

# Kapitel I

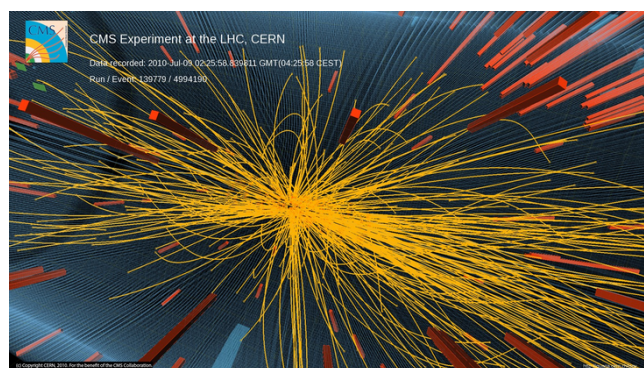
## Moderne Physik

*“Man hat den Eindruck, dass die moderne Physik  
auf Annahmen beruht,  
die irgendwie dem Lächeln einer Katze gleichen,  
die gar nicht da ist.”*  
- Albert Einstein

Nach mehr als zwei Jahren, in denen wir uns mit den Grundlagen der Physik beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Modernen Physik zu. Wobei der Begriff nicht mehr ganz zeitgemäss ist. Unter Moderner Physik versteht man alles ab dem 20. Jahrhundert. Wir befinden uns aber bereits im 21. Jahrhundert und viele Erkenntnisse sind bereits über 100 Jahre alt. Im Vergleich zur klassischen Physik, die mehr als 400 Jahre alt ist, kann sie aber immer noch als modern bezeichnet werden. Das 20. Jahrhundert hat fast gleichzeitig zwei neue Gebiete der Physik hervorgebracht. Zum einen durch Albert Einstein die Relativitätstheorie und zum anderen durch Namen wie Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger und viele andere die Quantenphysik.

In diesem Kapitel stellen wir die Anfänge der modernen Physik vor, zu der natürlich auch die *Spezielle Relativitätstheorie* und die *Quantenphysik* gehören. Diese bilden die Grundlage der modernen Physik. Daraus haben sich im Kleinen die *Kern- und Teilchenphysik* und im Grossen die *Kosmologie* entwickelt.

Die Quantenphysik beschreibt das Verhalten von Teilchen auf sehr kleinen Skalen, wie sie in der Teilchenphysik vorkommen. Sie liefert Werkzeuge und Modelle, um Phänomene auf atomarer und subatomarer Ebene zu verstehen. Die spezielle Relativitätstheorie ist entscheidend, wenn Teilchen mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit interagieren. Sie beschreibt, wie Raum und Zeit miteinander verknüpft sind und wie sich diese Verknüpfung bei extremen Geschwindigkeiten ändert. Teilchen in Beschleunigern, wie dem Large Hadron Collider (LHC), erreichen hohe Geschwindigkeiten, die ohne die spezielle Relativitätstheorie nicht angemessen erklärt werden könnten. Dabei werden diese Teilchen nicht nur beschleunigt, sondern auch zur Kollision gebracht. Das folgende Bild aus [57] zeigt eine solche Kollision im CMS<sup>1</sup>-Detektor des LHC-Experiments.



Das Faszinierende an diesem Bild ist einerseits seine Schönheit und andererseits die Tatsache, dass wir solche Ereignisse sehr gut simulieren können und damit ein tiefes Verständnis dieser Theorien erlangt haben. Sie sind nicht nur mathematische Werkzeuge, sondern auch philosophische Grundlagen, die unser Verständnis von Raum, Zeit und Materie revolutioniert haben und es ermöglichen, die Grundbausteine der Natur mit bisher unerreichter Präzision zu erforschen.

---

<sup>1</sup>Compact Muon Solenoid

# 1 Spezielle Relativitätstheorie

## Lernziele

- Sie verstehen das Relativitätsprinzip von Galilei und kennen die Galileitransformationen.
- Sie kennen und verstehen die Postulate von Einstein.
- Sie verstehen und können die Lorentz-Transformationen aus den Postulaten ableiten.
- Sie verstehen die Zeitdilatation und Längenkontraktion und können Aufgaben dazu lösen.
- Sie kennen die Unterschiede zwischen der klassischen und der relativistischen Mechanik.
- Sie können mit der relativistischen Mechanik Aufgaben lösen.

Es gibt viele Arten die spezielle Relativitätstheorie zu motivieren und auch viele Experimente, auf die man Bezug nehmen kann, doch genau so wie Einstein soll hier ein abstrakter Zugang gewählt werden. Albert Einstein<sup>2</sup> hat nicht nach unbegründeten oder widersprüchlichen Experimenten gesucht, um daraus seine Theorie zu entwickeln. Vielmehr quälte ihn zeitlebens die Frage, was man wohl sehen würde, wenn man auf einem Lichtteilchen reiten würde. Diese Frage hat ihn aus heutiger Sicht wohl zur eigentlichen Erkenntnis geführt.

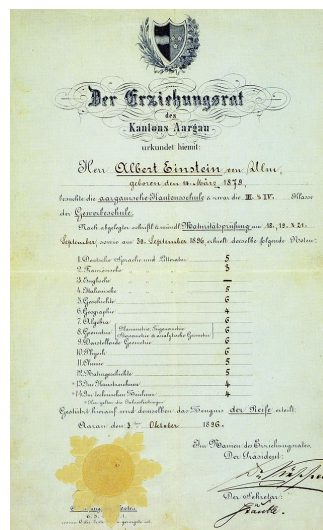


A. Einstein  
(1879-1955)

Seine Forschungen zur Struktur von Materie, Raum und Zeit sowie dem Wesen der Gravitation veränderten massgeblich das physikalische Weltbild. Er gilt daher als einer der bedeutendsten Physiker aller Zeiten. Einsteins Hauptwerk, die Relativitätstheorie, machte ihn weltberühmt. Im Jahr 1905 erschien seine Arbeit mit dem Titel: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, deren Inhalt heute als spezielle Relativitätstheorie bezeichnet wird. 1915 publizierte Einstein die allgemeine Relativitätstheorie. Auch zur Quantenphysik leistete er wesentliche Beiträge.

Für seine Verdienste um die theoretische Physik, besonders für seine Entdeckung des Gesetzes des photoelektrischen Effekts erhielt er 1922 den Nobelpreis. Seine theoretischen Arbeiten spielten – im Gegensatz zur verbreiteten Meinung – beim Bau der Atombombe und der Entwicklung der Kernenergie nur eine indirekte Rolle.

Bevor wir uns dem eigentlichen Thema zuwenden, wollen wir noch mit einem Mythos aufräumen, nämlich dem, dass Einstein ein schlechter Schüler gewesen sei. Auf dem Bild sehen Sie Einsteins Abiturzeugnis aus [58].



Man sieht deutlich, dass er ausser in Französisch keine ungenügende Note hatte. In Mathematik und Physik erhielt Einstein jeweils eine Sechs. Dieser Mythos rührt daher, dass die Deutschen ein anderes Notensystem haben und deshalb diese Zahlen falsch interpretiert haben.

Vor der Speziellen Relativitätstheorie haben Schülerinnen und Schüler oft Angst. Was die mathematische Schwierigkeit

<sup>2</sup>Albert Einstein (14. März 1879 in Ulm - 18. April 1955 in Princeton, New Jersey) war ein theoretischer Physiker.

rigkeit dieser Theorie betrifft, ist diese jedoch völlig unbegründet. Die Schwierigkeit liegt vielmehr darin, dass die spezielle Relativitätstheorie uns zwingt, neu darüber nachzudenken, was Raum und Zeit eigentlich sind.

In diesem Kapitel müssen wir uns zunächst das *Relativitätsprinzip* in Erinnerung rufen, um dann die *Einstein-Postulate* einzuführen. Aus diesen Postulaten ergeben sich direkt die *Lorentztransformationen*, die zu einigen unerwarteten Anpassungen unseres Weltbildes führen. Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir einige Überlegungen zur *relativistischen Mechanik* anstellen, aus denen auch die berühmteste Formel hervorgehen wird.

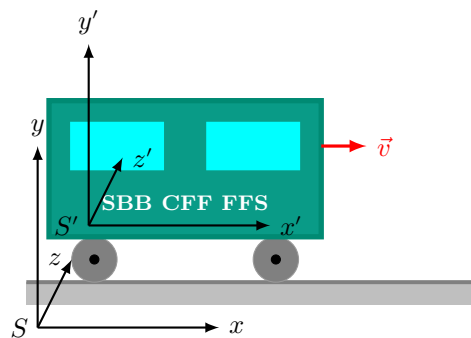
## 1.1 Relativitätsprinzip von Galilei

Bevor wir uns mit Einsteins Relativitätsprinzip beschäftigen, ist es sinnvoll, das uns bekanntere und auch intuitivere Prinzip von Galilei näher zu betrachten. Im Kapitel B haben wir das Gesetz von der Einheitlichkeit der physikalischen Gesetze formuliert. Es besagt, dass *Gesetze in Inertialsystemen die gleiche Form annehmen*. Als Inertialsysteme haben wir *ruhende oder gleichförmig geradlinig bewegte Bezugssysteme* definiert. Im Kapitel über die Mechanik der Massenpunkte haben wir noch nicht gezeigt, dass die Gesetze ihre Form behalten. Dies soll nun nachgeholt werden.

Um zeigen zu können, dass die Form der Gesetze in Inertialsystemen unverändert bleibt, muss man eine Transformation definieren, die von einem Inertialsystem in ein anderes transformiert. Diese Transformationen sind die Galilei-Transformationen.

### 1.1.1 Galileitransformationen

Betrachten wir zwei Systeme: ein ruhendes (ungestrichenes) System  $S$  und ein bewegtes (gestrichenes) System  $S'$ . Dies könnte zum Beispiel ein Bahnsteig und ein Zug sein. Der Zug fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Dies könnte wie folgt aussehen



Die Koordinatensysteme  $S$  und  $S'$  sind so zu wählen, dass sie zum Zeitpunkt  $t = 0$  zusammenfallen. Dies gilt für ein Objekt im Zug:

$$x = x', \quad y = y' \quad \text{und} \quad z = z'.$$

Nach einer Zeit  $t > 0$  hat sich der Zug in  $x$ -Richtung bewegt, d. h. die neuen Koordinaten im ruhenden Bezugssystem  $S$  lauten:

$$x = x' + vt, \quad y = y' \quad \text{und} \quad z = z'.$$

Diese Transformationen müssen noch etwas angepasst werden. Zum einen fehlt die Transformationsregel für die Zeitkoordinate und zum anderen wird die Transformation meist für das gestrichelte System angegeben. Man erhält dann:

**Ges. 1:** (Galileitransformationen) Die nachfolgenden Gleichungen beschreiben die Galilei-Transformationen zwischen den Koordinaten  $(x, y, z, t)$  und  $(x', y', z', t')$  eines willkürlichen Ereignisses gemessen in zwei relativ zueinander gleichförmig geradlinig bewegten (Geschwindigkeit  $v$ ) Koordinatensystemen  $S$  und  $S'$  in die gemeinsame Richtung  $x$  resp.  $x'$ , wobei der Ursprung zum Zeitpunkt  $t = t' = 0$  übereinstimmt.

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{und} \quad t' = t.$$

Da wir nun eine solche Transformation haben, können wir auch überprüfen, ob die Forminvarianz für die physikalischen Gesetze gilt. Dies soll an zwei Beispielen überprüft werden.

#### Bsp. i.

Zeigen Sie, dass das Aktionsgesetz in allen gleichförmig geradlinigen Bezugssystem die gleiche Form einnimmt.

Lsg: –

**Lösung:**

Im folgenden Beispiel wiederholen wir diese Vorgehensweise für die kinetische Energie bzw. die Beschleunigungsarbeit.

