3 Energie und Impuls

Lernziele

– Sie kennen die Definition der Arbeit und verstehen sie.

– Sie sind mit dem Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie vertraut und verstehen ihn.

– Sie kennen die Formeln für verschiedene Energieformen.

– Sie verstehen den Unterschied zwischen kinetischer Energie und potentieller Energie.

– Sie sind vertraut mit dem Begriff der Leistung und verstehen, warum er nicht durch Arbeit ersetzt werden kann.

– Sie begreifen, was unter dem Wirkungsgrad einer Maschine zu verstehen ist.

– Sie kennen die Definition des Impulses und verstehen sie.

– Sie sind mit dem Zusammenhang zwischen Kraft und Impuls vertraut und verstehen ihn.

– Sie verstehen, warum Erhaltungsgrössen in der Physik von grosser Bedeutung sind.

– Sie können Aufgaben mithilfe des Energie- und/oder Impulserhaltungssatzes lösen.

– Sie verstehen, dass der Impulserhaltungssatz vektoriell gilt.

In diesem dritten Kapitel der Mechanik werden zwei wichtige Begriffe eingeführt, welche weit über die Mechanik hinaus gebraucht werden. Zum einen handelt es sich um das Konzept der Energie, zum anderen um den Impuls. Wir beginnen jedoch mit dem Abschnitt über die *physikalische Arbeit*. Die Arbeit und das Konzept der *Energie* sind eng miteinander verbunden, da Energie die Möglichkeit darstellt, Arbeit zu verrichten. Zur Vergleichbarkeit unterschiedlicher Arbeiten benötigen wir den Begriff der *Leistung*. Bevor wir uns mit den *Erhaltungssätzen* befassen, erfolgt die Einführung des *Impulses*.

3.1 Arbeit und Energie

In diesem Abschnitt sollen Arbeit und Energie eingeführt werden. Es wird deutlich werden, wie eng diese beiden Grössen miteinander verbunden sind und dass sie sich gegenseitig bedingen. Zunächst wird die Arbeit erläutert.

3.1.1 Physikalische Arbeit

Im Alltag wird der Begriff Arbeit häufig verwendet, aber meist nicht im Sinne der physikalischen Definition. Um von physikalischer Arbeit zu sprechen, muss eine Kraft auf einen Körper wirken, so dass dieser eine bestimmte Strecke zurücklegt. Die Kraft muss eine Komponente in Richtung der Strecke besitzen. So lässt sich Arbeit wie folgt definieren:

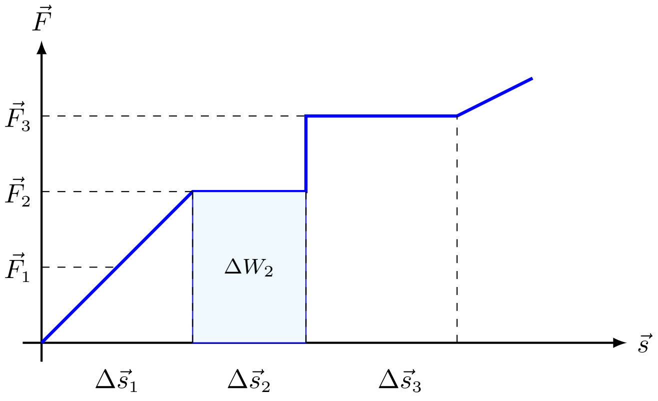
Def. 1: *(Arbeit) Die physikalische Arbeit ΔW_i an einem Körper ist das Skalarprodukt*[1] *aus der Kraft $\vec{F}_i$ und der zurückgelegten Strecke $\Delta\vec{s}_i$, d. h.*

$$\boxed{\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i}$$

Die Einheit ist: $[W] = \mathrm{N\,m} = \mathrm{J}$ und nach James Joule[2] benannt. Betrachten Sie zu dieser Definition folgende Graphik:

[1] Das Skalarprodukt wir im Kap. M.2.4.5 näher erläutert.

