir die Fallbeschleunigung g mithilfe der hergeleiteten Formeln.

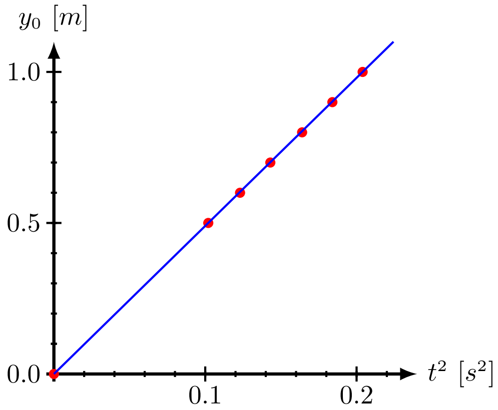
Exp. 6: Messung der Fallbeschleunigung
Um die Fallbeschleunigung g zu messen, lassen wir eine Kugel mehrmals aus verschiedenen Höhen fallen und tragen jeweils die Höhe als Funktion der gemessenen Zeit im Quadrat auf[11].



Die Datenmessungen und -grafik bestätigen eine gleichmässig beschleunigte Bewegung.

[11] Wir könnten auch die Höhe als Funktion der Zeit auftragen. Da wir jedoch wissen, dass die Höhe proportional zurzeit im Quadrat ist, erhalten wir auf diese Weise eine lineare Funktion, dessen Steigung $\frac{1}{2}g$ entspricht.

y_0 [m]	t^2 [s^2]
1.0	0.204
0.9	0.184
0.8	0.164
0.7	0.143
0.6	0.123
0.5	0.102



Keine Messung ohne Fehler. Die Höhe y_0 können wir etwa auf 5 mm genau messen, d. h. einen Fehler von maximal 0.5% und die Zeit hat einen Fehler von etwa 1 ms, d. h. maximal 0.2%. So erhalten wir für die Steigung aus:

$$y_0 = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{2y_0}{t^2}.$$

Fehler aus quadratischen Grössen werden verdoppelt und das geometrische Mittel mit dem Fehler in der Höhe berechnet, um einen Fehler von etwa 0.6% zu erhalten. Dies ergibt eine Steigung von

$$a \approx 4.89\,\mathrm{m/s^2} \quad \Rightarrow \quad g \approx (9.78 \pm 0.06)\,\mathrm{m/s^2},$$

wobei der Literaturwert der Fallbeschleunigung [9] für Europa $g \cong 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ ist und somit innerhalb unserer Fehlerbandbreite liegt.

Nun lösen wir ein Beispiel zum freien Fall, das eine kleine Schwierigkeit enthält und den Einsatz des CAS-Taschenrechners erfordert.

Bsp. xvi.
Auf zwei verschiedenen Brücken lassen Sie je einen Stein ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen. Nach 5.5 s a) sehen Sie auf der einen und b) hören Sie auf der anderen wie diese zwei Steine ins Wasser eintauchen. Wie hoch sind die Brücken und für a) mit welcher Geschwindigkeit taucht der Stein ein? Lsg: a) $y_1 \approx 150\,\mathrm{m}$, b) $y_2 \approx 130\,\mathrm{m}$

Lösung:

Natürlich kann man auch einen Körper nicht nur fallen lassen, sondern ihm auch eine Anfangsgeschwindigkeit geben, wie das nächste Beispiel zeigt.

Bsp. xvii.
Sie stehen zu zweit auf einer Brücke mit der Höhe von 150 m und möchten, dass Ihre Steine gleichzeitig eintauchen. Wie schnell müssen Sie ihn nach unten werfen, falls der erste Stein 0.5 s früher losgelassen wurde und 5.5 s braucht? Lsg: $v_0 \approx 5.0\,\mathrm{m/s}$

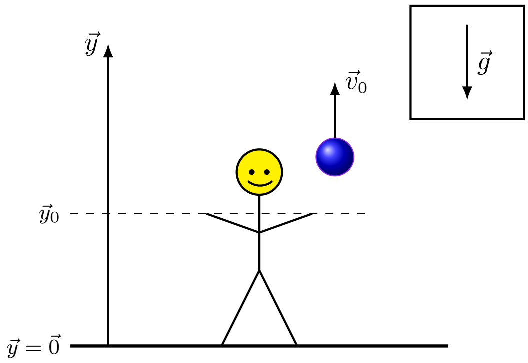
Lösung:

Nun, da wir wissen, wie der freie Fall berechnet wird und welchen Gesetzen er unterliegt, können wir zum nächsten Schritt übergehen und den Körper nicht passiv fallen lassen, sondern ihn zuerst aktiv hochwerfen. So beginnen wir mit dem vertikalen Wurf.

1.3.2 Vertikaler Wurf

Der vertikale Wurf ist im Grunde genommen eine Verallgemeinerung des freien Falls. Die Anfangsgeschwindigkeit kann sowohl nach oben als auch nach unten gerichtet sein. Eine Berücksichtigung des vektoriellen Charakters von Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ort ist hierbei von Bedeutung.

Wenn wir uns vorstellen, dass wir uns auf einem Volleyballfeld befinden und den Ball senkrecht in die Höhe werfen, so sieht die Kinematik des Wurfs wie folgt aus:



Die Skizze veranschaulicht, dass zwei der drei Vektoren in die gleiche Richtung zeigen, die wir als positive Richtung annehmen. Die Richtungen der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ und der Fallbeschleunigung $\vec{g}$ sind vorgegeben, nur die Richtung der Höhe $\vec{h}$ kann selbst bestimmt werden, was jedoch Auswirkungen auf die Gleichung hat. Auch in diesem Fall handelt es sich um eine gleichmässig beschleunigte Bewegung, bei der die Anfangsgeschwindigkeit ungleich null ist. Die vektoriellen Gleichungen[12] lautet:

$$\vec{y}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{y}_0 \quad \text{und} \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

Der Übergang zur Gleichung ohne Vektoren führt unter Berücksichtigung der Richtung auf die folgende Gleichung, welche der obigen vom freien Fall sehr ähnlich ist.

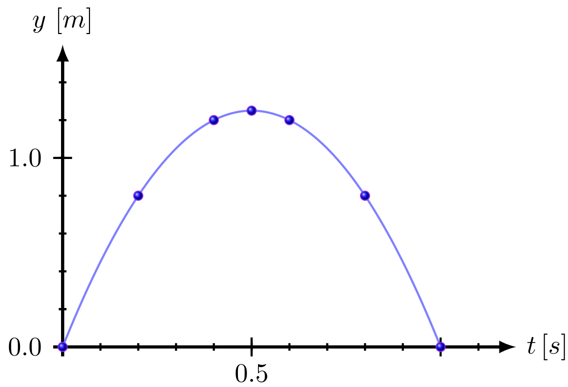
$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{und} \quad v(t) = v_0 - gt$$

Um die Bewegung tabellarisch und graphisch festzuhalten, benötigen wir lediglich die Anfangshöhe $y_0 = 0$ sowie die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$.

[12] Achten Sie darauf, dass die unterschiedlichen Richtungen im Vektor enthalten sind und erst zum Ausdruck kommen, wenn wir nur noch den Betrag der Gleichung betrachten.

