

4 Himmelsmechanik für Anfänger

Lernziele

- Sie haben einen groben Überblick über die historische Entwicklung unseres heutigen Weltbildes.
 - Sie sind mit mindestens einem experimentellen Nachweis für dunkle Materie und dunkle Energie vertraut.
 - Sie kennen die Kepler'schen Gesetze und können sie anwenden.
 - Sie sind vertraut mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz und können Aufgaben damit lösen.
 - Sie verstehen den Zusammenhang zwischen Gravitationsbeschleunigung und Fallbeschleunigung auf der Erde.
 - Sie können Aufgaben zur Kreisbewegung von Himmelskörpern lösen.
 - Sie haben ein grundlegendes Verständnis dafür, wie unser Sonnensystem vermessen wurde.
 - Sie wissen, wie man die kosmologischen Geschwindigkeiten berechnet.
-

In diesem Abschnitt "Himmelsmechanik für Anfänger" sollen einige Grundlagen über die Planetenbewegungen vermittelt werden. Bevor wir die *Keplerschen Gesetze* einführen, machen wir einen kurzen Exkurs in die Vergangenheit und betrachten die *geschichtliche Entwicklung* bis heute. Damit sind die Grundlagen gelegt, um das *Newtonsche Gravitationsgesetz* zu formulieren, welches die Zusammenfassung der Keplerschen Gesetze zu einem einzigen Gesetz darstellt. Im Abschnitt *Gravitationsfeld* wird dann ein erster Blick auf den Feldbegriff geworfen. Als Anwendung dieser Gesetze betrachten wir schliesslich die *Vermessung des Sonnensystems*.

Blicken wir also zurück auf die Anfänge der Himmelsmechanik, als sie noch Astronomie hiess.

4.1 Historische Entwicklung

Der folgende Text (bis Kap. 4.1.7) wurde teils sinngemäss, teils wörtlich aus [14] übernommen. Er ist teilweise durch eigene Anmerkungen ergänzt.

4.1.1 Astronomie, die älteste Wissenschaft

Die Astronomie gilt als eine der ältesten Wissenschaften. Der Grund für dieses frühe Interesse ist leicht einzusehen. Die enge und zeitlich wiederkehrende Koinzidenz des nächtlichen Himmels mit irdischen Veränderungen, wie z.B. des Klimas oder der Vegetation, wurde sicherlich schon in vorgeschichtlicher Zeit wahrgenommen. Viele Völker, die über wenig oder gar kein Licht verfügten, erlebten den Himmel als alltäglichen Bekannten und nicht als gelegentliches Urlaubskuriosum wie die heutigen Europäer.

Das Zusammentreffen des ersten sommerlichen Morgenaufgangs des Sirius (eines der hellsten Sterne am Himmel) mit der jährlichen Nilüberschwemmung ist wohl das eindrucksvollste Beispiel für eine Koinzidenz, aus der ein Zusammenhang konstruiert wurde: *Sirius bewirkt die fruchtbringende Überschwemmung des Nils*. Der Schritt zur Astrologie liegt auf der Hand.

Das Bedürfnis nach zeitlicher Orientierung führt zu Uhr und Kalender. Als Uhr bietet sich tagsüber die Sonne an. Nachts kann ein heller Stern diese Rolle übernehmen. Für den Kalender ist der wechselnde Mond ein selbstverständliches Bezugssystem. Der Monat findet sich daher in allen Kulturen. Das Jahr setzt sich durch die Vegetationsperioden als kalendarische Einheit durch. Am Himmel zeigt sich das Jahr durch die wechselnden Sternbilder, deren Abfolge sich jährlich wiederholt. Die so definierten Tage und Monate werfen Probleme auf. Die Länge des Monats ist kein ganzzahliges Vielfaches des Jahres. Die Anzahl der Tage im Jahr ist nicht ganzzahlig. Hinzu kommt, dass der an den Sternen gemessene Tag (sog. Sterntag) kürzer ist als der am Sonnenlauf gemessene Tag (sog. Sonnentag), wobei letzterer im Laufe des Jahres seine Länge ändert.

4.1.2 Ägyptische Astronomie

Der Kalender der Ägypter hatte bis in die Ptolemäerzeit ein Jahr mit 365 Tagen, das sie auch für ihre religiösen Feste nutzten, so dass sie nicht mehr an die Jahreszeiten gebunden waren. Das landwirtschaftliche Jahr hingegen hatte 365.25 Tage. Über das astronomische System ist wenig bekannt. Es war ein geozentrisches Weltbild mit einer flachen Erde.

4.1.3 Astronomie Mesopotamien

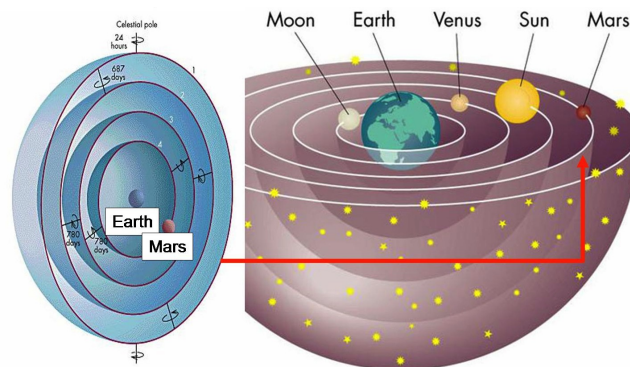
In Mesopotamien¹ gab die Astrologie der Astronomie wichtige Impulse. Auch hier ist von einem agrarischen Ursprung der Astronomie auszugehen. Die Koinzidenz von Ereignissen verführt oft zur Annahme von Kausalitäten, wie das bereits erwähnte Beispiel der Nilüberschwemmung und des Erscheinens des Sirius zeigt.

Die altbabylonische Kultur mit der Dynastie Hammurapi (ca. 1900-1500 v. Chr.) revidiert den Kalender. Der Monatsbeginn wird auf den Abend der ersten Sichtbarkeit der neuen Mondsichel festgelegt, der Monat hat dann 29 bzw. 30 Tage². Das Jahr beginnt im Frühling mit dem Anfang eines neuen Monats.

Durch die Beobachtung aller sichtbaren Planeten und Sternbilder entwickelt sich unter anderem die Astrologie des Tierkreises. Sie begnügt sich nicht mehr mit Ereignissen von allgemeinem Interesse, sondern will aus der Stellung der Planeten zu den Sternbildern zum Zeitpunkt der Geburt das Schicksal des Einzelnen vorhersagen. Da Kinder auch tagsüber oder bei schlechtem Wetter geboren werden, müssen die Positionen der Planeten durch Interpolation der Bahnen berechnet werden. Diese Aufgaben befruchteten Mathematik und Astronomie. Die babylonischen Beobachtungsarchive waren ausserordentlich wertvoll und bildeten zusammen mit den Rechenmethoden die Grundlage der griechischen Astronomie.

4.1.4 Griechische Astronomie

Die Griechen haben mit Eudoxos einen ersten ernstzunehmenden Astronomen hervorgebracht, denn ein Schüler von Eudoxos (dessen Name nicht bekannt ist) sagt die Sonnenfinsternis vom 12. Mai 361 voraus. Eudoxos (ca. 400-347 v. Chr.) war selbst ein hervorragender Mathematiker. Um die Bewegung der Planeten zu beschreiben, erfand er für jeden Planeten (auch für Sonne und Mond) konzentrische Sphären mit dem Mittelpunkt in der Erde, deren kombinierte Rotationen die scheinbare Bewegung am Himmel erklärten (vgl. Abb.).



Aristoteles hat dieses System übernommen. Die Idee der Sphären prägte die Astronomie nachhaltig und verschwand erst um 1500 mit den Arbeiten von Tycho Brahe.

Aristoteles (384-322 v. Chr.) nimmt an, dass die Erde eine Kugel ist. Als Beweis führt er den kreisförmigen Schatten an, wie wir ihn bei einer Mondfinsternis sehen. Er zitiert auch die Erfahrung von Reisenden, die, je nachdem, ob sie nach Norden oder nach Süden fahren, unterschiedliche Sterne sehen.

Aristarch von Samos (ca. 310-230 v. Chr.) ist der erste Astronom, der die Sonne eindeutig in den Mittelpunkt stellt und der Erde und den Planeten Kreisbahnen um die Sonne zuweist. Dabei schreibt er der Erde eine Eigenrotation zu. Dies hinderte ihn jedoch nicht daran, in seinen mathematischen Beschreibungen das geozentrische Weltbild zu verwenden.

Die konzentrischen Sphären des Eudoxos implizieren, dass die Planeten immer den gleichen Abstand von der Erde haben. Dies wurde jedoch bereits in der Antike als unwahrscheinlich angesehen, da die Helligkeitsschwankungen von Venus und Mars zu gross sind. Man kann davon ausgehen, dass Aristarch an der Einführung der exzentrischen Bewegungen beteiligt war.

¹Mesopotamien, auch Zweistromland, bezeichnet die durch die grossen Flusssysteme von Euphrat und Tigris geprägte Kulturlandschaft Vorderasiens.

²Im Durchschnitt sind es 29.53 Tage, was dem synodischen Monat entspricht.

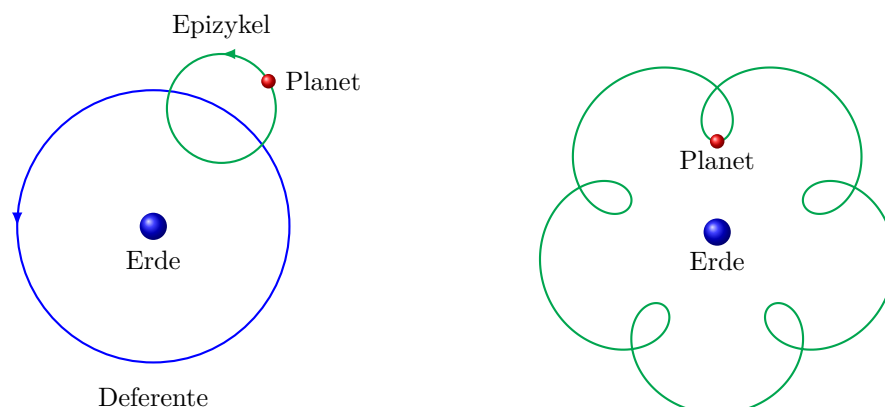
Die griechische Astronomie erklärt die Bewegung der Himmelskörper als naturwissenschaftliches Phänomen, dessen Grundlagen Beobachtung und Mathematik sind. Die Mathematik kommt besonders in der Theorie der Epizyklen zum Ausdruck. Als Beobachtungsmaterial wurde hauptsächlich das geozentrische Weltbild verwendet, da es für das damalige Verständnis gewichtige Gründe gegen das heliozentrische System gab: Wenn sich die Erde mit rasender Geschwindigkeit im Kreis um die Sonne dreht, dann müsste doch etwas, was nicht fest verankert ist, weggeschleudert werden.

Ptolemäus, der im 2. Jahrhundert n. Chr. in Alexandria lebte, beschreibt im *Almagest* das griechische astronomische Wissen seiner Zeit. Der Kosmos besteht aus Schalen. Die äusserste Schale bilden die Fixsterne. Die Bahnen der Planeten (einschliesslich Mond und Sonne) werden als Epizykelbahnen beschrieben, in deren Zentrum die kugelförmige Erde steht.

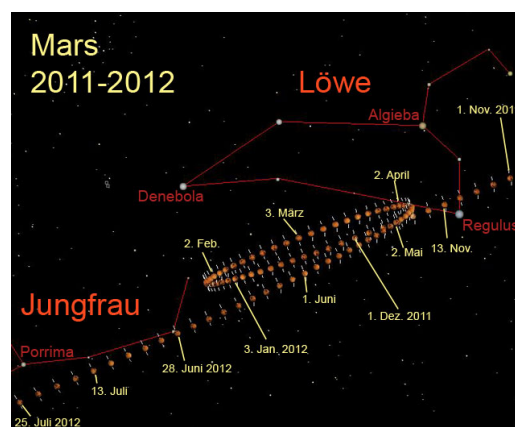
Epizykeltheorie

Mit dieser so genannten Epizykeltheorie war es im Laufe der Zeit möglich, die Positionen der Planeten auf wenige Bogenminuten genau zu bestimmen. Diese Theorie ist also sehr genau und gibt die Planetenpositionen auch nach heutigen Vorstellungen völlig korrekt wieder.

