

Kapitel J

Theoretische Physik

*“Mathematik ist das Alphabet,
mit dessen Hilfe Gott
das Universum beschrieben hat.”*
- Galileo Galilei

Die theoretische Physik ist ein Teilgebiet der Physik, wie z. B. die Festkörperphysik oder die Teilchenphysik. Sie ist natürlich auch in verschiedene Bereiche gegliedert, nur sind diese Bereiche nicht ganz so gross wie die der Experimentalphysik.

Auch innerhalb der theoretischen Physik gibt es grosse Unterschiede. Man könnte salopp sagen, es gibt den Bereich, der *nur* rechnet und den Bereich, der sich mit neuen Theorien beschäftigt. Mit *nur rechnen* meine ich, dass es in vielen Bereichen der Experimentalphysik Vorhersagen braucht, die für einen Experimentalphysiker zu aufwendig oder einfach nicht berechenbar sind. In solchen Fällen übernehmen die theoretischen Physiker diese Aufgabe. Der andere Bereich versucht, aus sehr wenigen Grundprinzipien neue Gesetze zu finden. Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel sowohl mit dem einen als auch exemplarisch mit dem anderen.

Der Grundstein der theoretischen Physik ist die *klassische Mechanik*, gefolgt von der *Speziellen Relativitätstheorie* und *Elektrodynamik* sowie der *Wärmetheorie*. Diese drei bilden die Grundlage der theoretischen klassischen Physik und werden durch die *Allgemeine Relativitätstheorie* und die *Quantenmechanik* ergänzt. Die *Kosmologie* und die *Quantenfeldtheorie* bilden den Abschluss der theoretischen Physik. Wir beginnen dieses Kapitel mit der klassischen Mechanik, wobei wir uns an das Buch [75] anlehnen.

1 Klassische Mechanik

Lernziele

- Sie verstehen, wann wir von einem physikalischen Gesetz sprechen und wann nicht.
 - Sie wissen, wie man ein physikalisches Gesetz überprüfen kann, ob es deterministisch und reversibel ist.
 - Sie kennen den Phasenraum und können einfache Bewegungen darin zeichnen.
 - Sie kennen das Prinzip der kleinsten Wirkung.
 - Sie kennen die Lagrange-Funktion und können Sie für verschiedene Systeme der Mechanik formulieren.
 - Sie können aus der Lagrange-Funktion die Euler-Lagrange-Gleichungen ableiten.
 - Sie können schwierige Aufgaben zur Mechanik mit dem Lagrange-Formalismus lösen.
 - Sie wissen was die verallgemeinerten Koordinaten im Speziellen der verallgemeinerte Impuls ist.
 - Sie kennen die Hamilton-Funktion und können daraus die Bewegungsgleichungen ableiten.
 - Sie kennen das Noether-Theorem und können Erhaltungsgrößen mit dem Lagrange- resp. Hamilton-Formalismus ableiten.
 - Sie kennen die Definition der Poisson-Klammer und können sie anwenden.
 - Sie wissen, wie diesen Formalismus auf die Elektrodynamik ansatzweise anwenden kann.
-

Die klassische Mechanik ist die Grundlage der theoretischen Physik. Wie wir in der Mechanik gesehen haben, werden hier viele Begriffe eingeführt, die in anderen Bereichen nützlich und notwendig sind. So ist es auch hier! Viele Konzepte, die wir jetzt einführen, werden später in der Quantenmechanik oder Elektrodynamik und in der Quantenfeldtheorie verwendet. Wir werden in diesem Abschnitt nicht alles über die klassische Mechanik behandeln können, aber wir werden einige Punkte ansprechen, wie z.B. die *Natur der Gesetze*, *Energie und Impuls*, *das Prinzip der kleinsten Wirkung* sowie *Symmetrie und Erhaltungsgrößen* und den *Hamilton-Mechanismus*.

1.1 Wesen der Gesetze

In allen Experimenten, die wir bisher durchgeführt haben, haben wir keines erlebt, aus dem sich ein Gesetz formulieren liesse, das nicht deterministisch und reversibel wäre. Aus jedem Gesetz kann man sowohl die Vergangenheit (reversibel) als auch die Zukunft (deterministisch) ableiten. Aus diesem Grund nehmen wir an, dass

Ges. 1: (*Gesetze*) *Alle physikalischen Gesetze sind sowohl deterministisch als auch reversibel.*

Wie jedes physikalische Gesetz ist es keine Tatsache, die wir nie in Frage stellen dürfen. Im Gegenteil, wir sollten alle Gesetze immer wieder in Frage stellen, aber dieses ist so grundlegend, dass es oft als das –1.-Gesetz bezeichnet wird. Betrachten wir das folgende Beispiel.

Bsp. i.

Nehmen wir eine Münze. Diese kann zwei sogenannte *Zustände* annehmen: Kopf (K) oder Zahl (Z). Nehmen wir weiter an, dass es ein Gesetz gibt, das von der Münze verlangt, immer in den anderen Zustand überzugehen. Wie sieht dann die Abfolge der Zustände aus?

Lsg: –

Lösung:

Versuchen wir nun, für dieses Beispiel eine Bewegungsgleichung aufzustellen. Die Zeit t soll nur diskrete Werte annehmen können, d.h. von einem Zustand zum anderen springen. Deshalb verwenden wir hier lieber das Symbol n , da die Zeit nur Werte in \mathbb{N} annehmen kann.

Def. 1: (Konfigurationsraum) Der Konfigurationsraum ist der Raum mit den generalisierten Koordinaten q_i .

Die *generalisierten Koordinaten* beschreiben ein System besonders einfach. Wie z.B. bei einem Pendel, wo der Auslenkungswinkel φ mit der Zwangsbiegung $l = \text{konst.}$ ausreicht, um das System zu beschreiben. In diesem Fall wäre $q_1 = \varphi$ und der Konfigurationsraum eindimensional. Daraus folgt, dass die Dimension des Konfigurationsraumes immer der Anzahl der Freiheitsgrade entspricht.

Zurück zur Münze. In diesem Fall hat der Konfigurationsraum die Koordinaten $q_1 = K = 1$ und $q_2 = Z = -1$. Der Zustand zum Zeitpunkt n wird durch $\sigma(n)$ repräsentiert. Damit gilt das Gesetz:

$$\sigma(n+1) = -\sigma(n).$$

Betrachten wir das folgende Beispiel, das eigentlich einfacher sein sollte.

Bsp. ii.

Nehmen Sie an die Münze liegt nur auf dem Tisch und kann sich nicht bewegen. D. h. es gibt nur zwei Möglichkeiten der Abfolge der Zustände; nämlich $ZZZZ\ldots$ oder $KKKK\ldots$. Bestimmen Sie dafür die Bewegungsgleichung.

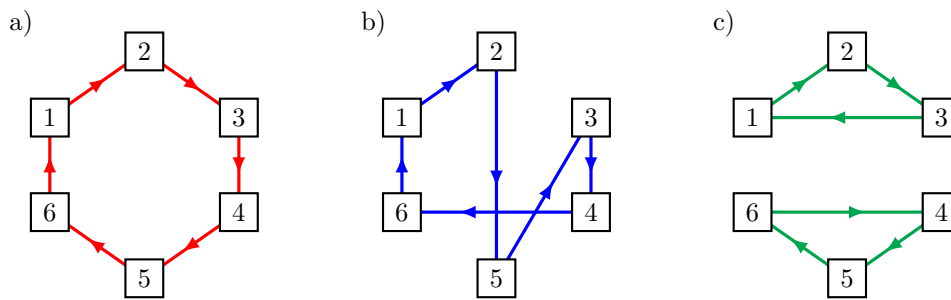
Lsg: $\sigma(n+1) = \sigma(n)$

Lösung:

Natürlich sind reale Systeme nicht so einfach. Sehen wir uns deshalb ein etwas schwierigeres System an. Betrachten wir einen Würfel.

Bsp. iii.

Der Konfigurationsraum eines Würfels ist der Raum mit den Koordinaten 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Untersuchen Sie die folgenden Bewegungen im Konfigurationsraum.



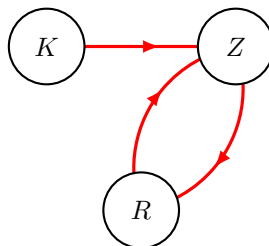
Lsg: –

Lösung:

Wir haben nun einige Beispiele für mögliche Gesetze gesehen. Betrachten wir nun ein Beispiel für ein nicht-physikalisches System, d.h. es ist entweder nur deterministisch oder nur reversibel, aber nicht beides zusammen.

Bsp. iv.

Das System kann drei Zustände annehmen. Damit wir uns etwas darunter vorstellen können, nehmen wir das unrealistische System einer Münze an, die auch auf dem Rand (R) landen kann. Wir haben also drei Zustände, die wie folgt verknüpft sind



a) Ist dieses Gesetz deterministisch resp. b) reversibel? c) Formulieren Sie eine Regel, wie man erkennen kann, wann ein Gesetz physikalisch sinnvoll ist und wann nicht.

Lsg: –

Lösung:

Wir haben nun einige etwas künstliche bzw. konstruierte Gesetze betrachtet. Wenden wir uns nun einem bereits bekannten physikalischen Gesetz zu. Was ist zum Beispiel mit dem Gesetz von Aristoteles? Er hat ja gesagt, dass es einer Kraft bedarf, um einen Körper auf einer konstanten Geschwindigkeit zu halten. Wir können das

1.2 Impuls und Energie

Auch in der theoretischen Physik sind diese beiden Grössen sehr wichtig. Vielleicht sogar noch wichtiger als in der experimentellen Physik. Beginnen wir mit dem Impuls.

1.2.1 Impuls

Wir kennen den Impuls p bereits aus der Mechanik und haben auch schon mit ihm gerechnet. Nun wollen wir den Begriff des Impulses etwas verallgemeinern und zeigen, wofür er sonst noch nützlich sein kann. Eine erste Anwendung ist das Newtonsche Aktionsgesetz (Newton II). Es lautet bekanntlich

$$F_{\text{res}} = m\ddot{x},$$

was eine Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt. Je höher die Ordnung, desto schwieriger ist in der Regel die Lösung der Gleichung. Mit dem Impuls kann das Aktionsgesetz umgestellt werden, es gilt:

$$F_{\text{res}} = \dot{p} \quad \text{und} \quad p = m\dot{x},$$

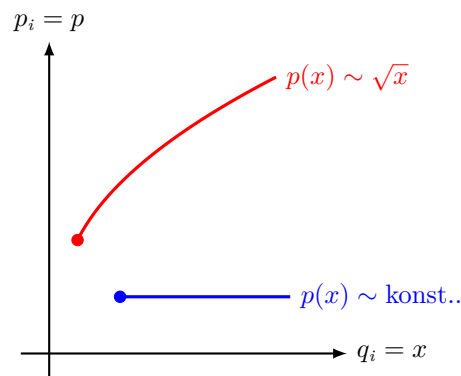
was nun zwei gekoppelte Differentialgleichungen sind, allerdings erster Ordnung. Wir werden später sehen, dass dies im Grunde genau die *Hamilton*-Gleichungen sind, mit denen wir später den verallgemeinerten Impuls definieren können. Wir erwähnen dies hier nur, damit wir später die Struktur der Gleichung erkennen können.