**Bsp. ii.**

Zeigen Sie, dass a) die kinetische Energie nicht und b) die Arbeit sehr wohl in allen gleichförmig geradlinigen Bezugssystemen die gleiche Form einnimmt.

Lsg: –

**Lösung:**

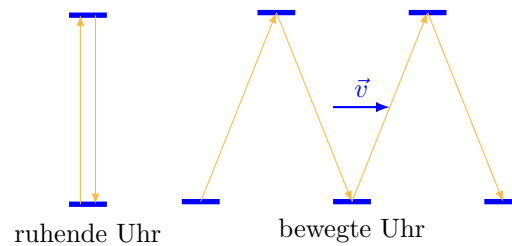
Wir wussten bereits, dass Energie keine physikalische Grösse ist, die man experimentell messen kann. Es stellt sich daher die Frage, ob es Gesetze gibt, die unter den Galilei-Transformationen nicht die gleiche Form annehmen. Die Antwort ist ein klares Ja! Die Maxwell-Gleichungen, die der Elektrodynamik und der Optik zugrunde liegen, sind unter Galilei-Transformationen nicht invariant. Daraus ergeben sich drei mögliche Konsequenzen:

- a. Die Maxwell-Gleichungen sind falsch.
- b. Das Relativitätsprinzip ist ungültig und es gibt ein ausgezeichnetes Inertialsystem.
- c. Die Galileitransformationen stimmen nicht.

Die erste Möglichkeit kann verworfen werden, da die Maxwell-Gleichungen die Elektrodynamik und Optik umfassend beschreiben und zu vielen Vorhersagen geführt haben. Es ist daher sehr unwahrscheinlich, dass sie falsch sind. Viele Physiker haben versucht, **b.** in irgendeiner Form zu beweisen. Sie suchten ein absolutes bzw. ausgezeichnetes Bezugssystem, den sogenannten *Äther*. Alle Versuche, den Äther nachzuweisen, scheiterten. Das wohl berühmteste Experiment zum Äther ist das von Michelson-Morley<sup>3</sup>. Es bleibt also nur die letzte Möglichkeit. Die Galilei-Transformationen sind falsch. Aber was sind die richtigen Umformungen? Bevor diese hergeleitet werden, sollen zunächst die beiden Einsteinschen Postulate erläutert werden.

<sup>3</sup>Das Michelson-Morley-Experiment war ein physikalisches Experiment, das von dem deutsch-amerikanischen Physiker Albert A. Michelson 1881 in Potsdam und in verfeinerter Form von ihm und dem amerikanischen Chemiker Edward W. Morley 1887 in Cleveland im US-Bundesstaat Ohio durchgeführt wurde. Das Michelson-Morley-Experiment hatte zum Ziel, die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Lichtäther auf ihrer Bahn um die Sonne nachzuweisen, oder anders ausgedrückt, die Geschwindigkeit des Äthers relativ zur Erde (Ätherwind). Beim Lichtäther handelte es sich um ein hypothetisches Medium, in dem sich Lichtwellen analog zu Wasserwellen und Schallwellen ausbreiten sollten. Das Experiment ergab eine obere Grenze für diese Relativgeschwindigkeit von 5-8 km/s, was zeigte, dass die Bewegung gegen den Äther keinen Einfluss auf die Geschwindigkeit des Lichts hatte, denn dieser Wert war zu klein, um mit dem gesuchten Ätherwind in Verbindung gebracht zu werden. Das Michelson-Morley-Experiment zusammen mit anderen Experimenten wie dem Fizeau-Experiment oder dem Trouton-Noble-Experiment zeigte in aller Deutlichkeit die Probleme der Ätherphysik des 19. Jahrhunderts auf. Diese Problematik konnte erst durch die Spezielle Relativitätstheorie gelöst werden, in der auf ein bevorzugtes Bezugssystem wie den Äther verzichtet wird. Deswegen gilt es als eines der bedeutendsten Experimente in der Geschichte der Physik – ein Experimentum Crucis.





In dieser Abbildung sind die Begrenzungen der Lichtuhr in blau dargestellt. Wir können uns darunter zwei Spiegel vorstellen, die in einem gegebenen Abstand zueinander fixiert sind. Wir können uns vorstellen, dass zwei Lichtuhren identischer Bauart zur Verfügung stehen und wir eine ruhende (links) und eine mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte (rechts) betrachten.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Lichts der bewegten Uhr, sofern Sie noch keine relativistischen Effekte berücksichtigen. b) Nun kommt das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ins Spiel. Zeigen Sie, dass daraus die Zeit im Ruhesystem  $\Delta t$  nicht mehr gleich ist wie die Zeit im bewegten System  $\Delta t'$ . (Falls dies so wäre, wären wir wieder bei a).) Lsg: –

Lösung:		
---------	--	--

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass das bestehende Additionsprinzip für die Geschwindigkeit ein Spezialfall des neuen Prinzips ist.

### 1.3 Lorentz-Transformationen

Nachdem wir nun festgestellt haben, dass die Galilei-Transformationen nicht in allen Bereichen der Physik anwendbar sind, müssen wir uns neue Transformationen überlegen. Wie bereits im oberen Abschnitt erwähnt, waren die Galilei-Transformationen für die Elektrodynamik unbrauchbar. Deshalb suchte man nach einer Transformation, die die Gleichungen der Elektrodynamik invariant macht.

Mehrere theoretische Arbeiten um 1900 zeigten, dass die Lorentz-Transformationen die Elektrodynamik in sich abbilden oder, anders ausgedrückt, eine Symmetrie darstellen. Diese Arbeiten stammten unter anderem von Hendrik Lorentz<sup>5</sup> und Henri Poincaré<sup>6</sup>. Damit waren die Transformationen, die Einstein in seinen Arbeiten verwendete, bereits bekannt.



H. Lorentz  
(1853-1928)

Lorentz machte wesentliche Beiträge zur Elektrodynamik, insbesondere durch die Formulierung der Lorentz-Transformationen, die später ein zentraler Bestandteil der speziellen Relativitätstheorie von Albert Einstein wurden. Für seine Arbeiten auf dem Gebiet der Elektrodynamik erhielt er 1902 gemeinsam mit Pieter Zeeman den Nobelpreis für Physik. Zusätzlich zu seinen wissenschaftlichen Leistungen hatte Lorentz auch einen grossen Einfluss auf die wissenschaftliche Gemeinschaft als Lehrer und Mentor. Sein Erbe und seine Beiträge in der Physik sind von bleibendem Wert und haben die Grundlagen für viele Entwicklungen in der modernen Physik gelegt.

Poincarés Werk zeichnet sich durch Vielfalt und hohe Originalität aus. Zu seiner aussergewöhnlichen mathematischen Begabung kam auch ein hohes Mass an Intuition, doch auch Zurückhaltung.

<sup>5</sup>Hendrik Antoon Lorentz (18. Juli 1853 in Arnhem - 4. Februar 1928 in Haarlem) war ein niederländischer Mathematiker und Physiker.

<sup>6</sup>Jules Henri Poincaré (29. April 1854 in Nancy - 17. Juli 1912 in Paris) war ein bedeutender französischer Mathematiker, theoretischer Physiker, theoretischer Astronom und Philosoph.



Auf mathematischem Gebiet entwickelte er die Theorie der automorphen Funktionen und gilt als Begründer der algebraischen Topologie. Weitere seiner Arbeitsgebiete in der Reinen Mathematik waren die algebraische Geometrie und die Zahlentheorie. Auch die Angewandte Mathematik profitierte von Poincarés Ideenreichtum. Auf dem Gebiet der Physik reichen seine Beiträge von Optik bis Elektrizität, von Quanten- bis Potentialtheorie, von Thermodynamik bis spezieller Relativitätstheorie, die er mitbegründete.



Um die Lorentz-Transformationen herzuleiten, werden wir hier nicht den Weg über die Elektrodynamik gehen, da er nicht in diesen Kontext der Speziellen Relativitätstheorie passt, sondern einen hoffentlich einfacheren Weg über die Galilei-Transformationen.

Da die Galilei-Transformationen bei grossen Geschwindigkeiten der bewegten Körper zu einem Widerspruch zu den Postulaten führen, bei kleinen Geschwindigkeiten aber die Realität sehr gut wiedergeben, können sie nicht ganz falsch sein. Aus diesem Grund verwenden wir - abgesehen von einem noch unbekannten Faktor  $\gamma$  - die klassischen Gleichungen als Ansatz:

$$x = \gamma(x' + vt') \quad \text{und} \quad x' = \gamma(x - vt),$$

wobei  $\gamma$  keine Funktion von  $x$  und  $t$  sein darf, sondern nur von  $v$  und  $c$  abhängen darf.



Finden Sie je ein zwingendes Argument, weshalb der  $\gamma$ -Faktor weder von  $x$  noch von  $t$  haben darf und begründen Sie, weshalb er auf jeden Fall von  $v$  abhängen muss.

Betrachten wir zwei Systeme  $S$  und  $S'$  wie oben und lassen wir ein Lichtsignal in beiden Systemen zum Zeitpunkt  $t = t' = 0$  von einem gemeinsamen Ursprung ausgehen. Gemäss den Postulaten messen beide die gleiche Lichtgeschwindigkeit, d.h. der Ort des Lichtstrahls ist in  $S$  bzw. in  $S'$ :

$$x = ct \quad \text{und} \quad x' = ct'.$$

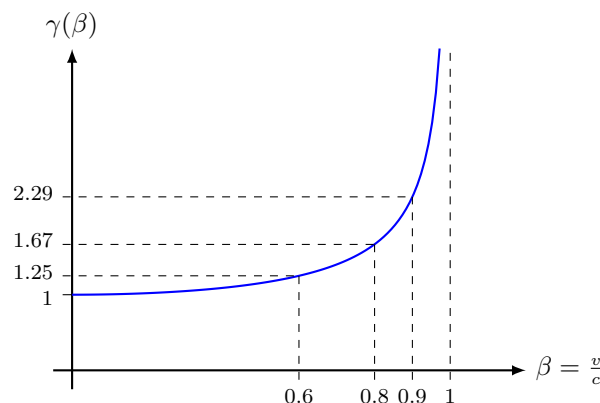
Ersetzen wir dies in unseren Ansatz, dann erhalten wir:

$$ct = \gamma(c + v)t' \quad \text{und} \quad ct' = \gamma(c - v)t.$$

Eliminieren wir entweder  $t$  oder  $t'$ , so bekommen wir für den Faktor  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Um ein Gefühl für die Werte von  $\gamma$  zu bekommen, betrachten Sie die folgende Grafik. Hier ist  $\gamma$  als Funktion von  $\beta = \frac{v}{c}$  dargestellt.



Man sieht daran, dass für kleine Geschwindigkeiten ( $v \ll c$ )  $\gamma \approx 1$  ist. Je näher die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit kommt ( $v \rightarrow c$ ), desto grösser wird der Faktor ( $\gamma \rightarrow \infty$ ).

Um die Transformationen vollständig aufschreiben zu können, müssen wir auch noch die Zeittransformation

finden. Diese erhält man, in dem man den Ansatz für  $x' = \gamma(x - vt)$  in den Ansatz für  $x = \gamma(x' + vt')$  einsetzt. Dabei erhält man:

$$x = \gamma(\gamma(x - vt) + vt') \Rightarrow x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt'.$$

Aufgelöst nach  $t'$  erhalten wir:

$$t' = \gamma t + \frac{x}{\gamma v} - \frac{\gamma x}{v} \Leftrightarrow t' = \gamma t + \underbrace{\frac{x}{v} \left( \frac{1}{\gamma} - \gamma \right)}_{= -\gamma v^2 / c^2}.$$

Damit erhalten wir:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right).$$

Man beachte, dass wenn  $c = 1$  ist,  $t' = \gamma(t - vx)$  eine ähnliche Form wie die Orts-Transformation hat. Die vollständigen relativistischen Transformationen, die sowohl für die Mechanik als auch für die Elektrodynamik gelten und die Einsteinschen Postulate nicht verletzen, lauten also:

$$\boxed{x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)}$$

Diese Transformationen werden Lorentz-Transformationen genannt und gelten für eine Bewegung in  $x$ -Richtung. Sie stellen eine Beziehung zwischen Orts- und Zeitkoordinaten her.