Zeit t [s]	Ort $y(t)$ [m]	Geschw. $v(t)$ [m/s]
0.0	0.0	5
0.2	0.8	3
0.4	1.2	1
0.5	1.25	0
0.6	1.2	-1
0.8	0.8	-3
1.0	0.0	-5

Aus dieser Tabelle geht deutlich hervor, dass der Ball nach 0.5 s seine maximale Höhe von 1.25 m erreicht. Diese maximale Höhe wird auch als Toter Punkt bezeichnet, da der Ball dort keine Geschwindigkeit mehr hat. Anschliessend nimmt die Höhe wieder ab und die Geschwindigkeit des Balls nimmt dabei betragsmässig zu. Bei der Landung hat der Ball betragsmässig die gleiche Geschwindigkeit wie beim Abwurf. Zudem lässt sich aus der Tabelle erkennen, dass die Bewegung des Balls vollständig symmetrisch ist. Die symmetrische Bewegung wird deutlich, wenn man das y-t-Diagramm betrachtet.



Die Funktion, die am besten zu den Punkten passt, heisst quadratische Funktion oder Parabel. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir ein weiteres Beispiel.

Bsp. xviii.
Aus einer Höhe von 5 m über dem Boden werfen Sie einen Ball mit der Anfangsgeschwindigkeit von 15 m/s senkrecht nach oben. a) Welche maximale Höhe erreicht der Ball? b) Mit welcher Geschwindigkeit und c) nach welcher Zeit trifft der Ball den Boden?

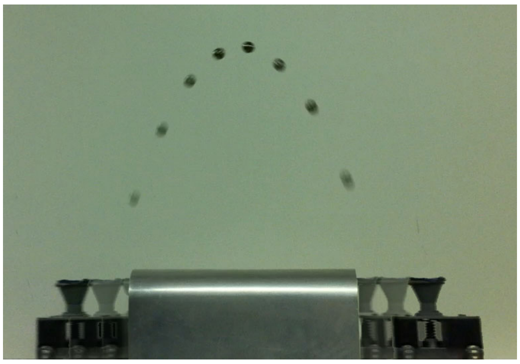
Lsg: a) $y \approx 16\,\mathrm{m}$, b) $v \approx -18\,\mathrm{m/s}$, c) $t_{\mathrm{ges}} \approx 3.3\,\mathrm{s}$

Lösung:

Wie verhält sich ein senkrechter Wurf, wenn er aus einem sich bewegenden System erfolgt? Angenommen, Sie sitzen in einem offenen Güterwagen und werfen einen Stein senkrecht nach oben. Wie das nachfolgende Experiment zeigt, ändert sich für die Berechnung der Bewegung nichts, solange sich der Wagen gleichförmig geradlinig bewegt.

Exp. 7: Vertikaler Wurf im bewegten Wagen
Ein Fahrzeug mit einer Kugel, die nur vertikal abgefeuert werden kann, fährt gleichmässig und

geradlinig auf einen Tunnel zu. Kurz vor dem Tunnel wird ein Mechanismus aktiviert, der die Kugel entlässt. Überraschenderweise fällt die Kugel zurück in die Öffnung der Abschussvorrichtung.

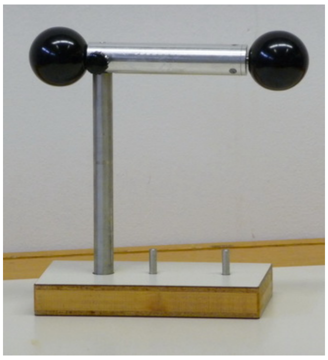


Wie im folgenden Kapitel dargestellt wird, kann man unabhängige Bewegungen voneinander abkoppeln. Ein Beispiel hierfür ist die horizontale Bewegung des Wagens, die unabhängig von der vertikalen Bewegung der Kugel erfolgt. Wenn wir uns nicht ausserhalb des Wagens befinden würden, sondern uns im Wagen befänden, zum Beispiel in einem gleichmässig fahrenden Zug, würde uns diese Trennung der Bewegungen nicht überraschen. Tatsächlich würden wir sie als selbstverständlich annehmen.

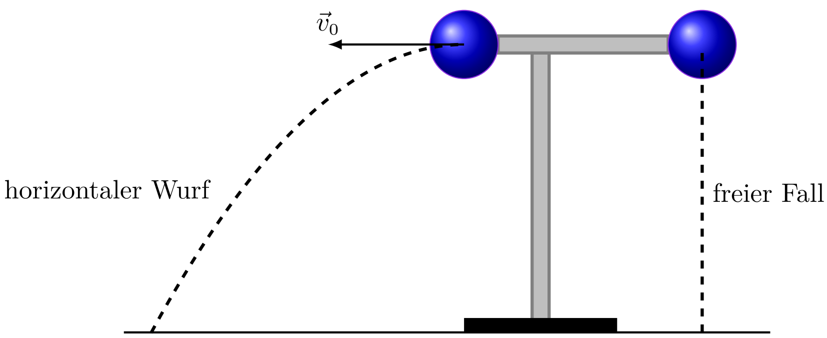
1.3.3 Horizontaler Wurf

Unter einem horizontalen Wurf versteht man einen Wurf, bei dem die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ horizontal ist. Bevor wir uns in die mathematische Behandlung des horizontalen Wurfs vertiefen, möchten wir ein entscheidendes, jedoch sehr einfaches Experiment vorstellen.

Exp. 8: Unabhängigkeitsprinzip
Mit dem folgenden Experiment werden zwei verschiedene Würfe gleichzeitig untersucht.



Die Kugel auf der rechten Seite fällt nach dem Auslösen des Mechanismus vertikal nach unten und durchläuft dabei einen freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit. Die linke Kugel wird durch den Auslösemechanismus für eine kurze Zeit beschleunigt und vollzieht dann einen horizontalen Wurf in y-Richtung mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$. Das zunächst überraschende Ergebnis lautet, dass wir lediglich ein Auftreffen am Boden hören, was bedeutet, dass die Kugeln zwar unterschiedliche Strecken zurücklegen, jedoch dafür die gleiche Zeit benötigen. Die Bewegungen können schematisch wie folgt dargestellt werden:



Wir werden nun den horizontalen Wurf genauer untersuchen und versuchen zu verstehen, was es bedeutet, dass wir nur ein Aufprallgeräusch am Boden hören. Wie bereits erwähnt und durch die Skizze offensichtlich deutlich gemacht, legen die beiden Kugeln unterschiedliche Strecken in der gleichen Zeit zurück. Dies bedeutet jedoch auch, dass die vertikale Bewegung (die für den Aufprall am Boden relevant ist) des horizontalen Wurfs der vertikalen Bewegung des freien Falls entspricht. Somit sind die Bewegungen in horizontaler und vertikaler Richtung unabhängig voneinander[13]. Erneut angenommen, dass die Parteien voneinander abhängig sind, würde der weitere Weg durch die zusätzliche horizontale Bewegung zu einer Erhöhung der Zeit führen. Diese Annahme widerspricht jedoch dem Experiment.

Eine andere mögliche Argumentation wäre, sich zu fragen, welche Beschleunigung eine Veränderung in der Geschwindigkeit verursacht. Die Antwort lautet: Es handelt sich um die Fallbeschleunigung $\vec{g}$, die lediglich nach unten zeigt. Die andere Komponente bleibt unverändert.