Im Wesentlichen ist der verallgemeinerte Impuls nichts anderes als eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten \dot{q}_i . Was in diesem einfachen Fall natürlich dem ursprünglichen Impuls entspricht.

Der Impuls ist eine wichtige Grösse, um den Phasenraum zu definieren. Bisher haben wir nur den Konfigurationsraum eingeführt. Wie wir aus der Mechanik wissen, reicht dieser nicht aus, um den Zustand eines Teilchens vollständig zu beschreiben. Wir brauchen nicht nur den Ort, sondern auch die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt. Da es schwieriger ist, eine allgemeine Geschwindigkeit zu definieren, verwenden wir den Impuls. Man definiert also einen weiteren Raum:

Def. 2: (*Phasenraum*) Der Phasenraum ist der Raum mit den generalisierten Koordinaten q_i (*Konfigurationsraum*) und den generalisierten Impulse p_i .

Ein dynamisches System ist durch einen Punkt im Phasenraum vollständig definiert. Betrachten wir zwei verschiedene Bewegungen im Phasenraum: eine gleichförmige, geradlinige Bewegung und eine gleichförmige, beschleunigte Bewegung.



Woher weiss man, dass diese Kurven so aussehen? Das ist in diesem Fall gar nicht so schwer. Für die gleichförmige, geradlinige Bewegung ist es klar. Für die gleichförmige, beschleunigte Bewegung genügt es, $v(x)$ zu bestimmen, denn in diesem Fall ist der Impuls gleich dem verallgemeinerten Impuls. Also:

$$v = at \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \sqrt{2ax} \sim \sqrt{x}.$$

Wir betrachten nun ein etwas schwierigeres System und versuchen auch für dieses den Phasenraum zu zeichnen.

Bsp. vi.

Untersuchen Sie für ein Federpendel den Phasenraum. Wie sieht die Bewegung im Phasenraum aus? Lsg: –

Lösung:

Obwohl die Energie nichts direkt mit dem Impuls und dem Phasenraum zu tun hat, soll sie hier zur Verdeutlichung des gerade behandelten Beispiels erwähnt werden.

1.2.2 Energie

Bevor wir die Energie eines Körpers definieren können, müssen wir den Zusammenhang zwischen Kraft, Potential und potentieller Energie verstehen. Wir beginnen, indem wir zeigen, dass jede konservative Kraft $F(x)$ auch durch eine potentielle Energie ausgedrückt werden kann. Aus der Analysis wissen wir, dass für jede Funktion $F(x)$, die die Bedingung

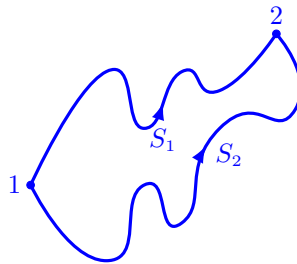
$$\oint_C F(x) \, dx = 0$$

erfüllt, eine skalare Funktion $V(x)$ existiert, so dass

$$F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

gilt. Die erste Bedingung entspricht der Definition einer konservativen Kraft, wie sie im Kapitel Mechanik eingeführt wurde. Es muss nur der Zusammenhang mit der zweiten Bedingung gezeigt werden. Konservativ heisst auch wegunabhängig, also zeigen wir zunächst die Wegunabhängigkeit.

Betrachten wir folgenden beliebigen Weg C , der von 1 nach 2 über S_1 und von 2 nach 1 über S_2 in einem konservativen Kraftfeld $F(x)$ (nicht gezeichnet) verläuft.



Das Ringintegral über diesen Weg ist

$$0 = \oint_C F(x) \, dx = \int_{1,S_1}^2 F(x) \, dx + \int_{2,S_2}^1 F(x) \, dx.$$

Mit

$$\int_{1,S_1}^2 F(x) \, dx = - \int_{2,-S_2}^1 F(x) \, dx = \int_{1,S_2}^2 F(x) \, dx$$

ist das dann und genau dann null, wenn

$$\int_{1,S_1}^2 F(x) \, dx = \int_{1,S_2}^2 F(x) \, dx$$

was gerade der Wegunabhängigkeit und damit der zweiten Definition für ein konservatives Kraftfeld entspricht. Wenn

$$F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x},$$

so ist

$$\int_1^2 F(x) dx = - \int_1^2 \frac{\partial V(x)}{\partial x} dx = \int_2^1 \partial V(x) = V(1) - V(2),$$

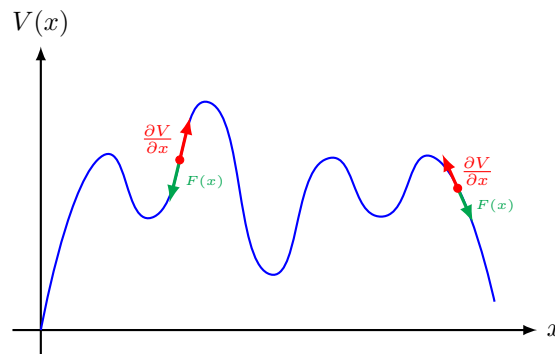
also unabhängig vom Weg S und damit existiert für jedes konservative Kraftfeld ein skalares Feld. Nun können wir die potentielle Energie definieren als:

Def. 3: (*potentielle Energie*) Die potentielle Energie $V(x)$ ist definiert als

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x} = F(x),$$

sofern $F(x)$ eine beliebige konservative Kraft ist.

Wir haben also gezeigt, dass jedes konservative Kraftfeld durch eine skalare Funktion definiert werden kann. Betrachten wir kurz, woher das Vorzeichen kommt, indem wir eine Funktion $V(x)$ näher betrachten.



Wenn die Funktion $V(x)$ ansteigt, d.h. die Steigung $\frac{\partial V}{\partial x} > 0$ ist, dann zeigt die Kraft auf einen Körper in diesem Punkt in die negative x -Richtung. Wenn die Steigung $\frac{\partial V}{\partial x} < 0$ ist, dann zeigt die Kraft in die positive x -Richtung und ist somit immer entgegengesetzt. Stellen Sie sich eine Hügellandschaft vor, und der Punkt stellt eine Kugel dar. Ist die Steigung positiv, rollt die Kugel zurück, ist die Steigung negativ, rollt die Kugel vorwärts.

Wir sind nun in der Lage, die Energie zu definieren und die Energieerhaltung zu demonstrieren.

Def. 4: (*Energie*) Die Energie E eines Körper ist allgemein definiert als

$$E = T + V,$$

wobei T der kinetischen und V der potentiellen Energie entspricht.

Nun können wir zeigen, dass die Energie erhalten ist. Versuchen Sie das im folgenden Beispiel mal selbst.

Bsp. vii.

Zeigen Sie, dass die Energie $E = T + V$ erhalten ist, wobei $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ und $V = V(x)$ ist. Beachten Sie, dass die potentielle Energie keine explizite Zeitabhängigkeit hat, jedoch ist $x = x(t)$ durchaus zeitabhängig.

Tipp: Erhalten ist eine Grösse immer dann, wenn die Zeitableitung dieser Grösse verschwindet.

Lsg: –

Lösung:



Zum Schluss dieses Abschnitts zur Energie, möchten wir noch schauen, weshalb sich beim Federgesetz im Phasenraum ein Kreis gebildet hat. Am besten versuchen Sie das selbst herauszufinden.

Sattelpunkt der Wirkung. In diesen Fällen wird die Wirkung als stationär bezeichnet. Da diese aber nicht so häufig vorkommen, werde ich in diesem Abschnitt nicht ganz so korrekt sein und immer von der kleinsten Wirkung sprechen, was übrigens auch in vielen Büchern der Fall ist. Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist im Prinzip ganz einfach, aber wenn man es anwenden muss, ist es nicht mehr ganz so einfach. Gegeben ist eine Funktion und gesucht wird in der Regel das Extremum, also die Nullstelle der Ableitungsfunktion. Soweit das einfache Prinzip! Tatsächlich handelt es sich aber nicht um eine Funktion, sondern um ein Funktional, und wir suchen nicht die Nullstellen der Ableitung, sondern die Nullstellen der Variation.

1.3.1 Funktional

Beginnen wir zunächst kurz mit der Erklärung einer Funktion. Zum besseren Verständnis erinnern wir uns kurz daran, was eine Funktion ist.

Def. 6: (Funktion) Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu.

$$f : \begin{cases} D \rightarrow Z \\ x \mapsto y \end{cases}$$

Für das Element der Zielmenge, das dem Element $x \in D$ zugeordnet ist, wird im Allgemeinen $f(x)$ geschrieben.

Das heisst, eine Funktion bildet grundsätzlich eine Menge auf eine andere Menge ab. In der Regel ist die Menge ein Körper² und wird in einen anderen Körper abgebildet. Das Funktional ist eine Abbildung zwischen einem Vektorraum³ und dessen Skalkörper.

Def. 7: (Funktional) Sei V ein K -Vektorraum mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ein Funktional T ist eine Abbildung $T: V \rightarrow K$.

Ein sehr einfaches Beispiel eines Funktional ist das bestimmte Integral. Betrachten wir es etwas genauer.

Bsp. x.

Zeigen Sie, dass das bestimmte Integral ein Funktional ist.

Lsg: —

Lösung:

Mindestens eine weitere Funktion haben Sie im Physikunterricht kennen gelernt. Erstaunlicherweise sogar schon in den ersten Monaten.



Suchen Sie nach weiteren Funktionalen, die Sie unbewusst im Physik- oder Mathematikunterricht verwendet haben. Tipp: Das sehr einfache und einleuchtende Funktional, an das ich denke, bildet von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R} ab und Sie haben es in der Vektorgeometrie und in der Physik immer wieder verwendet.

Die physikalische Wirkung ist funktional, wie aus der Definition der Wirkung leicht ersichtlich ist.

Def. 8: (Wirkung) Wir definieren die Wirkung S einer Bewegung $q(t)$ mit $t_1 \leq t \leq t_2$ als

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \, dt,$$

²Ein Körper ist eine Menge K , versehen mit zwei inneren zweistelligen Verknüpfungen, die Addition und Multiplikation genannt werden.

³Es seien V eine Menge, $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $\oplus: V \times V \rightarrow V$ eine innere zweistellige Verknüpfung, genannt Vektoraddition, und $\odot: K \times V \rightarrow V$ eine äussere zweistellige Verknüpfung, genannt Skalarmultiplikation.

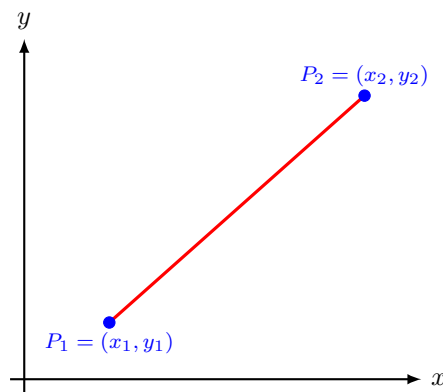
wobei \mathcal{L} die sogenannte *Lagrange-Funktion* ist⁴.