Auch wenn diese Transformationen bei kleinen Geschwindigkeiten in die Galilei-Transformationen übergehen, gibt es zwei wesentliche Unterschiede:

- Es gibt zum einen keine absolute Zeit mehr ( $t \neq t'$ ), d. h. es gibt nicht *die Uhr* im Universum.
- Die Zeit ist ortsabhängig, d. h. sie ist vom Bewegungszustandes abhängig. Jedes Bezugssystem hat seine eigene Zeit.

Die Geschwindigkeitstransformationen werden nun anhand des folgenden Beispiels hergeleitet.

#### Bsp. v.

Leiten Sie aus den Lorentz-Transformationen für die Ort- und Zeitkoordinaten, diejenigen für die Geschwindigkeit her. Tipp: Nehmen Sie die inversen Lorentz-Transformationen und verwenden Sie die Linearität der Transformationen.

Lsg: –

Lösung:



Im Folgenden sollen zwei Konsequenzen der Lorentz-Transformationen näher betrachtet werden. Dies sind zum einen die *Zeitdilatation* und zum anderen die *Längenkontraktion*.

#### 1.3.1 Zeitdilatation

Der Effekt der Zeitdilatation, auch Zeitdehnung genannt, ergibt sich direkt aus der Lorentztransformation. Betrachten wir dazu das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen, die im bewegten System  $S'$  am selben Ort  $x'_0$  stattfinden. Im ruhenden System  $S$  finden diese Ereignisse an verschiedenen Orten statt, da es sich relativ zu  $S'$  nicht bewegt. Man denke z. B. an einen Zug, in dem man einen Ball wirft und wieder fängt. Im bewegten System Zug finden das Werfen und das Fangen am selben Ort statt. Vom Bahnsteig aus betrachtet finden die Ereignisse jedoch an verschiedenen Orten statt.



Mit Hilfe der Lorentztransformationen bestimmen wir nun das Zeitintervall. Für die Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$  der Ereignisse im System  $S$  gilt:

$$t_1 = \gamma \left( t'_1 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) \quad \text{und} \quad t_2 = \gamma \left( t'_2 + \frac{vx'_0}{c^2} \right),$$

sofern sich  $S'$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bezüglich  $S$  geradlinig bewegt. Das Zeitintervall im ruhenden System  $S$  ist damit:

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1).$$

**Def. 1:** (*Eigenzeit*) Die Eigenzeit  $\Delta\tau$  ist die Zeit zwischen zwei Ereignisse, die in meinem Bezugssystem am selben Ort stattfinden.

Mit dieser Definition der Eigenzeit können wir nun die Zeitdilatation wie folgt formulieren:

**Ges. 2:** (*Zeitdilatation*) Ein Zeitintervall  $\Delta t$  in einem Bezugssystem  $S$  ist immer um den Faktor  $\gamma$  grösser als die Eigenzeit  $\Delta\tau$ , d. h.

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau$$

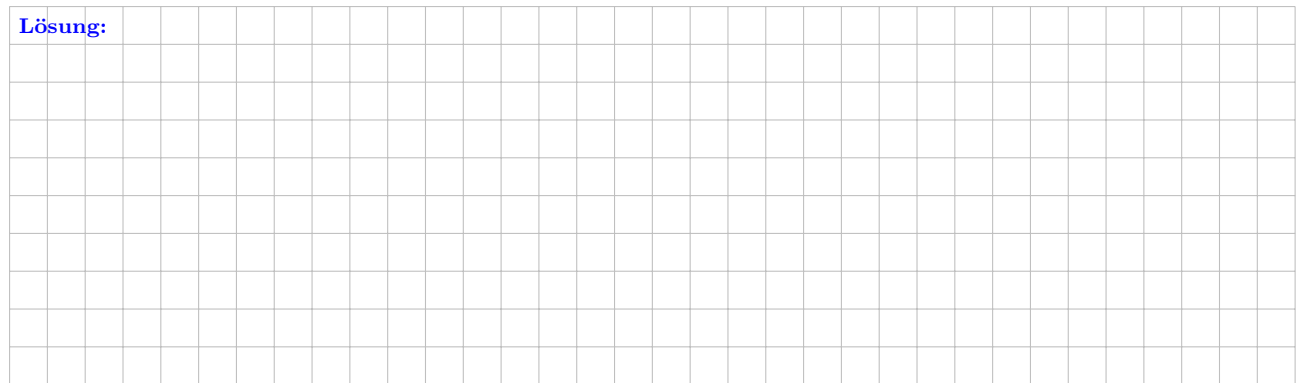
Betrachten wir ein Beispiel, das auch Einstein in seinem Buch [60] verwendet, um die Zeitdilatation zu erklären.

### Bsp. vi.

Betrachten wir eine Sekundenuhr, die dauernd im Anfangspunkt ( $x' = 0$ ) von  $S'$  ruht.  $t'_1 = 0$  und  $t'_2 = 1$  s seien zwei aufeinanderfolgende Schläge dieser Uhr. Beurteilen Sie die Uhr aus einem System  $S$ , aus welcher  $S'$  sich mit der Geschwindigkeit  $v = 0.6c$  bewegt.

Lsg:  $\Delta t \approx 1.25$  s

Lösung:



Vielleicht hat der eine oder andere bei dieser Überlegung ein ungutes Gefühl bekommen. Um dieses Gefühl noch etwas zu konkretisieren, betrachten wir noch folgendes.

Aus der Sicht eines bewegten Beobachters  $S'$  ist das ruhende System  $S$  bewegt und das bewegte System ruht. Diese Sichtweise wird durch Einsteins erstes Postulat unterstützt. Dies hat jedoch zur Folge, dass die Zeit im ruhenden System gedehnt wird. Dies führt jedoch zu einer paradoxen Situation, die auch unter dem Namen *Zwillingsparadoxon* bekannt ist.

### Zwillingsparadoxon

Es handelt sich um zwei eineiige Zwillinge. Der eine bleibt auf der Erde, also in einem im Wesentlichen ruhenden System  $S$ , und der andere besteigt ein Raumschiff, also ein bewegtes System  $S'$ , das sich mit hoher Geschwindigkeit von der Erde entfernt und nach einigen Jahren wieder zurückkehrt. Welcher Zwilling ist bei der Wiedervereinigung älter? Da bewegte Uhren langsamer gehen, müsste der reisende Zwilling jünger sein. Dieser kann aber gemäss dem ersten Postulat behaupten, dass er sich gar nicht wegbewegt hat, sondern dass sich die Erde von ihm wegbewegt hat und dann wieder zurückgekommen ist. Dann wäre der Zwilling auf der Erde jünger. Nun, dieses paradoxe Problem scheint auf den ersten Blick nicht lösbar zu sein. Damit schlägt man Einsteins Spezielle Relativitätstheorie mit ihren eigenen Waffen. Dieses Paradoxon wird seit vielen Jahren heftig diskutiert. Die scheinbare Symmetrie des Problems erschwert seine Lösung, und doch liegt genau darin die Lösung. Das Problem ist nicht symmetrisch. Damit der reisende Zwilling zurückkehren kann, muss er irgendwann eine Kurve fahren, in diesem Moment weiss er, dass er das bewegte System ist und somit auch der Jüngere sein muss<sup>7</sup>.

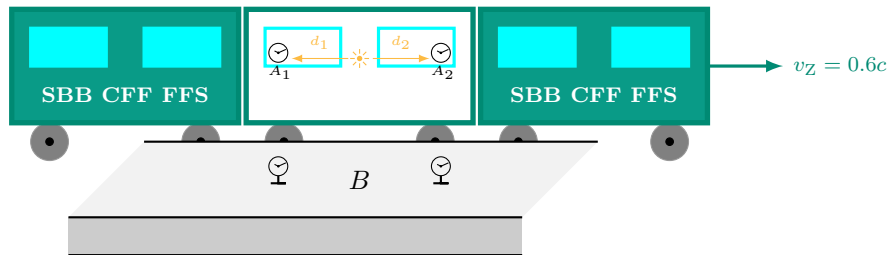
Ein weiteres Problem der Zeitdilatation ist die Gleichzeitigkeit. Diese soll nun etwas näher betrachtet werden.

<sup>7</sup>Möchte man dieses Problem exakt betrachten, muss man auch die Effekte der Beschleunigung berücksichtigen, welche erst durch die allgemeine Relativitätstheorie behandelt werden können, was jedoch den Rahmen deutlich sprengen würde.

## Gleichzeitigkeit

Gleichzeitigkeit ist ein Grundbegriff der Physik. Alle Aussagen über Zeitabläufe beruhen auf Zeitvergleichen und damit auf dem Begriff der Gleichzeitigkeit. Bei zwei Ereignissen, die am selben Ort stattfinden, kann man direkt beobachten, ob sie gleichzeitig sind. Bei Ereignissen, die weiter voneinander entfernt stattfinden, ist ein Vergleich durch synchronisierte Uhren möglich, die direkt an den jeweiligen Ereignisorten aufgestellt und miteinander verglichen werden.

Ein Zug und ein Bahnhof sollen relativ zueinander eine Geschwindigkeit von 60% der Lichtgeschwindigkeit ( $v = 0.6c$ ) haben. Im Zug wird in der Mitte zwischen zwei mitgeführten Uhren  $A_1$  und  $A_2$  ein Lichtblitz ausgelöst, bei dessen Eintreffen die jeweilige Uhr zu laufen beginnt. Da ein Fahrgast des Zuges, d.h. ein Beobachter im Ruhesystem des Zuges (d.h. dem Inertialsystem, in dem der Zug ruht), aufgrund der Relativitätstheorie annimmt, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen gleich ist, glaubt er, dass  $A_1$  und  $A_2$  von den Lichtblitzen gleichzeitig erreicht werden und synchron zu laufen beginnen.



Aus der Sicht eines Beobachters im Ruhesystem des Bahnhofs  $B$  stellt sich die Reihenfolge der Ereignisse jedoch anders dar. Um die Ankunftszeit der Lichtblitze bei  $A_1$  und  $A_2$  genau bestimmen zu können, hat er mit Lichtsignalen synchronisierte und mit Sensoren ausgestattete Uhren an den Gleisen angebracht (im Bild nur durch zwei Uhren angedeutet). Für diesen Beobachter ist nun auch die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen konstant und der Zug bewegt sich mit hoher Geschwindigkeit. Daraus folgt, dass der Blitz zu  $A_2$  einen längeren Weg zurücklegen muss als zu  $A_1$ , denn  $A_2$  bewegt sich vom Ort des Blitzes weg, während sich  $A_1$  auf diesen Ort zubewegt. Die an den Schienen angebrachten Uhren werden daher anzeigen, dass  $A_1$  vor  $A_2$  vom Blitz getroffen wurde und früher zu laufen begann.  $A_1$  und  $A_2$  sind also aus der Sicht des Ruhesystems des Bahnhofs nicht synchron.

Die Relativität der Gleichzeitigkeit besagt also, dass Ereignisse an verschiedenen Orten, die in einem Inertialsystem gleichzeitig sind, aus der Sicht eines relativ bewegten Inertialsystems nicht gleichzeitig sind. Wichtig dabei ist, dass die Messungen in allen Inertialsystemen am Ort der Ereignisse durchgeführt wurden - damit ist klar, dass die Relativität der Gleichzeitigkeit nichts mit rein optischen Effekten oder Täuschungen zu tun hat (Auszug aus [61]).