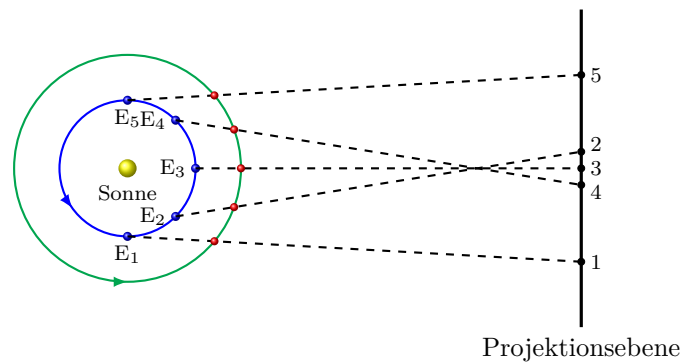
Nach Ptolemäus durchläuft der Planet einen kleinen Kreis, den Epizykel, dessen Mittelpunkt sich auf einem grösseren Kreis, dem Deferenten, um die ruhende Erde bewegt (siehe Abbildung links). Läuft der Planet auf dem Epizykel in die gleiche Richtung wie das Epizykelzentrum auf dem Deferenten, so verstärken sich die beiden Bewegungen und der Planet bewegt sich von der Erde aus gesehen sehr schnell. Bewegt sich der Planet dagegen auf dem Epizykel in die entgegengesetzte Richtung, so scheint er am Himmel rückwärts zu laufen. Die ungleichmässige Schleifenbewegung des Planeten wird also auf die Überlagerung zweier gleichförmiger Kreisbewegungen zurückgeführt. Ein solches System muss für jede Planetenbahn entwickelt werden. Eine solche Bewegung des Mars könnte etwa so aussehen (siehe Abb. rechts).



Diese Schleifen können immer wieder am Nachthimmel verfolgt werden. Das folgende Bild zeigt eine solche Schleife für den Mars [15].



Wie lassen sich solche Schleifen aus heutiger Sicht, d.h. im heliozentrischen Weltbild, erklären? Dazu ist es hilfreich, das folgende Schema zu betrachten. Im Zentrum steht die Sonne. Der erste Kreis stellt die Erdbahn dar, der zweite die Marsbahn z. B. Verbindet man nun fünf Positionen der Erde mit den entsprechenden Positionen des Mars, so erhält man auf einer entfernten Projektionsebene ebenfalls fünf Punkte, die jedoch eine andere Reihenfolge haben, was die Rückläufigkeit des Mars zeigt.



Betrachtet man dieses Bild, so erkennt man sehr schnell, dass die Rückläufigkeit von der Projektionsebene abhängt, d.h. je näher die Projektionsebene an den Planetenbahnen liegt, desto geringer ist die Rückläufigkeit. Dies ist jedoch zu kurz gedacht, da die Position der Projektionsebene durch die Fixsterne bestimmt wird. Diese sind viel weiter entfernt als jede gedachte Projektionsebene.

4.1.5 Astronomie im Mittelalter

In der Spätantike galt allgemein ein geozentrisches Weltbild, das heute als "Ptolemäisches System" bekannt ist. Als im 4. Jahrhundert das Christentum zur bestimmenden geistigen Macht wurde, verlor das wissenschaftlich begründete Weltbild an Ansehen. Was der Bibel widersprach, galt als falsch. Der Untergang der Sonne war nicht die Fortsetzung einer Kreisbahn, sie versteckte sich hinter den nordischen Gebirgen und eilte von dort direkt auf ihren Ausgangspunkt zu. Daran änderte auch die unterschiedliche Schattenlänge im Norden und Süden nichts. Das war ein Rückschritt um 1000 Jahre.

Das ptolemäische Erbe blieb im arabischen Raum erhalten, ging aber auch hier nicht verloren. Der englische Mönch Bede (673-735) übernahm die antike Idee.

4.1.6 Festigung des heliozentrischen Weltbild

Kopernikus (1473-1543) griff das heliozentrische Weltbild des Aristarch wieder auf und zeigte, dass es die vorhandenen Beobachtungen viel natürlicher erklärte, als das geozentrische. Kopernikus hatte die alten Daten neu interpretiert. Es brauchte aber die neuen Beobachtungen von Tycho Brahe (1546-1601), deren Auswertung durch Kepler (1571-1630) und die Entdeckung der Jupitermonde mit dem Teleskop durch Galilei (1610) um dem heliozentrischen System zum Durchbruch zu helfen.



N. Kopernikus
(1473-1543)

Damit war die Sonne wieder das Zentrum der Planetenbewegungen. Die tägliche Drehung der Himmelskugel wurde durch die Eigendrehung der Erde erklärt (bestätigt erst durch das Experiment von Foucault, 1851). Die jährliche Bewegung der Sonne durch die Sternbilder des Tierkreises ergibt sich aus dem Umlauf der Erde um die Sonne. Mit Kopernikus setzt sich auch die Überzeugung durch, dass genaue Beobachtung die Grundlage für fruchtbares Denken sein muss.



Tycho Brahe
(1546-1601)

Kopernikus hatte sich auf den Almagest gestützt, sah aber, dass diese Daten einer Revision bedurften. Dieser gewaltigen Aufgabe widmete sich Tycho Brahe, der fast 40 Jahre lang den Lauf des Mondes, der Planeten und der Sonne beobachtete. Er veröffentlichte sein eigenes kosmisches System, das zwischen dem heliozentrischen und dem geozentrischen Weltbild angesiedelt war. Tycho Brahe wusste, dass in seinen Beobachtungen mehr steckte, als er selbst herausgefunden hatte. Deshalb lud er Kepler zu sich ein. Brahe starb jedoch wenige Monate nach Keplers Ankunft in Prag.

Brahes Beobachtungen waren so gut, dass Kepler mit ihrer Hilfe die Planetenbahnen fast Punkt für Punkt nachzeichnen konnte. Nach der Auswertung dieser Daten gab es keinen Zweifel mehr am kopernikanischen Weltbild. Kepler fand die drei nach ihm benannten Gesetze (vgl. 4.2). Kepler wies darauf hin, dass seine Gesetze auch für die Jupitermonde gelten. Damit war das geozentrische Weltbild widerlegt.

4.1.7 Hin zur Astrophysik

Fraunhofer entdeckte 1814 die Absorptionslinien³ (siehe Abbildung unten) im Sonnenspektrum. Die eindeutige Erklärung des Phänomens gelang Kirchhoff 1859, als er das Sonnenspektrum mit Spektren verglich, die er im

³Absorptionslinien sind schwarze Bänder in einem Spektrum. Diese Linien können eindeutig einem Element zugeordnet werden. Eine solche Linie zeigt an, dass dieses Element im leuchtenden Körper vorhanden ist und diese Frequenz von diesem Element absorbiert wird.

Labor erzeugt und untersucht hatte. Damit konnten sie zeigen, dass auf der Sonne die von der Erde bekannten Elemente in gasförmigem Zustand vorhanden sein müssen. Ähnliche Linien wurden auch in den Spektren von Sternen gefunden. Mit dieser Identifizierung beginnt die Astrophysik.



Um 1900 war der Begriff "heliozentrisches" Weltbild noch wörtlich gemeint. Die beobachtete Verteilung der Sterne schien der Sonne eine Vorrangstellung einzuräumen. So kannte man 1900 zwar die meisten Entfernungen (Planeten, nächstgelegene Sterne), aber die Milchstrasse war immer noch ein Rätsel.

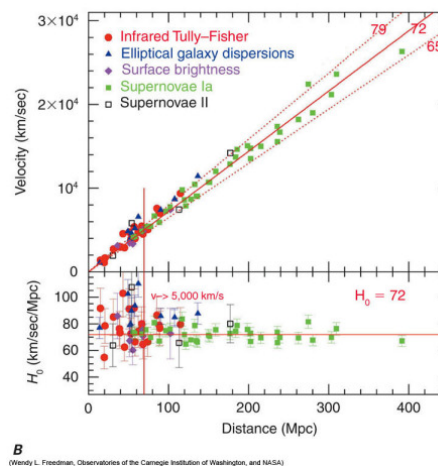
Herschel vertrat 1811 die Ansicht, dass die "Nebel" verschiedene Kondensationsstadien auf dem Weg zu einem Stern seien. Herschel starb 1822, und es vergingen 100 Jahre, bis 1917-1924 durch intensive Beobachtung und Auswertung der endgültige Beweis für die Existenz dieses Nebels erbracht wurde. Er entsprach einer Spekulation, die Herschel bereits vor 1811 angestellt hatte. Er glaubte nämlich, dass es sich um eigene Sternsysteme handeln könnte.

Ab 1925 widmete Hubble einen Grossteil seiner Beobachtungs- und Forschungszeit den Entfernungen, Helligkeiten, Durchmessern und der Verteilung der Nebel. Aus diesen Arbeiten leitete der Belgier Georges Lemaître 1927 die Expansion des Universums ab. Er entdeckte, dass die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie ein dynamisches Universum ergeben. Diese Erkenntnis brachte er mit den bereits entdeckten Rotverschiebungen⁴ in Verbindung. von Sternen und Hubble-Entfernungen entsprechen. Lemaître hatte das Hubble-Gesetz bereits 1927 in den *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* veröffentlicht:

$$v = Hr,$$

wobei v die Fluchtgeschwindigkeit, r die Entfernung und H die Hubble-Konstante⁵ sind. Lemaître leitete theoretisch ab, dass sich Galaxien umso schneller entfernen, je weiter sie von uns entfernt sind. Dieses Ergebnis fand er durch Beobachtungen bestätigt. Er fand einen Wert für die Konstante, die später nach Hubble benannt wurde, der 1929 durch die Arbeiten von Hubble weitgehend bestätigt wurde. Lemaître betonte, dass die Flucht der Galaxien nicht als Bewegung in einem festen Raum von uns weg zu verstehen sei, sondern im Sinne der Allgemeinen Relativitätstheorie als Ausdehnung des Raumes.

Eine aktuelle Messung zeigt die folgende Abbildung, in der im oberen Rechteck die Geschwindigkeitsabhängigkeit für Sterne in verschiedenen Galaxien als Funktion der Entfernung und im unteren Rechteck die Hubble-Konstante als Funktion der Entfernung dargestellt ist. Die obere Grafik zeigt eine klare lineare Abhängigkeit und die untere eine Unabhängigkeit, was auf eine Konstante hindeutet.



Der momentane (2012) Wert für die Hubble-Konstante ist:

$$H_0 = (74.3 \pm 2.1) \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mps}},$$

wobei $1 \text{ ps} \approx 3.26 \text{ Lj} \approx 3.09 \cdot 10^{16} \text{ m}$ ist.

⁴Als Rotverschiebung elektromagnetischer Wellen bezeichnet man die Verlängerung der gemessenen Wellenlänge gegenüber der ursprünglich ausgesandten Strahlung. Die Grösse z der Rotverschiebung wird als Verhältnis der Wellenlängenänderung zur ursprünglichen Wellenlänge angegeben: $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$. Der Name leitet sich von den entsprechenden Verhältnissen im sichtbaren Spektrum ab, in dem die längsten Wellenlängen dem roten Licht entsprechen.

⁵Die Hubble-Konstante ist vom sogn. Weltalter t_0 abhängig, d. h. $H = H(t)$ und $H_0 = H(t_0)$.

4.1.8 Kosmologie: Erste Schritte

Im Gegensatz zur Astronomie befasst sich die Kosmologie nicht mit Himmelskörpern wie Planeten, Sternen oder gar Galaxien, sondern erhebt den Anspruch, ein Modell des gesamten Universums zu sein. Zum ersten Mal in der Geschichte lassen sich fast alle kosmologischen Überlegungen in ein *einfaches* Modell, das so genannte Standardmodell der Kosmologie, einordnen. Im Folgenden sollen einige Ergebnisse daraus beispielhaft und ohne Anspruch auf Vollständigkeit vorgestellt werden. (Resultate und Text aus [16].)

Friedmann-Modell

Von den vier Grundkräften, die die Physik kennt, kann nur eine das Universum beschreiben: die Gravitation. Die Gravitation wird durch Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie (ART) beschrieben. Die so genannten Feldgleichungen der ART sind kompliziert, und um sie zu lösen, muss man bestimmte Eigenschaften der Lösung (in diesem Fall unseres Universums) voraussetzen. Diese Eigenschaften sind:

- die Homogenität im Raum, d. h. das Universum sieht in allen Richtungen gleich aus und
- die Isotropie, d. h. es gibt keinen bevorzugten Beobachter.

Mit dieser zweiten Eigenschaft überwinden wir das kopernikanische Prinzip: Wir stehen nicht nur nicht mehr im Mittelpunkt der Welt, sondern ein solcher Mittelpunkt existiert überhaupt nicht.

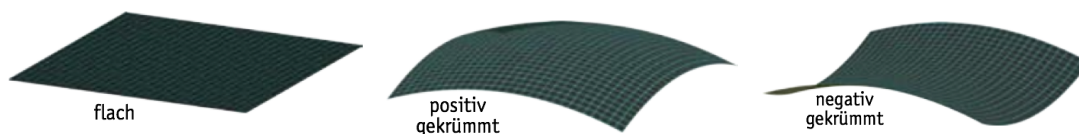
Setzt man diese beiden Annahmen in die Gleichungen ein, so erhält man die nach ihrem Entdecker benannten Friedmann-Gleichungen⁶. Die Friedmann-Gleichungen zeigen, dass der gesamte Materie- und Energieinhalt des Universums bestimmt, ob und wie es sich ausdehnt oder zusammenzieht. Es genügt also, die Bewegung des Universums zu messen, um Rückschlüsse auf seinen Materie- und Energiegehalt zu ziehen. In jüngster Zeit ist es nicht nur gelungen zu zeigen, dass die Friedmann-Modelle ein konsistentes Bild von der Entwicklung des Universums liefern, sondern auch ihre vier Parameter mit bisher ungeahnter Genauigkeit zu bestimmen. Diese vier Parameter sind die Energie- bzw. Massendichten

- der baryonischen Materie Ω_b ,
- der Strahlung Ω_r ,
- der Dunklen Materie Ω_m und
- der Dunklen Energie Ω_Λ .