Das sind alle möglichen Bahnen $q(t)$ mit den festen Randpunkten $q(t_1)$ und $q(t_2)$, die mit der Funktion \mathcal{L} ausgewertet werden. Welche dieser Bahnen ist nun die gesuchte physikalische Bahn? Nun, es ist die Bahn, die den Effekt minimiert. Wäre der Effekt eine Funktion, müssten wir sie jetzt nur noch ableiten und auf Null setzen. Leider ist der Effekt keine Funktion, sondern ein Funktional. Die Variation muss also Null sein.

1.3.2 Variationsrechnung

Die Variationsrechnung ist ein nicht ganz einfaches Gebiet der Analysis und kann hier in wenigen Zeilen nicht vollständig dargestellt werden. Dennoch werde ich versuchen, hier so viel darzustellen, dass es zum Verständnis des Prinzips der kleinsten Wirkung ausreicht.

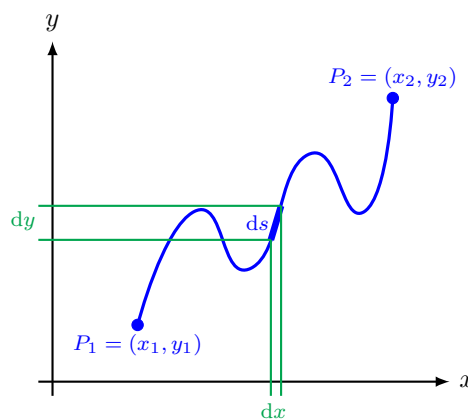
Es soll hier ein exemplarischer Ansatz gewählt werden, um die Variationsrechnung zu erklären. Betrachten wir dazu die Frage nach der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 :



In diesem Fall ist die Lösung natürlich klar und wir können sie direkt aufschreiben:

$$y(x) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Die Variationsrechnung ist ein systematisches Verfahren, um genau solche Probleme zu lösen. Wir sind also auf der Suche nach der kürzesten Verbindung, was aber gleichbedeutend ist mit der Frage nach der minimalen Bogenlänge. Für die Bogenlänge S einer allgemeinen Verbindung zwischen den Punkten P_1 und P_2 finden wir mit Hilfe dieser Skizze, dass wir die Summe aller Längenelemente ds bilden müssen.



Das Längenelement ds ist:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

Mit $y' = \frac{dy}{dx}$ erhalten wir:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

⁴Diese Funktion wird erst im nächsten Abschnitt definiert.

Da wir keine explizite Funktion haben, welche wir für y einsetzen, entspricht dies einem Funktional. Nennen wir das Funktional $J[q]$, so suchen wir:

$$J[y] = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Die Minimierung von $J[y]$ sollte natürlich die obige Lösung $y(x)$ ergeben. Wie minimiert man also dieses Funktional?

Man nimmt die gesuchte Lösung $y(x)$ und variiert sie ein wenig (infinitesimal: ϵ) mit einer beliebigen Funktion $\eta(x)$.

Def. 9: (Variation) Die Variation δ einer Funktion $y(x)$ ist:

$$y(x) + \delta y(x),$$

wobei $\delta y(x) = \epsilon \eta(x)$ mit ϵ eine infinitesimale Konstante und $\eta(x)$ eine beliebige Funktion sind.

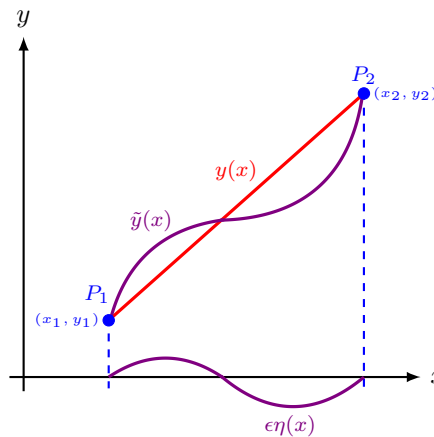
Damit erhalten wir eine sogenannte Vergleichsfunktion $\tilde{y}(x)$, für die gilt:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x).$$

Da wir die Randpunkte in diesem Fall festhalten und nicht variieren, gilt:

$$\tilde{y}(x_1) = y(x_1) = y_1 \quad \text{und} \quad \tilde{y}(x_2) = y(x_2) = y_2 \quad \Rightarrow \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Das kann man sich in etwa wie folgt vorstellen:



Damit sollte klar sein, dass die Extremalbedingung für $\epsilon = 0$ erfüllt ist. Damit gilt folgendes:

Ges. 2: (Extremalbedingung) Die Extremalbedingung für ein Funktional $J[y]$ ist

$$\delta J[y] \equiv \left. \frac{dJ[y + \epsilon \eta]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

Das sieht aus wie die Extremalbedingung einer Funktion, ausser dass $\epsilon = 0$ gesetzt werden muss.

Wenden wir nun die Extremalbedingung auf ein beliebiges Funktional $J[y + \epsilon \eta]$ an und schauen, was dabei herauskommt. Es sei

$$J[y + \epsilon \eta] = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x) dx,$$

wobei das erste Argument der Funktion F dem Argument des Funktionals entspricht und das zweite Argument immer der Ableitung nach der Variablen (hier: x) ist; daher auch der Term η' . Nun entwickeln wir die Funktion $F(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x)$ in einer Taylor-Reihe in ϵ um $\epsilon = 0$. Da am Schluss $\epsilon = 0$ gesetzt wird, verschwinden alle nicht linearen Glieder. Daher reicht es bis zur ersten Ordnung zu entwickeln.

$$F(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x) = F(y, y', x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \cdot \epsilon \eta(x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \cdot \epsilon \eta'(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Nun können wir die Extremalbedingung anwenden:

$$0 = \frac{dJ[y + \epsilon\eta]}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \underbrace{F(y, y', x)}_{=0} + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \cdot \cancel{\epsilon}\eta(x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \cdot \cancel{\epsilon}\eta'(x) + \underbrace{\mathcal{O}(\epsilon^2)}_{=0} \right\} dx,$$

wobei der erste Term verschwindet, da er unabhängig von ϵ ist. Die linearen Terme in ϵ werden zu Konstanten in ϵ und der letzte Term verschwindet ebenfalls, weil $\epsilon = 0$ gesetzt wird. Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right) dx.$$

Nun integrieren wir den zweiten Summanden partiell, d. h. wir erhalten:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \cdot \eta'(x) dx = \underbrace{\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \cdot \eta(x)}_{=0} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \right) \cdot \eta(x) dx,$$

wobei der erste Term verschwindet, da $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ ist. Somit erhalten wir folgende Gleichung:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \right) \right\} \eta(x) dx.$$

Diese letzte Gleichung muss natürlich für alle möglichen $\eta(x)$ erfüllt sein, damit kann das Integral nur Null sein, falls der Term in der geschweiften Klammer verschwindet, d. h.

$$\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \right) = 0.$$

Damit haben wir eines der zentralen Ergebnisse der Variationsrechnung gefunden. Das Gesetz ist hier für den Effekt S formuliert, gilt aber für alle möglichen Funktionale der gleichen Form.

Ges. 3: (Euler-Lagrange-Gleichungen) Eine Wirkung $S[q]$ ist genau dann extremal, d. h. $\delta S[q] = 0$, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind, d. h.

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right)}$$

wobei $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$ ist.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen (ELG) stellen eine partielle Differentialgleichung dar, deren Lösung die gesuchte Kurve ist. Wenn man n Variablen hat, hat man n ELG.

Um das Beispiel abzuschließen, versuchen wir die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten mit Hilfe der ELG zu finden. Das Funktional war

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + (y')^2}}_{=F(y')} dx.$$

Damit sind die ELG:

$$\frac{\partial F(y')}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(y')}{\partial y'} \right)$$

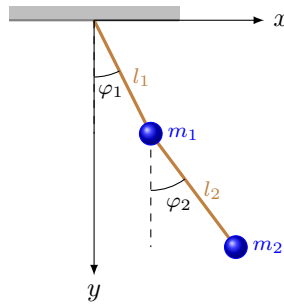
Eingesetzt erhalten wir:

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y(x) = ax + b$$

und durch einsetzen der Randbedingungen erhalten wir die gesuchte Strecke.

Das sollte als kleine Einführung in die Variationsrechnung genügen. Glauben Sie mir, es steckt natürlich noch viel mehr dahinter, aber das müssen Ihnen die Mathematiker beibringen. Nun zurück zur Physik.

Betrachten wir ein Doppel-Pendel, d. h. ein Pendel mit zwei Massen m_1 im Abstand l_1 und m_2 im Abstand l_2 von m_1 . Das sieht wie folgt aus:



Stellen Sie die expliziten Euler-Lagrange-Gleichungen für beide Massen auf.

Lsg: –

Lösung:

Ein weiterer Vorteil dieses Formalismus zeigt sich bei Koordinatentransformationen. Betrachten wir z.B. folgendes System

Bsp. xiii.

Finden Sie die Bewegungsgleichungen für die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ und die potentielle Energie $V = V(r)$ in Polarkoordinaten.

Lsg: –

Lösung:

Damit ist das Kapitel über das Wirkungsprinzip abgeschlossen und wir können mit Hilfe dieses Formalismus zum nächsten wichtigen Thema übergehen: *Symmetrie und Erhaltungsgrößen*.

1.4 Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Bereits im Kapitel Mechanik haben wir den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen diskutiert. Aber dort mussten wir diese Zusammenhänge einfach annehmen und konnten sie nicht herleiten. In diesem Abschnitt haben wir nun das Werkzeug, um diese Zusammenhänge selbst herzuleiten. Wir können das ganze Konzept abstrakt und formal herleiten.

Lösung:

Nun nehmen wir den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen in Angriff. Dies soll im nächsten Abschnitt geschehen.

1.4.2 Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Die Idee hinter diesem Zusammenhang ist, wie Sie sich bestimmt noch erinnern werden, das *Noether-Theorem*. Hier in etwas abgewandelter Form noch einmal:

Ges. 4: (*Symmetrie und Erhaltung*) Jede Symmetrieoperation $\delta q_i = \epsilon f_i(q)$, welche die Lagrange-Funktion \mathcal{L} invariant lässt, hat die Erhaltungsgröße Q

$$Q = \sum_{i=1}^f P_i f_i(q),$$

wobei f die Anzahl Freiheitsgrade sind.

Versuchen wir hier einen Beweis von dieser wohl wichtigsten Aussage der theoretischen Physik. Betrachten wir also die Lagrange-Funktion \mathcal{L} und variieren diese:

$$\delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right),$$

wobei wir hier allgemeine ein mehrteilchen und mehrdimensionales System betrachten. Daher auch der Index i und die Summe \sum_i . Die Euler-Lagrange-Gleichung und die Definition des kanonischen Impulses sind:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \text{und} \quad P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

liefern gemeinsam

$$\delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i (\dot{P}_i \delta q_i + P_i \delta \dot{q}_i).$$

Wie Sie unschwer erkennen können, hat der Summand die Struktur der Produktregel beim Ableiten. Daher können wir den Summand auch schreiben als:

$$\delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i P_i \delta q_i.$$

Falls diese Variation der Lagrange-Funktion eine Symmetrieoperation ist, verschwindet diese, d. h. $\delta \mathcal{L} = 0$ und damit gilt mit $\delta q_i = \epsilon f_i(q)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i P_i \epsilon f_i(q) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_i P_i f_i(q) \right) = 0,$$

wobei noch durch ϵ dividiert wurde. Daraus folgt aber, dass

$$Q = \sum_i P_i f_i(q) = \text{konst.}$$

ist. Betrachten wir ein einfaches Beispiel dazu, wobei wir die klassische Impulserhaltung zeigen.