Da sich die Geschwindigkeit nur in Richtung der Beschleunigung ändern kann, werden nur die Geschwindigkeitskomponenten verändert, die nach unten zeigen. Daher ist es möglich, die Anfangsgeschwindigkeit beim horizontalen Wurf $\vec{v}_0$ in ihre Komponenten aufzuteilen:

$$v_{0x} = v_0 \qquad \text{und} \qquad v_{0y} = 0.$$

Die Beschleunigung wirkt nur in y-Richtung, d. h. die Bewegung in x-Richtung ist eine gleichförmig geradlinige und damit

$$x(t) = v_{0x}t \equiv v_0 t \quad \text{und} \quad v_x(t) = v_0$$

und die Bewegung in y-Richtung entspricht dem freien Fall aus der Höhe y_0 ohne Anfangsgeschwindigkeit, also

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{und} \quad v_y(t) = gt.$$

Beachten Sie, dass das t der Zeit für beide gleich ist. Möchten wir die Bahnkurve $y(x)$ für den horizontalen Wurf beschreiben, brauchen wir nur das t zu eliminieren, d. h.

$$y(x) = y_0 - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \equiv y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Diese Bahnkurve gibt uns für jedes x (horizontale Entfernung) das y (Höhe) an.

Bsp. xix.
Aus 10 m Höhe werde eine Kugel mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 5.0 m/s horizontal abgeworfen. Bestimmen Sie a) die Wurfweite x_w und b) den Winkel mit dem die Kugel den Boden trifft. Lsg: a) $x_\text{w} \approx 7.1\,\text{m}$, b) $\alpha \approx 70°$

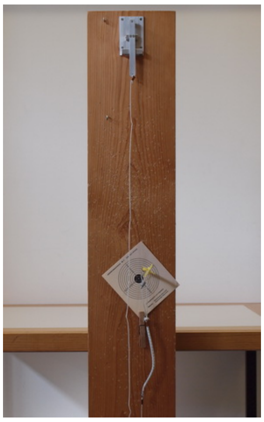
Lösung:

Bei diesem Beispiel zeigt sich deutlich, dass die Bewegungen unabhängig voneinander betrachtet werden können. Auch wenn die Bewegung nicht geradlinig verläuft, spricht man für die x-Richtung von einer geradlinigen Bewegung, da sie von der y-Bewegung getrennt betrachtet werden kann. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir das Experiment zum horizontalen Wurf.

[13] Könnten wir die Bewegungen nicht in ihre Komponenten aufteilen, müssten wir entlang der Kurve rechnen, was nicht besonders einfach ist. Sei s der reale Weg und mit $x(t) = v_0 t$ und $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$ gilt:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}\,\mathrm{d}t' = \frac{v_0 t}{2}\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{v_0^2}} + \frac{v_0^2}{2g}\ln\left(\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{v_0^2}} + \frac{gt}{v_0}\right).$$

Exp. 9: Dartschuss
Ein Dartpfeil wird horizontal auf eine Zielscheibe abgeschossen, die zum Zeitpunkt des Abwurfs zu fallen beginnt (siehe Abbildung).



In den meisten Fällen trifft der Dartpfeil die Zielscheibe. Dies liegt daran, dass die Vertikalbewegungen gleich sind und die Horizontalbewegung davon unabhängig ist.

Ein ähnliches Beispiel ist folgendes.

Bsp. xx.
Bestimmen Sie a) die Höhe, aus welcher Sie eine Kugel mit einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit von 10.0 m/s werfen müssen, um eine Wurfweite von 16.0 m zu erreichen und b) die Geschwindigkeit und Richtung mit der die Kugel am Boden auftrifft.
Lsg: a) $y_0 = 12.8\,\mathrm{m}$, b) $v \approx 18.9\,\mathrm{m/s}$, $\alpha \approx 58.0°$

Lösung:

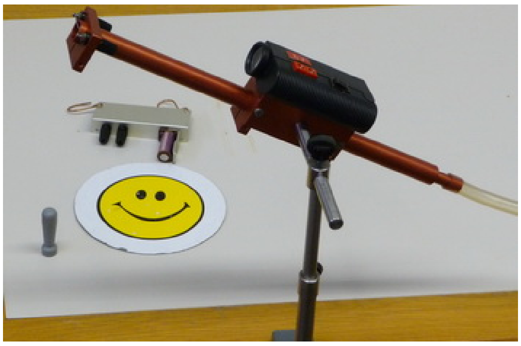
Auch hier kann man die Unabhängigkeit der Bewegungen gut erkennen. Im nächsten und letzten Unterkapitel der Kinematik behandeln wir den allgemeinsten Wurf, bei dem die Anfangsgeschwindigkeit nicht mehr eingeschränkt wird. Da die Anfangsgeschwindigkeit in der Regel weder horizontal noch vertikal ist, bezeichnet man diesen Wurf als schiefen Wurf.

1.3.4 Schiefer Wurf

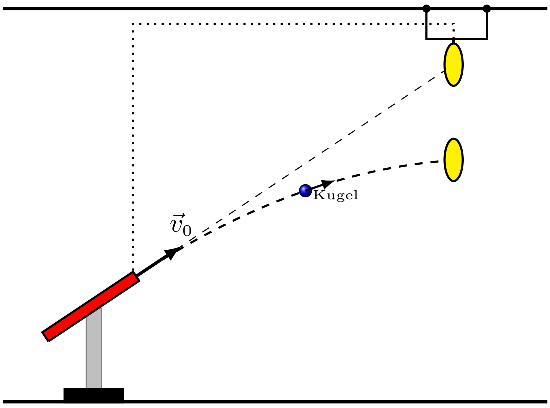
Unter dem schiefen Wurf versteht man die allgemeine Form der Wurfbewegung, bei der der Abschusswinkel nicht 0° oder 90° beträgt, weil in diesen Fällen ein horizontaler bzw. vertikaler Wurf vorliegt. Ein Experiment soll dies veranschaulichen.

Exp. 10: Schiefer Wurf
In diesem Experiment wird ein Luftgewehr auf eine Scheibe gerichtet, welche knapp unter der Decke an einem Elektromagneten[14] hängt. Die Abschussvorrichtung ist elektrisch mit der Scheibe verbunden. Sobald das Projektil den Lauf verlässt und einen elektrischen Kontakt unterbricht, fällt die Scheibe zu Boden.

[14] Ist ein Magnet, welcher nur Kraft ausübt, solange ein Strom fliesst.



Nachfolgend wird die gesamte Szene schematisch dargestellt. Die elektrische Verbindung wird lediglich durch eine gepunktete Linie angedeutet, da sie zwar wichtig für das Experiment ist, jedoch für das Verständnis des schiefen Wurfes nicht relevant ist.

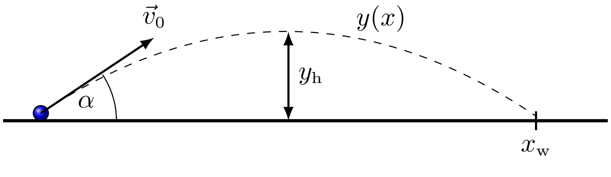


In den meisten Fällen wird die Scheibe getroffen, obwohl das Zielrohr in der Startposition auf die Scheibe zeigt. Der Grund dafür ist klar: Die Kugel und die Scheibe bewegen sich in vertikaler Richtung gleich. Daher verfehlt der Schütze das ursprüngliche Ziel genau um den Wert, um den die Scheibe in derselben Zeit gefallen ist.

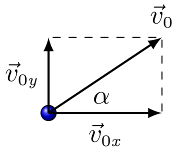
Der renommierte Professor Walter Lewin hat dieses Experiment humorvoll, aber dennoch physikalisch genau durchgeführt. Sie können das Experiment unter folgendem Link ansehen: YouTube: Walter Lewin - Monkey

Wir erkennen aus diesem Experiment, dass die Bewegungen in x- und y-Richtung unabhängig voneinander verlaufen. Es besteht kein Grund zur Überraschung, dass dies auch für den schiefen Wurf zutrifft. Aus diesem Grund muss in der nachfolgenden Herleitung der Bahnkurve $y(x)$ für den schiefen Wurf ohne Anfangshöhe die Anfangsgeschwindigkeit in ihre Komponenten aufgeteilt werden.