[2] James Prescott Joule (24. Dezember 1818 in Salford bei Manchester - 11. Oktober 1889 in Sale, Greater Manchester) war ein britischer Physiker.



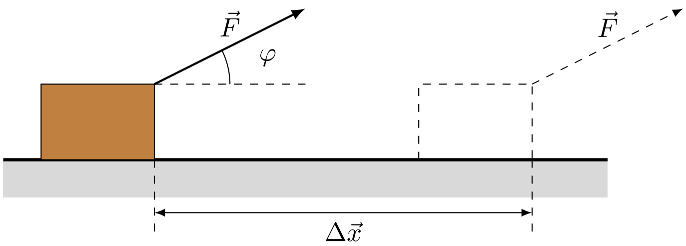
Damit ist die Gesamtarbeit W, die geleistet wird:

$$W = \sum_i \Delta W_i.$$

J. Joule
(1818-1889)

James Prescott Joule war ein bedeutender britischer Physiker des 19. Jahrhunderts. Er war besonders bekannt für das Joulesche Experiment, mit dem er die mechanische Äquivalenz von Wärme nachwies. Dieses Experiment zeigte, dass Arbeit und Wärme eine äquivalente Form der Energie sind und dass Energie in einem geschlossenen System erhalten bleibt. Diese Erkenntnis führte zur Entwicklung des ersten Gesetzes der Thermodynamik, dem Energieerhaltungssatz. Darüber hinaus entdeckte Joule auch den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strom und der Wärmeerzeugung, der als Joule-Effekt bekannt ist. Joules Arbeit legte den Grundstein für das Verständnis der Energieerhaltung und die Entwicklung der Thermodynamik als eigenständige Disziplin der Physik.

Die folgende Darstellung soll die Definition der Arbeit veranschaulichen. Dazu betrachten wir folgende Situation:



Die Arbeit ist somit

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = F \Delta x \cos\varphi.$$

Dies kann umgeschrieben werden als,

$$W = F\cos\varphi \Delta x = F_x \Delta x$$

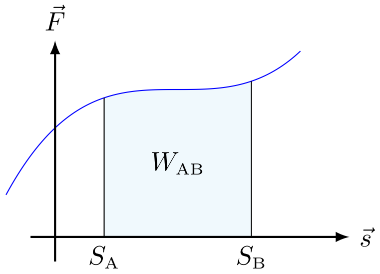
und somit ist die Arbeit tatsächlich das Produkt aus der Kraftkomponente entlang der Strecke, hier x, also F_x mit der zurückgelegten Strecke Δx.

Wie aus der Definition der Arbeit hervorgeht, kann diese drei Fälle haben:

$$\begin{aligned} W > 0: &\qquad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \\ W < 0: &\qquad \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \\ W = 0: &\qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Die vorliegende Definition geht von einer konstanten Kraft aus, aber schon bei der Berechnung der Federarbeit zeigt sich, dass dies nicht zutrifft. Daher lautet die präzise formale Definition der Arbeit:

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{S_{\mathrm{A}}}^{S_{\mathrm{B}}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}.$$



Beachten Sie, dass in dieser Definition die Arbeit ohne Δ geschrieben wird, da dies mit dem Integral zusammenhängt. In vielen Schulbeispielen ist die Kraft jedoch konstant, wodurch das komplizierte Integral vernachlässigt werden kann und die Arbeit stattdessen mit dem Symbol W anstelle von ΔW bezeichnet wird.