Bsp. xvi.

Betrachten wir die Symmetrie-Operation $q \mapsto q + \delta q$, was einer Translation im Raum entspricht. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion \mathcal{L} invariant ist und dass die Impulserhaltung dabei herauskommt. Lsg: –

Lösung:

Das war ein einfacher Umbau. Versuchen Sie, das folgende Problem selbst zu lösen, ohne eine Lösung von mir zu erhalten.



Wie sieht die Transformation aus, die zur Erhaltung des Drehimpulses führt, und welche Form muss die Lagrangefunktion, insbesondere die potentielle Energie, haben, damit sie invariant bleibt?

Nach der Impulserhaltung wollen wir auch die Energieerhaltung zeigen. Diese hat jedoch etwas mit der Hamiltonfunktion zu tun. Daher beenden wir diesen Abschnitt und wenden uns dem *Hamilton-Formalismus* zu.

1.5 Hamilton-Formalismus

Der Hamilton-Formalismus mit der Hamilton-Funktion ist ein weiterer wichtiger Baustein in der theoretischen Physik und geht natürlich auf Hamilton⁷ zurück. Doch motivieren möchten wir die Hamilton-Funktion angelehnt an die letzten Überlegungen über die Energieerhaltung.

1.5.1 Hamilton-Funktion

Zeigen wir nun also die Energieerhaltung der Lagrange-Funktion, wodurch wir dann schliesslich bei der Hamilton-Funktion landen werden. Im Grunde ist es ganz einfach, wenn die Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}, q)$ keine explizite Zeitabhängigkeit hat, dann ist das System zeitinvariant und daher die Energie erhalten.

Wir gehen so vor, wie wir jetzt schon mehrfach vorgegangen sind, wenn wir eine Erhaltungsgrösse zeigen wollten.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} \right),$$

was nichts anderes als die Kettenregel ist. Durch Vereinfachung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) &= \sum_i (\dot{P}_i \dot{q}_i + P_i \ddot{q}_i) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i P_i \dot{q}_i \right). \end{aligned}$$

Damit ist:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i P_i \dot{q}_i \right) - \frac{d}{dt} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i P_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) \right) = 0,$$

⁷Sir William Rowan Hamilton (4. August 1805 in Dublin - 2. September 1865 in Dunsink bei Dublin) war ein irischer Mathematiker und Physiker, der vor allem für seine Beiträge zur Mechanik und für seine Einführung und Untersuchung der Quaternionen bekannt ist. Hamilton studierte in Dublin Mathematik und wurde bereits 1827 vor Ende seines Studiums Professor für Astronomie sowie königlicher Astronom (Royal Astronomer) für Irland. In frühen Jahren beschäftigte sich Hamilton mit Strahlensystemen und der geometrischen Optik. Daraus entwickelte er in mehreren Veröffentlichungen in den Jahren 1834 und 1835 die Formulierung der Mechanik, die heute seinen Namen trägt (siehe hamiltonsche Mechanik). Später konzentrierte er seine Untersuchungen auf Quaternionen (hyperkomplexe Zahlen), die heutzutage beispielsweise Anwendung in der Computergrafik finden.

Kurve im Phasenraum und die Hamiltongleichungen beschreiben die Bewegung von Punkten im Phasenraum. Betrachten wir das folgende Beispiel.

Bsp. xix.

Finden Sie die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(q, p)$ für den harmonischen Oszillator mit der Winkelgeschwindigkeit ω .

a) Zeigen Sie zuerst, dass Sie die übliche Lagrange-Funktion \mathcal{L}

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Dx^2$$

in die etwas unüblichere Form:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2\omega} \dot{q}^2 - \frac{\omega}{2} q^2$$

bringen können, falls Sie die Koordinatentransformation $q = (Dm)^{1/4}x$ anwenden. b) Wie lautet nun die Hamilton-Funktion und c) welche Form hat sie im Phasendiagramm? Lsg: –

Lösung:



Nun leiten wir also die Hamilton-Gleichungen her. Dafür erinnern wir uns, dass die Variation einer Funktion $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ geschrieben werden kann, als:

$$\delta\mathcal{H}(q_i, p_i) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \delta p_i.$$

Nun variieren wir also die Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}(q_i, p_i) &= \delta \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) \right) \\ &= \sum_i \left(p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right). \end{aligned}$$

Mit $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \dot{p}_i$ und $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ erhalten wir:

$$\delta\mathcal{H}(q_i, p_i) = \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i).$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Variation von oben, erhalten wir die sogenannten *Hamilton-Gleichungen*:

Ges. 5: (*Hamilton-Gleichungen*) Die Bewegungsgleichungen für die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ sind:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

wobei q_i die generalisierten Koordinaten und p_i Impulse sind.

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir das Newtonsche Aktionsgesetz in zwei Differentialgleichungen 1. Dabei habe ich Sie darauf aufmerksam gemacht, dass es sich um die Hamilton-Gleichungen handelt. Ich möchte Sie nun bitten, dies selbst noch einmal nachzuvollziehen.

Bsp. xx.

Zeigen Sie, dass die Hamilton-Gleichungen und die Newton II Formulierung mit zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung äquivalent sind. Verwenden Sie dazu die folgende Hamilton-Funktion:

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x).$$

a) Schreiben Sie die Hamilton-Funktion in x und p und b) geben Sie die Hamilton-Gleichungen wieder. Lsg: –

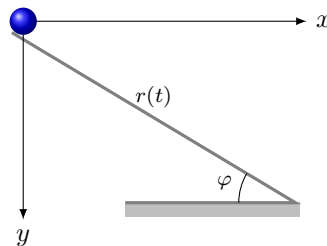
Lösung:

Eine letzte, vielleicht etwas zu abstrakte Anwendung des Hamilton-Formalismus ist das *Gibbs-Liouville-Theorem*.

1.5.3 Gibbs-Liouville-Theorem

Nun hat das Gibbs-Liouville-Theorem etwas mit den Hamilton-Gleichungen zu tun, aber auch mit dem Phasenraum. Deshalb schauen wir uns zunächst den Phasenraum wieder etwas genauer an und versuchen zu verstehen, was passiert, wenn man verschiedene Anfangszustände betrachtet.

Nehmen wir zum Beispiel einen Körper auf einer schiefen Ebene und untersuchen die Kurven im Phasenraum, wenn wir verschiedene Anfangsbedingungen wählen. Zuerst müssen wir die Hamilton-Gleichung aufstellen.



Ein allgemeiner Punkt auf der schiefen Ebene wird beschrieben durch:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeiten ergeben sich direkt daraus

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{r} \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Lagrange-Funktion \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - mgr \sin \varphi.$$

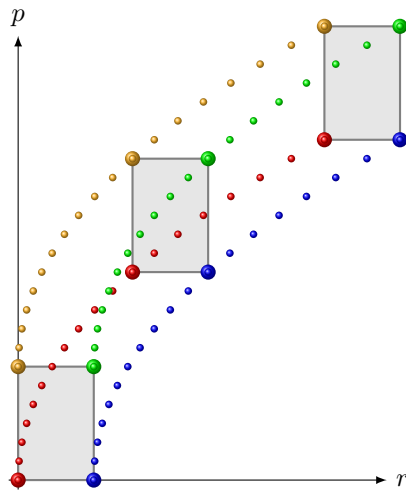
Die Hamilton-Funktion \mathcal{H} erhalten wir damit:

$$\mathcal{H}(r, p) = \frac{p^2}{2m} + mgr \sin \varphi.$$

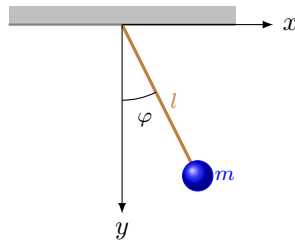
Betrachten wir nun vier verschiedene Anfangsbedingungen:

- $r(t=0) = 0$ und $p(t=0) = 0$
- $r(t=0) = r_0 > 0$ und $p(t=0) = 0$
- $r(t=0) = r_0 > 0$ und $p(t=0) = p_0 > 0$
- $r(t=0) = 0$ und $p(t=0) = p_0 > 0$

Die vier Kurven im Phasendiagramm sehen wie folgt aus, wobei wir hier nur einzelne Punkte dargestellt haben.



Man sieht auch, dass zu gleichen Zeitpunkten (hier als graues Rechteck dargestellt) die eingeschlossene Fläche im Phasenraum gleich bleibt. In diesem Beispiel scheint es sehr klar zu sein, dass dies der Fall ist. Was aber, wenn sich die relative Lage mit der Zeit ändert? Betrachten wir dazu das Fadenpendel:



Die Lagrange-Funktion für ein Fadenpendel ist:

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi.$$

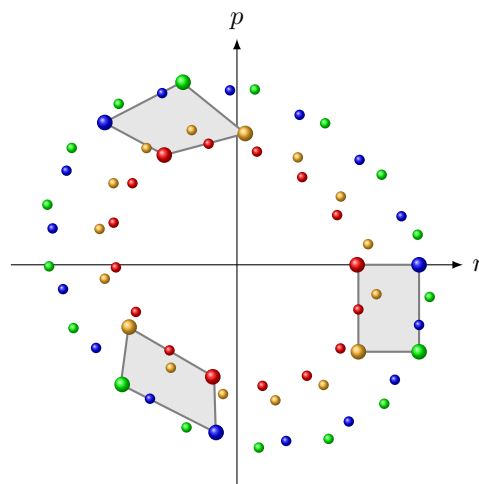
Die Hamilton-Funktion lautet:

$$\mathcal{H}(\varphi, p) = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl \cos \varphi.$$

Betrachten wir wieder die vier verschiedenen Anfangsbedingungen:

- $\varphi(t=0) = \varphi_1 > 0$ und $p(t=0) = 0$
- $\varphi(t=0) = \varphi_2 > \varphi_1$ und $p(t=0) = 0$
- $\varphi(t=0) = \varphi_2$ und $p(t=0) = p_0 > 0$
- $\varphi(t=0) = \varphi_1$ und $p(t=0) = p_0 > 0$

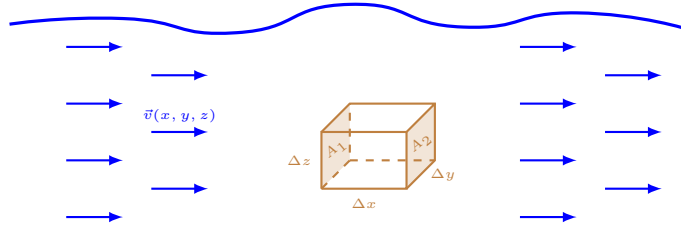
Die vier Kurven des Phasendiagramms sehen wie folgt aus, wobei hier nur einzelne Punkte dargestellt sind.



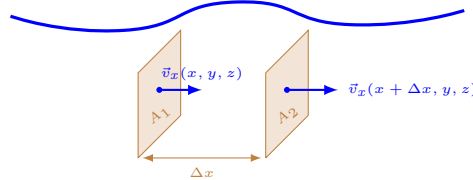
Jetzt sehen die Flächen schon nicht mehr so schön kongruent aus wie im letzten Beispiel. Trotzdem sind sie alle gleich gross⁸, denn genau das ist die Aussage des Gibbs-Liouville-Theorems.