Der Dichteparameter Ω ist eine dimensionslose Grösse und wird berechnet aus

$$\Omega_x = \frac{\rho_x}{\rho_k}$$

wobei $\rho_k = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-26} \text{ kg/m}^3$ die kritische Dichte ist; mit H_0 dem Hubble-Parameter und G der Gravitationskonstante. ρ_x ist die Dichte von der Materie x . Die kritische Dichte wird so bestimmt, dass das Universum gerade flach ist. Die Gesamtdichte ist verantwortlich dafür, welche geometrische Struktur der Raum hat. Da gibt es drei Möglichkeiten (vgl. Abb.).



Die Gesamtdichte bestimmt, ob der Raum flach oder positiv bzw. negativ gekrümmt ist. Ist sie grösser bzw. kleiner als die kritische Dichte, so ist der Raum positiv bzw. negativ gekrümmt, andernfalls ist er flach. Damit ergibt sich für das Universum folgende Beziehung:

$$\Omega_b + \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda \begin{cases} > 1, & \text{positiv gekrümmt} \\ = 1, & \text{flach} \\ < 1, & \text{negativ gekrümmt} \end{cases}$$

Zur genauen Bestimmung des Friedmann-Modells benötigt man also vier Dichteparameter und zusätzlich die Hubble-Konstante, da die kritische Dichte durch die Hubble-Konstante bestimmt wird. Heutige Messungen zeigen, dass die Gesamtdichte des Universums in der Nähe der kritischen Dichte liegt, so dass davon ausgegangen werden kann, dass wir in einem flachen, d.h. euklidischen Universum leben.

⁶Alexander Alexandrowitsch Friedmann (4. Juni in Sankt Petersburg - 16. September 1925 in Leningrad) war ein russischer Physiker, Geophysiker und Mathematiker.

Entstehung der leichten Elemente

Mit Hilfe der Spektren von Sternen oder interstellarem Gas konnte der Anteil von Helium an der baryonischen Materie gemessen werden. Dieser Anteil beträgt circa 25%, was weitaus höher ist als das, was man in den 1930er Jahren durch Wasserstoff-Fusion in Sternen erwartet hatte.

In den 1940er Jahre vermutete George Gamow⁷, dass das Universum als Ganzes das Helium erbrütet haben könnte. Dazu musste das Universum im frühen Stadium hinreichend heiss gewesen sein und es musste zudem eine thermische Strahlung entstanden sein, die mittlerweile zwar abgekühlt, aber weiterhin vorhanden ist. Gamow konnte nicht nur die Existenz einer kosmischen Strahlung (auch bekannt als kosmische Hintergrundstrahlung, CMB) voraussagen, sondern auch die heutige Temperatur des Strahlungshintergrunds berechnen. Seine Berechnungen ergaben einen Wert von einigen Kelvin.

Bereits drei Minuten nach dem Urknall war das Universum zu stark abgekühlt, um Fusionsprozesse nennenswert stattfinden zu lassen. In dieser frühen Phase spielten nur Photonen eine Rolle für die Elemententstehung, da nur Strahlung vorhanden war. Die verfügbare Zeitspanne zur Elemententstehung wurde dementsprechend kürzer, je höher die Strahlungsdichte war. Je höher die Baryondichte war, desto mehr Fusionsreaktionen konnten stattfinden. Ein niedriges Baryonen-zu-Photonen-Verhältnis führte folglich zu einer geringeren Häufigkeit an Helium oder umgekehrt. Aus den Messungen der Photonenanzahldichte lässt sich die Dichte der baryonischen Materie im Universum ableiten. Das Ergebnis zeigt, dass nur etwa vier Prozent der kritischen Dichte aus baryonischem Material ($\Omega_b \sim 4\%$) bestehen.

Dunkle Materie

Diese von Gamow berechnete Dichte war nicht überraschend. In den 30er Jahren erkannte Zwicky⁸ erkannt, bereits, dass im Universum ein Grossteil der Materie unsichtbar ist.

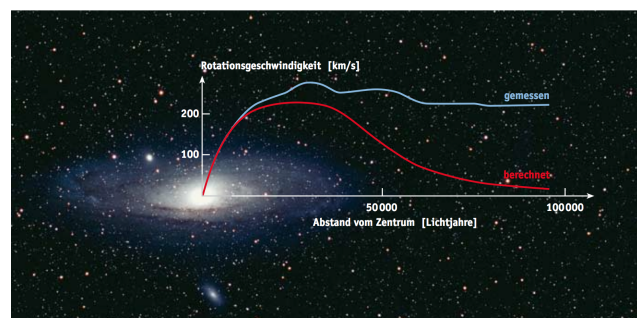


Fritz Zwicky
(1898–1974)

Damals untersuchte der Schweizer Fritz Zwicky die Geschwindigkeiten der Galaxien innerhalb von Galaxienhaufen. Er stellte fest, dass diese Geschwindigkeiten im Bereich von etwa 1000 km/s liegen müssen. Zunächst identifizierte man Galaxienhaufen als Ansammlungen von einigen hundert Galaxien auf engem Raum.

Wie viel Masse braucht es, um Galaxien zusammenzuhalten, die sich mit solchen Geschwindigkeiten bewegen?

Zwicky stellte fest, dass der Haufen etwa 10^{15} Sonnenmassen enthalten muss, was der Masse von etwa 10 000 Galaxien entspricht. Doch davon sind nur etwa 1000 sichtbar. Die folgende Abbildung verdeutlicht die Diskrepanz zwischen der gemessenen und der berechneten Umlaufgeschwindigkeit von Sternen in Spiralgalaxien.



Ein Vergleich mit unserem Sonnensystem lässt darauf schliessen, dass Galaxien nicht von einer zentralen Masse dominiert werden können. Stattdessen muss sich die gesamte Materie in ihnen sehr weit verteilen, wesentlich weiter als das Licht, das wir von den Galaxien sehen können. Wie weit man sich auch vom Zentrum einer typischen Galaxie entfernt, das Verhältnis von nicht-leuchtender zu leuchtender Materie scheint sich dabei zu vergrössern.

Wenn ungefähr 10% der Masse in Galaxienhaufen baryonisch ist und dieses Verhältnis für das gesamte Universum typisch ist, dann sollte die gesamte Materiedichte im Universum etwa das Zehnfache der baryonischen Dichte ausmachen. Letztere belief sich auf etwa 4% der kritischen Dichte, was bedeutet, dass die Gesamtmaterie etwa

⁷George Anthony Gamow, 4. März 1904 in Odessa, damals Russisches Kaiserreich, heute Ukraine - 19. August 1968 in Boulder, Colorado) war ein russischer, nach seiner Flucht 1934 in den USA tätiger Physiker und Hochschullehrer. Er trug wesentlich zur Atomphysik und zur Urknall-Theorie bei und sagte 1946 die kosmische Hintergrundstrahlung voraus, 18 Jahre bevor sie entdeckt wurde.

⁸Fritz Zwicky (14. Februar 1898 in Warna, Bulgarien - 8. Februar 1974 in Pasadena, Kalifornien) war ein Schweizer Physiker und Astronom, der vorwiegend am California Institute of Technology (Caltech) wirkte.

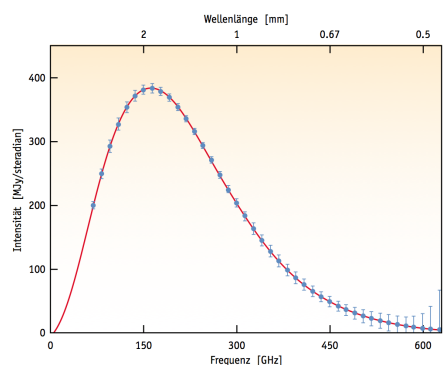
40% der kritischen Dichte entspricht. Genauere Berechnungen bestätigen diese Annahme im Prinzip, kommen aber auf einen Wert von Materiedichten um 30% der kritischen Dichte ($\Omega_m \sim 26\%$).

Thermische Hintergrundstrahlung

Die Entdeckung des kosmischen Mikrowellenhintergrunds (CMB) geht auf das Jahr 1965 zurück. Im Mai veröffentlichten Penzias und Wilson eine Arbeit, die die Entdeckung einer offenbar vollkommen richtungsunabhängigen Strahlung bei einer Wellenlänge von 74 Millimetern beschrieb. Eine andere Arbeit von Dicke, Peebles, Roll und Wilkinson sah den kosmischen Ursprung dieser Strahlung als eine Möglichkeit.

Damit drängten sich zwei Fragen in den Vordergrund: Zum einen: Handelt es sich bei der entdeckten Strahlung tatsächlich um thermische Strahlung? Des Weiteren sollte der CMB nur annähernd isotrop sein und bei genauer Beobachtung ebenfalls Strukturen zeigen, da unser Universum nur eine Annäherung an einen homogenen und isotropen Friedmann-Kosmos darstellt. Entsprechend lautete die zweite Frage: Gibt es Abweichungen von der idealen Isotropie des CMB, die mit den heutigen Strukturen im Einklang stehen? Beide Fragen erwiesen sich als sehr fruchtbar, erforderten jedoch bis zum Jahr 1992 eine Antwort.

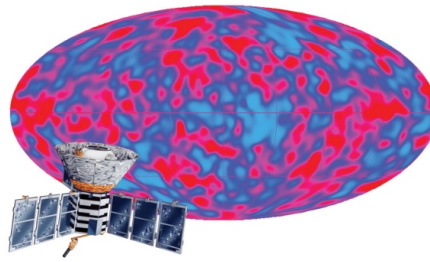
Es war klar, wie die erste Frage zu überprüfen war. Es wäre notwendig, ein Spektrum des CMB aufzunehmen und festzustellen, ob es die wohlbekannte Form des Spektrums eines thermischen Strahlers aufweist, das sogenannte Planck-Spektrum. Tatsächlich zeigt das Spektrum des Cobe-Satelliten vom kosmischen Mikrowellenhintergrund (CMB) das bisher genaueste experimentell bestätigte Planck-Spektrum, einschliesslich aller Labormessungen. Die Messung ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Dabei entspricht die rote Kurve der theoretischen Verteilung des Planck-Spektrums und die blauen Punkte sind die entsprechenden Messwerte. Die Fehlerbalken der einzelnen Messpunkte entsprechen einer Standardabweichung von 400.



Die daraus abgeleitete Temperatur von 2.728 Kelvin bestätigt Gamows Abschätzungen aus den 1940er Jahren auf eindrucksvolle Weise. Die Grammatik wurde auf ihre Korrektheit hin überprüft. Es wurden keine subjektiven Bewertungen vorgenommen. Der Unterschied zur Messung von Penzias und Wilson liegt darin, dass diese von der Erde aus gemessen haben und die Atmosphäre daher viel absorbiert hatte. Bei der Wortwahl wurde auf eine präzise Verwendung fachspezifischer Vokabeln geachtet. Zudem wurde auf die Verwendung von Kontraktionen und umgangssprachlicher Ausdrucksweise verzichtet.

Zur zweiten Frage musste zunächst geklärt werden, welche Struktur man im kosmischen Mikrowellenhintergrund aufgrund der heutigen Strukturen im Universum erwartete. Es ist einfach zu berechnen, dass der CMB freigesetzt wurde, als das Universum auf ungefähr 3000 Kelvin abgekühlt war, was etwa tausendmal wärmer als heute ist. Da sich die Strahlungstemperatur im Universum proportional zur Ausdehnung des Universums verringert, muss ein beliebiger Ausschnitt des Universums etwa tausendmal kleiner als heute gewesen sein. Das bedeutet, dass die kosmischen Strukturen, deren Amplitude heute messbar ist, zum Zeitpunkt der Entstehung der kosmischen Hintergrundstrahlung ungefähr tausendmal kleiner gewesen sein sollten. Daraus lässt sich schließen, dass die Hintergrundstrahlung eine Temperaturschwankung im Millikelvin-Bereich aufweisen sollte. Durch immer präzisere Messungen wurde im Laufe der Jahre festgestellt, dass solch starke Temperaturschwankungen nicht vorliegen.

Jim Peebles schlug einen eleganten Ausweg vor. Er argumentierte, dass Schwankungen im Millikelvin-Bereich nur dann zu erwarten seien, wenn die gesamte Materie im Universum baryonisch und somit in der Lage wäre, mit Licht zu interagieren. Wenn Dunkle Materie, die den Grossteil der kosmischen Strukturen ausmacht, jedoch nicht mit Licht interagieren kann, würden die Temperaturschwankungen im CMB etwa um das Hundertfache geringer ausfallen und im Bereich von einigen zehn Mikrokkelvin liegen. Es war ein Triumph dieser Überlegung, als schliesslich der COBE-Satellit genau solche Schwankungen im kosmischen Mikrowellenhintergrund fand (vgl. Abb.).