Wir fassen zusammen: *Zur Verrichtung von Arbeit bedarf es einer äusseren Kraft und einer Bewegung in Richtung dieser Kraft.*

Bsp. i.
Beurteilen Sie in den nächsten Situationen, ob es sich um physikalische Arbeit handelt oder nicht.

a) Ein Ball wird vom Boden aufgehoben.
- ☐ Ja, es wird Arbeit geleistet.
- ☐ Nein, es wird keine Arbeit geleistet.

b) Eine Feder wird zusammen gedrückt.
- ☐ Ja, es wird Arbeit geleistet.
- ☐ Nein, es wird keine Arbeit geleistet.

c) Ein Kran hält eine Last auf einer bestimmten Höhe fest.
- ☐ Ja, es wird Arbeit geleistet.
- ☐ Nein, es wird keine Arbeit geleistet.

d) Ein Förderband bewegt sich horizontal um 100 m mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts und transportiert dabei einen Koffer.
- ☐ Ja, es wird Arbeit geleistet.
- ☐ Nein, es wird keine Arbeit geleistet.

e) Sie wandern auf den Uetliberg.
- ☐ Ja, es wird Arbeit geleistet.
- ☐ Nein, es wird keine Arbeit geleistet.

Lsg: –

Lösung:

Wenn von Arbeit gesprochen wird, ist es immer wichtig zu wissen, wer die Arbeit ausführt. Davon hängt ab, ob sie positiv oder negativ bewertet wird. Es ist daher wichtig anzugeben, von wem aus die Arbeit betrachtet wird.

Bsp. ii.
Eine Kiste wird mit 30 N unter einem Winkel von 30° entlang einer Strecke von 100 m gezogen. Wie gross ist die Arbeit, die an der Kiste geleistet wird.

Lsg: $W \approx 2.6\,\mathrm{kJ}$

Lösung:

Nun folgt ein schwierigeres Beispiel, bei dem die Strecke noch unbekannt ist und zuerst ermittelt werden muss. Bedenken Sie, dass die Kraft, sofern es die einzige immer auch die resultierende Kraft ist.

Bsp. iii.
Ein Auto ($m \approx 800\,\mathrm{kg}$) werde aus dem Stillstand durch eine konstante Kraft von $F = 4\,\mathrm{kN}$ geradlinig während $10\,\mathrm{s}$ beschleunigt. Bestimmen Sie die Arbeit, welche hier durch den Motor verrichtet wird. Lsg: $W \approx 1\,\mathrm{MJ}$

Lösung:

Betrachten wir das folgende Beispiel, um den Zusammenhang zum Kapitel Dynamik herzustellen.

Bsp. iv.
Ein bemannter Schlitten ($m = 65\,\mathrm{kg}$) werde von Ihnen unter einem Winkel von $30°$ einen Hang hochgezogen, wobei die Geschwindigkeit konstant gehalten wird. Der Hang habe eine Steigung von 36.5%. Bestimmen Sie Ihre Arbeit, falls der gesamte Hang eine Länge von $250\,\mathrm{m}$ hat und der Reibungskoeffizient $\mu_{\mathrm{G}} = 0.01$ ist. Lsg: $W \approx 56.8\,\mathrm{kJ}$

Lösung:

Das Kofferträgerproblem ist ein Beispiel, das nicht ganz ernst genommen werden muss. Grundsätzlich leistet der Kofferträger keine physische Arbeit, solange er den Koffer ordnungsgemäss handhabt. Das wird im folgenden Beispiel deutlich.

Bsp. v.
Ein Koffer steht auf dem Boden und soll horizontal verschoben werden. Diese Aktion kann in drei Schritte

unterteilt werden. 1. Der Kofferträger hebt den Koffer hoch. 2. Der Kofferträger trägt den Koffer auf gleicher Höhe. 3. Der Kofferträger lässt den Koffer langsam runter. Bestimmen Sie hier die Arbeit des Kofferträgers.
Lsg: $W = 0$

Lösung:

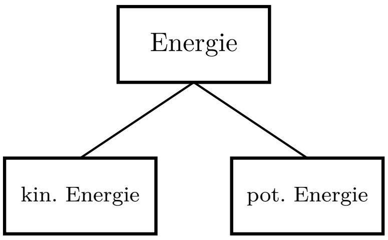
Energie ist kein einfaches physikalisches Mass, sondern ein abstraktes Konzept, das jedem physikalischen System eine Zahl - die Energie - zuordnet. Die Arbeit mit Energie hat gezeigt, dass dieses Konzept äusserst nützlich ist. Lange Zeit hat man sich nur mit Kräften und deren Wirkung beschäftigt. Dies führte dazu, dass viele interdisziplinäre Zusammenhänge übersehen wurden. Erst Faraday[3] wies darauf hin, dass in vielen Prozessen eine Grösse - heute als Energie bezeichnet - verschoben, aber nicht verändert wird[4].