Die Frage ist nun, wie man eine solche Veränderung beschreiben kann und wie man zeigen kann, dass sich die Grösse der Flächen nicht ändert. Wir haben uns bisher nur mit Oberflächen beschäftigt, aber in den meisten Fällen ist das System mehrdimensional und wir haben dann ein Volumen, das sich im Phasenraum bewegt. Dieses Volumen kann sich verformen, aber seine Grösse bleibt erhalten. Das wird oft mit einer Flüssigkeit verglichen. Stellen wir uns also eine Flüssigkeit und darin ein Volumen vor. Um zu beschreiben, wie sich dieses Volumen in der Flüssigkeit verändert und ob es sich verändert, benötigen wir die Divergenz, die hier kurz motiviert werden soll.

Betrachten wir also eine strömende Flüssigkeit $\vec{v}(x, y, z)$ und darin einen kleinen Quader $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$:



Nun betrachten wir nur noch die Flächen A_1 und A_2 , d.h. wir reduzieren das Problem für einen Moment auf eine Dimension. Wie viel fliesst durch die Seite A_1 hinein und wie viel fliesst durch die Seite A_2 heraus? Betrachten wir diese beiden Seiten etwas genauer:



Wir sehen, dass sich der Geschwindigkeitsvektor ändern kann. Er befindet sich dann nicht mehr an der gleichen Position (x, y, z) , sondern um Δx verschoben, also an der Position $(x + \Delta x, y, z)$. Als nächstes betrachten wir die Wassermenge $V_{\text{in},x}$, die in der Zeit Δt durch die Fläche A_1 in den Quader fliesst. Es gilt

$$\begin{aligned} V_{\text{in},x} &= A_1 \vec{v}_x(x, y, z) \Delta t \\ &= \vec{v}_x(x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Analog für die Wassermenge $V_{\text{aus},x}$, welche in der Zeit Δt durch die Fläche A_2 aus dem Quader fliesst. Es gilt:

$$\begin{aligned} V_{\text{aus},x} &= A_2 \vec{v}_x(x + \Delta x, y, z) \Delta t \\ &= \vec{v}_x(x + \Delta x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Damit ist im Quader die Differenz Wassermengen ΔV , also:

$$\begin{aligned} \Delta V_x &= V_{\text{aus},x} - V_{\text{in},x} \\ &= \vec{v}_x(x + \Delta x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z - \vec{v}_x(x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Volumenstrom \dot{V}_x , d. h. die Änderung der Wassermenge pro Zeit, also:

$$\dot{V}_x = (\vec{v}_x(x + \Delta x, y, z) - \vec{v}_x(x, y, z)) \Delta y \Delta z,$$

wobei wir noch ausgeklammert haben. Nun erweitern wir mit $1 = \frac{\Delta x}{\Delta x}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \frac{\vec{v}_x(x + \Delta x, y, z) - \vec{v}_x(x, y, z)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\vec{v}_x(x + \Delta x, y, z) - \vec{v}_x(x, y, z)}{\Delta x} \Delta V, \end{aligned}$$

wobei $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ dem Volumen des Quaders entspricht. Nun haben wir auf der rechten Seite den Differenzenquotienten. Wenn wir $\Delta x \rightarrow 0$ gehen lassen, erhalten wir also:

$$\dot{V}_x = \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} dV.$$

⁸Was ich natürlich mit GeoGebra überprüft habe!

Analog findet man natürlich die Terme in y und z , d.h. der Volumenstrom in y und z ist:

$$\begin{aligned}\dot{V}_y &= \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} dV \\ \dot{V}_z &= \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z} dV\end{aligned}$$

und damit ist der gesamte Volumenstrom \dot{V} :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_x + \dot{V}_y + \dot{V}_z \\ &= \left(\frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z} \right) dV.\end{aligned}$$

Die Klammer definiert eine wichtige mathematische Grösse in diesem Zusammenhang. Es gilt:

Def. 13: (Divergenz) Die Divergenz eines Vektorfeldes $\text{div } \vec{v}(x, y, z)$ ist definiert als

$$\text{div } \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z}.$$

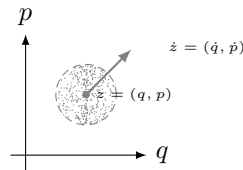
Überlegen wir uns folgende drei Möglichkeiten für die Divergenz:

$\text{div } \vec{v} < 0$: Flüssigkeit verschwindet in $V \rightarrow$ ein Loch oder die Flüssigkeit zieht sich zusammen.

$\text{div } \vec{v} > 0$: Flüssigkeit entsteht in $V \rightarrow$ eine Quelle oder die Flüssigkeit dehnt sich aus.

$\text{div } \vec{v} = 0$: Flüssigkeit bleibt unverändert \rightarrow inkompressibel.

Nun haben wir alles, um das Gibbs-Liouville-Theorem zu formulieren. Dazu betrachten wir den Phasenraum mit einem Punkt $z = (q, p)$ und dem Geschwindigkeitsvektor $v = \dot{z} = (\dot{q}, \dot{p})$:



Wenn wir nun viele Punkte um z betrachten und wissen wollen, wie sich dieses Volumen - hier als Kreisfläche dargestellt - ändert, müssen wir über das gesamte Volumen integrieren, d.h.

$$\int_V \text{div } \dot{z} dV.$$

Untersuchen wir den Integranden, so erhalten wir:

$$\text{div } \dot{z}(q, p) = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

und mit den Hamilton-Gleichungen erhalten wir:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

und damit ist

$$\text{div } \dot{z}(q, p) = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right).$$

Vielleicht erinnern Sie sich noch daran, dass für die zweite Ableitung von der Form $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ die Reihenfolge keine Rolle spielt und damit ist:

$$\text{div } \dot{z}(q, p) = 0.$$

Damit ist der Phasenraumflüssigkeit inkompressibel, was in der klassischen Mechanik als Gibbs-Liouville-Theorem bekannt ist, oder das eingeschlossene Volumen eines Systems im Phasenraum bleibt erhalten.

Ges. 6: (Gibbs-Liouville Theorem) Das Volumen im Phasenraum, welches durch eine Oberfläche eingeschlossen wird, ist konstant, während die Oberfläche sich durch den Raum bewegt.

Im folgenden Beispiel soll gezeigt werden, wie nützlich die Poisson-Klammern sein können. Das Herleiten der Hamilton-Gleichungen reduziert sich, auf das Anwenden der Regeln der Poisson-Klammern.

Bsp. xxiii.

Leiten Sie mit Hilfe der Poisson-Klammern die Hamilton-Gleichungen für die Hamilton-Funktion eines harmonischen Oszillator:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$$

her, wobei Sie folgendes nicht vergessen dürfen:

$$\frac{d}{dt}F(q, p) = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q},$$

d. h. die Zeitableitung einer Grösse ist die Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion.

Tipp: Verwenden Sie nicht die Definition, sondern die Regeln, um das Verlangte zu zeigen.

Lsg: –

Lösung:



Zum Schluss sollen Sie sich noch folgendes Überlegen und es selbst beweisen.



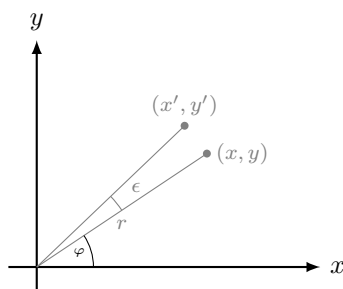
Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammer auch die Ableitung nach q oder nach p ist. D. h. $f'(q) = \frac{df(q)}{dq} = \{f(q), p\}$ und analog für $f(p)$.

Damit haben wir gezeigt, wie mächtig diese neue Schreibweise der klassischen Mechanik ist. Ein ähnlicher Formalismus wird uns auch in der Quantenmechanik begegnen, nur dass es dort nicht um die Poisson-Klammern geht, sondern um den Kommutator, der aber ganz ähnlich definiert ist.

1.6.2 Symmetrie und Erhaltung

Betrachten wir die Symmetrieoperation der Drehung. Dazu verlassen wir kurz die Poisson-Klammern und betrachten wieder infinitesimale Verschiebungen, die in diesem Fall Rotationen sein sollen.

Gehen wir von einem Punkt (x, y) in der Ebene aus und drehen ihn um die Achse z um den Winkel ϵ , so erhalten wir den Punkt (x', y') .



Es gilt also mit den Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= z,\end{aligned}$$

dass der gedreht Punkt geschrieben werden kann, als:

$$\begin{aligned}x' &= r \cos(\varphi + \epsilon) \\y' &= r \sin(\varphi + \epsilon) \\z' &= z.\end{aligned}$$

Daraus folgen mit den trigonometrischen Additionstheoremen:

$$\begin{aligned}x' &= r(\cos \varphi \cos \epsilon - \sin \varphi \sin \epsilon) \\y' &= r(\sin \varphi \cos \epsilon + \sin \epsilon \cos \varphi) \\z' &= z.\end{aligned}$$

Durch ausmultiplizieren und einsetzen von x und y erhalten wir:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \epsilon - y \sin \epsilon \\y' &= x \sin \epsilon + y \cos \epsilon \\z' &= z.\end{aligned}$$

Wir haben also eine Drehung um den Winkel ϵ um die Achse z beschrieben. Nun ist ϵ sehr klein, so dass $\cos \epsilon \sim 1$ und $\sin \epsilon \sim \epsilon$ sind. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}x' = x - y\epsilon &\Rightarrow \delta x = -y\epsilon \\y' = x\epsilon + y &\Rightarrow \delta y = x\epsilon \\z' = z &\Rightarrow \delta z = 0.\end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass die Lagrange-Funktion invariant ist unter dieser Rotationstransformation, ja dann haben wir damit eine Erhaltungsgrösse gefunden. Es gilt:

$$Q = \sum_i p_i f_i(q)$$

und mit $\delta x = \epsilon f_x = -\epsilon y$ sowie $\delta y = \epsilon f_y = \epsilon x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}Q &= p_x f_x + p_y f_y \\&= -y p_x + x p_y,\end{aligned}$$

was der z -Drehimpulskomponente entspricht:

$$L_z = x p_y - y p_x.$$

Ganz analog erhält man durch Rotation um die x - resp. y -Achse die Drehimpulskomponenten L_x und L_y , also

$$\begin{aligned}L_x &= y p_z - z p_y \\L_y &= z p_x - x p_z \\L_z &= x p_y - y p_x.\end{aligned}$$

Dies entspricht natürlich den Komponenten des Drehimpulsvektors \vec{L} , der wie folgt definiert ist:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Wir kehren nun zu den Poisson-Klammern zurück und zeigen einige Identitäten, oder besser gesagt, wir bitten Sie, einige Identitäten zu überprüfen.

Bsp. xxiv.