Damit wurde ein weiterer Nachweis erbracht, dass Dunkle Materie nicht mit Licht interagiert, es sei denn, dies wird ausdrücklich angegeben. Die Bestätigung der Temperaturschwankungen im kosmischen Mikrowellenhintergrund ist eine weitere bedeutende Leistung des COBE-Satelliten, die 2006 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde.

Die Strukturen im kosmischen Mikrowellenhintergrund werden durch drei physikalische Effekte verursacht, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll. Mit Ausnahme einer Art von Schwingungen, die als akustische Schwingungen bekannt sind, treten Schwingungen nur auf Skalen auf, die kleiner sind als der sogenannte Schallhorizont. Die Länge des Schallhorizonts ist aus der Theorie bekannt. Wir können am Himmel feststellen, wie gross die dazugehörige Winkelgrösse ist. Jedoch ist die Frage, unter welchem Winkel eine bestimmte physikalische Länge erscheint, eine Frage der Raumgeometrie beziehungsweise der Raumkrümmung. Das Besondere am Schallhorizont besteht darin, dass aus den Temperaturschwankungen des kosmischen Mikrowellenhintergrunds abgelesen werden kann, dass unser Universum mit hoher Genauigkeit flach ist. Die Gesamtdichte im Universum muss also genau der kritischen Dichte entsprechen. Allerdings ergibt unsere Bilanz bisher nur etwa ein Drittel davon, weshalb uns dieser entscheidende Anteil offensichtlich noch fehlt.

Dunkle Energie oder kosmologische Konstante

Bei einem Supernova-Ereignis erhellt sich ein Stern innerhalb weniger Tage (astronomisch betrachtet eine unvorstellbar kurze Zeit) und verlischt innerhalb von Monaten (ebenfalls eine sehr kurze Zeit). Die dabei erreichten Leuchtkräfte sind ausserordentlich hoch. Eine Supernova gibt im Maximum etwa so viel Licht ab wie die gesamte Galaxie, die sie beherbergt (vgl. Abbildung).



Vereinfacht ausgedrückt, explodiert also bei einer Supernova⁹ immer dieselbe Menge *Sprengstoff*. Alle Supernovae dieses Typs sind im Wesentlichen gleich hell. Aus ihrer Helligkeit lässt sich ihre Entfernung bestimmen und zusammen mit der Rotverschiebung ihrer Spektrallinien kann das Expansionsverhalten des Universums rekonstruiert werden.

Diese Erkenntnis ermöglichte die spektakuläre Entdeckung, dass die Ausdehnungsgeschwindigkeit des Universums seit etwa sieben Milliarden Jahren zunimmt. Ein Friedmann-Modell dehnt sich nur dann beschleunigt aus, wenn die kosmologische Konstante oder die Dunkle Energie, wie sie von Teilchenphysikern bevorzugt genannt wird, dominieren und nicht gewöhnliche, baryonische oder Dunkle Materie.

⁹Genauer wäre: Supernova vom Typ Ia.

Es gibt zwei Grundtypen von Supernovae Typ I und Typ II. Zeigt ihr Spektrum Wasserstofflinien gehört sie zum Typ II, andernfalls zum Typ I. Findet man keinen Wasserstoff, aber Silizium, wird sie als Typ Ia (kurz: SNIa) bezeichnet. Supernovae werden durch thermonukleare Explosionen ausgelöst, in denen entweder der Kern eines massereichen Sterns ausbrennt und aufgrund seiner Schwerkraft kollabiert (Typ Ib/c und II) oder in denen ein Weisszer Zwerg durch äussere Einflüsse über die Massengrenzen getrieben wird, die er noch stabilisieren könnte (Typ Ia).

Ein Weisszer Zwerg ist ein Stern, der trotz seiner hohen Oberflächentemperatur eine sehr kleine Leuchtkraft aufweist.

Dadurch ergeben sich konsistente Parameterbestimmungen in der Kosmologie. In präziseren Zahlen sind heute 4.2 Prozent der kritischen Dichte baryonisch und 24.3 Prozent bestehen aus Dunkler Materie. Die kosmologische Konstante trägt genau so viel zur Gesamtdichte bei, dass sie kritisch wird. Dies ergibt ein aktuelles Alter des Universums von 13.7 Milliarden Jahren. Dabei entsteht das grosse Rätsel, was die Dunkle Materie oder die kosmologische Konstante sein könnte.

4.2 Kepler Gesetze

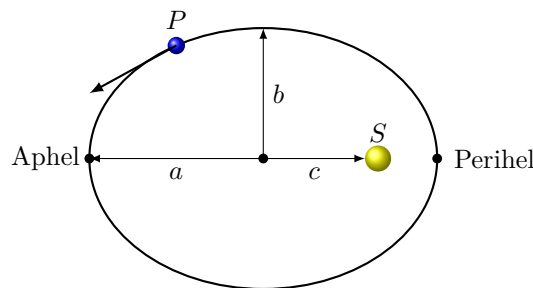
Wie bereits erwähnt, hat der Astronom Tycho Brahe die Bewegungen der Planeten untersucht und Beobachtungen gemacht, die wesentlich genauer waren als die bis dahin bekannten. Er enthielt jedoch von selbst etwas daraus abzuleiten, da seine mathematischen Fähigkeiten begrenzt waren. Diese Aufgabe sollte Johannes Kepler übernehmen. Unter Verwendung des gesamten Datensatzes von Brahe fand Kepler heraus, dass alle Planeten drei Gesetzen gehorchen, die heute als *Kepler-Gesetze* bekannt sind. Diese Gesetze sollen immer auf einen Planeten bezogen werden, der sich um die Sonne bewegt, und gelten natürlich auch für jeden anderen Himmelskörper, der sich um einen anderen Himmelskörper bewegt, wie zum Beispiel den Mond, der sich um die Erde bewegt.



J. Kepler
(1571-1639)

Ges. 1: (1. Keplersche Gesetz) *Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht.*

Dies sieht für einen Planeten P , der sich um die Sonne S bewegt, wie folgt aus:



wobei a die grosse Halbachse, b die kleine Halbachse und c die lineare Exzentrizität¹⁰, also der Abstand des Brennpunktes zum Schnittpunkte der Ellipsenachsen, resp. $\epsilon = c/a < 1$ die numerische Exzentrizität sind.

Das Perihel beschreibt den sonnennächsten Punkt einer Umlaufbahn um die Sonne, während das Aphel den sonnenfernsten Punkt markiert. Im Falle der Erde findet der Perihel-Durchgang um den 3. Januar bei einer Entfernung von 147.1 Mio. km statt, während der Aphel-Durchgang am 5. Juli bei einer Entfernung von 152.1 Mio. km erfolgt. Die Begriffe leiten sich aus dem Griechischen ab und setzen sich aus den Vorsilben "apo-" und "peri-" für fern und nah sowie "-hel-", einer Abkürzung für "helios", die griechische Bezeichnung für die Sonne, zusammen.

In der Astronomie hat sich als massgebliche Längeneinheit die sogenannte Astronomische Einheit (AE) durchgesetzt. Sie ist wie folgt definiert

Def. 1: (Astronomische Einheit) *Die Astronomische Einheit (AE) entspricht dem mittleren Abstand zwischen Erde und Sonne, es sind:*

$$1 \text{ AE} \approx 149.6 \cdot 10^9 \text{ m.}$$

Vergleicht man diesen Wert mit den Aphel- und Perihelabständen, ergibt sich, dass die Erde praktisch auf einer Kreisbahn um die Sonne kreist.

Ges. 2: (2. Keplersche Gesetz) *Die Verbindungsstrecke zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten Δt gleiche Flächen ΔA . (\rightarrow Flächensatz)*

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konstant.}$$

Eine äquivalente Formulierung lautet: $\Delta A_1 = \Delta A_2$.

Betrachten wir einen Planeten P , der um die Sonne S kreist, und vergleichen wir die eingezeichneten Sektoren A_1 und A_2 .

¹⁰Für die lineare Exzentrizität gilt: $c^2 = a^2 - b^2$. Beachten Sie, dass die Schnurlänge bei der Gartenmethode $2a + 2c$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Lösung:

Die ersten beiden Gesetze beschreiben lediglich das Verhältnis zwischen einem Planeten und seiner Sonne, geben jedoch keine Information über das Verhältnis der Planeten untereinander, die sich um dieselbe Sonne bewegen. Das dritte Gesetz definiert schliesslich genau dieses Verhältnis.

Ges. 3: (3. Keplersche Gesetz) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten T_1, T_2 verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Halbachsen a_1, a_2 , d. h.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

sofern die zwei Planeten den gleichen Zentralkörper haben.

Dieses Gesetz kann auch in der folgenden Form aufgeschrieben werden:

$$\frac{T^2}{a^3} = C,$$

wobei T die Umlaufdauer und a die grosse Halbachse eines beliebigen Planeten in einem bestimmten Sonnensystem sind. C ist eine Konstante, die für jedes Sonnensystem festgelegt werden muss. Sie hängt im Wesentlichen von der Masse der Sonne ab. Die formale Bestimmung von C wird im nächsten Abschnitt 4.3, in dem wir das Newtonsche Gravitationsgesetz benötigen, durchgeführt.

Für unser Sonnensystem lässt sich C einfach bestimmen, wenn für die Umlaufzeit das Jahr und für den Abstand die Astronomische Einheit als Einheiten gewählt werden. So ergibt sich:

$$C \cong 1 \frac{\text{y}^2}{\text{AE}^3}.$$

An dieser Stelle soll der Nutzen der Astronomischen Einheit anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.

Bsp. iii.

Bestimmen Sie die Umlaufdauer des Jupiters, wenn sein mittlerer Abstand 5.2 AE beträgt.

Lsg: 12 y

Lösung:

Hier gleich noch ein Beispiel, damit wir auch gesehen haben, wie wir nach der anderen Variablen auflösen müssen.

Bsp. iv.

- Nun, wenn diese Kraft auf einen Apfel einwirkt, wirkt sie gemäss dem Wechselwirkungsgesetz auch auf die Erde.
- Alle Körper müssen also eine Kraftwirkung erfahren.

Daraus formuliert Newton schliesslich seine Postulate zur Gravitation. Das erste Postulat betrifft die Anziehungskraft:

Postulat 1: *Alle Massen ziehen sich an.*

Im zweite Postulat geht es um den Abstand:

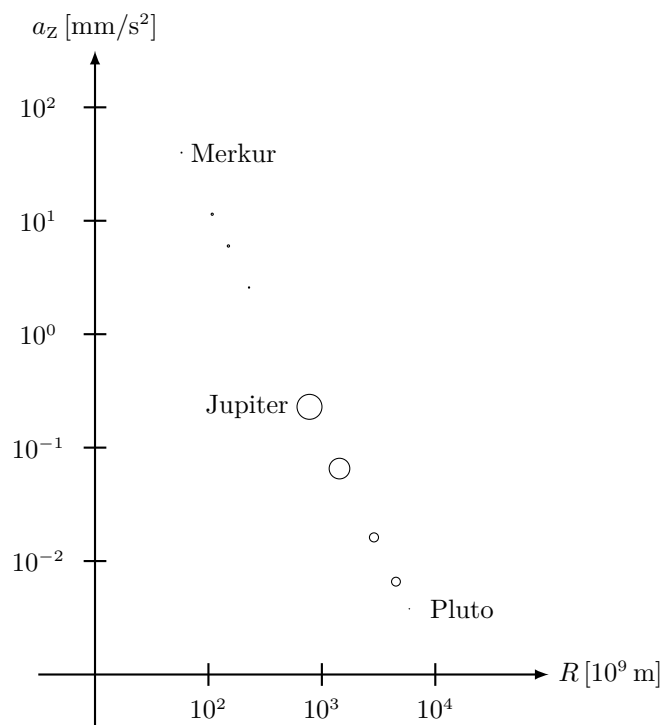
Postulat 2: *Je weiter weg zwei Massen voneinander sind, desto kleiner ist die Kraft.*

Bereits vor ihm dachten andere über diese Gesetzmässigkeiten nach und formulierten sie. Newton jedoch war der Erste, der aus den Keplerschen Gesetzen ein mathematisch formuliertes Gesetz ableiten konnte. Dies gelang ihm hauptsächlich aufgrund seines mathematischen Gerüsts und seiner eigenständigen Entwicklung eines Grossteils davon¹³.

Obwohl Newton die Abhängigkeit des Abstandes in seinem Gesetz aus den Kepler-Gesetzen ableitete, gibt es noch eine andere Möglichkeit, dies zu verstehen. Übrigens wäre dies auch zu Newtons Zeiten möglich gewesen. Kepler hatte nämlich die Daten der meisten Planeten in unserem Sonnensystem, einschliesslich einiger Monde des Jupiters, bis und mit Saturn. In der folgenden Tabelle sind die mittleren Abstände R und Umlaufzeiten T aller Planeten (einschliesslich Pluto) aufgeführt. Diese Daten ermöglichen eine direkte Berechnung der Zentripetalbeschleunigung a_Z , welche ebenfalls in der Tabelle aufgelistet wird.