Der Zusammenhang zwischen Energie und Arbeit wird durch dieses einfache Flussdiagramm verdeutlicht. Betrachten wir zwei Zustände mit unterschiedlicher Energie: Zustand 0 mit E_0 und Zustand 1 mit E_1. Nur durch Arbeit kann man vom Zustand 0 in den Zustand 1 wechseln.

$$\boxed{E_0} \xrightarrow{W} \boxed{E_1}$$

Beachten Sie, dass wenn E_1 grösser ist als E_0, dann ist die Arbeit $W > 0$, and wenn $E_0 > E_1$, dann ist die Arbeit $W < 0$. Um also Energie zu ändern, braucht es Arbeit. Arbeit ist eine Prozessgrösse und Energie ist eine Zustandsgrösse, die nicht gemessen werden kann und abhängig vom Bezugssystem ist. Die Arbeit hingegen kann gemessen werden und wird in jedem Bezugssystem gleich gemessen.

Wir unterscheiden grundsätzlich zwei Arten von Energien:



Wir können die anderen Energiebegriffe (wie z. B. innere Energie oder chemische Energie) entweder der einen, der anderen oder sogar beiden Energieformen zuweisen. Am Ende dieses Abschnitts werden wir die wichtigen Energieformen nochmals kurz auflisten.

3.1.2 Kinetische Energie

Betrachten wir eine Kraft $\vec{F}$, die ständig auf ein Punktmasse m einwirkt. Wenn die Masse von jeder anderen Kraft isoliert ist, zum Beispiel wie ein Körper im Weltall, dann wird diese Kraft die Masse beschleunigen. Der Betrag der Arbeit wird wie folgt berechnet:

$$W = F\Delta x.$$

[3] Michael Faraday (22. September 1791 in Newington, Surrey - 25. August 1867 in Hampton Court Green, Middlesex) war ein englischer Naturforscher, der als einer der bedeutendsten Experimentalphysiker gilt. Faradays Entdeckungen der „elektromagnetischen Rotation" und der elektromagnetischen Induktion legten den Grundstein zur Herausbildung der Elektroindustrie. Seine anschaulichen Deutungen des magnetooptischen Effekts und des Diamagnetismus mittels Kraftlinien und Feldern führten zur Entwicklung der Theorie des Elektromagnetismus. Bereits um 1820 galt Faraday als führender chemischer Analytiker Grossbritanniens. Er entdeckte eine Reihe von neuen Kohlenwasserstoffen, darunter Benzol und Buten, und formulierte die Grundgesetze der Elektrolyse.

[4] Dies gelang ihm ganz eindrücklich zwischen der Elektrizitätslehre und dem Magnetismus. Zwei bis dahin völlig unabhängige Gebiete.

Da die Kraft konstant ist, ist auch die Beschleunigung konstant und es gilt mit $F = ma$:

$$W = ma\Delta x.$$

Aus der Kinematik kennen wir die Beziehung:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = a\Delta x.$$

Ersetzen wir diesen Term, dann erhalten wir:

$$W = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2).$$

Dieser Ausdruck wird auch als *Beschleunigungsarbeit* bezeichnet. Er enthält die sogenannte *kinetische Energie*, welche wie folgt definiert ist.

Def. 2: *(Kinetische Energie) Die Bewegungsenergie resp. kinetische Energie* E_{kin} *eines Massenpunktes* m *mit der Geschwindigkeit* v *ist definiert als*

$$\boxed{E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2.}$$

Die Einheit der Energie ist: $[E_{\text{kin}}] = \text{J}$.