Es gibt sogar ein Bezugssystem, in dem  $A_2$  vor  $A_1$  liegt. Überlegen Sie, wie sich dieses Bezugssystem bewegen muss.

In bewegten Systemen ändern sich nicht nur Zeitintervalle, sondern auch Längen, was nun näher untersucht werden soll.

### 1.3.2 Längenkontraktion

Analog zur Zeitdilatation soll nun die Längenkontraktion hergeleitet werden. Wie der Begriff schon sagt, werden bewegte Längen kürzer, wenn man sie von einem anderen Bezugssystem aus betrachtet. Analog zur Eigenzeit definieren wir hier die Eigenlänge oder besser bekannt als Ruhelänge.

**Def. 2:** (*Ruhelänge*) Die *Ruhelänge* resp. *Eigenlänge*  $\Delta l_R$  ist die Länge gemessen in seinem Ruhesystem.

Betrachten wir ein relativ zum System  $S$  bewegtes System  $S'$  und darin einen ruhenden Stab. Die Enden dieses Stabes befinden sich an den Orten  $x'_1$  und  $x'_2$ . Stellen wir uns wieder einen bewegten Zug vor und darin ruht der Stab. Die Länge des Stabs wird nun z. B. auf einem Bahnsteig gemessen, der relativ zum Zug ruht. In diesem System  $S$  ist die Länge definiert als

$$\Delta l = x_2 - x_1,$$

wobei die Enden des Stabes zur gleichen Zeit gemessen werden, also  $t_1 = t_2$ . Aus diesem Grund ist es von

Vorteil, wenn man die Transformationen für  $x'$  und nicht für  $x$  verwendet. Mit

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \quad \text{und} \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2)$$

erhalten wir für

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

und damit erhalten wir für die Längenkontraktion:

**Ges. 3:** (Längenkontraktion) Eine Strecke  $\Delta l$ , welches sich bezüglich eines Ruhesystem mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, ist immer um den Faktor  $\frac{1}{\gamma}$  kleiner, als die Ruhelänge  $\Delta l_R$ , d. h.

$$\Delta l = \frac{1}{\gamma} \Delta l_R.$$

Man spricht bei dieser Längenkontraktion auch davon, dass die Länge mit dem Faktor von oben kontrahiert wird. Da sich schon vor Einstein Lorentz und FitzGerald mit dieser Kontraktion beschäftigt haben, wird sie auch *Lorentz-FitzGerald-Kontraktion* genannt.



Ableitung der Längenkontraktion unter Verwendung der Lorentz-Transformationen für  $x = \gamma(x' + vt')$  und nicht für  $x' = \gamma(x - vt)$ .

Am Paul Scherrer Institut steht eine Statue eines Mammuts, die so kontrahiert wurde, als ob sie sich mit mehr als  $0.9c$  bewegen würde (siehe Bild aus [62]).



Es ist wichtig zu beachten, dass jedes Objekt in seinem System weder die Zeitdilatation noch die Längenkontraktion bemerkt. Erst im anderen System werden diese Effekte sichtbar. Ein häufig verwendetes Beispiel soll diesen Sachverhalt verdeutlichen.

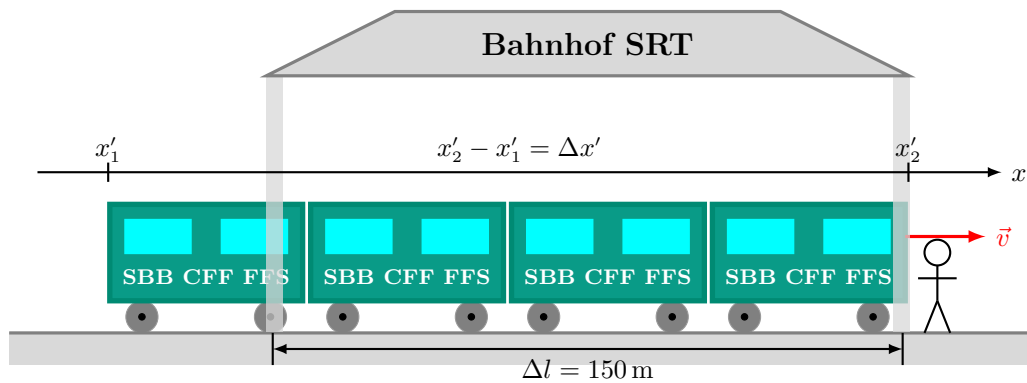
### Bsp. vii.

Ein Zug der Länge 200 m fahre in einen Bahnhof der Länge 150 m. Mit welcher Geschwindigkeit müsste der Zug fahren, damit das vordere und hintere Ende des Zuges zeitgleich im Bahnhof drin ist? Lsg:  $v \approx 0.66c$

**Lösung:**



Wie ist es möglich, dass ein Zug, der eigentlich zu lang ist, trotzdem in den Bahnhof einfahren kann? Die Antwort liegt in der *Gleichzeitigkeit*, die durch die Anwendung der Postulate eine neue Bedeutung erhält. Zwei Ereignisse sind immer nur in einem System gleichzeitig und in jedem anderen System nicht. Betrachten wir also dieses Beispiel und das Bild etwas genauer:



Wir messen die Enden des Zuges gleichzeitig, und zwar im System des Bahnhofs, d.h.  $t_1 = t_2$ . Daraus folgt aber, dass dies im System des Zuges nicht gleichzeitig ist. Da sich der Zug bewegt, müssen wir die Strecke berechnen, die er in dieser Zeit zurücklegt. Es gilt

$$t'_1 = \gamma \left( t_1 - \frac{vx_1}{c^2} \right) \quad \text{und} \quad t'_2 = \gamma \left( t_2 - \frac{vx_2}{c^2} \right),$$

dass die Zeit zwischen den zwei Ereignissen im System des Zuges

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\gamma \frac{v\Delta x}{c^2}$$

ist. Das Minus kommt daher, dass  $\Delta t' < 0$  ist und daher  $t'_2$  vor  $t'_1$  ist. Dabei hat der Zug die Strecke:

$$v\Delta t' = -\gamma \frac{v^2\Delta x}{c^2}$$

zurückgelegt. Betrachten wir das Zugende, was noch hinten hinausschaut, also:  $\Delta x' - \Delta l$ . Diese Strecke sollte gleich lang sein, wie der Betrag der Strecke von  $v\Delta t'$ , also die Strecke, welche der Zug in seinem System noch zurücklegt, also:

$$\Delta x' - \Delta l = |v \cdot \Delta t'|$$

Mit  $\Delta x' = \gamma \cdot \Delta x$  und nach  $\Delta l$  aufgelöst, erhalten wir:

$$\Delta l = \gamma \Delta x - \gamma \frac{v^2\Delta x}{c^2}.$$

Wohingegen  $\Delta x$  die Ruhelänge des Zuges ist, also  $\Delta x = \Delta l_R = 200 \text{ m}$  und damit erhalten wir:

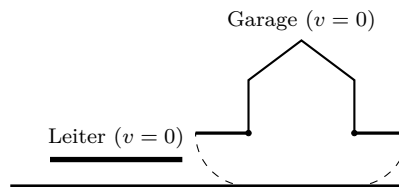
$$\Delta l = \gamma \Delta l_R \underbrace{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{=\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{1}{\gamma} \Delta l_R,$$

was genau die Formel für die Längenkontraktion ist.

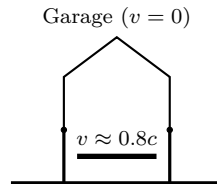
Hier stellt sich natürlich die Frage, wie sich die Situation aus der Sicht des bewegten Systems darstellt. Hier scheint klar zu sein, dass der Zug niemals in den Bahnhof passen kann. Im Bezugssystem des Zuges wird der Bahnhof natürlich bewegt und somit verkürzt sich der Bahnhof und wird somit noch kürzer. Dieses Problem wird auch als Längenkontraktionsparadoxon bezeichnet. Es scheint der Theorie zu widersprechen. Da der Zug im Bahnhof nur in einem Bezugssystem Platz hat, ist klar, wer sich hier bewegt. Dies ist aber ein Widerspruch zum 1. Postulat.

Die Lösung dieses Paradoxons liegt, wie so oft in der SRT, im Problem der Gleichzeitigkeit. Im Ruhesystem des Bahnhofs befinden sich der vordere Teil des Zuges und der hintere Teil des Zuges *gleichzeitig* im Bahnhof. Daher spricht der Beobachter im Bahnhof davon, dass der Zug einfährt. Aber wie wir oben gesehen haben, ist die Gleichzeitigkeit vom Bezugssystem abhängig und daher für den Beobachter im Zug nicht gleich. Er sieht, dass das vordere Ende des Zuges zuerst ausfährt, bevor das hintere Ende einfährt. Da im bewegten System die Reihenfolge der Ereignisse nicht mehr die gleiche ist, können diese beiden Situationen nicht verglichen werden und es liegt somit kein Widerspruch vor.

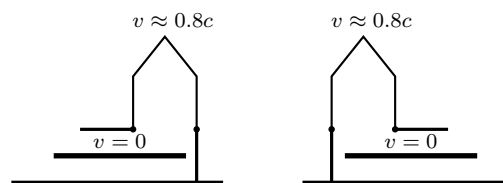
Die Situation wird klarer, wenn man sich eine Leiter ansieht, die länger als die Garage ist. Bewegt man die Leiter durch die Garage, so gibt es eine Geschwindigkeit, bei der die Leiter vollständig in die Garage passt, so dass das vordere und das hintere Tor *gleichzeitig* geschlossen werden können. Wenn sich die beiden Bezugssysteme nicht bewegen, ergibt sich folgende Situation:



Nun bewegt sich die Leiter mit einer Geschwindigkeit von  $v \approx 0.8c$ . Dadurch verkürzt sich die Länge der Leiter aus der Sicht der ruhenden Garage und passt daher hinein. Aus der Sicht der Garage schliessen sich die beiden Tore gleichzeitig, was wie folgt aussieht.



Jetzt steht die Leiter still und die Garage fährt auf die Leiter zu. Die Tore schliessen sich nicht mehr gleichzeitig. Das rechte Tor schliesst sich zuerst, und bevor sich das linke Tor schliesst, öffnet sich das rechte Tor.



Es gibt also keinen Grund anzunehmen, dass Beobachter im System Garage und Beobachter im System Leiter die Frage, ob die Türen jemals gleichzeitig geschlossen sind, gleich beurteilen müssen.

Das folgende Beispiel kombiniert Längenkontraktion und Zeitdilatation und ist gleichzeitig eine erste experimentelle Bestätigung der Speziellen Relativitätstheorie.

### Bsp. viii.

Myonen sind Elementarteilchen und gehören zur Gruppe der Leptonen sowie die Elektronen auch. Im Grunde sind es schwere Elektronen. Die Myonen entstehen aus den Zerfallsprodukten nach dem Aufprall von kosmischer Strahlung mit der Atmosphäre, daher auch in einer Höhe von mehreren tausend Metern. Da Myonen nicht stabil sind zerfallen sie nach folgendem Gesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau},$$

wobei  $N_0$  die ursprüngliche Anzahl Myonen zum Zeitpunkt  $t = 0$ ,  $N(t)$  die Anzahl Myonen zum Zeitpunkt  $t > 0$  und  $\tau$  die mittlere Lebensdauer sind. Im Ruhesystem des Myons ist  $\tau = 2 \mu\text{s}$ . Myonen fliegen mit einer Geschwindigkeit von  $0.998c$  und unterliegen daher den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie.

Bestimmen Sie die Strecke, welche ein Myon a) in seinem System und b) im Ruhesystem der Erde während der Zeit  $\tau$  zurücklegt.