Planet	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
$R [10^9 \text{ m}]$	57.9	108	150	228	778	1430	2880	4500	5910
$T [\text{y}]$	0.241	0.615	1	1.88	11.9	29.5	84.0	165	248
$a_Z [\text{mm/s}^2]$	39.6	11.4	5.94	2.56	0.22	0.065	0.016	0.0066	0.0038

Wird die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Entfernung grafisch dargestellt, ergibt sich folgendes Bild. Um die Interpretation zu erleichtern, wurde eine doppelt-logarithmische Skala verwendet.



Es mag überraschen, dass die Werte auf einer Geraden liegen. Dies liegt jedoch an der doppelt logarithmischen Skala, wie die folgende Rechnung zeigt: Bei doppelt logarithmischer Skala ergibt eine Potenzfunktion der Form

¹³Gemeint ist natürlich die Infinitesimalrechnung.

$y = ax^b$ eine Gerade, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned} y &= ax^b \Rightarrow \\ \log y &= \log(ax^b) \\ &= \log a + \log(x^b) \\ &= \log a + b \log x \end{aligned}$$

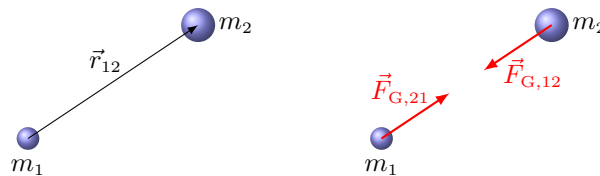
Definieren wir $Y = \log y$, $X = \log x$ und $A = \log a$, dann erhalten wir nach einer kleinen Umstellung:

$$Y = bX + A.$$

Dies ist die Gleichung einer linearen Funktion mit der Steigung b und dem Achsenabschnitt A . Somit können wir aus der Steigung den Wert für b bestimmen und damit den Grad der Potenzfunktion berechnen. Aus der Grafik lässt sich ablesen, dass b negativ ist. Mittels eines Steigungsdreiecks lässt sich der Wert von $b = -2$ bestimmen. Dadurch erhalten wir eine Abhängigkeit zwischen der Beschleunigung (aber auch der Kraft) und dem Abstand R .

$$F \sim \frac{1}{R^2}.$$

Mit Hilfe der Abbildung können wir nun das Newtonsche Gravitationsgesetz formulieren, welches von Newton im Jahre 1686 veröffentlicht wurde.



Ges. 4: (Newtonsches Gravitationsgesetz) Seien m_1 und m_2 zwei Massen, die durch den Abstand \vec{r}_{12} voneinander getrennt sind. Dann ist die Anziehungskraft $\vec{F}_{G,12}$ gegeben als

$$\vec{F}_{G,12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

wobei $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ ein Richtungsvektor mit der Länge 1 und G die Gravitationskonstante ist, die den Wert

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \text{ kg})$$

hat.

Der Betrag der Kraft lässt sich vereinfacht schreiben als:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Betrachten wir folgendes Beispiel:

Bsp. v.

Vergleichen Sie die Gravitationskraft, welche a) zwischen zwei SchülerInnen (S) und b) zwischen dem Mond (M) und einem SchülerIn herrscht. (Werte: $r_{SS} \approx 5 \text{ cm}$, $m_S \approx 65 \text{ kg}$, $m_M \approx 7.4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ und $r_{MS} \approx 3.8 \cdot 10^8 \text{ m}$)

Lsg: a) $F_{SS} \approx 0.1 \text{ mN}$, b) $F_{MS} \approx 2.2 \text{ mN}$

Lösung:



Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel dazu:

Bsp. vi.

Zwei Schiffe mit je einer Masse von 10 Tonnen stehen 100 m voneinander entfernt. Bestimmen Sie die Gravitationskraft zwischen diesen Schiffen.

Lsg: $F_G \approx 6.67 \cdot 10^{-7} \text{ N}$

Lösung:

Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit der Gravitationsbeschleunigung auseinandersetzen.

4.3.2 Gravitationsbeschleunigung

Zur Erläuterung der Gravitationsbeschleunigung wird ein Beispiel betrachtet. Das Ziel ist die Bearbeitung der Gravitationskraft und ihre Untersuchung auf der Erdoberfläche.

Bsp. vii.

Für eine Masse m , die auf dem Erdboden liegt, lässt sich die Gravitationskraft wie folgt berechnen:

$$F_{G,Em} = G \frac{m_E m}{r_E^2},$$

wobei $m_E \approx 6.0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ die Masse der Erde und $r_E \approx 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$ der Erdradius ist. Diesen Term können wir auch wie folgt schreiben:

$$F_{G,Em} = \underbrace{G \frac{m_E}{r_E^2}}_{=k} \cdot m.$$

Bestimmen Sie a) die Einheit von k in Basiseinheiten, d. h. $[k]$ und b) den numerischen Wert von k , d. h. $\{k\}$.

Lsg: –

Lösung:

Allgemein lässt sich also folgendes Gesetz aufschreiben:

Ges. 5: (Gravitationsbeschleunigung) Die Gravitationsbeschleunigung g_P auf der Oberfläche eines Planeten P mit der Masse m_P und dem Radius r_P ist gegeben als

$$g_P = G \frac{m_P}{r_P^2}.$$

Lösung:

Damit schliessen wir diesen Abschnitt zur Gravitationsbeschleunigung und betrachten nun einige Beispiele zur Kreisbewegung von Himmelskörpern unter dem Einfluss der Gravitationskraft.

4.3.3 Kreisbewegung durch Gravitationskraft

Die Gravitationskraft ist eine Zentralkraft und verursacht in der Himmelsmechanik stets die Kreisbewegung. Im Folgenden sollen einige dieser Aufgaben exemplarisch erläutert werden. Dabei wird üblicherweise angenommen, dass sich die Bewegung auf einer Kreisbahn und nicht auf einer Ellipse vollzieht.

Das erste Beispiel behandelt sogenannte geostationäre Satelliten. Ein solcher Satellit umkreist die Erde über dem Äquator, sodass er sich idealerweise immer über demselben Punkt der Erdoberfläche befindet.

Bsp. x.

Bestimmen Sie a) die Flughöhe eines geostationären Satelliten über der Erdoberfläche und b) dessen Geschwindigkeit.

Lsg: a) $h \approx 36\,000\text{ km}$, b) $v_S \approx 3.1\text{ km/s}$

Lösung:

Das zweite Beispiel untersucht die Beschaffenheit von Sternen durch die Messung der Rotationsgeschwindigkeit.

Bsp. xi.

Bei gewissen Sternen kann nachgewiesen werden, dass sie pro Sekunde ein Mal um ihre Achse rotieren. Bestimmen Sie a) die minimale Dichte eines solchen Sterns, damit die Materie an seiner Oberfläche bei der schnellen Rotation nicht davon fliegt und b) die mögliche Beschaffenheit dieses Sterns. Solche Sterne wurden erstmal 1967 von J. Bell, A Hewish und M. Ryle entdeckt und Pulsare genannt.

Lsg: –

Lösung:

Betrachten wir die vorletzte Gleichung. Durch eine kleine Umformung kann das 3. Keplersche Gesetz hergeleitet werden, nämlich:

$$\begin{aligned} F_G &= ma_z \\ G \frac{mM}{r^2} &= m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann direkt nach T^2/r^3 aufgelöst werden und man erhält

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Daraus wird deutlich, dass die Konstante C im Keplerschen Gesetz tatsächlich eine Konstante für ein spezifisches Sonnensystem mit der Masse M ist und somit

$$\frac{T^2}{r^3} = C(M).$$



Leiten Sie aus dem 3. Keplerschen Gesetz und dem Wechselwirkungsgesetz das Gravitationsgesetz her. (Tipp: Vereinfachen Sie die Bewegung, sodass sie als Kreisbewegung betrachtet werden kann.)

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir die Massen von Sonne, Erde und Mond bestimmen. Dabei werden wir feststellen, dass für die Ermittlung der Periode bereits ausreichende Kenntnisse vorhanden sind. Allerdings ist dies erst möglich, nachdem wir uns mit der Messung der Gravitationskonstante befassen, auf die wir nun eingehen werden.

4.3.4 Gravitationskonstante

Obwohl Newton das Gesetz bereits 1686 ermittelt hatte, konnte man damit nicht die Massen von Planeten messen, da die Gravitationskonstante unbekannt war. Erst über 100 Jahre später gelang es dem britischen Naturwissenschaftler Henry Cavendish¹⁴ dies zu tun. Er ist vor allem bekannt für die Entdeckung des Elements Wasserstoff und die erste experimentelle Bestimmung der mittleren Dichte der Erde. Dadurch konnte schliesslich die Gravitationskonstante ermittelt werden, was wiederum eine präzise Bestimmung der Massen von Himmelskörpern ermöglichte.



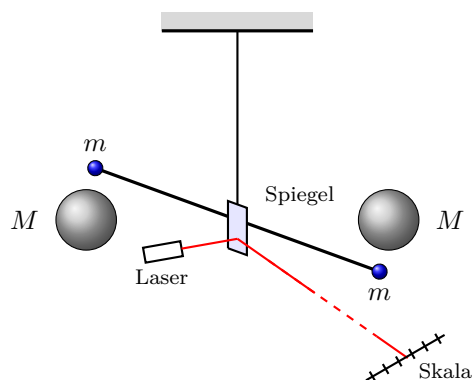
H. Cavendish
(1731-1810)

Der Betrag der Gravitationskonstante G entspricht der Anziehungskraft zweier punktförmiger Massen von je 1 Kilogramm in einer Entfernung von 1 Meter.

Die Gravitationswaage, die von Cavendish entwickelt wurde, funktioniert nach folgendem Prinzip: Zwei grosse, stationäre Bleikugeln ziehen zwei kleine Kugeln, die über einen Stab miteinander verbunden sind, durch Gravitationskraft an. Der Stab wird in der Mitte durch einen Draht aufgehängt, und die Anziehungskraft verursacht eine Drehung des Stabes und damit eine Verdrillung des Drahtes. Aus dem Gleichgewichts-Drehwinkel kann man die Gravitationskonstante berechnen.

Da die Kraft sehr klein ist, ist auch der Drehwinkel sehr klein. Aus diesem Grund, wird am Stab ein kleiner Spiegel befestigt, auf dem ein Lichtstrahl projiziert wird. Die Bewegung des reflektierten Punkts wird an einer entfernten Wand gemessen und daraus der Winkel berechnet (vgl. Abb.).

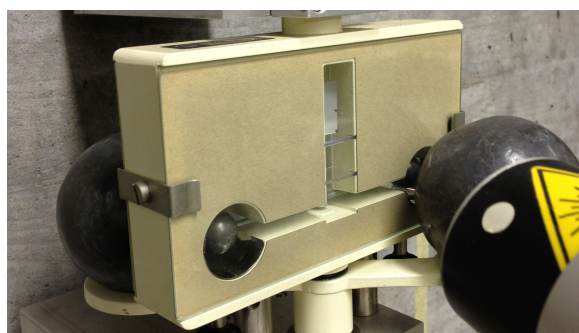
¹⁴Henry Cavendish (10. Oktober 1731 in Nizza - 24. Februar 1810 in London) war ein britischer Naturwissenschaftler.



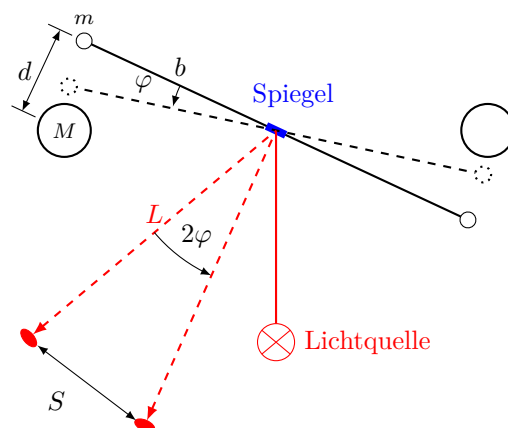
An der Schule gibt es ein Experiment, das wie folgt aussieht.

Exp. 1: Cavendish-Experiment

Die Funktionsweise entspricht genau der Beschreibung von oben und sieht bei uns wie folgt aus:



Betrachten wir folgende Grundriss-Darstellung des Experiments:



Für die Messung von G sind an der Schule für das abgebildete Leybold Experiment folgende Größen gegeben oder müssen gemessen werden:

gegeben			gemessen		
b [mm]	d [mm]	M [kg]	L [m]	S [m]	Δt [min]
50	47	1.5	13.5	0.5	3

Aus Newton II folgt die Beschleunigung für eine Masse m , dass

$$F_{\text{res}} = ma \quad \Rightarrow \quad F_G = G \frac{mM}{d^2} = ma.$$

Daraus folgt, dass die Beschleunigung für beide Masse m geben ist als:

$$a = G \frac{2M}{d^2}.$$

Da es sich hier um eine Drehbewegung handelt, gilt mit der Beziehung aus Kap. B.2.5.2, dass

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

ist, wobei α die Winkelbeschleunigung hervorgerufen von beiden Massen M ist. Weiter gilt:

$$S \sim 2\varphi L$$

und damit ist S gegeben als:

$$S = \alpha t^2 L \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{S}{t^2 L}.$$

Ebenfalls im genannten Kapitel findet man, dass $a = \alpha b$ ist und damit gilt:

$$a = \frac{Sb}{t^2 L}.$$

Damit gilt für beide Masse:

$$\frac{Sb}{t^2 L} = G \frac{2M}{d^2} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{Sbd^2}{2t^2 LM} \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \text{ kg}).$$

Der relativ grosse Fehler (30%) kommt daher, dass wir hier in vielen Fällen eine Näherung verwendet haben.