Die kinetische Energie ist abhängig vom Bezugssystem. Wenn man sich in einem fahrenden Zug befindet, hat man bezüglich dem Bahnsteig eine kinetische Energie, aber bezüglich der anderen Fahrgäste nicht.

Betrachten wir zwei einfache Beispiele:

Bsp. vi.
Ein Stein von 200 g werde von 3 m/s auf 6 m/s durch eine konstante Kraft beschleunigt. Bestimmen Sie a) die Energie vor und nach der Beschleunigungsphase sowie b) die sogenannte *Beschleunigungsarbeit* für den Stein.
Lsg: a) $E_{\text{kin}_0} \approx 0.9\,\text{J}$, $E_{\text{kin}_1} \approx 3.6\,\text{J}$ b) $W \approx 2.7\,\text{J}$

Lösung:

Bsp. vii.
Ein Auto $m = 1000\,\text{kg}$ wird aus dem Stillstand auf 36 km/h und anschliessend von 72 km/h auf 108 km/h beschleunigt. a) Wie gross ist die Beschleunigungsarbeit in der ersten Phase und wie gross in der zweiten Phase der Beschleunigung? b) Wenn die Beschleunigung in beiden Phasen gleich gross und konstant ist, warum ist die Beschleunigungsarbeit in der zweiten Phase so viel grösser? Lsg: –

Lösung:

Im Folgenden werden zwei häufig auftretende Arten von Arbeiten genauer betrachtet, bei denen die Kraft nicht konstant ist. Zuvor wird eine Definition der potentiellen Energie gegeben.

3.1.3 Potentielle Energie

Um die potentielle Energie zu definieren, müssen wir folgende weitere Eigenschaft von Kräften kennenlernen. Wir unterscheiden nämlich zwischen:

- *konservative* und
- *nicht* konservative Kräften.

Dazu folgende Definition:

Def. 3: *(Konservative Kraft) Eine Kraft heisst konservativ, falls sie längs eines geschlossenen Weges keine Arbeit verrichtet.*

Die Definition mag etwas abstrakt klingen, aber stellen Sie sich einen Kofferträger vor - so haben Sie einen geschlossenen Weg. Dies macht die Schwerkraft zu einem Beispiel für eine konservative Kraft. Das Gleiche gilt für eine Feder: Wenn man sie auseinanderzieht, muss man Arbeit aufwenden, und wenn sie sich wieder zusammenzieht, wird Arbeit gewonnen. Insgesamt bleibt die Arbeit jedoch immer bei null, daher ist auch die Federkraft konservativ.

Ges. 1: *(Konservative Arbeit) Jede konservative Kraft führt zu einer konservativen Arbeit und damit existiert eine potentielle Energie.*

Die Reibung ist hingegen keine konservative Kraft. Es spielt keine Rolle, ob der Klotz hin und wieder zurück geschoben wird. In beiden Richtungen wird am Klotz Arbeit geleistet, daher ist die gesamte Arbeit nicht null und die Reibung somit keine konservative Kraft.

Wir betrachten nun den Fall, dass neben der äusseren Kraft F auch andere Kräfte und somit auch Körper vorhanden sind, wie es zum Beispiel auf der Erde der Fall ist. Hier haben wir es immer mit der Gravitationskraft zu tun. Wenn auf einen Massenpunkt eine Kraft F wirkt, führt dies nicht unbedingt zu einer Beschleunigung des Körpers.

Betrachten wir einen Fall, in dem eine Kraft auf einen Körper wirkt und diesen mit konstanter Geschwindigkeit nach oben bewegt, wie zum Beispiel bei einem Aufzug. Wenn diese Arbeit durch eine konservative Kraft ausgeführt wird, führt sie zur sogenannten potentiellen Energie. Diese Energie kann wie folgt definiert werden:

Def. 4: *(Potentielle Energie) Die Änderung der potentielle Energie E_{pot} eines Körpers entspricht der konservativen Arbeit W_{k}, welche am System verrichtet werden muss, d. h.*

$$\boxed{\Delta E_{\text{pot}} = -W_{\text{k}}.}$$

Achten Sie auf das negative Vorzeichen in der Definition. Dies liegt daran, dass immer Arbeit aufgewendet werden muss, um die potenzielle Energie zu erhöhen. Mit anderen Worten, die erforderliche Arbeit am Schwerfeld ist negativ. Da jedoch die Änderung positiv ist, wird ein Minus benötigt.