Betrachten wir folgende Situation: Eine Kugel werde auf einer horizontaler Ebene aus der Höhe $y_0 = 0$ unter dem Winkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ abgeschossen.



Für diesen allgemeinen Fall sollen die Bahnkurve $y(x)$, die Wurfweite x_w und die Wurfhöhe y_h formal bestimmt werden. Die Anfangsgeschwindigkeit wird dazu in ihre Komponenten aufgeteilt.



Daraus erhalten wir für die Beträge v_{0x} und v_{0y}:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad \text{und} \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

Die Bewegung in x-Richtung ist eine gleichförmig geradlinige Bewegung und es gilt:

$$x(t) = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot t.$$

Die Bewegung in y-Richtung entspricht einem vertikalen Wurf und somit erhalten wir:

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Die Geschwindigkeit in x-Richtung ist:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$$

und die Geschwindigkeit in y-Richtung ist:

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Bevor wir jedoch verschiedene Grössen ableiten, wollen wir zunächst ein Beispiel ohne Verwendung der allgemeinen Formeln lösen.

Bsp. xxi.
Sie werfen einen Ball vom Boden aus mit der Anfangsgeschwindigkeit von 15.0 m/s und einem Winkel zur Horizontalen von 30.0°. Welche Höhe erreicht der Ball maximal dabei und wie weit fliegt er?

Überprüfungen Sie Ihr Resultat mit Hilfe der Animation auf der Webseite: phet.coloroado.edu. Beachten Sie, dass Sie auch die Fallbeschleunigung auf $10\,\mathrm{m/s^2}$ verändern können. Lsg: $y_\mathrm{h} \approx 2.81\,\mathrm{m}$, $x_\mathrm{w} = 19.5\,\mathrm{m}$

Lösung:

Wir werden nun die drei Grössen allgemein herleiten. Um die Bahnkurve $y(x)$ zu erhalten, setzen wir $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ in $y(t)$ ein und vereinfachen anschliessend:

$$\boxed{y(x) = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2}$$

Dieser Term entspricht einer quadratischen Funktion ($y(x) = ax^2 + bx + c$), wobei

$$a = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}, \quad b = \tan\alpha \quad \text{und} \quad c = 0$$

ist.

Es ist wichtig zu betonen, dass diese Funktion die tatsächliche Flugbahn des Balls beschreibt. Das bedeutet, dass wir für jeden Punkt am Boden wissen, auf welcher Höhe sich der Ball befindet.

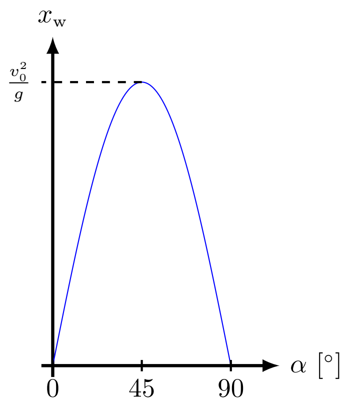
Wir müssen noch die Wurfweite bzw. -höhe bestimmen. Dazu benötigen wir lediglich die Nullstellen bzw. den Scheitelpunkt der Bahnkurve $y(x)$. Die Nullstelle (x_w) kann wie folgt gefunden werden:

$$y(x_\mathrm{w}) \equiv 0 = \tan\alpha \cdot x_\mathrm{w} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x_\mathrm{w}^2$$

Es gilt also mit $2\cos\alpha \sin\alpha = \sin 2\alpha$ (vgl. Gl. (M.3))

$$\boxed{x_\mathrm{w} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha).}$$

In dieser Formel verbirgt sich eine bekannte Tatsache: Beim Kugelstossen strebt man einen Wurf in möglichst grosser Weite an, wobei der Kugel eine Flugbahn im Winkel von 45° gegeben wird. Doch worauf basiert diese Methode? Wenn wir die Funktion genauer betrachten, wird schnell deutlich, dass ein kleiner Winkel α eine geringere Weite zur Folge hat. Dasselbe gilt, wenn der Winkel 90° beträgt. Dies impliziert, dass die Wurfweite ein Maximum haben muss, was durch die folgende Abbildung deutlich wird.



Die maximale Wurfweite ergibt sich wie erwartet bei einem Winkel von 45°. Hierzu setzt man $\alpha = 45°$ in die Gleichung für die Wurfweite ein und erhält für x_w den Wert des Sinus von 90°, also 1. Somit lautet die maximale Wurfweite:

$$x_\mathrm{w,max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Die maximale Wurfweite ist somit ausschliesslich von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abhängig.

Im vorliegenden Fall befindet sich der Scheitelpunkt genau in der Mitte der Wurfweite. Daraus ergibt sich für die Wurfhöhe (y_h) die folgende Formel:

$$y_\mathrm{h} \equiv y(x_\mathrm{w}/2) = \tan\alpha \cdot \frac{x_\mathrm{w}}{2} - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot \left(\frac{x_\mathrm{w}}{2}\right)^2.$$

Nach vereinfachen des Terms erhalten wir

$$\boxed{y_\mathrm{h} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.}$$

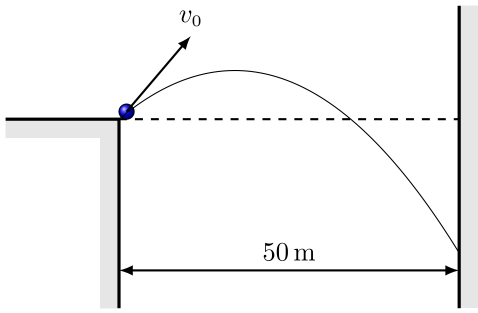
Mit dem nachfolgenden Beispiel sollen diese Formeln benutzt und damit vertieft werden. Hier geht es nur darum, die passende Formel für die gesuchte Grösse zu finden.

Bsp. xxii.
Eine Kanone soll vom Boden aus mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 95\,\mathrm{m/s}$ und dem Abschusswinkel von $\alpha = 30°$ abgefeuert werden. Bestimmen Sie für diesen schiefen Wurf a) die Wurfweite, b) die Wurfhöhe, c) die Höhe nach 10 m und d) die Wurfweite für $\alpha' = 60°$ und e) die Zeit bis die Kugel bei $x = 10\,\mathrm{m}$ ist.
Lsg: a) $x_\mathrm{w} \approx 780\,\mathrm{m}$, b) $y_\mathrm{h} \approx 110\,\mathrm{m}$, c) $y_{10} \approx 5.7\,\mathrm{m}$, d) $x'_\mathrm{w} \approx 780\,\mathrm{m}$, e) $t \approx 0.12\,\mathrm{s}$,

Lösung:

Ein etwas anspruchsvolleres Beispiel soll nun beleuchten, dass die Auswahl der passenden Formel keine klare Sache mehr ist. In Zukunft wird es noch schwieriger sein, eine geeignete Formel zu finden. Vielmehr geht es darum, zu verstehen, dass es mehrere korrekte Wege gibt, jedoch nicht alle gleich effizient oder einfach sind.

Bsp. xxiii.
Wie in der Abb. gezeigt ist, werde ein Ball vom Dach eines Gebäudes in Richtung eines hohen Gebäudes im Abstand von 50 m geworfen. Die Startgeschwindigkeit des Balls beträgt 21 m/s und habe einen Winkel zur Horizontalen von 40°.