Das Experiment verdeutlicht allerdings, dass die Grössenordnung sehr schnell abgeschätzt werden kann. In der folgenden Tabelle sind drei historische Messungen der Konstante aufgeführt.

Messung der Gravitationskonstanten		
Experimentator	Jahr	G in $10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Cavendish	1798	6.754
Eötvös	1896	6.65
Luther	1982	6.6726

Der Wert ist sehr klein und gibt somit Aufschluss über die Grösse dieser Kraft im Vergleich zu den anderen Kräften. Die Gravitationskraft ist eindeutig die schwächste Kraft, wie die folgende Tabelle zeigt (Die Werte sind relativ zur elektromagnetischen Kraft zu verstehen).

	Kräfte			
	Gravitation	schwache	elektromagnetische	starke
Kraft auf zwei Protonen im Kern	10^{-36}	10^{-7}	1	20

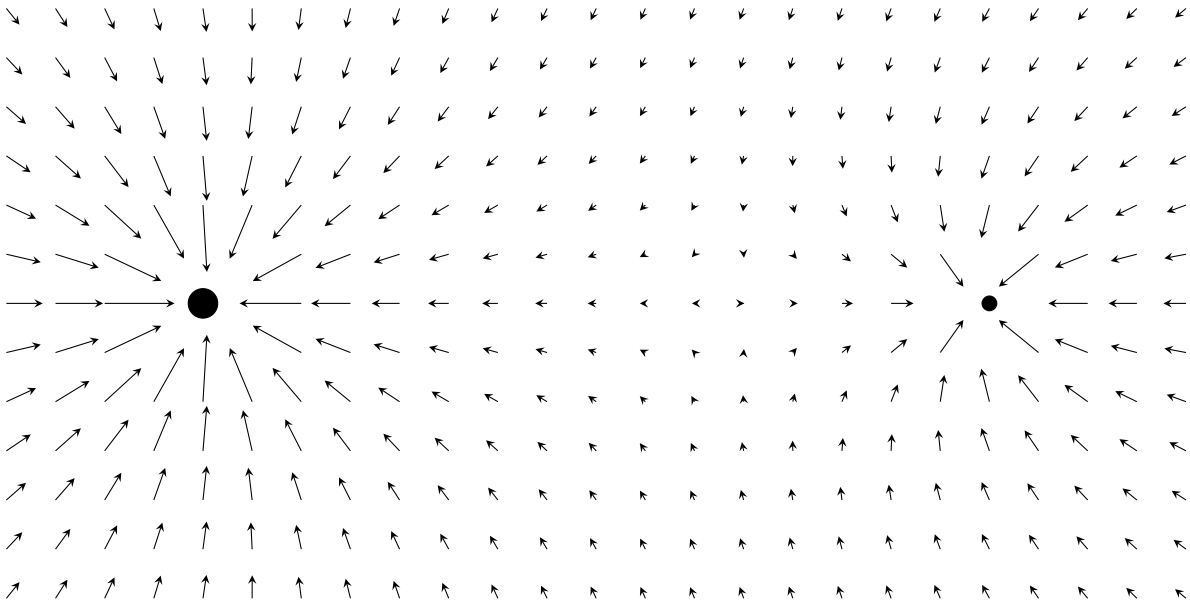
Diese Tabelle verdeutlicht, dass im atomaren Bereich die Gravitationskraft irrelevant ist. Für Himmelskörper, die im Allgemeinen neutral sind, spielt die Gravitation hingegen eine wesentliche Rolle. Hinzu kommt noch, dass die schwache und die starke Kraft eine sehr geringe Reichweite haben.

Im darauffolgenden Abschnitt wird das Konzept des Feldes erstmals vorgestellt. Dieses komplexe Konzept kann am einfachsten mithilfe des Gravitationsgesetzes erläutert werden.

4.4 Gravitationsfeld

Bevor wir zu den Anwendungen kommen, ist es sinnvoll, ein Kapitel über den Feldcharakter der Gravitationskraft einzufügen. Dieses Kapitel ist eher konzeptionell als praktisch orientiert und beschreibt die Gravitationskraft als Feld, was vorerst keinen realen Hintergrund hat. Der Feldbegriff ist jedoch auch in anderen Bereichen der Physik von Nutzen. Nur die moderne Physik wird uns lehren können, dass es genau andersherum ist: das einzig Reale ist das Feld, vielleicht noch nicht beim Gravitationsfeld, aber bei allen anderen Feldern schon.

Wir haben herausgefunden, dass die Gravitationskraft ortsabhängig ist. Dies wird noch komplizierter, wenn nicht nur ein Körper (hier die Erde), sondern mehrere vorhanden sind. Das bedeutet, dass sich der Betrag der Kraft je nach Höhe, auf der wir uns befinden, verändert. In diesem Fall ändert sich nicht nur der Betrag der Kraft, sondern auch ihre Richtung, wie aus der folgenden Abbildung ersichtlich ist.



Jeder Pfeil in diesem Bild zeigt die Richtung und den Betrag (Länge des Pfeils) der Kraft auf eine Masse m , die sich im Raum zwischen zwei Planeten befindet. Eine solche Fläche mit Pfeilen, die im realen, natürlich dreidimensionalen Raum vorhanden ist, wird als Vektorfeld oder kurz Feld bezeichnet. Je nach dem jeweiligen Phänomen nennt man es entsprechend, hier handelt es sich um ein Gravitationsfeld.

Da die Beschleunigung einer beliebigen Masse im Gravitationsfeld unabhängig von der Masse des beschleunigten Körpers ist, wird das Gravitationsfeld wie folgt definiert.

Def. 2: (Gravitationsfeld) Das Gravitationsfeld eines Planeten $\vec{G}(\vec{r})$ ist definiert als das Verhältnis aus der Gravitationskraft \vec{F}_G und einer Probemasse m , d. h.

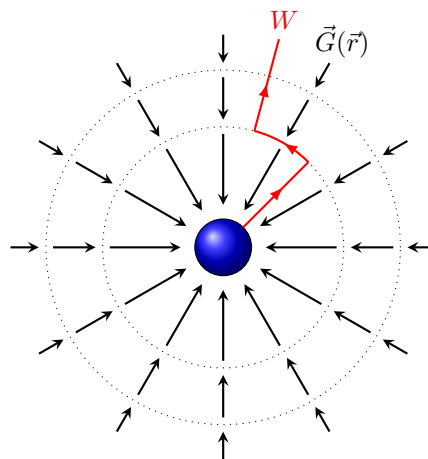
$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G}{m}$$

Für den Betrag des Gravitationsfeldes, welches auf einen Planeten der Masse M wirkt, gilt:

$$G(r) = G \frac{M}{r^2}.$$

Dies entspricht exakt der Formel für die Gravitationsbeschleunigung, falls der Radius des Planeten als r eingesetzt wird.

Im Folgenden betrachten wir das Gravitationsfeld der Erde ohne störende Einflüsse wie die Anziehungskraft des Mondes oder anderer Himmelskörper. Im Wesentlichen stellt sich das Gravitationsfeld der Erde (oder eines anderen Planeten) wie folgt dar:



Dieses Bild zeigt einige Merkmale des Feldes, nämlich:

- Je dichter die Pfeile (sogn. Feldlinien), desto grösser ist die Feldstärke $\vec{G}(\vec{r})$.

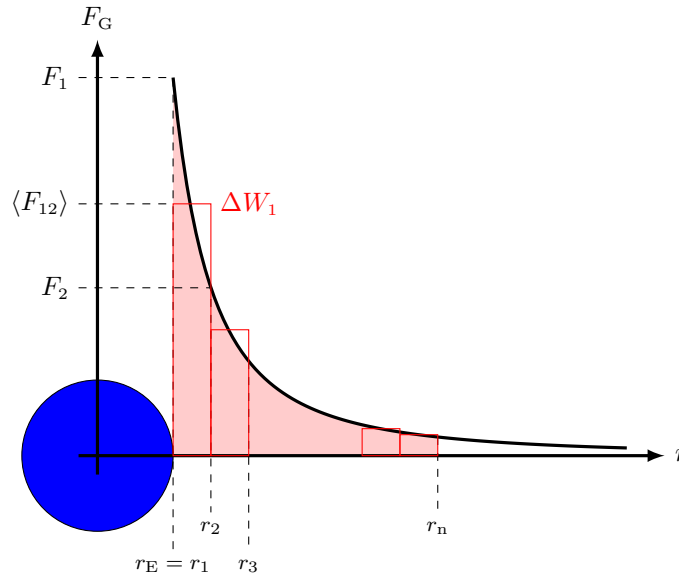
4.4.1 Arbeit im Gravitationsfeld

Die Arbeit, die zur Überwindung der Gravitationskraft beim Anheben eines Objekts erforderlich ist, wurde bereits zuvor hergeleitet und als Hubarbeit definiert. Die Formel hierfür lautet:

$$W_{\text{Hub}} = mg\Delta y.$$

Diese Formel ist nur gültig, wenn die Änderung von g im Vergleich zur Änderung von y gering ist. Es stellt sich die Frage, wie die exakte Arbeit aussieht, wenn das Gravitationsgesetz berücksichtigt wird.

Wir erinnern uns daran, dass die Arbeit als Fläche unter der Kurve im Kraft-Weg-Diagramm definiert ist. Im Fall des Gravitationsgesetzes sieht die Kurve wie folgt aus:



Die Arbeit ergibt sich, indem man alle Rechtecke unter der Kurve von r_1 bis r_n summiert. Für den Betrag der geleisteten Arbeit ΔW_1 , welcher dem ersten Rechteck zugeordnet ist, gilt:

$$\Delta W_1 = \langle F_{12} \rangle \cdot (r_2 - r_1),$$

wobei $\langle F_{12} \rangle$ das geometrische Mittel von F_1 und F_2 ist¹⁶. Es kann gezeigt werden, dass dieses Mittel auf die exakte Lösung führt. Somit gilt für die mittlere Kraft

$$\langle F_{12} \rangle = \sqrt{F_1 \cdot F_2} = GMm \sqrt{\frac{1}{r_1^2 \cdot r_2^2}} = \frac{GMm}{r_1 r_2}$$

und daraus folgt für die Teilarbeit

$$\Delta W_1 = \frac{GMm}{r_1 r_2} \cdot (r_2 - r_1) = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Für die gesamte Arbeit W erhalten wir somit

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta W_i = GMm \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right) \right].$$

Bei genauer Betrachtung der Summe fällt auf, dass es sich um eine Teleskop-Summe handelt, d.h. bis auf den ersten und letzten Term heben sich alle anderen Terme auf. Damit lässt sich folgendes Gesetz formulieren.

Ges. 6: (Arbeit im Gravitationsfeld) Die Arbeit W_{Hub} , die verrichtet werden muss, um einen Körper der Masse m im Gravitationsfeld eines Himmelskörpers mit der Masse M vom Abstand $r_1 \geq r_E$ auf den Abstand r_n zu heben. Es gilt

$$W_{\text{Hub}} = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n} \right).$$

Wie aus der Formel ersichtlich, nimmt die Arbeit ab, wenn wir uns von einem Planeten entfernen. Wenn der Abstand zur Erde gross genug ist, ist die zusätzliche Arbeit vernachlässigbar klein und man spricht davon, dass der Körper das Gravitationsfeld verlassen hat.

¹⁶Das geometrische Mittel von a und b ist: \sqrt{ab} .

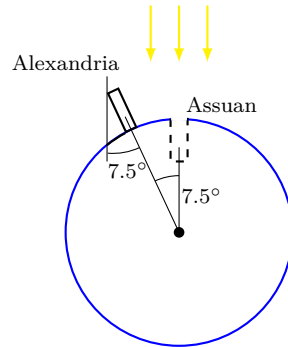
4.5.1 Vermessung der Erde

Die erste Messung des Erdradius geht auf den griechischen Gelehrten Eratosthenes¹⁷ zurück, der in der Blütezeit der hellenistischen Wissenschaft tätig war. Seine Überlegung war einfach, aber auch heute noch gültig.



Eratosthenes
(276-195 v. Chr.)