Zeigen Sie, dass folgende Identitäten für die z -Komponente des Drehimpulsvektors gilt:

$$\{x, L_z\} = -y, \quad \{y, L_z\} = x \quad \text{und} \quad \{z, L_z\} = 0.$$

Lsg: –

Lösung:

Vergleicht man diese Identitäten mit den Transformationen um die z -Achse, so erkennt man - abgesehen vom ϵ - eine ähnliche Struktur.

$$\{x, L_z\} \sim \delta x, \quad \{y, L_z\} \sim \delta y \quad \text{und} \quad \{z, L_z\} = \delta z.$$

Das ist kein Zufall! Es gilt nämlich ganz allgemein, dass die *Poisson-Klammer einer Erhaltungsgrösse* - hier L_z - die *Transformationen der zugrunde liegenden Symmetrie* liefert.

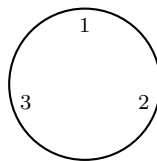
Weil es so wichtig ist, hier noch einmal etwas ausführlicher. Wir haben gezeigt, dass die Erhaltungsgrösse der Rotation um die z -Achse die entsprechende Drehimpulskomponente ist. Nun sehen wir, dass die Poisson-Klammer der Ortskoordinaten mit dieser Drehimpulskomponente die Transformationen wiedergibt. Dies zeigt also, dass die Poisson-Klammer die Transformationsgleichungen erzeugt.

Um dieses Konzept zu verallgemeinern brauchen wir das sogenannten *Levi-Civita-Symbol*, welches auf Levi-Civita¹² zurückgeht. Es ist ein ähnliches Symbol wie das Kronecker-Delta Symbol, nur nimmt es drei Argumente an. Es gilt:

Def. 15: (*Levi-Civita*) Das *Levi-Civita Symbol* ε_{ijk} ist definiert als

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Eine andere Möglichkeit, dies zu definieren, wäre, eine Uhr mit nur drei Stunden zu verwenden, z.B. so:



Im Uhrzeigersinn erhält man für $\varepsilon_{ijk} = 1$ und gegen den Uhrzeigersinn -1 .

Damit sind wir nun in der Lage, die Poisson-Klammern für alle Koordinaten und alle Komponenten von \vec{L} in einer Gleichung darzustellen. Es gilt:

$$\{x_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} x_k.$$

Das Überprüfen dieser Gleichung überlasse ich ganz Ihnen.



Überprüfen Sie, dass diese Gleichung $\{x_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} x_k$ die richtigen Identitäten wiedergibt, wobei 1, 2, 3 mit x, y, z identifiziert werden müssen.

¹²Tullio Levi-Civita 29. März 1873 in Padua - 29. Dezember 1941 in Rom) war ein italienischer Mathematiker. Levi-Civita erfand die kovariante Ableitung, machte mit seinem Buch *calcolo differenziale assoluto* die Tensoranalysis einem grösseren Fachpublikum zugänglich und legte damit die mathematische Grundlage für Albert Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie, die er selbst in späteren Jahren in Italien verbreitete. In diesem Zusammenhang wurde der Levi-Civita-Tensor nach ihm benannt.

Wir untersuchen nun die Poisson-Klammern mit dem Impuls und dem Drehimpuls, also:

$$\{p_x, L_z\}$$

Durch einsetzen der Drehimpulskomponente erhalten wir:

$$\begin{aligned}\{p_x, L_z\} &= \{p_x, xp_y - yp_x\} \\ &= \{p_x, xp_y\} - \{p_x, yp_x\} \\ &= \{p_x, x\}p_y + x\{p_x, p_y\} - \{p_x, y\}p_x - \{p_x, p_x\}y \\ &= -p_y,\end{aligned}$$

da $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ und der Antisymmetrie-Eigenschaft der Poisson-Klammer. Damit analog zur Ortskoordinate und wir können direkt die allgemeine Version hinschreiben. Es gilt:

$$\{p_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k.$$

Dies ist ein äusserst wichtiges Resultat! Es sagt nämlich, dass die Änderung einer beliebigen Grösse δF aufgrund einer Rotation um die i -te Achse durch die Poisson-Klammer mit der i -ten Drehimpulskomponente gebildet wird.

$$\delta F = \{F, L_i\}.$$

Man sagt also, dass der Drehimpuls der Generator der Rotation ist. Das erinnert an das Noether-Theorem. Dort war die entsprechende Grösse der Rotation der Drehimpuls. Da dies allgemein gilt, ist wohl die Energie bzw. die Hamiltonfunktion der Generator der Zeittransformation und der Impuls der Generator der Translationstransformation.

Allgemein kann man also für eine Funktion $G(q, p)$, die eine infinitesimale Verschiebung im Phasenraum $(\delta q_i, \delta p_i)$ bewirkt, diese Transformation schreiben als

$$\begin{aligned}\delta q_i &= \{q_i, G\} \\ \delta p_i &= \{p_i, G\}\end{aligned}$$

Diese durch G erzeugte Transformation kann oder kann nicht eine Symmetrie des Systems sein. Sei sie aber eine Symmetrie des Systems, d.h. dass sie die Lagrangefunktion \mathcal{L} und damit auch die Hamiltonfunktion \mathcal{H} invariant hält, also

$$\{H, G\} = 0.$$

Da die Umkehrung der Reihenfolge nur zu einer Änderung des Vorzeichens führt, kann sie auch wie folgt geschrieben werden

$$\{G, H\} = 0,$$

was exakt die Bedingung darstellt, dass G eine Erhaltungsgrösse ist. Man könnte also sagen: *Die gleiche Poisson-Klammer, die uns sagt, wie sich \mathcal{H} unter der Transformation von G verändert, sagt uns auch, wie sich G mit der Zeit ändert.*

1.7 Anwendung - Elektrodynamik

Bevor wir mit der Elektrodynamik richtig beginnen können, brauchen wir noch einige mathematische Definitionen.

1.7.1 Mathematisches Intermezzo

Zuerst definieren wir den sogenannten Nable-Operator.

Def. 16: (Nable-Operator) Der Nable-Operator $\vec{\nabla}$ ist ein Pseudovektor ohne Richtung und Länge und ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix},$$

wobei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial i}$ für $i = x, y, z$ eine Kurzform ist.

Satz 2: (*Rotationsfreier Gradient*) Der Gradient eines Skalarfeldes S ist immer rotationsfrei, d. h.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} S) = 0.$$

Auch hier hat der Beweis auf einer Zeile Platz. Es gilt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} S) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 S \\ \partial_2 S \\ \partial_3 S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \partial_3 S - \partial_3 \partial_2 S \\ \partial_3 \partial_1 S - \partial_1 \partial_3 S \\ \partial_1 \partial_2 S - \partial_2 \partial_1 S \end{pmatrix} = \vec{0},$$

da auch hier die zweiten Ableitungen vertauschbar sind¹³. Nun können wir mit der Elektrodynamik beginnen und tun dies gleich mit dem magnetischen Feld.

1.7.2 Magnetisches Feld

Die wichtigsten Gesetze der Elektrodynamik sind die Maxwell-Gleichungen. Sie soll hier, nur weil sie so schön sind, nochmals wiedergeben werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} & \text{und} & & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} & \text{und} & & \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind zwei Gleichungen durch Divergenzen und zwei durch Drehungen definiert. Betrachten wir zunächst die Divergenz des Magnetfeldes \vec{B} . Wir sehen, dass das Magnetfeld keine Divergenz aufweist. Mit dem Satz von oben bedeutet dies aber, dass das magnetische Feld aus einer Drehung eines Vektorfeldes bzw. Vektorpotentials abgeleitet werden kann. Es gilt also:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

wobei \vec{A} das Vektorpotential ist. Leider ist dieses Vektorpotential nicht eindeutig definiert, da, wie wir aus dem zweiten Satz von oben wissen, man ein Gradient eines Skalarfeldes dazu addieren kann. Dies soll hier kurz von Ihnen gezeigt werden.

Bsp. xxvi.

Zeigen Sie, dass für ein Vektorpotential \vec{A} resp. $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} S$ das gleiche magnetische Feld \vec{B} heraus kommt.

Lsg: –

Lösung:

Man spricht hier davon, dass das Vektorpotential bis auf eine *Eichtransformation*¹⁴ definiert ist. Nun, irgendwie hatten wir das schon. Es ist nicht ganz dasselbe, aber die potentielle Energie ist auch nicht eindeutig definiert.

¹³Der Satz von Schwarz besagt:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge sowie $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens k -mal partiell differenzierbar und sind alle k -ten partiellen Ableitungen in U zumindest noch stetig, so ist f k -mal total differenzierbar und insbesondere ist die Reihenfolge der Differentiation in allen l -ten partiellen Ableitungen mit $l \leq k$ unerheblich. Insbesondere für $n = 2$ und $k \geq 2$ gilt also

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right).$$

¹⁴Im Englischen heisst es *gauge transformation*

Man kann eine beliebige Konstante hinzufügen und die Definition der Kraft ändert sich nicht. Sie ist nämlich gültig:

$$\vec{F}(x) = -\vec{\nabla} V(x)$$

was aber das Gleiche ist, wie für $V'(x) = V(x) + C$ mit C eine Konstante. Durch diese Konstante wird der Nullpunkt festgelegt. Analog gilt für das Vektorpotential, dass durch das Festlegen des Skalarfeldes der *Nullpunkt* festgelegt wird.

1.7.3 Lagrange-Funktion

Nun möchten wir sehen, ob es möglich ist, z. B. die elektromagnetische Kraft mit dem Lagrange-Formalismus ableiten. Dazu rufen wir uns zuerst in Erinnerung, was die elektromagnetische Kraft ist. Nun wir kennen bestimmt noch die elektrische Kraft \vec{F}_{el} , das ist einfach:

$$\vec{F}_{\text{el}} = q\vec{E},$$

wobei q die Ladung und \vec{E} das elektrische Feld ist. Nun brauchen wir noch die magnetische Kraft. Da haben wir die Kraft auf eine Ladung im Magnetfeld kennengelernt, die sogenannte Lorentz-Kraft \vec{F}_L . Für sie gilt:

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B},$$

wobei \vec{v} die Geschwindigkeit des Teilchens und \vec{B} das magnetische Feld ist. Kombiniert man nun diese zwei Kräfte, erhält man die elektromagnetische Kraft \vec{F}_{em} auf ein Teilchen. Es gilt:

$$\vec{F}_{\text{em}} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

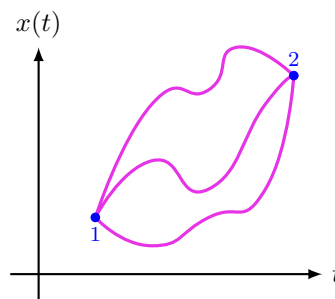
Kann diese Kraft mit dem Lagrange-Formalismus hergeleitet werden? Wo fängt man an? Die Antwort lautet natürlich Ja! Denn der Lagrange-Formalismus ist, wie wir jetzt wissen, viel allgemeiner und fundamentaler als die Newtonschen Gesetze.

Die kinetische Energie ist natürlich klar, sie hat immer die gleiche Form. Doch was ist die potentielle Energie in einem elektromagnetischen Feld? Leider wird Ihnen das folgende Vorgehen nicht gefallen. Doch es entspricht vermutlich mehr der Realität, als das was bisher an Herleitungen gezeigt wurde¹⁵. Wir werden versuchen, die passende Lagrange-Funktion zu erraten.