Diese Definition besagt, dass konservative Arbeit *wegunabhängig* ist, d.h. sie hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.

Nachfolgend werden formale Ableitungen für zwei häufig verwendete potentielle Energien präsentiert.

Potentielle Energie der Schwerkraft

Um die potentielle Energie der Schwerkraft zu bestimmen, müssen wir die Arbeit berechnen, die benötigt wird, um einen Körper der Masse m im Schwerefeld der Erde von der Höhe y_0 auf die Höhe y_1 zu heben. Dies gilt:

$$\Delta E_{\text{pot}} = -W_{\text{k}} = W_{\text{Hub}} = F_{\text{g}} \Delta y.$$

Damit erhalten wir die folgende Beziehung:

$$E_{\text{pot}_1} - E_{\text{pot}_0} = mgy_1 - mgy_0.$$

Allgemein für eine Höhe y erhalten wir dann für die potentielle Energie im Schwerefeld:

$$\boxed{E_{\text{pot}} = mgy.}$$

Betrachten wir folgendes Beispiel.

Bsp. viii.
Die viel zitierte Tafel Schokolade ($m = 100\,\mathrm{g}$) soll vom Tisch ($y_0 = 1.1\,\mathrm{m}$) in den Mund ($y_1 = 1.7\,\mathrm{m}$). Bestimmen Sie a) die potentielle Energie zuvor und danach und b) die sogenannte *Hubarbeit*, welche am System geleistet wird.

Lsg: a) $E_{\mathrm{pot}_0} \approx 1.1\,\mathrm{J}$, $E_{\mathrm{pot}_1} \approx 1.7\,\mathrm{J}$, b) $W_{\mathrm{Hub}} \approx 0.6\,\mathrm{J}$

Lösung:

Beachten Sie jedoch, dass die Kraft hier als konstant angenommen wird, obwohl sie mit zunehmender Höhe im Grunde kleiner wird. Allerdings wird dies erst im Abschnitt 4.4 genauer behandelt.

Nun betrachten wir ein weiteres Beispiel, welches die konservative Eigenschaft der Schwerkraft und ihre Unabhängigkeit von der zurückgelegten Strecke deutlich demonstriert.

Bsp. ix.
Eine Kiste von $5\,\mathrm{kg}$ soll eine Rampe von $\Delta s = 5\,\mathrm{m}$ Länge hoch gestossen werden. Dabei soll die Reibung vernachlässigt werden. Die Kiste liegt dann auf einer Höhe von $\Delta y = 2\,\mathrm{m}$. Bestimmen Sie die Arbeit, falls a) die Kiste die Rampe hoch gestossen wird und b) direkt hoch gehoben wird. (Die Kiste wird mit konstanter Geschwindigkeit hochgestossen.)

Lsg: a) $W = 100\,\mathrm{J}$, b) $W = 100\,\mathrm{J}$

Lösung:

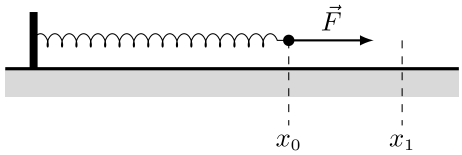
Potentielle Energie der Federkraft

Die potentielle Energie der Feder ist ein bedeutendes Beispiel, um eine nicht konstante Kraft zu betrachten[5]. Die Kraft steigt linear mit der Ausdehnung gemäss dem Hookeschen Gesetz. Da uns jedoch die benötigten mathematischen Kenntnisse fehlen, können wir die Arbeit nur graphisch ermitteln.