Eratosthenes wusste, dass die Sonne am 21. Juni um die Mittagszeit in Assuan senkrecht über einem tiefen, senkrechten Brunnenschacht steht, dessen Grund von den Sonnenstrahlen erleuchtet wird. Gleichzeitig wirft ein Obelisk in Alexandria, nördlich von Assuan gelegen, einen Schatten, dessen Länge zeigt, dass die Sonne dort vom Zenit etwa 7.5° entfernt ist. Deshalb muss der Brunnen in Assuan mit dem Obelisken in Alexandria aufgrund der Krümmung der Erdoberfläche einen Winkel von 7.5° einschliessen. In der Projektion sieht das wie folgt aus:



Da dieser Winkel etwa $1/50$ eines Kreises repräsentiert, muss der Erdumfang gerade 50-mal so gross sein wie die bekannte Entfernung (5000 Stadien) zwischen Assuan und Alexandria. Bis heute ist unklar, wie gross ein Stadium ist; viele Forscher gehen jedoch davon aus, dass es zwischen 150 m und 180 m schwankt. Das ergibt einen Erdumfang, der zwischen: $37\,500\text{ km} < U_E < 45\,000\text{ km}$ liegt und einen Radius zwischen $5\,970\text{ km} < r_E < 7\,160\text{ km}$. Heute messen wir für den Erdradius¹⁸:

$$r_E = 6\,370\text{ km}.$$

Die Bestimmung der Erdmasse erfolgt indirekt. Da der Erdradius und die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche nun bekannt sind, kann man mithilfe der bekannten Formel:

$$g = G \frac{m_E}{r_E^2}$$

die Erdmasse berechnen, nämlich

$$m_E = \frac{gr_E^2}{G} \approx 5.97 \cdot 10^{24}\text{ kg},$$

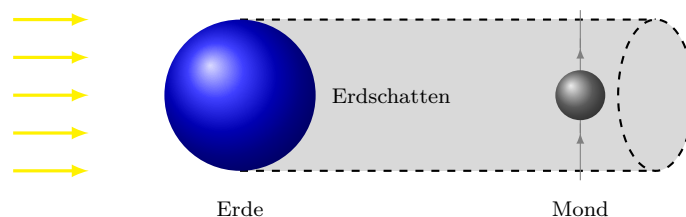
wobei für $g = 9.81\text{ m/s}^2$ verwendet wurde.

4.5.2 Vermessung des Mondes

Zuerst beschreiben wir hier die Bestimmung der Mondgrösse und der Mondentfernung gemäss [14], bevor wir wieder zu [17] zurückkehren.

Mit der Kenntnis der Dimension der Erde konnten bereits die Griechen die Distanz und Grösse des Mondes mittels einer Mondfinsternisbeobachtung abschätzen.

Da die Distanz zwischen Erde und Sonne viel, viel grösser ist als die Entfernung zwischen Erde und Mond, hat dies zur Folge, dass die Grösse des Erdschattens in der Distanz des Mondes etwa dem Durchmesser der Erde d_E entspricht (vgl. Abb.).



¹⁷Eratosthenes von Kyrene (zwischen 276 und 273 v. Chr. in Kyrene - um 194 v. Chr. in Alexandria) war ein aussergewöhnlich vielseitiger griechischer Gelehrter in der Blütezeit der hellenistischen Wissenschaften.

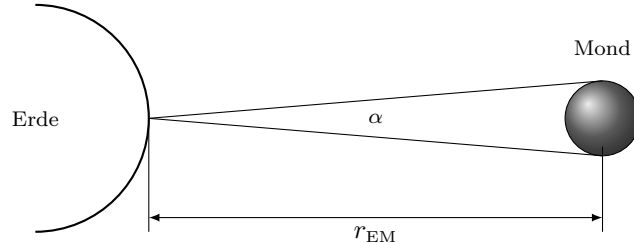
¹⁸Heute wird die Erde fotografisch und mit Radarverfahren von Satelliten aus vermessen.

Beobachtungen - unabhängig von der Finsternis - zeigen, dass der Mond etwa eine Stunde braucht, um sich gegenüber den Fixsternen um die Länge seines Durchmessers d_M zu bewegen. Damit beträgt seine Geschwindigkeit $v_M = 1d_M/h$. Bei einer Mondfinsternis verweilt der Mond etwa drei Stunden im Erdschatten. Damit lässt sich die Grösse des Mondes abschätzen. In den drei Stunden durchläuft der Mond den Weg:

$$s \approx d_E = v_M t \approx 3d_M \Rightarrow d_M \approx \frac{1}{3}d_E \approx 3860 - 4770 \text{ km.}$$

Heute verwenden wir für den Radius des Mondes: $r_M = 1740 \text{ km}$.

Die Distanz Erde-Mond ergibt sich aus der absoluten Grösse des Mondes und dem Winkel, unter dem wir den Durchmesser des Mondes sehen (vgl. Abb.).



Mit dem Winkel $\alpha = 0.5^\circ$ und der Trigonometrie erhalten wir für den Abstand Erde-Mond:

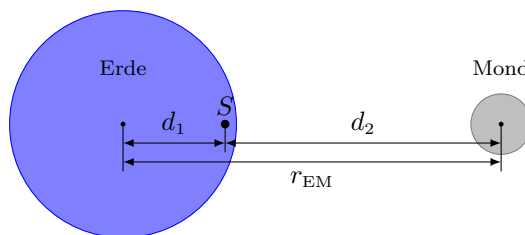
$$\tan(\alpha/2) = \frac{r_M}{r_{EM}} \Rightarrow r_{EM} = \frac{r_M}{\tan(\alpha/2)} \approx 440\,000 - 550\,000 \text{ km.}$$

Im Jahre 1969 wurde von den Astronauten Neil Armstrong und Edwin Aldrin während der Apollo 11 Mission auf dem Mond ein Spiegel aufgestellt. Seither lässt sich die Mondbahn auf 10 cm genau mit einer Laufzeitmethode vermessen. Man sendet ein starkes Lichtsignal zum Mond und misst die Zeit, die es benötigt, um die Strecke Erde-Mond-Erde zu durchlaufen. Daraus lässt sich die Mondentfernung leicht berechnen (vgl. Video: [Mondentfernung mit TBBT](#)). Damit messen wir heute eine Entfernung von $r_{EM} = 384\,000 \text{ km}$.

Die Bestimmung der Mondmasse stellt sich als etwas schwieriger dar und soll gleich als anspruchsvolle Übungsaufgabe hier vollständig und detailliert vorgerechnet werden. Da der Mond nicht als Zentralkörper dient, fällt er aus der Bewegungsgleichung sofort heraus, nämlich:

$$F_{\text{res}} = F_G = m_M a_z \Rightarrow G \frac{m_E m_M}{r_{EM}^2} = m_M a_z \Rightarrow G \frac{m_E}{r_{EM}^2} = a_z.$$

Dies ist jedoch nur der Fall, da wir die Körper als punktförmig betrachten und davon ausgehen, dass die Masse der Erde viel grösser ist als die des Mondes. In Tat und Wahrheit kreisen beide Körper um ein gemeinsames Drehzentrum, wie sich herausstellt, den Schwerpunkt. Betrachten wir dazu folgende Skizze:



Die Bewegungsgleichung lautet somit:

$$G \frac{m_E}{r_{EM}^2} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 d_2,$$

wobei $a_z = \omega^2 d_2$ ist und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ist. Auf den ersten Blick scheint die Mondmasse wieder verschwunden zu sein, doch sie steckt in d_2 . Stellt man sich die Erde und Mond als Wippe vor, dann gilt:

$$m_E d_1 = m_M d_2.$$

Mit der Bedingung, dass $d_1 + d_2 = r_{EM}$ sein muss, erhalten wir:

$$d_2 = \frac{m_E r_{EM}}{m_M + m_E}.$$

Eingesetzt in den oberen Term ergibt es:

$$G \frac{m_E}{r_{EM}^2} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{m_E r_{EM}}{m_M + m_E}$$

und aufgelöst nach m_M gibt:

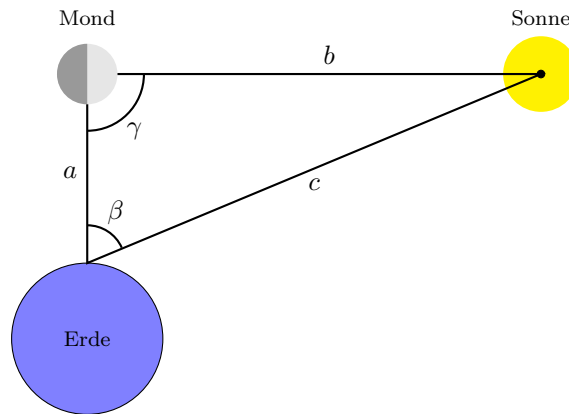
$$m_M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{r_{EM}^3}{G} - m_E \approx 5.4 \cdot 10^{22} \text{ kg},$$

wobei mit der siderischen Umlaufzeit gerechnet werden muss, d. h. $T \approx 27.3 \text{ d}$. Der Literaturwert ist $m_M \approx 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$. Die Berechnung der Mondmasse ist numerisch sehr sensitiv, da sie sich als Differenz zweier grossen Zahlen ergibt.

Zum Schluss soll auch noch die Sonne vermessen werden. Nun sind wir bereits geübt darin und kommen etwas schneller zum gewünschten Ziel.

4.5.3 Vermessung der Sonne

Die Sonnenentfernung wurde bereits von Aristarch von Samos im Jahr 265 v. Chr. abgeschätzt. Dabei hat er folgende Situation betrachtet: Wenn Halbmond ist, bilden Mond, Sonne und Erde ein rechtwinkliges Dreieck, wie die folgende Skizze zeigt.



Der Winkel γ beim Mond ist ein rechter Winkel. Für den schwer messbaren Winkel β fand Aristarch "1/30 des Viertelkreises weniger als ein Viertelkreis", das sind also 87° . Daraus ergibt sich mit:

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{1}{\cos \beta} = \frac{c}{a} \approx 19.$$

Damit müsste die Sonne rund 19-mal weiter von der Erde entfernt sein als der Mond.

In Wirklichkeit ist β etwas grösser und beträgt $89^\circ 51'$. Für das Entfernungsverhältnis ergibt sich daher $\frac{c}{a} \approx 400$. Die Sonne ist also viel weiter weg, als es Aristarch ermittelt hatte, und deshalb auch viel grösser. Der Grundgedanke war jedoch richtig¹⁹.

Die Grösse der Sonne erhält man mit diesen Überlegungen ebenfalls. Da die Sonne und der Mond am Himmel gleich gross erscheinen (eine Sonnenfinsternis ist der beste Beweis dafür), muss auch der Durchmesser der Sonne 400-mal so gross sein wie der Durchmesser des Mondes. Da die Erde viermal grösser ist als der Mond, folgt für den Sonnenradius r_S :

$$r_S \approx 400 \cdot r_M \approx 100 \cdot r_E \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

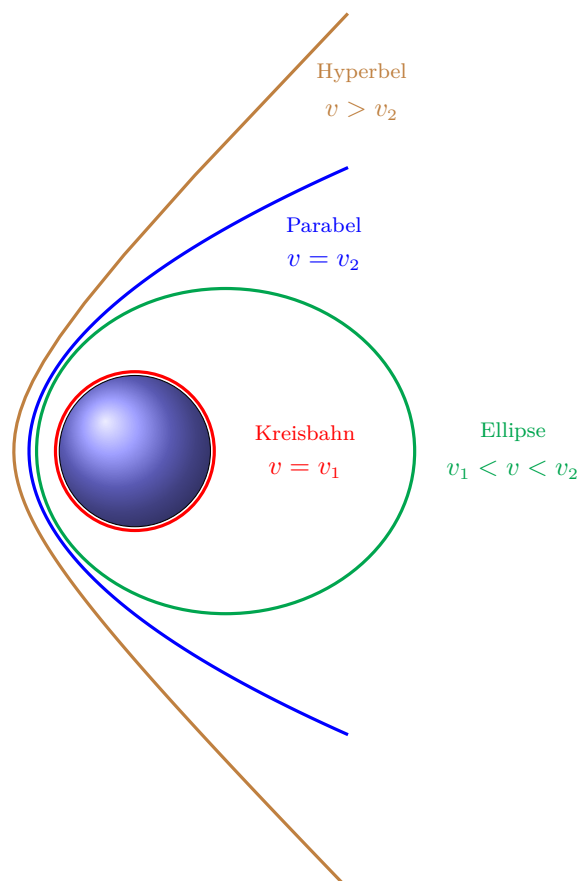
Für die Masse der Sonne können zwei Methoden verwendet werden: Entweder mit dem 3. Keplerschen Gesetz oder mit dem Gravitationsgesetz und der Kreisbewegung der Erde um die Sonne. Beide führen auf den gleichen Term für die Sonnenmasse. Hier soll der zweite Weg verwendet werden.