Angenommen wir beobachten in einer Höhe von  $h = 9000 \text{ m}$  in einem Detektor  $N_0 = 10^8$  Myonen in einem bestimmten Zeitintervall. Wie viele Myonen würden wir im selben Zeitintervall auf Meereshöhe im c) nicht relativistischen und d) relativistischen Fall messen. Lsg: a)  $\Delta y_M \approx 600 \text{ m}$ , b)  $\Delta y_E \approx 9500 \text{ m}$ , c)  $N \approx 31$ , d)  $N \approx 3.7 \cdot 10^7$

Lösung:



Nun wenden wir uns der *relativistischen Mechanik*, die wegen der Lorentz-Transformation von der klassischen Mechanik abweicht.







Nun leiten wir eine wichtige Beziehung in der relativistischen Mechanik zwischen der Energie, Impuls und Masse her. Diese Beziehung macht deutlich, dass diese drei Grössen nicht mehr unabhängig betrachtet werden können, sie sind miteinander verknüpft. Mit dem Impuls  $p = \gamma mv$  und der Gesamtenergie  $E = \gamma mc^2$  erhalten wir durch quadrieren der Energie:

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4.$$

Mit  $\gamma = \frac{p}{mv}$  erhalten wir:

$$E^2 = \frac{p^2 c^4}{v^2} = p^2 c^2 \cdot \frac{c^2}{v^2}.$$

Weiter gilt:  $\frac{c^2}{v^2} = 1 + \frac{c^2}{v^2} - 1 = 1 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{c^2}{v^2} = 1 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{c^2}{v^2}$ . Eingesetzt erhalten wir:

$$E^2 = p^2 c^2 \left( 1 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{c^2}{v^2} \right) = p^2 c^2 + \frac{p^2 c^4}{\gamma^2 v^2} = (pc)^2 + \frac{\gamma^2 m^2 v^2 c^4}{\gamma^2 v^2} = (pc)^2 + (mc^2)^2.$$

Damit erhalten wir für die Beziehung zwischen Energie, Impuls und Ruheenergie:

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$$

Ein weiterer Zusammenhang soll anhand des folgenden Beispiels hergeleitet werden, wobei die Herleitung sehr einfach ist.

Bsp. xii.

Zeigen Sie, dass für ein Teilchen mit der Geschwindigkeit  $v$ , der Gesamtenergie  $E$  und dem Impuls  $p$  folgende Beziehung gilt:

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E}.$$

Lsg: —

**Lösung:**

Zum Abschluss dieses Abschnitts über die relativistische Mechanik betrachten wir einen relativistischen Stossvorgang, bei dem kinetische Energie in Ruhemasse umgewandelt wird. Das Beispiel stammt aus [18].

Bsp. xiii.

Ein Teilchen der Ruhemasse  $2 \text{ MeV}/c^2$  und der kinetischen Energie  $3 \text{ MeV}$  stösst mit einem ruhenden Teilchen zusammen, dessen Ruhemasse  $4 \text{ MeV}/c^2$  beträgt. Nach dem Stoss entsteht ein neues Teilchen. Bestimmen Sie a) den ursprüngliche Gesamtimpuls des Systems, b) die Endgeschwindigkeit und c) die Ruhemasse des neuen Teilchens.

Lsg: a)  $p = 4.58 \text{ MeV}/c$ , b)  $v = 0.51c$ , c)  $m \approx 7.75 \text{ MeV}/c^2$

Lsg: a)  $p = 4.58 \text{ MeV}/c$ , b)  $v = 0.51c$ , c)  $m \approx 7.75 \text{ MeV}/c^2$

Lösung:		
---------	--	--

Im Folgenden untersuchen wir die mathematische Struktur der Speziellen Relativitätstheorie mit Hilfe einer alternativen Schreibweise, die sich an Vektoren anlehnt und die Eigenschaft berücksichtigt, dass Energie und Impuls bzw. Zeit und Raum nicht mehr unabhängig sind.

## 1.5 Mathematisierung der SRT

In diesem Abschnitt über die Mathematisierung der SRT werden wir den *4er-Vektor* definieren, die *Minkowski-Metrik* einführen und schliesslich die *Minkowski-Diagramme* kennenlernen. Beides basiert auf den Arbeiten von Hermann Minkowski<sup>8</sup>.



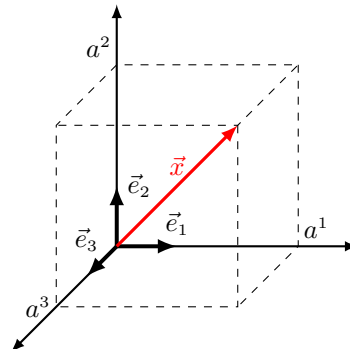
H. Minkowski  
(1864-1909)

Hermann Minkowski spielte eine entscheidende Rolle bei der Entwicklung der Raumzeit-Theorie in der Physik. Er war ein Schüler von David Hilbert und ein enger Freund von Albert Einstein. Obwohl Minkowski während seines Lebens möglicherweise nicht die volle Anerkennung erhielt, die ihm gebührt, wird seine Arbeit heute als grundlegend für das Verständnis der modernen Physik betrachtet. Sein Beitrag hat nicht nur die Art und Weise verändert, wie wir über Raum und Zeit nachdenken, sondern hat auch die Grundlage für viele weitere Entwicklungen in der theoretischen Physik gelegt.

### 1.5.1 4er-Vektor

4er-Vektoren sind ein mathematisches Werkzeug, das speziell für die spezielle Relativitätstheorie entwickelt wurde, um die Invarianz physikalischer Gesetze unter Lorentz-Transformationen zu gewährleisten und eine konsistente Beschreibung von Raum und Zeit zu ermöglichen.

Die Darstellung des 4er-Vektors unterscheidet sich nicht wesentlich von der des 3er-Vektors, ausser dass er eine Komponente mehr enthält. Der grosse Unterschied wird erst sichtbar, wenn man die Beträge vergleicht. Daraus wird ersichtlich, dass der Betrag des 4er-Vektors anders definiert werden muss, um die Lorentzinvarianz zu gewährleisten. Ein Vorteil des 3er-Vektors ist, dass man ihn sich wie in der folgenden Abbildung vorstellen kann:



Die Vektoren  $\vec{e}_i$  stellen sogenannte Einheitsvektoren dar. Der Mathematiker spricht auch von der Basis eines Vektorraums. In unserem Fall haben wir die einfachst mögliche Basis gewählt, auch *kanonische* Basis genannt. Somit kann man den Vektor  $\vec{a}$  auch schreiben als:

$$\vec{x} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2 + a^3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a^i \vec{e}_i.$$

In der Regel verwendet man für Vektoren jedoch die folgende explizite Notation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

wobei  $(a^1, a^2, a^3)$  als Komponenten des Vektors bezeichnet werden. Es ist jedoch zu beachten, dass die Komponenten  $(a^1, a^2, a^3)$  von den Basisvektoren  $\vec{e}_i$  abhängen. Daher habe ich den Vektor  $\vec{x}$  und die Komponenten  $a^i$  genannt, da diese je nach Wahl der Basisvektoren unterschiedliche Werte annehmen können. In der SRT schreibt man jedoch selten den Vektor explizit auf, sondern verwendet entweder die Abkürzung  $\vec{x}$  oder die oben genannte Summe. Dazu hat Einstein eine - im ersten Blick banale - Summenkonvention eingeführt. Sie lautet im einfachsten Fall:

<sup>8</sup>Hermann Minkowski (22. Juni 1864 in Aleksotas, Russisches Kaiserreich, heute Kaunas, Litauen - 12. Januar 1909 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker und Physiker.

*Über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produkts wird summiert.*

und in der Relativitätstheorie gilt als zusätzliche Regel:

*Summiert wird nur, wenn der Index sowohl als oberer und als unterer Index auftritt.*

Damit kann man den Vektor  $\vec{a}$  auch kurz schreiben als:

$$\vec{x} = a^i \vec{e}_i.$$

Damit können wir nun den 3er-Vektor beliebig erweitern und erhalten also für den 4er-Vektor  $x$ :

$$x = \sum_{i=0}^3 a^i e_i = a^i e_i,$$

wobei der Index jetzt von 0 bis 3 geht. An dieser Schreibweise erkennen Sie wahrscheinlich schon, dass es zu Verwechslungen bzw. Verwirrungen kommen kann. Eine Konvention wurde bereits berücksichtigt. In vielen Büchern wird der 4er-Vektor nicht mit einem Vektorpfeil versehen. Bei der Summenkonvention ist jedoch unklar, ob bis drei oder bis vier addiert werden soll, insbesondere wenn sowohl 3er- als auch 4er-Vektoren im Spiel sind. Aus diesem Grund wurde beschlossen, die Indizes des 3er-Vektors mit lateinischen Buchstaben und die des 4er-Vektors mit griechischen Buchstaben zu notieren. Damit ist die korrekt Schreibweise:

$$x = a^\mu e_\mu.$$

Also, was hat der 4er Vektor mit der SRT zu tun? Die Antwort ist eigentlich schon gegeben. Da in der SRT Raum und Zeit nicht mehr getrennt betrachtet werden können, erweitert man den 3er Vektor um die Zeitkomponente und damit man trotzdem vier Längen hat, multipliziert man die Zeit noch mit der Lichtgeschwindigkeit. Damit erhält man folgende Definition für ein Ereignis am Ort  $x$ :

**Def. 4:** (4-Vektor) Ein Ereignis am Ort  $x$  ist definiert als

$$x = a^\mu e_\mu,$$

wobei  $a^0 = ct$  die 0-Komponente des Ereignis  $x$  ist.

Etwas schwieriger wird es, wenn wir den Abstand zwischen zwei Ereignissen oder vereinfacht die Länge eines Vektors suchen. Die Länge erhält man durch den Betrag des Vektors, d. h. für einen 3er-Vektor:

$$|\vec{x}|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = (a^i \vec{e}_i)^T \cdot a^j \vec{e}_j = ((\vec{e}_i)^T \cdot \vec{e}_j) a^i a^j,$$

Beachten Sie, dass wir hier eine doppelte Summe haben. Es wird sowohl über  $i$  als auch über  $j$  summiert. Die Klammer stellt eine Matrix dar, welche durch

$$\epsilon_{ij} = (\vec{e}_i)^T \cdot \vec{e}_j$$

definiert wird. Dass man sie als Matrix darstellen kann, soll nun im  $\mathbb{R}^3$  gezeigt werden. Beachten Sie, dass die kanonischen Basisvektoren  $\vec{e}_i$  wie folgt aussehen:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher erhalten wir für die Matrixeinträge:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= (\vec{e}_1)^T \cdot \vec{e}_1 = 1 & \epsilon_{12} &= (\vec{e}_1)^T \cdot \vec{e}_2 = 0 & \epsilon_{13} &= (\vec{e}_1)^T \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \epsilon_{21} &= (\vec{e}_2)^T \cdot \vec{e}_1 = 0 & \epsilon_{22} &= (\vec{e}_2)^T \cdot \vec{e}_2 = 1 & \epsilon_{23} &= (\vec{e}_2)^T \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \epsilon_{31} &= (\vec{e}_3)^T \cdot \vec{e}_1 = 0 & \epsilon_{32} &= (\vec{e}_3)^T \cdot \vec{e}_2 = 0 & \epsilon_{33} &= (\vec{e}_3)^T \cdot \vec{e}_3 = 1. \end{aligned}$$

Solche Matrizen werden als *metrischer Tensor* bezeichnet und haben für den euklidischen Raum die folgende Form:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Lösung:

Wie wir an diesem Beispiel gesehen haben, ist nicht jede Metrik invariant unter der Rotation<sup>11</sup>. Man kann nun eine Transformation suchen, die die Metrik erfüllt, oder man kann die Metrik verwerfen. In der Physik geben oft die Gesetze die Transformation vor, so dass man in der Regel nach einer geeigneten Metrik suchen muss. Betrachten wir nun die Lorentztransformationen und suchen nach einer Metrik, die diese invariant macht. Die naheliegendste Metrik ist natürlich die euklidische Metrik<sup>12</sup>:

$$s^2 = \epsilon_{\mu\nu} a^\mu a^\nu, \quad \text{mit} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lorentztransformation, häufig als  $\Lambda$  bezeichnet, lässt sich ebenfalls durch eine Matrix darstellen. Sie hat - für eine Transformation in  $x^1$ -Richtung - die folgende Form:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Die Metrik ist invariant, falls die folgende Transformation gilt:

$$\Lambda^T \epsilon \Lambda = \epsilon.$$

Da  $\Lambda^T = \Lambda$  und  $\epsilon$  die Identität ist, muss folgendes gelten:

$$\Lambda^2 = \epsilon.$$

Die Matrixmultiplikation führt jedoch auf:

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \gamma^2(1 + \beta^2) & -2\gamma^2\beta \\ -2\gamma^2\beta & \gamma^2(1 + \beta^2) \end{pmatrix} \neq \epsilon.$$

Dies zeigt, dass die euklidische Metrik unter der Lorentztransformation nicht invariant ist. Wir müssen also eine andere Metrik verwenden. Hier kommt die Minkowski-Metrik  $g_{\mu\nu}$  ins Spiel, die streng genommen keine Metrik im eigentlichen Sinne ist, da sie nicht immer positiv ist. Für den Abstand erhalten wir mit dieser Metrik:

$$s^2 = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2.$$

Die Minkowski-Metrik hat in der kanonischen Basis die folgende Matrixdarstellung:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir überprüfen, ob die Minkowski-Metrik invariant ist unter der Lorentztransformation. Es sollte also folgendes gelten:

$$\Lambda^T g \Lambda = g.$$

<sup>11</sup>Beachten Sie, dass diese Metrik nicht immer positiv ist. Dies ist in diesem Fall nicht weiter tragisch, da es sehr einfach ist, dies zu korrigieren. Zum Beispiel durch die folgende Metrik:

$$(\Delta m)^2 = \max \left( (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2, (\Delta y)^2 - (\Delta x)^2 \right),$$

welche die Eigenschaft der Metrik kaum ändert.

<sup>12</sup>Im Folgenden werden immer nur die Komponenten  $x^0$  und  $x^1$  betrachtet. Dies dient der Vereinfachung der Matrizen.



**Def. 6:** (*Energie-Impuls-Vektor*) Der Energie-Impuls-Vektor  $p^\mu$  ist definiert als:

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}),$$

wobei  $p^0 = E/c$  ist.

Damit erhalten wir für die Ruhemasse folgende Beziehung:

$$(p^\mu)^2 = p^2 = (mc^2)^2.$$

Wir lösen nun ein etwas komplizierteres Beispiel, um den Nutzen dieser neuen Formulierung zu verdeutlichen.

**Bsp. xvii.**

Das Pion<sup>13</sup>  $\pi^0$ , mit der Ruhemasse von  $135 \text{ MeV}/c^2$  zerfällt in 99 % der Fälle in zwei Photonen  $\gamma$ . Die Energien der Photonen sind gleich und der Winkel zwischen ihnen etwa  $30^\circ$ .

Bestimmen Sie a) die Energie der Photonen und b) die Energie, c) der Impuls sowie d) die Geschwindigkeit des Pions vor dem Zerfall.

Lsg: a)  $E_1 \approx 261 \text{ MeV}$ , b)  $E_{\pi^0} \approx 522 \text{ MeV}$ , c)  $p \approx 504 \text{ MeV}/c$ , d)  $v \approx 0.965c$

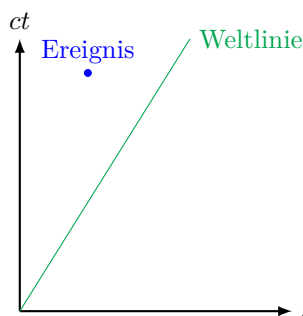
**Lösung:**

Damit verlassen wir das mathematisch etwas anspruchsvolle Gebiet und wenden uns der geometrischen Darstellung zu, den sogenannten *Minkowski-Diagrammen*.

### 1.5.3 Minkowski-Diagramme

Die Minkowski-Diagramme wurden von Hermann Minkowski entwickelt, um die Phänomene der SRT zu veranschaulichen. Dazu gehören sicher die Längenkontraktion und die Zeitdilatation.

Da wir hier grundsätzlich von einem vierdimensionalen Raum ausgehen müssen, ist klar, dass eine Vereinfachung vorgenommen werden muss. Wie wir wissen, ist es immer möglich, das Koordinatensystem so festzulegen, dass die Bewegung entlang einer Koordinate erfolgt. Wir können uns also auf diese eine Ortskoordinate beschränken. Auf diese Weise eliminieren wir zwei Dimensionen und erhalten ein Diagramm, das im Wesentlichen ein Weg-Zeit-Diagramm ist. Es erweist sich als vorteilhaft, für die Zeitachse nicht  $t$ , sondern  $ct$  mit  $c$  als Lichtgeschwindigkeit zu verwenden. Dadurch wird die Skala des Diagramms an die in der SRT relevanten Geschwindigkeiten angepasst. Betrachten wir also dieses Diagramm:



Wir merken uns folgende Begriffe:

<sup>13</sup>Das Pion ist ein neutrales Teilchen aus zwei Quarks. Es gehört zur Familie der Mesonen, welche immer aus einem Quark und einem Anti-Quark zusammengesetzt sind.



- Jeder Punkt im Raum-Zeit-Diagramm stellt ein *Ereignis* dar. Zum Beispiel die Betätigung eines Lichtschalters.
- Jeder Graph im Raum-Zeit-Diagramm stellt eine *Weltlinie* dar. Zum Beispiel eine Zugfahrt.

Betrachten wir gleich das folgende einfache Beispiel:

### Bsp. xviii.

Zeichnen Sie in das Minkowski-Diagramm die Weltlinien für die Bewegung a) eines Lichtteilchens und b) eines Zuges mit konstanter Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. c) Bestimmen Sie zusätzlich die Winkel zwischen der  $x$ -Achse und den Weltlinien.

Lsg: –



Man erkennt, dass die Weltlinien niemals eine Steigung kleiner als  $45^\circ$  haben dürfen, sonst würde sich dieses Objekt mit einer Geschwindigkeit grösser als die Lichtgeschwindigkeit bewegen, was im Widerspruch zur SRT stünde.

Der Nutzen der Minkowski-Diagramme wird erst richtig deutlich, wenn wir sowohl ein bewegtes als auch ein ruhendes Koordinatensystem betrachten. Dazu legen wir den Ursprung beider Koordinatensysteme übereinander. Wir nennen das bewegte System  $S'$  und das ruhende  $S$ . Um die Achse  $ct'$  zu zeichnen, müssen wir sie als Funktion von  $x$  und  $t$  darstellen und  $x' = 0$  setzen. Mit der Lorentz-Transformation für  $x'$  erhalten wir

$$x' = \gamma(x - vt) \Rightarrow x = vt.$$

Durch Umformung nach  $ct$  erhalten wir:

$$ct = \frac{c}{v}x.$$

Durch Vergleich mit dem obigen Beispiel erhält man für die Achse  $ct'$  die Weltlinie eines Zuges mit konstanter Geschwindigkeit und damit

$$\frac{c}{v} = \tan \beta.$$

Die  $x'$ -Achse erhalten wir ebenfalls in dem wir  $t' = 0$  setzen und die Lorentztransformation betrachten. Es gilt:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2}x \right) \Rightarrow t = \frac{v}{c^2}x.$$

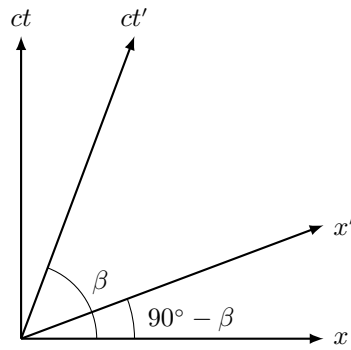
Auch hier formen wir nach  $ct$  um und erhalten:

$$ct = \frac{v}{c}x.$$

Mit der Definition des Tangens erhalten wir direkt, dass

$$\frac{v}{c} = \tan(90^\circ - \beta).$$

ist. Daher sieht das Minkowski-Diagramm für ein bewegtes und ruhendes System wie folgt aus:



Betrachten wir nun exemplarisch zwei Folgerungen der SRT, die wir mit Hilfe von Minkowski-Diagrammen veranschaulichen können. Es handelt sich zum einen um die Längenkontraktion und zum anderen um die Zeitdilatation.

### Längenkontraktion

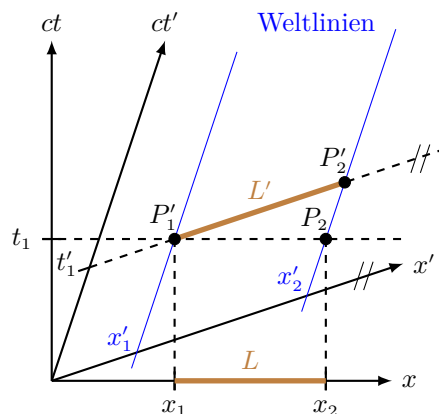
Wir betrachten einen ruhenden Stab mit den Endpunkten  $P'_1 = (x'_1, ct'_1)$  und  $P'_2 = (x'_2, ct'_2)$  im bewegten System  $S'$ . Ein Beobachter in  $S'$  misst zur Zeit  $t'_1$  die Länge

$$L' = \overline{P'_1 P'_2} = x'_2 - x'_1.$$

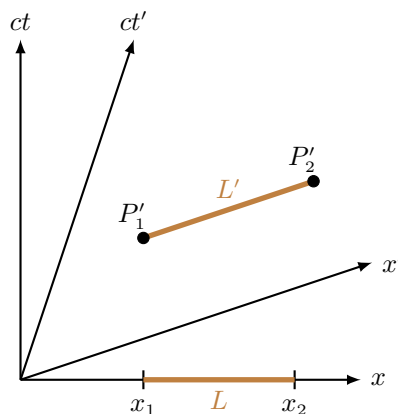
Für einen Beobachter in  $S$  bewegt sich der Stab mit der Geschwindigkeit  $v$  entlang der  $x$ -Achse. Um die Stablänge  $L$  zu bestimmen, muss er sie bei  $t = t_1$  messen. Die Schnittpunkte  $P_1 = (x_1, ct_1)$  und  $P_2 = (x_2, ct_2)$  sind die Schnittpunkte der beiden Weltlinien  $x'_1(t)$  und  $x'_2(t)$  mit der Horizontalen  $t = t_1$ . In  $S$  gilt somit:

$$L = \overline{P_1 P_2} = x_2 - x_1,$$

wobei wir  $x_2$  und  $x_1$  durch die senkrechte Projektion von  $P_1$  und  $P_2$  erhalten werden. Dies sieht nun wie folgt aus:



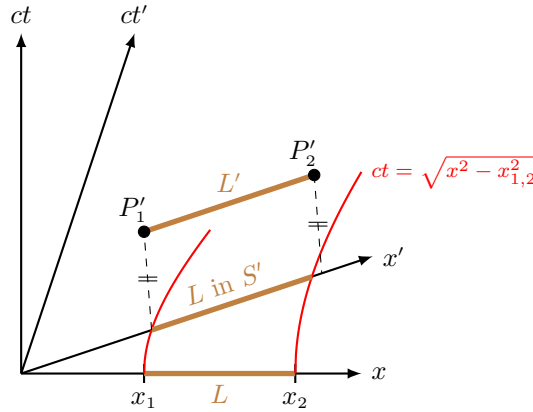
Auf den ersten Blick scheint die Sache klar zu sein:  $L$  ist eindeutig kürzer als  $L'$ . Was man an dieser Stelle aber nicht vergessen darf, ist, dass die Skalenlängen in  $S'$  und  $S$  unterschiedlich sind. Will man sich davon auch graphisch überzeugen, muss man  $L'$  in  $S$  oder  $L$  in  $S'$  messen. Wir entscheiden uns,  $L$  in  $S'$  zu messen. Dazu entfernen wir alle überflüssigen Punkte und Hilfsgeraden:



Um die Stablänge  $L$  in  $S'$  messen zu können, müssen die Punkte  $x_1, x_2$  invariant transformiert werden. Da, wie oben gezeigt, die Grösse

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = s^2$$

in allen Systemen gleich ist, muss  $x_1$  auf der Funktion  $ct = \sqrt{x^2 - x_1^2}$  liegen und  $x_2$  auf der Funktion  $ct = \sqrt{x^2 - x_2^2}$ .