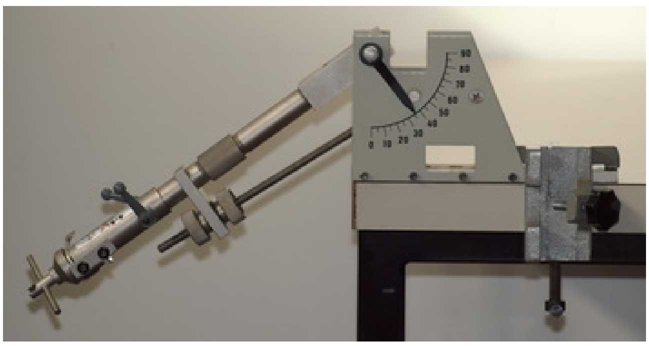


a) Wie weit über oder unter der ursprünglichen Abschusshöhe wird der Ball die gegenüberliegende Wand treffen? b) Welche Geschwindigkeit bei gleichem Abschusswinkel muss der Ball haben, damit er die gegenüberliegende Wand 5 m über der Abschusshöhe trifft? c) Welcher Abschusswinkel mit $v_0 = 31\,\mathrm{m/s}$ muss der Ball haben, damit er auf gleicher Abschusshöhe die gegenüberliegende Wand trifft? Lsg: a) $y \approx -6.3\,\mathrm{m}$, b) $v_0 \approx 24\,\mathrm{m/s}$, c) $\alpha \approx 16°$, $74°$

Lösung:

Hier ist es wichtig zu beachten, dass man all diese Aufgaben auch ohne die Bahnkurvenformel lösen kann, indem man einfach die Zeit berücksichtigt. Das nachfolgende Experiment soll diese Theorie überprüfen.

Exp. 11: Schiefer Wurf
Eine Kugel wird bei der Abwurfvorrichtung durch eine Feder beschleunigt (siehe Abbildung). Dies führt zu einer Anfangsgeschwindigkeit von ungefähr $v_0^2 = (16 \pm 1)\,\mathrm{m^2/s^2}$ mit einer Fehlertoleranz von etwa 7%.



Um die Formeln einfach zu halten, wird ein Winkel von $\alpha = (45 \pm 1)°$ gewählt, der mit einem sehr geringfügigen und vernachlässigbaren Fehler einhergeht. Die Breite ergibt sich somit als:

$$x_\mathrm{w} = \frac{v_0^2}{g} \approx (1.6 \pm 0.1)\,\mathrm{m}.$$

Der Versuch beweist, dass die Kugel stets in diesen Bereich fällt.

Damit ist die Kinematik abgeschlossen und es liegen die Grundlagen für viele verschiedene Würfe vor. Möglicherweise wurde durch diese umfangreiche Kinematik die Neugier geweckt, weshalb diese Körper überhaupt fallen oder bremsen und vieles mehr. Diese Fragen können jedoch erst dann beantwortet werden, wenn die Ursache für die Beschleunigung, nämlich die Kraft, berücksichtigt wird. Sobald die Beschleunigung bestimmt wurde, bildet die Kinematik die Basis der Bewegung. Mit ihrer Hilfe kann die Bewegung weiter beschrieben werden.

Zusammenfassung Kapitel B1

1. Eine *kräftefreie* Bewegung ist eine Bewegung, bei der sich die Geschwindigkeit nicht ändert, d. h. sowohl die Richtung als auch der Betrag der Geschwindigkeit.

2. Eine *kräftebehaftete* Bewegung ist eine Bewegung, bei der sich die Geschwindigkeit ändert, d. h. die Richtung und/oder der Betrag der Geschwindigkeit.

3. Bezugssysteme sind Orte aus denen physikalische Ereignisse betrachtet werden. Ein sehr spezielles Bezugssystem ist das sogenannte *Inertialsystem.* Intertialsysteme sind ruhende oder gleichförmig geradlinig bewegte Bezugssysteme. Das Konzept des Intertialsystem ist wichtig, weil nur für Inertialsysteme die Gesetze der Physik immer die gleiche Form haben.

4. Die *Bahnkurve* ist die Gesamtheit aller Orte, an denen sich ein Objekt bei seiner Bewegung befindet.

5. Die *Geschwindigkeit* resp. die *Beschleunigung* ist die Änderung des Ortes resp. der Geschwindigkeit pro Zeit, d. h.

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \quad \text{resp.} \quad \vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

6. Wird eine Bewegung in einem x-t- oder v-t-Diagramm dargestellt, dann wird die Geschwindigkeit resp. die Beschleunigung durch die Steigung im x-t- resp. v-t-Diagramm dargestellt.

7. Die Fläche unter der Kurve im v-t-Diagramm entspricht der zurückgelegten Strecke.

8. Wir unterscheiden zwei Arten von Bewegungen, die *gleichförmig geradlinige* ($\vec{v} = \text{konst.}$) und die *gleichmässig beschleunigte* ($\vec{a} = \text{konst.}$) Bewegung.

9. Die allgemeinen Formeln der Bewegung lauten:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \quad \text{und} \quad v(t) = v_0 + at,$$

wobei $s(t)$ die Position zur Zeit t, a die Beschleunigung, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und s_0 die Startposition sind. Aus diesen beiden Formel lässt sich durch Eliminierung der Zeit t, die folgende Formel herleiten:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s.$$

10. Aus rein didaktischen Gründen werden vier Wurfbewegungen unterschieden: *freier Fall, vertikaler Wurf, horizontaler Wurf* und *schiefer Wurf.* Nimmt man eine weitere Bewegung, nämlich die gleichförmig geradlinige Bewegung hinzu, dann können die verschiedenen Würfe wie folgt vereinfacht werden.

- Der freie Fall ist eine gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangshöhe.
- Der vertikale Wurf ist eine gleichmässig beschleunigte Bewegung mit möglicher Anfangshöhe und vertikaler Anfangsgeschwindigkeit.
- Der horizontale Wurf ist ein freier Fall und eine gleichförmig geradlinige Bewegung in horizontaler Richtung.
- Der schiefe Wurf ist ein vertikaler Wurf und eine gleichförmig geradlinige Bewegung in horizontaler Richtung.

11. Betrachten wir einen schiefen Wurf mit der Anfangshöhe gleich der Endhöhe, dann gelten für die Bahnkurve

$$y(x) = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot x^2,$$

wobei α der Abwurfwinkel zur Horizontalen ist, die Wurfweite

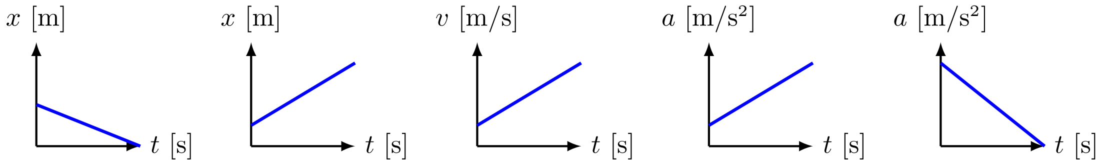
$$x_\mathrm{w} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$$