Für die Bewegung der Erde um die Sonne gilt:

$$G \frac{m_S m_E}{r_{ES}^2} = m_E \left(\frac{2\pi}{T_E}\right)^2 r_{ES} \Rightarrow m_S = \frac{4\pi^2 r_{ES}^3}{G T_E^2} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Damit ist die Sonne rund 335 000-mal grösser als die Erdmasse. Fassen wir die gesammelten Werte zusammen, dann erhalten wir folgende Tabelle:

¹⁹Die Sonnenentfernung ermittelt man heute auf folgende Weise. Man bestimmt zunächst mithilfe der Radarmethode den Abstand Erde-Venus. Daraus erhält man die Differenz $r_E - r_V$ der beiden Planetenradien. Dann setzt man in das 3. Keplersche Gesetz die bekannten Umlaufzeiten ein und berechnet den Quotienten r_E/r_V . Aus diesen zwei Werten lassen sich die Bahnradialen selbst ermitteln.



Es mag Sie vielleicht überraschen, dass die möglichen Bahnen genau gleich sind wie die Kegelschnitte. Das hat eine tiefere Bedeutung und kann unter anderem auch mit der Allgemeinen Relativitätstheorie erklärt werden, was jedoch erst in einem späteren Kapitel behandelt werden soll.

Damit schliessen wir dieses Kapitel zur Mechanik der Massenpunkte ab. Nachdem wir uns jetzt fast ein gesamtes Jahr mit Massenpunkten befasst haben, müssen wir uns noch dem Fall annehmen, dass der Körper nicht als Massenpunkt betrachtet werden kann. Dies wird im nächsten Kapitel (Mechanik starrer Körper) geschehen.

Zusammenfassung Kapitel B4

- Die drei *Kepler Gesetze* lauten:
 - Alle Planeten bewegen sich auf *elliptischen Bahnen um die Sonne*, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht.
 - Die Verbindungsstrecke zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten Δt gleiche Flächen ΔA , d. h.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konst.}$$

- Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten T_1, T_2 verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Halbachsen a_1, a_2 , d. h.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

- Seien m_1 und m_2 zwei Massen im Abstand \vec{r}_{12} voneinander. Dann ist die Anziehungskraft $\vec{F}_{G,12}$ nach dem *Newton'schen Gravitationsgesetz* gegeben als

$$\vec{F}_{G,12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12},$$

wobei $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ ein Richtungsvektor mit der Länge 1 und G die Gravitationskonstante ist, die den Wert

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \text{ kg})$$

hat.

- Die *Gravitationsbeschleunigung* auf der Oberfläche eines Planeten P mit der Masse m_P und dem Radius r_P ist gegeben als

$$g_P = G \frac{m_P}{r_P^2}.$$

- Das *Gravitationsfeld* eines Planeten $\vec{G}(\vec{r})$ ist definiert als das Verhältnis aus der Gravitationskraft \vec{F}_G und einer Probemasse m , d. h.

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G}{m}.$$

Die Eigenschaften des Gravitationsfeldes sind:

- Je dichter die Pfeile (sogn. Feldlinien), desto grösser ist die Feldstärke $\vec{G}(\vec{r})$.
 - Die Symmetrie der Feldlinien sagt etwas über die sogn. Äquipotentiallinien aus.
 - Wir leisten in einem Gravitationsfeld Arbeit, solange wir uns parallel ($W < 0$) oder antiparallel ($W > 0$) zum Feld bewegen, wenn wir uns senkrecht zum Feld bewegen leisten wir keine Arbeit.
- Die *Hubarbeit* W_{Hub} ist die Arbeit, die verrichtet werden muss, um einen Körper der Masse m im Gravitationsfeld eines Himmelskörpers mit der Masse M vom Abstand $r_1 \geq r_E$ auf den Abstand r_n von der Oberfläche aus gemessen, zu heben. Es gilt

$$W_{\text{Hub}} = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n} \right).$$

- Die *potentielle Energie im Gravitationsfeld* ist gegeben als

$$E_{\text{pot}}(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

Beachten Sie, dass die Energie negativ ist. Dies liegt daran, dass der Nullpunkt im Unendlichen gewählt wird.

- Die *erste und zweite kosmologische Geschwindigkeiten* sind spezielle Geschwindigkeiten für einen Himmelskörper.

Die erste kosmologische Geschwindigkeit oder *Kreisgeschwindigkeit* ist die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher um diesen Planeten kreisen möchte. Es gilt:

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_E}{r_E}} \approx 7.9 \text{ km/s},$$

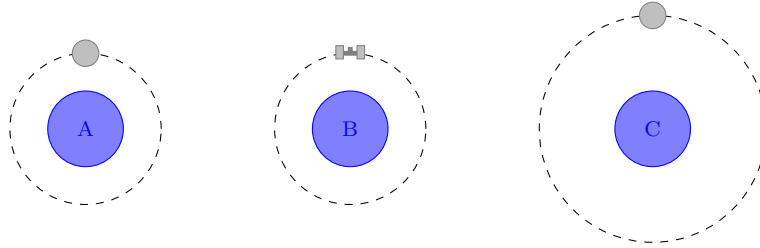
der Wert ist für die Erde.

Die zweite kosmologische Geschwindigkeit oder *Fluchtgeschwindigkeit* ist die Geschwindigkeit, welche ein Körper mindestens haben muss, um diesen Planeten zu verlassen. Es gilt:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{r_E}} = \sqrt{2}v_1 \approx 11.2 \text{ km/s}.$$

Konzeptfragen Kapitel B4

1. Die Planeten A, B und C sind identisch. A und C haben jeweils einen Mond, der sie umkreist, während B von einem künstlichen Satelliten umkreist wird, wie in der Abbildung dargestellt.



Beide Monde sind doppelt so schwer wie der Satellit. Welcher Planet hat die stärkste Gravitationswechselwirkung mit seinem umkreisenden Körper?

- ☐ Planet A ☐ Planet B ☐ Planet C ☐ Planeten A und B ☐ alle gleich
2. Wenn der Mond viermal weiter von der Erde entfernt wäre als jetzt, würde die Gravitationskraft zwischen Erde und Mond...
- ☐ 2× schwächer. ☐ 4× schwächer. ☐ 8× schwächer. ☐ 16× schwächer.
3. Ein Astronaut, der auf der Mondoberfläche steht, hat einen Stift in der Hand und lässt ihn los. Was passiert mit dem Stift?
- ☐ Er fällt langsamer auf die Oberfläche als auf der Erde.
☐ Er fällt schneller auf die Oberfläche als auf der Erde.
☐ Er fällt nicht und schwebt, wo er ist.
☐ Er fällt nicht und treibt langsam davon.

Aufgaben Kapitel B4

1. Ergänzen Sie folgende Tabelle und geben Sie relevante Rechnungen an:

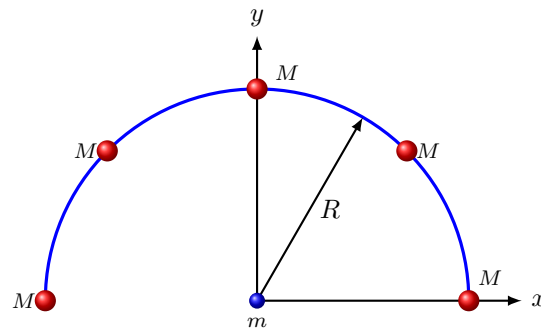
Planet	Merkur	Venus	Erde	Einheiten
Grosse Halbachse	0.39			AE
Umlaufszeit		0.62		y

Lsg: –

2. Bestimmen Sie für einen Bergsteiger die *Gewichtsabnahme* aufgrund der Gravitationskraft bei der Besteigung von einem 8000er, falls der Bergsteiger eine Masse von 80 kg hat. (Rechnen Sie für einmal etwas genauer.)

Lsg: $\Delta F_G \approx -2 \text{ N}$

3. Fünf gleiche Massen M seien, wie in der Abbildung gezeigt, gleichmässig auf einem Halbkreisbogen mit dem Radius R verteilt. Eine Masse m befinde sich im Zentrum des Kreisbogens. Es sei $M = 3 \text{ kg}$, $m = 2 \text{ kg}$ und $R = 10 \text{ cm}$. Wie gross ist die Kraft, die die fünf Massen auf m ausüben?



Lsg: $F_{\text{res}_y} \approx 9.7 \cdot 10^{-8} \text{ N}$

4. Astronomen gehen heute davon aus, dass sich im Zentrum unserer Milchstrasse ein schwarzes Loch befindet. Einer Forschergruppe gelang es, einen Stern auszumachen, der in nur 15 Jahre um dieses Zentrum kreist. Die grosse Halbachse seiner Umlaufbahn beträgt etwa 0.013 LJ (Lichtjahre). Berechnen Sie aus den Bahndaten dieses Sterns die Masse des schwarzen Lochs und vergleichen Sie diese mit unserer Sonnenmasse.

Lsg: $M_{\text{SL}} \approx 5 \cdot 10^{36} \text{ kg}$

5. Pluto ist 40 AE von der Sonne entfernt. Wie lange dauert der freie Fall, sofern Pluto plötzlich stehen würde? (Nehmen Sie eine mittlere Gravitationsbeschleunigung zwischen der maximalen Entfernung und der halben Entfernung an.)

Lsg: $t \approx 36 \text{ y}$

6. Wie weit müssen Sie sich von der Erdoberfläche entfernen, bis sich die Gravitationsbeschleunigung halbiert hat?

Lsg: $h \approx 2.6 \cdot 10^6 \text{ m}$

7. Ein Satellit soll in zwei Stunden um die Erde ($m_E \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) kreisen. Bestimmen Sie

- seine Höhe über der Erdoberfläche ($r_E \approx 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$),
- seine Geschwindigkeit.
- Welche Masse darf der Satellit haben?

Vernachlässigen Sie, dass sich die Erde in dieser Zeit ebenfalls bewegt.

Lsg: **a.** $h \approx 1.7 \cdot 10^6 \text{ m}$ **b.** $v_S \approx 7.1 \text{ km/s}$ **c.** –

8. Bei gewissen Neutronensternen konnte nachgewiesen werden, dass sie pro Sekunde ein Mal um ihre Achse rotieren. Welche Dichte muss ein solcher Stern mindestens haben, damit die Materie an seiner Oberfläche bei der schnellen Rotation nicht davonfliegt?

Lsg: $\rho \approx 1.4 \cdot 10^{11} \text{ kg/m}^3$

9. Der Satellit mit einer Masse von 10 kg, welcher im Juni 2012 zur Erde gestürzt ist, ist aus einer Höhe von etwa $h \approx 100 \text{ km}$ gefallen. Bestimmen Sie die Arbeit, welche die Erde an ihm geleistet hat.

Lsg: $W_{\text{Hub}} \approx 9.6 \text{ MJ}$

Literaturverzeichnis

- [1] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter, Juni 2012
- [2] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem, Juni 2012
- [3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935>
- [4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007
- [5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807
- [6] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Steradian>, Juni 2012
- [7] Aristoteles,
- [8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590
- [9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997
- [10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955
- [11] URL: <http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html>, September 2013
- [12] URL: <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index>
- [13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011
- [14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG
- [15] URL: <http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/>, April 2013
- [16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007
- [17] Roman Sengl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG
- [18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994
- [19] URL: <https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical>
- [20] Hans Kammer, Irma Mgeladze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG
- [21] URL: <https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal>
- [22] Wikipedia, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid>, August 2013
- [23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010
- [24] URL: <http://www.schulserver.hessen.de/>, Oktober 2013
- [25] URL: <http://www.leifiphysik.de>, September 2013
- [26] URL: <http://photos.zoochat.com>, September 2013

- [27] URL: <http://www.lab-laborfachhandel.de>, Oktober 2013
- [28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,
- [29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014
- [30] URL: <https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen>, März 2024
- [31] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707>
- [32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press
- [33] URL: <http://ephex.phys.ethz.ch>, Februar 2015
- [34] URL: <http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html>, März 2015
- [35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas optischer Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962
- [36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004
- [37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018
- [38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001
- [39] URL: <https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en>, Juli 2018
- [40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998
- [41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869
- [42] URL: <http://www.tf.uni-kiel.de>, März 2014
- [43] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_\(Thermodynamik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik)), März 2014
- [44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014
- [45] URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png>, März 2014
- [46] URL: <http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscodex.htm>, August 2014
- [47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494
- [48] URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm>, Oktober 2014
- [49] URL: <http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm>, Oktober 2014
- [50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014
- [51] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639>, Oktober 2017
- [52] URL: <https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen>, Oktober 2017
- [53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022
- [54] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode>, September 2022
- [55] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg>, November 2023
- [56] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>, April 2024
- [57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor
- [58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.
- [59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.
- [60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

- [61] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitt_der_Gleichzeitigkeit, August 2018
- [62] URL: <http://static.a-z.ch>, Mrz 2015
- [63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925
- [64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413
- [65] URL: <http://www.peter-glowatzki.de>, Mai 2015
- [66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941
- [67] URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche>, Mai 2015
- [68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)
- [69] URL: <http://w3.pppl.gov/>, September 2015
- [70] O. Hffling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wrme. 15. Auflage. Ferd. Dummlers Verlag, Bonn 1994
- [71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database, April 2018
- [72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)
- [73] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung>, April 2018
- [74] URL: <http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...>, Juni 2012
- [75] L. Susskind und G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics*, Basic Books, 2014