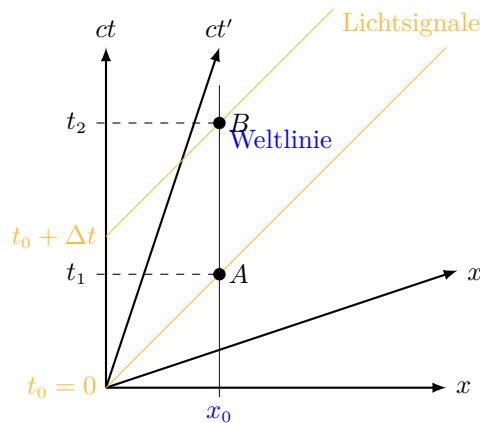
Wir sehen also, dass  $L$  tatsächlich kürzer ist als  $L'$ , auch nach Berücksichtigung der Massstabsänderung, und es ist nicht überraschend, dass dieser Effekt natürlich klein ist.

### Zeitdilatation

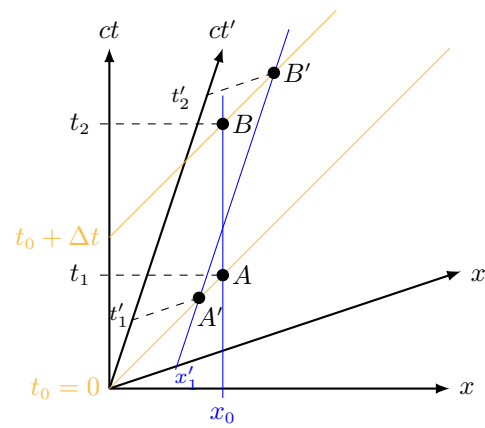
Betrachten wir nun eine Uhr, die sich im Ruhesystem  $S$  im Ursprung befindet. Die Uhr sendet zwei Lichtsignale zu den Zeitpunkten  $t_0 = 0$  und  $t_0 + \Delta t$  aus. Ein ruhender Beobachter im System  $S$  empfängt diese Signale zu den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  in den Ereignissen  $A$  und  $B$ , die sich mit der Weltlinie  $x_0 = \text{konst.}$  schneiden:

$$\Delta t = \overline{AB} = t_2 - t_1.$$

Betrachten wir dazu folgendes Minkowski-Diagramm:



Betrachten wir nun diese Situation im bewegten System  $S'$ , das sich relativ zu  $S$  mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung  $x$  bewegt. Ein in  $S'$  ruhender Beobachter hat bei  $x'_1$  die Weltlinie  $x'_1 = \text{konst.}$  Die Lichtsignale bei  $A'$  und  $B'$  erreichen ihn zu den Zeitpunkten  $t'_1$  und  $t'_2$ . Also wie folgt:



Auch hier ist zu beachten, dass die Skalen in  $S'$  und  $S$  nicht gleich sind und daher die Zeitintervalle  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  und  $\Delta t$  nicht direkt verglichen werden können. Diese Anpassung soll jedoch dem Leser überlassen bleiben.

Damit beenden wir diesen Abschnitt und wenden uns dem nächsten Eckpfeiler der modernen Physik zu, der Quantenphysik. Obwohl wir uns hier hauptsächlich mit der nichtrelativistischen Quantenphysik beschäftigen werden, werden wir im Abschnitt über die Ursprünge der Quantentheorie die Compton-Streuung behandeln, für die wir die relativistische Mechanik benötigen.

## Zusammenfassung Kapitel I1

1. Die *Galilei-Transformationen* beschreiben den Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $(x, y, z, t)$  und  $(x', y', z', t')$  eines beliebigen Ereignisses, gemessen in zwei relativ zueinander gleichförmig geradlinig bewegten (Geschwindigkeit  $v$ ) Koordinatensystemen  $S$  und  $S'$ , in der gemeinsamen Richtung  $x$  bzw.  $x'$ , wobei der Ursprung zum Zeitpunkt  $t = t' = 0$  übereinstimmt.

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{und} \quad t' = t.$$

2. Die Einstein-Postulate lauten:

- Das *Relativitätsprinzip* besagt, dass es kein physikalisch bevorzugtes Inertialsystem gibt. Die Naturgesetze nehmen in allen Inertialsystemen dieselbe Form an.
- Jeder Beobachter misst für die *Lichtgeschwindigkeit im Vakuum* denselben Wert.

3. Die *Lorentztransformationen* lauten:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),$$

wobei der  $\gamma$ -Faktor:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  ist.

4. Die *Geschwindigkeitstransformation* von  $S'$  in  $S$  bezüglich eines Systems mit der Geschwindigkeit  $v$  ist:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}.$$

5. Die *Eigenzeit*  $\Delta\tau$  ist die Zeit zwischen zwei Ereignissen, die in einem Bezugssystem am selben Ort stattfinden.
6. Die *Zeitdilatation* besagt, dass ein Zeitintervall  $\Delta t$  in einem Bezugssystem  $S$  immer um den Faktor  $\gamma$  grösser ist als die Eigenzeit  $\Delta\tau$ , d. h.

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau.$$

7. Die *Ruhelänge* resp. Eigenlänge  $\Delta l_R$  ist die Länge gemessen in seinem Ruhesystem.

8. Die *Längenkontraktion* besagt, dass eine Strecke  $\Delta l$  in einem Bezugssystem  $S$  immer um den Faktor  $\frac{1}{\gamma}$  kleiner ist als die Ruhelänge  $\Delta l_R$ , d. h.

$$\Delta l = \frac{1}{\gamma} \Delta l_R.$$

9. Der *relativistische Impuls* einer Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist definiert als:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

wobei  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  ist.

10. Die Beziehung zwischen der *Ruheenergie*  $E_0 = mc^2$  und der kinetischen Energie ist:

$$E = E_{\text{kin}} + E_0 = \gamma mc^2,$$

wobei  $E$  die Gesamtenergie ist.

11. Die *Energie-Impuls-Beziehung* ist:

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2.$$

## Konzeptfragen Kapitel I1

1. Richtig oder falsch: "Im Prinzip ist es möglich, dass ein Beobachter, der einen Lichtimpuls mit einer konstant hohen Geschwindigkeit verfolgt, das Licht als nahezu stationär wahrnimmt."  
☐ richtig  
☐ falsch
2. In den folgenden beiden Fragen befindet sich Abbey in einem Raumschiff, das sich mit hoher Geschwindigkeit relativ zu Brendan bewegt, der auf einem Asteroiden (einem sehr kleinen, im Raum schwebenden Felsbrocken) steht. Sie fliegt an ihm vorbei, so dass sie bei  $t = 0$  kurzzeitig neben Brendan steht.
  - a. In dem Moment, in dem Abbeys Schiff an Brendan vorbeifährt, sendet sie zwei Lichtpulse von ihrem Schiff zu ihm. Wenn die Lichtpulse nach Abbeys Uhr im Abstand von einer Nanosekunde ausgesendet werden, wie gross ist dann der zeitliche Abstand zwischen den Pulsen nach Brendans Meinung?  
☐ Grösser als eine Nanosekunde  
☐ Gleich einer Nanosekunde  
☐ Kleiner als eine Nanosekunde
  - b. Auch während Abbeys Schiff an Brendan vorbeifährt, sendet Brendan zwei Lichtpulse an Abbey. Wenn Brendan die Lichtpulse im Abstand von einer Nanosekunde nach seiner Uhr sendet, wie gross ist dann der zeitliche Abstand zwischen den Pulsen nach Ansicht von Abbey?  
☐ Grösser als eine Nanosekunde  
☐ Gleich einer Nanosekunde  
☐ Weniger als eine Nanosekunde
3. Alex und seine Freundin Bianca beschliessen, in identischen Raumschiffen zu getrennten Reisen aufzubrechen. Sie entfernen sich jeweils in entgegengesetzter Richtung von der Erde - Alex mit  $v = 0.75c$  nach links und Bianca mit  $v = 0.75c$  nach rechts, bezogen auf einen Beobachter auf der Erde. Wenn Alex die Geschwindigkeit misst, mit der sein Abstand zu Bianca zunimmt, erhält er einen Wert, der gleich ist:  
☐ gleich  $1.5c$   
☐ Grösser als  $c$ , aber kleiner als  $1.5c$   
☐ Gleich  $c$   
☐ Grösser als  $0.75c$ , aber kleiner als  $c$   
☐ Gleich  $0.75c$
4. Zwei separate Glühbirnen senden Lichtblitze aus, die von einem Beobachter entfernt sind. Dieser Beobachter empfängt das Licht von beiden Blitzen gleichzeitig. Daraus allein kann man schliessen, dass:  
☐ Die Blitze sind für alle Beobachter zur gleichen Zeit erfolgt.  
☐ Die Blitze sind für den Beobachter an diesem Ort zur gleichen Zeit aufgetreten.  
☐ Die Blitze sind zur gleichen Zeit aufgetreten, wenn sich der Beobachter nicht relativ zu den Glühbirnen bewegt.  
☐ Es ist nicht möglich, eine der oben genannten Schlussfolgerungen zu ziehen.
5. Betrachten wir einen geschlossenen Kasten, der eine gleiche Menge an Materie und Antimaterie enthält. Die Gesamtmasse dieses Kastens und seines Inhalts ist anfangs  $M$ . Die Materie und die Antimaterie können sich dann innerhalb des Kastens annihilieren und sich dabei in Photonen verwandeln. Wie gross ist die Gesamtmasse des Kastens und seines Inhalts nach der Annihilation?  
☐ Grösser als  $M$   
☐ Genauso gross wie  $M$   
☐ Kleiner als  $M$

## Aufgaben Kapitel I1

Weitere einfachere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:

<https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0> im Kapitel 41.



1. Im Bezugssystem S finde ein Ereignis B  $2\mu\text{s}$  nach einem Ereignis A statt. Der Abstand der Ereignisse voneinander betrage  $\Delta x = 1.5\text{ km}$ .
  - a. Wie schnell muss sich ein Beobachter entlang der  $x$ -Achse bewegen, damit A und B für ihn gleichzeitig stattfindet?
  - b. Gibt es einen Beobachter, für den das Ereignis B vor dem Ereignis A stattfindet? Wenn, ja. Welche Geschwindigkeit muss er haben?

**Lsg:** a.  $v = 0.4c$  b. Ja,  $c > v > 0.4c$

2. Eine Physikerin möchte eine Verjüngungskur machen, indem sie in einem Raumschiff eine Rundreise macht. Die Geschwindigkeit des Raumschiffs beträgt  $0.45c$ . Aus Sicht der Zurückgebliebenen auf der Erde verbringt sie 15 Jahre im Raumschiff.
  - a. Wie viele Jahre sind, aus Sicht der Physikerin, bei ihrer Rückkehr verstrichen?
  - b. Wieviel Zeit konnte sie damit gewinnen?