und die Wurfhöhe, welche als höchster Punkt der Wurfparabel zu verstehen ist,

$$y_\mathrm{h} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

Konzeptfragen Kapitel B1

1. Betrachten Sie die folgenden Diagramme und beachten Sie dabei die verschiedenen Achsen:

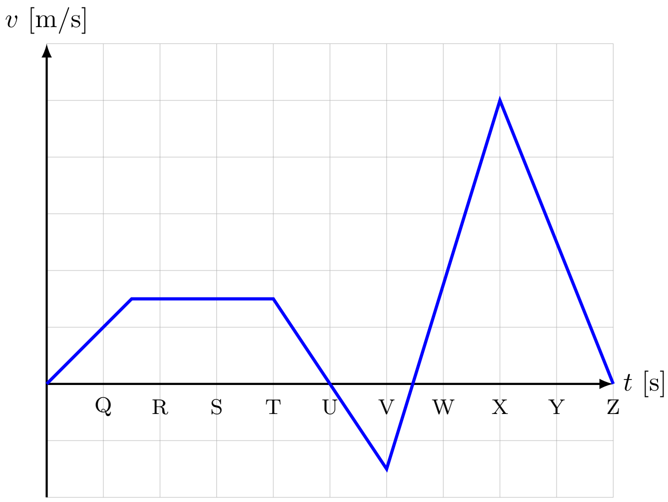


☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Welche der folgenden Darstellungen zeigt die Bewegung des Objekts mit gleichmässig zunehmender Geschwindigkeit?

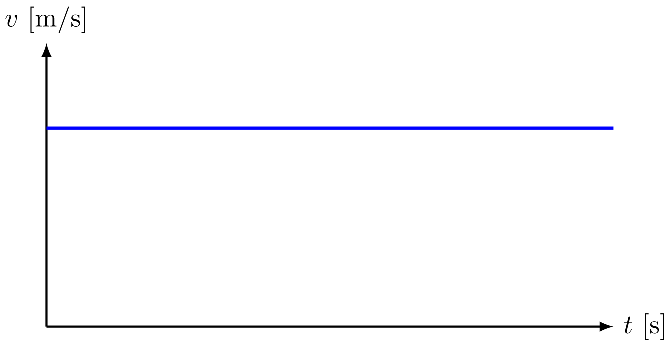
- ☐ Nur B
- ☐ C und E
- ☐ Nur D
- ☐ B, C und D
- ☐ Nur C

2. Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit eines Objekts über der Zeit. Welche der folgenden Optionen entspricht dem Fall, in dem die Beschleunigung des Objekts am negativsten ist?



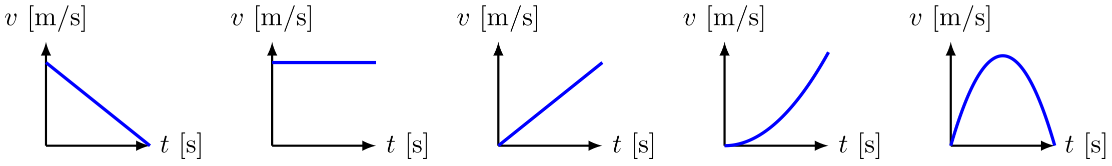
- ☐ V nach X
- ☐ T nach V
- ☐ V
- ☐ X
- ☐ X nach Z

3. Das Diagramm zeigt die Geschwindigkeit eines Objekts, das sich entlang einer Geraden bewegt. Welcher Satz trifft am besten zu?



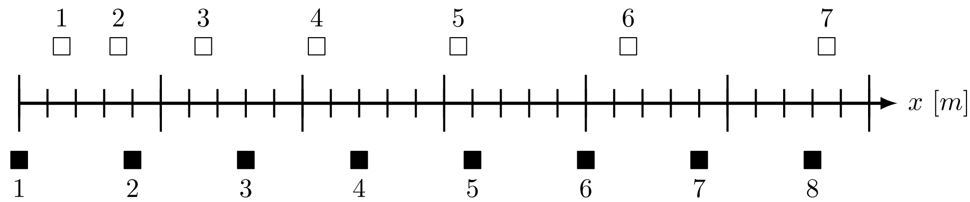
☐ Das Objekt bewegt sich mit einer gleichmässig zunehmenden Position.
☐ Die Position des Objekts ist konstant.
☐ Das Objekt bewegt sich mit einer gleichmässig zunehmenden Beschleunigung.
☐ Das Objekt bewegt sich mit einer konstanten Beschleunigung, die nicht Null ist.
☐ Das Objekt bewegt sich mit einer gleichmässig zunehmenden Geschwindigkeit.

4. Nachfolgend sind Diagramme der Geschwindigkeit über der Zeit für fünf Objekte dargestellt. Alle Achsen haben den gleichen Massstab. Welches Objekt hatte die grösste Strecke während des Intervalls zurückgelegt?



☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

5. Die Positionen von zwei Blöcken (☐ und ■) in aufeinanderfolgenden Zeitintervallen von 0.2 s werden in der folgenden Abbildung durch die nummerierten Quadrate dargestellt. Die Blöcke bewegen sich nach rechts.



Haben die Blöcke immer die gleiche Geschwindigkeit?
☐ Nein.
☐ Ja, zum Zeitpunkt 2.
☐ Ja, zum Zeitpunkt 5.
☐ Ja, zu den Zeitpunkten 2 und 5.
☐ Ja, zu einem Zeitpunkt zwischen 3 und 4.

6. Ein Junge wirft eine Stahlkugel gerade nach oben. Betrachten Sie die Bewegung der Kugel erst, nachdem sie die Hand des Jungen verlassen hat, jedoch bevor sie den Boden berührt. Nehmen Sie an, dass die von der Luft ausgeübten Kräfte vernachlässigbar sind. Unter diesen Bedingungen ist (sind) die auf die Kugel wirkende(n) Beschleunigung(en):

☐ eine nach unten gerichtete Fallbeschleunigung und eine stetig abnehmende nach oben gerichtete Beschleunigung.

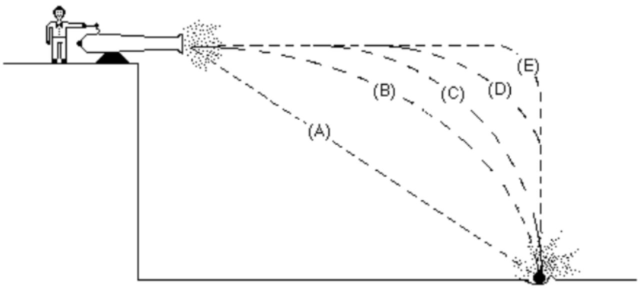
☐ eine stetig abnehmende nach oben gerichtete Beschleunigung von dem Moment an, in dem der Ball die Hand des Jungen verlässt, bis zum Erreichen des höchsten Punktes; auf dem Weg nach unten nimmt die Fallbeschleunigung stetig zu, da sich das Objekt der Erde nähert.

☐ eine fast konstante abwärts gerichtete Beschleunigung zusammen mit einer aufwärts gerichteten Beschleunigung, die stetig abnimmt, bis der Ball seinen höchsten Punkt erreicht; auf dem Weg nach unten gibt es nur eine konstante abwärts gerichtete Fallbeschleunigung.

☐ nur eine (fast) konstante abwärts gerichtete Beschleunigung.

☐ keine der obigen Möglichkeiten. Der Ball fällt aufgrund seiner natürlichen Tendenz, auf der Erdoberfläche zu ruhen, zurück auf den Boden.

7. Eine Kugel wird von einer Kanone von der Spitze einer Klippe abgefeuert, wie in der Abbildung unten dargestellt. Welchem der Wege würde die Kanonenkugel am ehesten folgen?



☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

8. Zwei Metallkugeln sind gleich gross, aber eine wiegt doppelt so viel wie die andere. Die beiden Metallkugeln rollen mit der gleichen Geschwindigkeit von einem horizontalen Tisch.