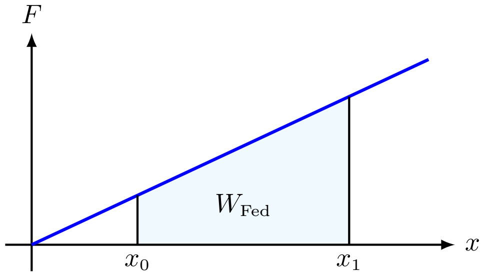
Dazu betrachten wir folgende Situation: Eine Feder ist bereits um die Strecke x_0 ausgedehnt und wird durch eine Kraft $\vec{F}$ auf x_1 gedehnt.

[5] Mit der Integralrechnung könnte man die Formel direkt herleiten:

$$W_{\mathrm{k}} = \int_{x_0}^{x_1} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} -Dx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}Dx^2\Big|_{x_0}^{x_1} = -\frac{1}{2}D(x_1^2 - x_0^2).$$



Graphisch in einem Kraft-Weg-Diagramm sieht dieser Prozess wie folgt aus:



Diese blaue Fläche entspricht exakt der Arbeit W_{k} und lässt sich sowohl durch die Berechnung der Trapezfläche[6] als auch durch die Differenz der beiden rechtwinkligen Dreiecke bestimmen. Mit der Definition der potentiellen Energie erhalten wir:

$$\Delta E_{\mathrm{pot}} = -W_{\mathrm{k}} = W_{\mathrm{Fed}} = F_{\mathrm{F}}(x)\Delta x.$$

Damit gilt für die Änderung der potentiellen Energie der Feder:

$$E_{\mathrm{pot}_2} - E_{\mathrm{pot}_0} = \frac{1}{2}D(x_1^2 - x_0^2).$$

Allgemein für eine Ausdehnung x erhalten wir dann:

$$\boxed{E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}Dx^2.}$$

Betrachten wir nun folgendes Beispiel:

Bsp. x.
Eine Feder ($D = 3\,\mathrm{kN/m}$) werde auf einer horizontalen, reibungsfreien Unterlage aus der Ruhelage um $x = 4\,\mathrm{cm}$ zusammengedrückt.

Bestimmen Sie a) die Energie, welche die Feder in dieser Position hat, b) die kinetische Energie, welche eine Masse ($m = 300\,\mathrm{g}$) maximal übernehmen kann und c) die maximale Geschwindigkeit, welche die Masse dadurch erreichen kann, wenn die Feder losgelassen wird.

Lsg: a) $E_{\mathrm{pot}} \approx 2.4\,\mathrm{J}$, b) $E_{\mathrm{kin}} \approx 2.4\,\mathrm{J}$, c) $v \approx 4\,\mathrm{m/s}$

Lösung:

Dieses Beispiel veranschaulicht die Anwendung der Energieerhaltung. Es ist auch möglich, die Endgeschwindigkeit am Ende der Beschleunigungsphase über die Kräfte zu berechnen.

[6] Die Trapezfläche F ist gegeben als

$$F = \frac{a+c}{2}h,$$

wobei a und c die Länge der parallelen Seiten und h dessen Abstand sind.

Bestimmen Sie die Endgeschwindigkeit der Masse mittels der Federkraft, wobei Sie die Gesetze der Kinematik und Dynamik anwenden dürfen. (Tipp: Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit $v = \sqrt{Dx^2/m}$ ist.)

Damit haben wir nun die wichtigsten Beispiele konservativer Kräfte behandelt. Nun ist es an der Zeit, auch eine nicht-konservative Kraft zu betrachten: die Reibung.

3.1.4 Reibungsarbeit

Die Reibungsarbeit hat in Bezug auf Energie und Arbeit eine besondere Bedeutung, da sie auf einer nicht-konservativen Kraft beruht und somit auch nicht-konservativ ist.