**Lsg:** a.  $t' \approx 13.4\text{ y}$  b.  $\Delta t \approx 1\text{ y } 221\text{ d}$

3. In einem Linearbeschleuniger werden Elektronen auf die Geschwindigkeit  $0.6c$  beschleunigt. Anschliessend durchfliegen sie mit konstanter Geschwindigkeit eine Strecke  $\overline{AB}$  von 9 m Länge.
  - a. Wie lange brauchen die Elektronen für diese Strecke?
  - b. Wie lange ist die Strecke im Ruhesystem der Elektronen?
  - c. Welche Zeit vergeht im Ruhesystem der Elektronen bis die Strecke  $\overline{AB}$  „vorbegeflogen“ ist?

**Lsg:** a.  $t \approx 5 \cdot 10^{-8}\text{ s}$  b.  $l_0 \approx 7.2\text{ m}$  c.  $t_0 \approx 4 \cdot 10^{-8}\text{ s}$

4. Berechnen Sie folgende Grössen:
  - a. Ein freies und ruhendes Neutron zerfalle in ein Proton und ein Elektron:  $n \rightarrow p + e^-$ . (Das dabei ebenfalls auftretende Antineutrino wollen wir hier wegen seiner verschwindenden Masse ignorieren.) Bestimmen Sie die frei werdende Energie für diesen Prozess. (Ruheenergie Neutron 939.573 MeV, Proton 938.280 MeV und Elektron 0.511 MeV)
  - b. Wieviel Energie wird benötigt, um ein Teilchen der Ruhemasse  $m_0$  aus dem Ruhezustand bis zur Geschwindigkeit  $v_1 = 0.9c$  und  $v_2 = 0.99c$  zu beschleunigen? Geben Sie Ihre Ergebnisse in Vielfachen der Ruheenergie an.
  - c. Die Gesamtenergie eines Teilchens sei doppelt so gross wie seine Ruheenergie. Bestimmen Sie seinen Impuls.
  - d. Berechnen Sie das Verhältnis der Gesamtenergie zur Ruheenergie für ein Teilchen der Ruhemasse  $m_0$  und der Geschwindigkeit  $v_1 = 0.1c$  und  $v_2 = 0.99c$ .

**Lsg:** a.  $\Delta E_0 \approx 0.782\text{ MeV}$  b.  $E_{\text{kin}}(0.9c) \approx 1.29E_0$  und  $E_{\text{kin}}(0.99c) \approx 6.09E_0$  c.  $p = \sqrt{3}mc$  d.  $\gamma_1 \approx 1.005$ ,  $\gamma_2 \approx 7.09$

5. Ein Strahl von neutralen  $\pi^0$ -Teilchen ( $m_{\pi^0} = 135\text{ MeV}/c^2$ , mittlere Lebensdauer  $\tau = 8.4 \cdot 10^{-17}\text{ s}$ ) fliege mit einer kinetischen Energie von  $E_{\text{kin}}^{\pi^0} = 50\text{ GeV}$ . Die  $\pi^0$  zerfallen in zwei Photonen.
  - a. Wie gross sind Impuls und Geschwindigkeit dieser  $\pi^0$ ?
  - b. Welche Strecke legen sie im Mittel vor dem Zerfall zurück?
  - c. In welchem minimalen Abstand vom Zerfallspunkt muss ein Detektor (Kristall mit einer Grundfläche von  $2 \times 2\text{ cm}^2$ ) aufgebaut werden, sodass nie beide Photonen auf den gleichen Kristall auftreffen? (Tipp: Dazu muss der Öffnungswinkel zwischen den 2 Photonen berechnet werden; Energie- und Impulserhaltung!)



**Lsg:** a.  $p = 50.1348 \text{ GeV}/c$  und  $v \approx c$  b.  $L \approx 9.359 \mu\text{m}$  c.  $x > 390 \text{ cm}$

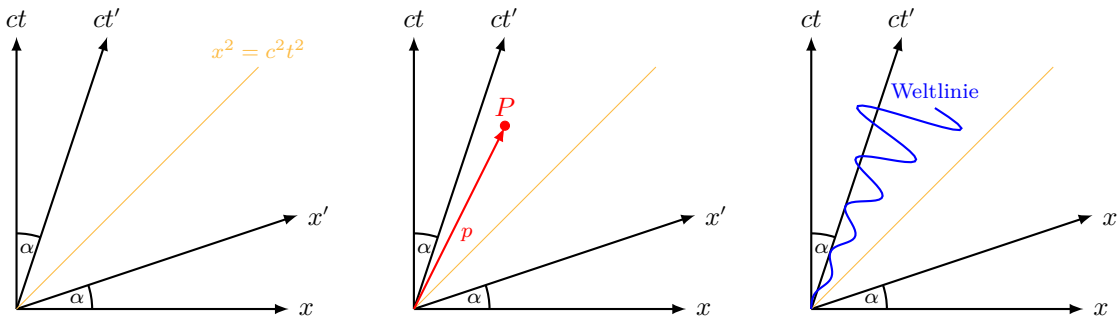
6. In einem Experiment messe man die Energie eines Elektrons  $E_-$  und eines Positrons (Antiteilchen des Elektrons)  $E_+$ . Die Annahme lautet, dass sie von einem Zerfall eines massiven Teilchen (sogn. Z-Boson) stammen, dessen Masse  $m_Z$  sei. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$m_Z = \sqrt{2E_-E_+(1 - \cos \varphi_{\pm})},$$

wobei Sie die Masse des Elektrons und des Positrons vernachlässigen können und der Winkel zwischen dem Elektron und Positron  $\varphi_{\pm}$  ist. Das Z-Boson steht beim Zerfall nicht still. (Setzen Sie  $c = 1$ .)

**Lsg:** –

7. Viele Probleme der speziellen Relativitätstheorie, insbesondere Probleme, die auf eine Raumdimension beschränkt sind, lassen sich sehr anschaulich in sogenannten Minkowski Diagrammen darstellen. Dabei wird ein zum Bezugssystem  $S$  um die Geschwindigkeit  $v > 0$  beschleunigtes System  $S'$  beschrieben, indem die Raum- und Zeitachsen jeweils um den Winkel  $\alpha = \arctan \beta$ , rotiert dargestellt werden, wobei  $\beta = v/c$  ist (vgl. Abb. links).



Ein Punkt  $P$  in der Raum-Zeit wird als Ereignis bezeichnet, die 4-er Länge des Raum-Zeit-Vektors  $p$  als dessen Abstand vom Ursprung (vgl. Abb. mitte), wobei die 4-er Länge definiert ist als

$$p^2 = c^2 t^2 - x^2.$$

Für den späteren Gebrauch definieren wir den Begriff der Weltlinie als den Weg in der Raum-Zeit, den ein bestimmtes Objekt zurücklegt (vgl. Abb. rechts).

- a. Zeigen Sie, dass die Winkel zwischen den Achsen von  $S$  und  $S'$

$$\alpha = \arctan \beta$$

sein müssen, und zeigen Sie, dass  $\alpha < \pi/4$  für alle  $v < c$ .

- b. Zeigen Sie, dass die 4-er Länge des Vektors  $p$  invariant ist unter Lorentzboosts, d. h. dass  $p'^2 = p^2$ , wobei

$$p' = \Lambda p = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix},$$

mit  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

- c. Die Koordinaten des Ereignisses  $P$  im System  $S$  seien  $P = (ct_0, x_0)$ . Finden Sie die Koordinaten  $(ct'_0, x'_0)$  des Ereignisses  $P$  in  $S'$ .
- d. Zeichnen Sie die Menge  $M$  aller Ereignisse ein, die im System  $S$  gleichzeitig mit  $P$  stattfinden, d. h. die Menge der Ereignisse für die gilt  $ct = ct_0$ .
- e. Zeichnen Sie die Menge  $M'$  aller Ereignisse ein, die im System  $S'$  gleichzeitig mit  $P$  stattfinden, d. h. die Menge der Ereignisse für die gilt  $ct' = ct'_0$ .
- f. Welche funktionale Form  $(ct = f(x, p))$  haben alle Ereignisse  $Q$ , die in beiden Systemen denselben 4-er Abstand  $\sqrt{p^2}$  vom Ursprung haben? Zeichnen Sie die Menge dieser Ereignisse ein (qualitative Zeichnung genügt).

**Lsg:** –

# Literaturverzeichnis

- [1] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Mars\\_Climate\\_Orbiter](http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter), Juni 2012
- [2] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales\\_Einheitensystem](http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem), Juni 2012
- [3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,  
URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935>
- [4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays  $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007
- [5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron  $g-2$  and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807
- [6] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Steradian>, Juni 2012
- [7] Aristoteles,
- [8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590
- [9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997
- [10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955
- [11] URL: <http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html>, September 2013
- [12] URL: <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index>
- [13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011
- [14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG
- [15] URL: <http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/>, April 2013
- [16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007
- [17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG
- [18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994
- [19] URL: <https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical>
- [20] Hans Kammer, Irma Mgeladze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG
- [21] URL: <https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal>
- [22] Wikipedia, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid>, August 2013
- [23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010
- [24] URL: <http://www.schulserver.hessen.de/>, Oktober 2013
- [25] URL: <http://www.leifiphysik.de>, September 2013
- [26] URL: <http://photos.zoochat.com>, September 2013

- [27] URL: <http://www.lab-laborfachhandel.de>, Oktober 2013
- [28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,
- [29] URL: [https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm\\_data/lm\\_282/auto/kap09/cd259.htm](https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm), März 2014
- [30] URL: <https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen>, März 2024
- [31] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707>
- [32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press
- [33] URL: <http://ephex.phys.ethz.ch>, Februar 2015
- [34] URL: <http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html>, März 2015
- [35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas optischer Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962
- [36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004
- [37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018
- [38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001
- [39] URL: <https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en>, Juli 2018
- [40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998
- [41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869
- [42] URL: <http://www.tf.uni-kiel.de>, März 2014
- [43] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie\\_\(Thermodynamik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik)), März 2014
- [44] URL: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616\\_Dampfmaschine.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg), März 2014
- [45] URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png>, März 2014
- [46] URL: <http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscodes.htm>, August 2014
- [47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494
- [48] URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm>, Oktober 2014
- [49] URL: <http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm>, Oktober 2014
- [50] URL: [http://www.solstice.de/grundl\\_d\\_tph/exp\\_besch/exp\\_besch\\_04.html](http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html), Oktober 2014
- [51] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639>, Oktober 2017
- [52] URL: <https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen>, Oktober 2017
- [53] URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches\\_Spektrum](https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum), August 2022
- [54] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode>, September 2022
- [55] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg>, November 2023
- [56] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>, April 2024
- [57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor
- [58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.
- [59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.
- [60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

- [61] Wikipedia, [https://de.wikipedia.org/wiki/Relativität\\_der\\_Gleichzeitigkeit](https://de.wikipedia.org/wiki/Relativität_der_Gleichzeitigkeit), August 2018
- [62] URL: <http://static.a-z.ch>, März 2015
- [63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925
- [64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413
- [65] URL: <http://www.peter-glowatzki.de>, Mai 2015
- [66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941
- [67] URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche>, Mai 2015
- [68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)
- [69] URL: <http://w3.pppl.gov/>, September 2015
- [70] O. Höfling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wärme. 15. Auflage. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1994
- [71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge\\_Structural\\_Database](https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database), April 2018
- [72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)
- [73] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung>, April 2018
- [74] URL: <http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...>, Juni 2012
- [75] L. Susskind und G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics*, Basic Books, 2014