☐ Beide Kugeln treffen in etwa gleichem horizontalen Abstand von der Tischplatte auf dem Boden auf.

☐ Die schwerere Kugel trifft in etwa der Hälfte des horizontalen Abstands von der Tischunterlage auf den Boden auf als die leichtere Kugel.

☐ Die leichtere Kugel trifft in etwa der Hälfte des horizontalen Abstands von der Tischplatte auf den Boden auf als die schwerere Kugel.

☐ Die schwerere Kugel trifft den Boden wesentlich näher an der Tischplatte als die leichtere Kugel, aber nicht unbedingt in der halben horizontalen Entfernung.

☐ Die leichtere Kugel trifft den Boden deutlich näher an der Tischplatte als die schwerere Kugel, aber nicht unbedingt in der halben horizontalen Entfernung.

Aufgaben Kapitel B1

Weitere einfachere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:
https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0 im Kapitel 2.

1. Es ist allgemein bekannt, dass das Sonnenlicht etwa 8 min braucht, um die Erde zu erreichen. Bestimmen Sie damit die Entfernung zwischen der Sonne und der Erde.

Lsg: $x \approx 140\,\text{Mio km}$

2. Ein Läufer benötigt für einen Umlauf um eine 200 m Bahn eine Zeit von 25 s. Bestimmen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit, sogn. Schnelligkeit (oder engl.: speed).

Lsg: $\bar{v} = 8.0\,\text{m/s}$

3. Die Geschwindigkeit eines Lastwagens wachse gleichförmig in 20 s von 15 km/h auf 60 km/h an. Bestimmen Sie

a. die mittlere Geschwindigkeit,
b. die Beschleunigung und
c. die zurückgelegte Distanz.

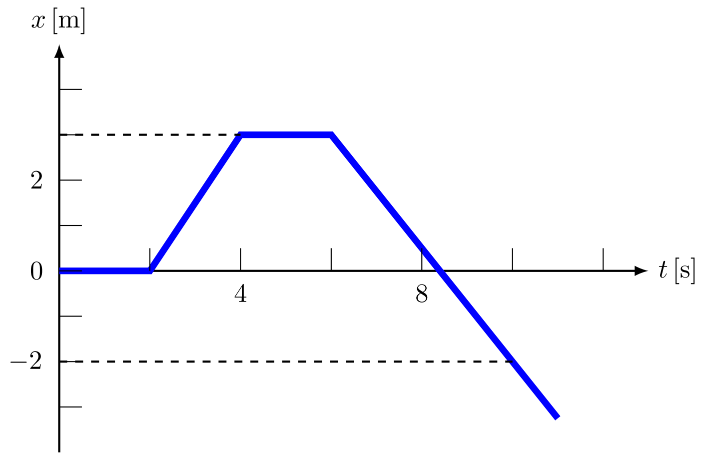
Lsg: **a.** $\bar{v} \approx 10\,\text{m/s}$ **b.** $a \approx 0.63\,\text{m/s}^2$ **c.** $x \approx 210\,\text{m}$

4. Ein Fahrrad starte aus der Ruhe mit einer konstanten Beschleunigung von $2.0\,\text{m/s}^2$ entlang einer geraden Linie. Bestimmen Sie

a. die Geschwindigkeit nach 5 s,
b. die zurückgelegte Distanz in den ersten 5 s und
c. die zurückgelegte Distanz in den zweiten 5 s.

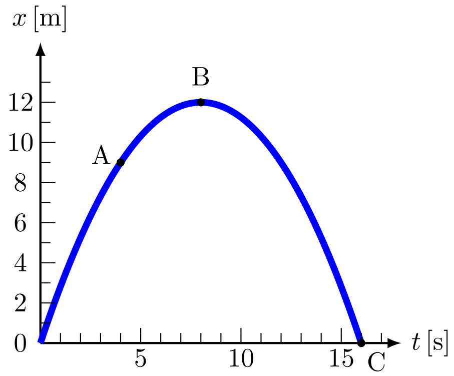
Lsg: **a.** $v_1 = 10\,\text{m/s}$ **b.** $x_1 = 25\,\text{m}$ **c.** $x_2 = 75\,\text{m}$

5. Eine Bewegung eines Gegenstandes entlang der x-Achse ist dargestellt im x-t-Diagramm (vgl. Abb.). Beschreiben Sie diese Bewegung und bestimmen Sie die jeweiligen Geschwindigkeiten.



Lsg: –

6. Lesen Sie für ein beschleunigtes Objekt die Geschwindigkeiten an den Punkten A, B und C aus dem x-t-Diagramm heraus.



Lsg: $v_\mathrm{A} = 1.5\,\mathrm{m/s}$, $v_\mathrm{B} = 0\,\mathrm{m/s}$, $v_\mathrm{C} = -3\,\mathrm{m/s}$

7. Ein Bus, der sich mit einer Geschwindigkeit von $20\,\mathrm{m/s}$ fortbewegt, beginne abzubremsen, in dem er seine Geschwindigkeit gleichförmig um $3.0\,\mathrm{m/s}$ pro Sekunde verringert. Ermitteln Sie den Bremsweg bis zum Stillstand des Busses.

Lsg: $x \approx 67\,\mathrm{m}$

8. Ein Auto beschleunige gleichmässig, während es zwei Messstellen passiert, die $30\,\mathrm{m}$ voneinander entfernt sind. Die gemessene Zeit zwischen den Messstellen betrage $4.0\,\mathrm{s}$. Die Geschwindigkeit des Autos an der ersten Messstelle sei $6.0\,\mathrm{m/s}$. Bestimmen Sie

a. die Beschleunigung des Autos und

b. seine Geschwindigkeit an der zweiten Messstelle.

Lsg: **a.** $a \approx 0.75\,\mathrm{m/s^2}$ **b.** $v_1 = 9\,\mathrm{m/s}$

9. Ein Auto werde aus der Ruhe während $2\,\mathrm{s}$ mit der Beschleunigung $5\,\mathrm{m/s^2}$ beschleunigt.

a. Welche Strecke legt es dabei zurück?

b. Welche Geschwindigkeit hat es dabei erreicht?

c. Mit der erreichten Geschwindigkeit fährt es nun während $30\,\mathrm{s}$ weiter. Welche Strecke hat es nun insgesamt zurückgelegt?

d. Leider endet die Fahrt abrupt in einem Baum, d. h. der Bremsvorgang dauert $0.1\,\mathrm{s}$. Welche Beschleunigung erfährt der Fahrer dabei?

Lsg: **a.** $x_1 = 10\,\mathrm{m}$ **b.** $v = 10\,\mathrm{m/s}$ **c.** $x = 310\,\mathrm{m}$ **d.** $a = -100\,\mathrm{m/s^2}$

10. Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Fahrtgeschwindigkeit und des Bremsweges in dem Sie

a. eine Beziehung zwischen dem Bremsweg x_min und der Fahrtgeschwindigkeit v_0 herleiten, wobei die Reaktionszeit t_RZ und die maximale Bremsbeschleunigung a_max gegeben sind.

b. Tragen Sie einige Punkte in ein x-v-Diagramm für die gefundene Beziehung ein. Nehmen Sie für die Reaktionszeit etwa $1\,\mathrm{s}$ und die maximale Bremsbeschleunigung $8\,\mathrm{m/s^2}$ an.

c. Durch Alkohol oder Drogen verändert sich die Reaktionszeit stark, etwa $1.5 - 2\,\mathrm{s}$. Stellen Sie auch diese Variante graphisch dar.

d. Welche Rolle spielt x_min sonst noch im Strassenverkehr, z. B. auf Autobahnen.