Schauen wir uns also die Wirkung nochmals an und gehen von einer nicht expliziten Zeitabhängigkeit aus:

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt,$$

Wir suchen also wieder das Minimum dieses Effekts oder, graphisch ausgedrückt, den Weg 1 nach 2, der den Effekt minimiert, wobei die Randpunkte fixiert sind.



Da sich die magnetische Kraft \vec{B} durch das Vektorpotential \vec{A} ausdrücken lässt, nehmen wir einen Term mit \vec{A} , d. h. es gibt zwei einfache¹⁶ Möglichkeiten. Zwei sind es, weil wir wissen, dass die Wirkung nur von x und \dot{x} abhängen kann. Also erhalten wir:

$$V \sim \vec{A} \cdot \vec{x} \quad \text{oder} \quad V \sim \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}}.$$

Man kann leicht zeigen, dass der Term mit \vec{x} zu nichts brauchbarem führt, daher nehmen wir nur den zweiten Term.

¹⁵Als Unterrichtender hat man immer das Gefühl, man müsse den Lernenden neue Inhalte herleiten resp. ableiten. Doch in der Realität wird neues ganz selten abgeleitet von Bekanntem. Wenn dies getan wird, dann findet es selten den Weg in irgendwelche Geschichtsbücher. Die wirklich neuen und bahnbrechenden Entdeckungen werden erraten. Max Plack zum Beispiel oder auch Paul Dirac, haben ihre Gleichung erraten und sie dann im Nachhinein plausibilisiert.

¹⁶Wenn man schon eine Lösung erraten muss, dann probiert man zuerst die einfachen Möglichkeiten aus, bevor man sich mit den schwierigen auseinandersetzt.



Zeigen Sie, dass der Term $\vec{A} \cdot \vec{x}$ in der Lagrange-Funktion zu einer unphysikalischen Aussagen führt.

Somit lautet die Wirkung $S[x]$, wobei wir die Vektoren weglassen, da wir nur eine Komponente betrachten:

$$S[x_i] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + q A_i \dot{x}_i \right) dt.$$

Nun erinnern wir uns, dass das Vektorpotential nur bis auf den Gradient eines Skalarfeldes ($\vec{\nabla} S$) definiert ist, d. h. für eine Komponente sieht es wie folgt aus:

$$S[x_i] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + q \left(A_i + \frac{\partial S}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i \right] dt.$$

Da der kinetische Term sicher richtig ist, fokussieren wir uns auf den zweiten Term:

$$\int_{t_1}^{t_2} q \left(A_i + \frac{\partial S}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i dt.$$

Die Wirkung ist nun also auch von der Wahl der Eichtransformation abhängig. Das ist jedoch in Ordnung! Was nicht sein darf, ist, dass die Variation der Wirkung auch vom Skalarfeld abhängt. Untersuchen wir diesen Term also noch weiter:

$$\int_{t_1}^{t_2} q \left(A_i + \frac{\partial S}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i dt = q \left[\int_{t_1}^{t_2} A_i \dot{x}_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S}{\partial x_i} \dot{x}_i dt \right].$$

Zuerst zeigen wir, dass die Variation der Wirkung unabhängig von der Wahl von S ist. Also schauen wir den zweiten Term noch weiter an:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S}{\partial x_i} \dot{x}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial S}{\partial x_i} dx_i = S(x_2) - S(x_1).$$

Da die Randpunkte fixiert sind, verschwindet dieser Term nach der Variation. Somit sind die Bewegungsgleichungen nicht abhängig¹⁷ vom Skalarfeld S . Damit gehen wir von dieser Lagrange-Funktion \mathcal{L} aus, hier in drei Dimensionen:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q (A_x \dot{x} + A_y \dot{y} + A_z \dot{z}).$$

Daraus bilden wir jetzt die Euler-Lagrange-Gleichungen zuerst für die x -Komponente. Es gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

Zuerst bilden wir den kanonischen Impuls p_x

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x,$$

was etwas merkwürdig aussieht, da der kanonische Impuls nicht eichinvariant ist. Doch das ist noch nicht alles, Sie müssen sich noch etwas gedulden. Bestimmen wir noch die Zeitableitung davon:

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \right),$$

wobei zu beachten ist, dass $A_x = A_x(x, y, z)$ nur die x -Komponente von \vec{A} ist und immer noch von den Variablen x, y, z abhängt. Es fehlt noch der letzte Term in der ELG:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{z} \right).$$

Somit lautet die Euler-Lagrange-Gleichung für die x -Beschleunigung:

$$m\ddot{x} = q \underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)}_{(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z} \dot{y} + q \underbrace{\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)}_{-(\vec{\nabla} \times \vec{A})_y} \dot{z}.$$

¹⁷Wenn Sie die Herleitung genau anschauen, erkennen Sie vermutlich schnell, was der entscheidende Punkt im Ansatz der Wirkung war. Dann können Sie die Frage von oben, sehr schnell beantworten.

Die Terme in der Klammer entsprechen den jeweiligen Komponenten der Rotation von \vec{A} , was jedoch, wie wir nun wissen, das magnetische Feld ist. Damit erhalten wir:

$$m\ddot{x} = q(B_z\dot{y} - B_y\dot{z}) = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_x,$$

was also die x -Komponente der Lorentz-Kraft ist.

Damit ist das Ziel fast erreicht. Aber wo bleibt die elektrische Kraft? Und das elektrische Feld? Ohne die Spezielle Relativitätstheorie können wir das leider nicht herleiten. Erst wenn wir Terme finden, die sogar lorentzinvariant sind, können wir die gesamte elektromagnetische Kraft ableiten.

Damit sind wir am Ende dieses ersten Kapitels angelangt und haben mit dem letzten Abschnitt auch schon gezeigt, wohin uns das nächste Kapitel führen wird.

Zusammenfassung Kapitel J1

1. Alle physikalischen Gesetze sind sowohl *deterministisch* als auch *reversibel*.
2. Der *Konfigurationsraum* ist der Raum mit den generalisierten Koordinaten q_i .
3. Der *Phasenraum* ist der Raum mit den generalisierten Koordinaten q_i (Konfigurationsraum) und den generalisierten Impulse p_i .

4. Die *potentielle Energie* $V(x)$ ist definiert als

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x} = F(x),$$

sofern $F(x)$ eine beliebige konservative Kraft ist.

5. Die *Energie* E eines Körper ist allgemein definiert als

$$E = T + V,$$

wobei T der kinetischen und V der potentiellen Energie entspricht.

6. Das *Potential* $\Phi(x)$ ist durch die potentielle Energie $V(x)$ definiert als

$$\Phi(x) = \frac{V(x)}{q_v},$$

wobei q_v die sogenannte Kopplungskonstate der potentiellen Energie $V(x)$ ist.

7. Sei V ein K -Vektorraum mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ein Funktional T ist eine Abbildung $T : V \rightarrow K$.

8. Wir definieren die *Wirkung* S einer Bewegung $q(t)$ mit $t_1 \leq t \leq t_2$ als

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt,$$

wobei \mathcal{L} die sogenannte Lagrange-Funktion ist.

9. Die *Variation* δ einer Funktion $y(x)$ ist:

$$y(x) + \delta y(x),$$

wobei $\delta y(x) = \epsilon \eta(x)$ mit ϵ eine infinitesimale Konstante und $\eta(x)$ eine beliebige Funktion sind.

10. Die *Extremalbedingung* für ein Funktional $J[y]$ ist

$$\delta J[y] \equiv \left. \frac{dJ[y + \epsilon \eta]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

11. Eine Wirkung $S[q]$ ist genau dann extremal, d. h. $\delta S[q] = 0$, wenn die *Euler-Lagrange-Gleichungen* erfüllt sind, d. h.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right)$$

wobei $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$ ist.

12. Die *Lagrange-Funktion* $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ für ein n -Teilchensystem ist definiert als die Differenz zwischen der kinetischen $T(\dot{q})$ und potentiellen Energie $V(q, \dot{q}, t)$, also:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, \dot{q}, t)$$

wobei $q = (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_f)$ die generalisierten Koordinaten und $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_f)$ Geschwindigkeiten für das System mit f Freiheitsgraden sind.

13. Der *kanonische Impuls* p_i ist durch die Lagrange-Funktion \mathcal{L} definiert. Es gilt:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

wobei q_i die generalisierten Koordinaten sind.

14. Jede *Symmetrioperation* $\delta q_i = \epsilon f_i(q)$, welche die Lagrange-Funktion \mathcal{L} invariant lässt, hat die *Erhaltungsgrösse* Q

$$Q = \sum_{i=1}^f P_i f_i(q),$$

wobei f die Anzahl Freiheitsgrade sind.

15. Die *Hamilton-Funktion* $\mathcal{H}(q, p, t)$ ist definiert als

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t),$$

wobei p_i die generalisierten Impulse, q_i Koordinaten und \mathcal{L} die Lagrange-Funktion sind.

16. Die *Bewegungsgleichungen* für die *Hamilton-Funktion* $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ sind:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

wobei q_i die generalisierten Koordinaten und p_i Impulse sind.

17. Die *Divergenz* eines Vektorfeldes $\text{div } \vec{v}(x, y, z)$ ist definiert als

$$\text{div } \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z}.$$

18. Der *Theorem von Gibbs-Liouville* besagt, dass das Volumen im Phasenraum, welches durch eine Oberfläche eingeschlossen wird, ist konstant, während die Oberfläche sich durch den Raum bewegt.

19. Seien F und G zwei Funktionen die jeweils von q und p abhängen, dann ist die *Poisson-Klammer* $\{F, G\}$ definiert als:

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

20. Es seien F, F_1, F_2 und G zwei Funktionen die jeweils von q und p abhängen sowie c_1 und c_2 zwei Konstanten, dann gelten die folgenden *Regeln für die Poisson-Klammer*:

Antisymmetrie:	$\{F, G\} = -\{G, F\} \Rightarrow \{F, F\} = 0$
Bilinearität:	$\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\}$
Produktregel:	$\{F_1 F_2, G\} = \{F_1, G\} \cdot F_2 + F_1 \cdot \{F_2, G\}$
Jacobi-Identität:	$\{F_1, \{F_2, G\}\} + \{G, \{F_1, F_2\}\} + \{F_2, \{G, F_1\}\} = 0$

21. Das *Levi-Civita Symbol* ε_{ijk} ist definiert als

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

22. Der *Nable-Operator* $\vec{\nabla}$ ist ein Pseudovektor ohne Richtung und Länge und ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix},$$

wobei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial i}$ für $i = x, y, z$ eine Kurzform ist.

- 23.** Die *Rotation* eines Vektorfeldes \vec{A} ist immer *divergenzfrei*, d. h.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.$$

- 24.** Der *Gradient* eines Skalarfeldes S ist immer *rotationsfrei*, d. h.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} S) = 0.$$

- 25.** Die *Lagrange-Funktion* für die *Lorentz-Kraft* ist:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q (A_x \dot{x} + A_y \dot{y} + A_z \dot{z}).$$

wobei \vec{A} das Vektorpotential ist und wie folgt definiert ist:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Konzeptfragen Kapitel J1

Aufgaben Kapitel J1

Weitere einfachere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man leider keine!

1. Berechne den schnellsten Weg eines Teilchens von Punkt A zu Punkt B , dass sich reibungsfrei in einem Gravitationspotential bewegt.
 - a. Formuliere den allgemeinen Integranden ds in eine für das Problem geeignete Form um.
 - b. Stelle die Euler-Lagrange-Gleichung auf.

Lsg: a. $F[y] = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$ b. $1 + 2yy'' = \frac{2yy'^2 y''}{1+y'^2}$

2. Ein Massenpunkt m führe eine harmonische Bewegung aus:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Bestimmen Sie:

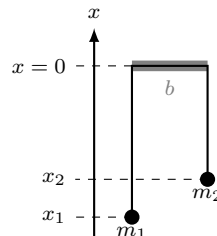
- a. die kinetische Energie T und die potentielle Energie V als Funktion der Zeit t !
- b. die Gesamtenergie als Funktion der Zeit! Was bedeutet das Ergebnis?
- c. die Mittelwerte $\langle T \rangle$ und $\langle V \rangle$ der kinetischen bzw. der potentiellen Energie über eine ganze Periode τ der Schwingung.

Hinweis zur Mittelwertbildung einer Grösse $A(x)$ im Intervall $[x_0, x_1]$:

$$\langle A(x) \rangle = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} A(x) dx.$$

Lsg: a. $T = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$, $V = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$ b. $E = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2$ c. $\langle T \rangle = \langle V \rangle = \frac{1}{4} m x_0^2 \omega^2$

3. Zwei Massen m_1 und m_2 hängen im Schwerfeld \vec{g} an den Enden eines masselosen Seils der Länge l , welches reibungsfrei über einen Balken der Breite b gleitet.



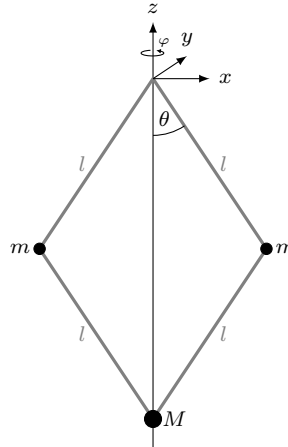
- a. Wie lautet die Zwangsbedingung?
- b. Wie lautet die Lagrange-Funktion?
- c. Geben Sie die Bewegungsgleichung an und integrieren Sie diese.

Lsg: a. $l = -x_1 - x_2 + n$ b. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 - m_1 g x_1 - m_2 g(-l - x_1 + b)$ c. $\ddot{x}_1 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g$,
 $x_1(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g t^2 + C_1 t + C_2$

4. Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlängen a . Ein Massenpunkt der Masse m ist mithilfe dreier Federn mit Federkonstanten k an den Ecken des Dreiecks befestigt. Der Massenpunkt kann sich nur in der Ebene des Dreiecks bewegen. Die Federn haben im unbelasteten Zustand die Länge Null.
 - a. Was ist die Lagrange-Funktion des Systems?
 - b. Schreiben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen. Was ist die Form der Trajektorie für Anfangsbedingungen?
 - c. Wie ändert sich die Bewegung, wenn wir statt eines gleichseitigen Dreiecks ein beliebiges flaches n -Eck betrachten?

Lsg: a. $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(3x^2 + 3y^2 + a^2)$ b. c. –

5. Gegeben sei das in der Abbildung gezeigte System, das um die vertikale z -Achse mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} \neq \text{konst.}$ rotiert. Der Winkel φ sei dabei der Rotationswinkel. Die vier masselosen starren Stäbe der Länge l verbinden die zwei Massen m und die einzelne Masse M , wobei der oberste Aufhängepunkt fixiert ist. M kann sich nur entlang der z -Achse bewegen und die Stäbe spannen zu jedem Zeitpunkt eine Ebene auf. Der Aufbau befindet sich in einem homogenen Gravitationsfeld mit Fallbeschleunigung g .



- a. Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Erläutern Sie!

Wählen Sie von nun an $\theta(t)$ und $\varphi(t)$ als verallgemeinerte Koordinaten.

- b. Leiten Sie daraus die Lagrange-Funktion \mathcal{L} her:

$$\mathcal{L} = ml^2\dot{\theta}^2 + ml^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + 2Ml^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2(m + M)gl \cos \theta.$$

- c. Welche Symmetrien hat das System? Welche Erhaltungsgrößen erwarten Sie deshalb? Schreiben Sie diese explizit als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten.
d. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen.
e. Finden Sie die Gleichgewichtslagen des Systems, d. h. die Lösungen der Bewegungsgleichungen mit $\theta(t) = \theta_k$. Erläutern Sie in jedem Fall, wie θ und φ zusammenhängen.

Lsg: a. 2 b. – c. Zeitinvarianz, Rotationsinvarianz d. – e. –

6. Gegeben sei das Kraftfeld \vec{F} mit:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2 z^3 - 6xz^2 \\ 2xyz^3 \\ 3xy^2 z^2 - 6x^2 z \end{pmatrix}.$$

- a. Zeigen Sie, dass das Kraftfeld rotationsfrei ist, d.h. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ ist.
b. Berechnen Sie die Arbeit in diesem Kraftfeld, wenn Sie vom Ursprung über den Punkt $(x_0, 0, 0)$ zum Punkt $(x_0, y_0, 0)$ und schliesslich zum Punkt (x_0, y_0, z_0) gehen. Tipp: Parametrisieren Sie zuerst den Weg!
c. Da die Rotation verschwindet, hat das Kraftfeld ein Potential, resp. eine potentielle Energie, bestimmen Sie diese.

Lsg: a. – b. $W = x_0 y_0^2 z_0^2 - 3x_0^2 z_0^2$ c. $V(x, y, z) = -xy^2 z^3 + 3x^2 z^2 + V_0$

7. Sind Kurvenintegrale im Vektorfeld $\vec{K} = (3x^2 + 2y, -9yz, 8xz^2)$ von der Form des Weges unabhängig? Überprüfen Sie dies über

- a. Berechnung von $\vec{\nabla} \times \vec{K}$ und
b. Berechnung der Kurvenintegrale von $\vec{r}_a = (0, 0, 0)$ nach $\vec{r}_b = (1, 1, 1)$ entlang der folgenden Wege:
– C_1 : Gerade von \vec{r}_a nach \vec{r}_b
– C_2 : Polygonzug von $\vec{r}_a \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow \vec{r}_b$

- C_3 : Parabelbogen mit $\vec{r}(s) = (s, s^2, s^4)$.

Lsg: **a.** webabhängig **b.** $C_1 : 1, C_2 : \frac{11}{3}, C_3 : \frac{293}{156}$

8. Ein Teilchen habe die Lagrange-Funktion \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

Wie lauten die verallgemeinerten Impulse und die Hamilton-Funktion?

Lsg: $\mathcal{H} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z)$

9. Betrachten Sie ein System mit n Freiheitsgraden, beschrieben durch eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q, \dot{q})$. Das System sei invariant unter der Symmetrietransformation

$$q_i \rightarrow q_i + \epsilon f_i(q, \dot{q}) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Da es sich um eine Symmetrie des Systems handelt, kann sich die Lagrange-Funktion bei dieser Transformation nur um die totale Ableitung einer Grösse G ändern,

$$\mathcal{L}\left(q + \epsilon f(q, \dot{q}), \dot{q} + \epsilon \frac{d}{dt} f(q, \dot{q})\right) = \mathcal{L}(q, \dot{q}) + \epsilon \frac{d}{dt} G(q, \dot{q}) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

- Wie wirkt sich die Änderung der Lagrange-Funktion um eine totale Ableitung auf die Bewegungsgleichungen aus?
- Finden Sie die Taylorentwicklung der Invarianzgleichung von oben bis zur ersten Ordnung in ϵ .
- Verwenden Sie diese Bedingung um zu zeigen, dass

$$Q \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i - G$$

eine Erhaltungsgrösse ist, vorausgesetzt die Euler-Lagrange Gleichungen sind erfüllt.

- Für eine nicht explizite zeitabhängige Lagrange-Funktion ist durch die Wahl $f_i = \dot{q}_i$ eine Symmetrie gegeben. Um welche Symmetrie handelt es sich? Was ist die entsprechende Grösse $G(q, \dot{q})$? Was ist die zugehörige Erhaltungsgrösse $Q(q, \dot{q})$?

Lsg: **a.** – **b.** $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} f_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} f_i \right) = \frac{d}{dt} G$. **c.** – **d.** $Q = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - L$

10. Zeigen Sie die folgende Poisson-Klammer Identitäten und suchen Sie einen allgemeinen Ausdruck mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols.

$$\{L_x, L_y\} = L_z, \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \text{und} \quad \{L_z, L_x\} = L_y,$$

wobei der Drehimpuls \vec{L} wie folgt definiert ist:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Lsg: $\{L_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k$

Literaturverzeichnis

- [1] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter, Juni 2012
- [2] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem, Juni 2012
- [3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935>
- [4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007
- [5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807
- [6] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Steradian>, Juni 2012
- [7] Aristoteles,
- [8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590
- [9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997
- [10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955
- [11] URL: <http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html>, September 2013
- [12] URL: <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index>
- [13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011
- [14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG
- [15] URL: <http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/>, April 2013
- [16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007
- [17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG
- [18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994
- [19] URL: <https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical>
- [20] Hans Kammer, Irma Mgeladze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG
- [21] URL: <https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal>
- [22] Wikipedia, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid>, August 2013
- [23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010
- [24] URL: <http://www.schulserver.hessen.de/>, Oktober 2013
- [25] URL: <http://www.leifiphysik.de>, September 2013
- [26] URL: <http://photos.zoochat.com>, September 2013

- [27] URL: <http://www.lab-laborfachhandel.de>, Oktober 2013
- [28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,
- [29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014
- [30] URL: <https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen>, März 2024
- [31] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707>
- [32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press
- [33] URL: <http://ephex.phys.ethz.ch>, Februar 2015
- [34] URL: <http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html>, März 2015
- [35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas optischer Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962
- [36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004
- [37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018
- [38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001
- [39] URL: <https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en>, Juli 2018
- [40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998
- [41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869
- [42] URL: <http://www.tf.uni-kiel.de>, März 2014
- [43] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_\(Thermodynamik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik)), März 2014
- [44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014
- [45] URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png>, März 2014
- [46] URL: <http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscodes.htm>, August 2014
- [47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494
- [48] URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm>, Oktober 2014
- [49] URL: <http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm>, Oktober 2014
- [50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014
- [51] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639>, Oktober 2017
- [52] URL: <https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen>, Oktober 2017
- [53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022
- [54] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode>, September 2022
- [55] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg>, November 2023
- [56] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>, April 2024
- [57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor
- [58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.
- [59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.
- [60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

- [61] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitt_der_Gleichzeitigkeit, August 2018
- [62] URL: <http://static.a-z.ch>, Mrz 2015
- [63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925
- [64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413
- [65] URL: <http://www.peter-glowatzki.de>, Mai 2015
- [66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941
- [67] URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche>, Mai 2015
- [68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)
- [69] URL: <http://w3.pppl.gov/>, September 2015
- [70] O. Hfiling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wrme. 15. Auflage. Ferd. Dummlers Verlag, Bonn 1994
- [71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database, April 2018
- [72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)
- [73] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung>, April 2018
- [74] URL: <http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...>, Juni 2012
- [75] L. Susskind und G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics*, Basic Books, 2014