Lsg: –

11. Ein Lastwagen habe eine maximale Verzögerung (negative Beschleunigung) von $7.0\,\mathrm{m/s^2}$, und die Reaktionszeit des Fahrers bis zur Betätigung der Bremse betrage $0.5\,\mathrm{s}$. In der Nähe einer Schule solle das Tempo derart begrenzt werden, dass es allen Wagen möglich sein muss, auf einer Strecke von $4.0\,\mathrm{m}$ zum Stillstand zu kommen. Wie gross ist dann die maximal erlaubte Geschwindigkeit?

Lsg: $v_0 \approx 4.8\,\mathrm{m/s}$

12. Ein Ball werde auf dem Mond senkrecht nach oben geworfen und kehre zu seinem Ausgangspunkt nach 4 s zurück. Die Fallbeschleunigung auf dem Mond beträgt $1.6\,\mathrm{m/s^2}$. Bestimmen Sie die Startgeschwindigkeit des Balles.

Lsg: $v_0 \approx 3.2\,\mathrm{m/s}$

13. Ein Stein werde senkrecht mit einer Geschwindigkeit von $20\,\mathrm{m/s}$ nach oben geworfen. Er werde beim Herabfallen $5.0\,\mathrm{m}$ über der Stelle aufgefangen, an der er nach oben geworfen wurde. Wie schnell war der Stein, als er aufgefangen wurde?

Lsg: $v \approx -17\,\mathrm{m/s}$

14. Ein Aufzug werde aus der Ruhe zur Zeit 0 s mit konstanter Beschleunigung $1.0\,\mathrm{m/s^2}$ nach oben gezogen. Nach 5.0 s löst sich an der Unterseite des Aufzugs eine Schraube. Welche maximale Höhe kann die Schraube erreichen.

Lsg: $y_\mathrm{h} \approx 14\,\mathrm{m}$

15. Ein Löschflugzeug fliegt mit konstanter Geschwindigkeit $250\,\mathrm{km/h}$ auf konstanter Höhe $100\,\mathrm{m}$. Wie weit (horizontale Weite) vom Brandherd muss die Klappe geöffnet werden, damit das Wasser den Brandherd trifft?

Lsg: $x \approx 310\,\mathrm{m}$

16. Sie werfen einen Stein aus einer Anfangshöhe von $2.4\,\mathrm{m}$ unter einem Winkel zur Horizontalen von $45°$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $10\,\mathrm{m/s}$ ab.

- **a.** Bestimmen Sie die Wurfweite, wenn möglich auf zwei verschiedene Arten. Achtung der Wurf hat eine Anfangshöhe.
- **b.** Bestimmen Sie die Wurfhöhe.
- **c.** Bestimmen Sie die Endgeschwindigkeit kurz vor der Landung, d.h. Betrag und Richtung der Geschwindigkeit.

Lsg: **a.** $x_\mathrm{w} \approx 12\,\mathrm{m}$ **b.** $y_\mathrm{h} \approx 4.9\,\mathrm{m}$ **c.** $v \approx 12.1\,\mathrm{m/s}$, $\beta \approx -54°$

17. Ein Heissluftballon fliegt mit konstanter Geschwindigkeit $5\,\mathrm{m/s}$ vertikal nach oben. Ab einer Höhe von $50\,\mathrm{m}$ werfen Sie senkrecht zur Flugbahn des Ballons einen Ball mit der Geschwindigkeit $15\,\mathrm{m/s}$ hinaus. Wie weit müssen Sie gehen, um den Ball, der nicht weiter gerollt ist, zu finden, falls Sie den Ballon senkrecht unter dem Abwurf wieder verlassen?

Lsg: $x_\mathrm{w} \approx 56\,\mathrm{m}$

18. Sie möchten einen Ball über eine $8.0\,\mathrm{m}$ von ihnen entfernte Mauer mit einer Höhe von $5.0\,\mathrm{m}$ werfen. Der Ball erreicht seine maximale Höhe über der Mauer, welche der Mauerhöhe entspricht.

- **a.** Welchen Schusswinkel und
- **b.** welche Anfangsgeschwindigkeit müssen sie wählen?

(Tipp: Sie sind unendlich klein und die Mauer ist unendlich dünn.)

Lsg: **a.** $\alpha \approx 51°$ **b.** $v_0 \approx 13\,\mathrm{m/s}$.

19. Sie werfen einen Ball unter einem Winkel α ab. Mit dem Abwurf rennen sie los und versuchen den Ball einzufangen. Dies gelingt ihnen, wobei Sie ihn während ihrer Beschleunigungsphase fangen. Stellen Sie eine Beziehung zwischen α und ihrer Beschleunigung a her. (Ihre Körpergrösse dürfen Sie vernachlässigen. Wenn Sie sich das ganze nicht vorstellen können, schauen Sie sich folgendes Video an: Schlag den Raab - Werfen und Fangen)

Lsg: $a = g \cdot \cot\alpha$

Literaturverzeichnis

[1] URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter`, Juni 2012

[2] URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem`, Juni 2012

[3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935`

[4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays $B^0_{(\mathrm{s})}\mathrm{t}\mu^+\mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007

[5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807

[6] URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Steradiant`, Juni 2012

[7] Aristoteles,

[8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590

[9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997

[10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955

[11] URL: `http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html`, September 2013

[12] URL: `http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index`

[13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011

[14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG

[15] URL: `http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/`, April 2013

[16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007

[17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG

[18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994

[19] URL: `https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical`

[20] Hans Kammer, Irma Mgeladze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG

[21] URL: `https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal`

[22] Wikipedia, URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid`, August 2013

[23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010

[24] URL: `http://www.schulserver.hessen.de/`, Oktober 2013

[25] URL: `http://www.leifiphysik.de`, September 2013

[26] URL: `http://photos.zoochat.com`, Semptember 2013

[27] URL: http://www.lab-laborfachhandel.de, Oktober 2013

[28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,

[29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014

[30] URL: https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen, März 2024

[31] URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707

[32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press

[33] URL: http://ephex.phys.ethz.ch, Februar 2015

[34] URL: http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html, März 2015

[35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas opitscher Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962

[36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004

[37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018

[38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001

[39] URL: https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en, Juli 2018

[40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998

[41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869

[42] URL: http://www.tf.uni-kiel.de, März 2014

[43] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik), März 2014

[44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014

[45] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png, März 2014

[46] URL: http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscode.htm, August 2014

[47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494

[48] URL: http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm, Oktober 2014

[49] URL: http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm, Oktober 2014

[50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014

[51] URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639, Oktober 2017

[52] URL: https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen, Oktober 2017

[53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022

[54] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode, September 2022

[55] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg, November 2023

[56] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen, April 2024

[57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor

[58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.

[59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.

[60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

[61] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Relativität_der_Gleichzeitigkeit, August 2018

[62] URL: http://static.a-z.ch, März 2015

[63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925

[64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413

[65] URL: http://www.peter-glowatzki.de, Mai 2015

[66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941

[67] URL: http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche, Mai 2015

[68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)

[69] URL: http://w3.pppl.gov/, September 2015

[70] O. Höfling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wärme. 15. Auflage. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1994

[71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database, April 2018

[72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)

[73] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung, April 2018

[74] URL: http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von..., Juni 2012

[75] L. Susskind und G. Hrabovsky, The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics, Basic Books, 2014