Dies ist offensichtlich, wenn man bedenkt, was beim Reiben von Händen passiert. Die Arbeit wird hauptsächlich in Form von innerer Energie in den Händen umgesetzt, was zur Erhöhung der Temperatur führt. Dies wird in Kapitel F.3 genauer erläutert.

Betrachten wir jetzt einen Klotz auf einer horizontalen Oberfläche, der mit einer Kraft $\vec{F}$ in Bewegung gehalten wird und eine konstante Geschwindigkeit hat. Der Klotz wird dabei um eine Strecke Δx gezogen. Die Reibungskraft entspricht dem ersten Newton'schen Gesetz.

$$F_{\text{res}} = F - F_{\text{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = F_{\text{R}}.$$

Damit ist die Reibungsarbeit:

$$W_{\text{R}} = F_{\text{R}} \Delta x \cos\varphi = -F_{\text{R}} \Delta x.$$

Damit gilt:

Ges. 2: *(Reibungsarbeit) Die Reibungsarbeit W_{R} einer Reibungskraft F_{R} während einer Strecke Δx ist gegeben, als:*

$$\boxed{W_{\text{R}} = -F_{\text{R}} \Delta x}$$

Die Reibungsarbeit ist negativ. Das Vorzeichen hat in diesem Fall keine Bedeutung für die Richtung, da die Arbeit eine skalare Grösse ist, sondern nur für die Zunahme oder Abnahme der Energie.

Warum ist die Reibungsarbeit negativ? Diese Frage wird anhand des folgenden Beispiels beantwortet.

Bsp. xi.
Betrachten wir ein Klotz ($m = 1\,\text{kg}$) der auf einer rauen horizontalen Unterlage ($\mu_{\text{G}} = 0.5$) liegt und mit konstanter Geschwindigkeit während 200 m horizontal gezogen wird. Bestimmen Sie die Arbeit, a) welche Sie beim Ziehen verrichten und b) welche die Reibung verrichtet. Lsg: a) $W = 1\,\text{kJ}$, b) $W_{\text{R}} = -1\,\text{kJ}$

Lösung:

Der Unterschied zwischen diesen beiden Ergebnissen liegt im Auge des Betrachters. Wir erbringen Arbeit, die für den Klotz positiv ist, so dass er trotz Reibung in Bewegung bleiben kann. Allerdings ist die Unterlage rau, so dass der Klotz an ihr reibt und die gesamte Arbeit wieder abgibt, was für ihn negativ ist. Ähnlich wie bei geriebenen Händen wird hier ein Teil der Arbeit in innere Energie umgewandelt.

Begründen Sie, weshalb die gleichförmige Kreisbewegung keine Arbeit verrichtet. (Hinweis: Achten Sie auf die Richtung der einzelnen Komponenten.)

Neben der Reibungsarbeit haben wir nun sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie kennengelernt. Diese Energiekonzepte wurden in der Mechanik eingeführt, sind aber universell gültig. In der klassischen Physik (ohne Relativitätstheorie) gibt es im Grunde nur potentielle und kinetische Energien. Allerdings haben sich historisch bedingt andere Begriffe und Herangehensweisen etabliert, die hier kurz erwähnt werden sollen.

- *äussere Energie*
  Als äussere Energie werden die potentielle und die kinetische Energie bezeichnet.
- *innere Energie*
  Als innere Energie wird die Energie bezeichnet, welche in Körper aufgrund ihrer Temperatur ist. Später werden wir sehen, dass dies auch kinetische und potentielle Energie sind.
- *elektromagnetische Energie*
  Als elektromagnetische Energie wird die Energie bezeichnet, welche in elektromagnetischen Strömen ist. Wir können auch hier zeigen, dass es sich um kinetischer und potentieller Energie handelt.
- *chemische Energie*
  Als chemische Energie wird die Energie bezeichnet, welche in chemischen Verbindungen steckt und durch chemische Reaktionen freigesetzt werden kann. Sie ist also eine potentielle Energie.
- *Kernenergie*
  Als Kernenergie wird die Energie bezeichnet, welche in grossen Atomkernen (z. B. Uran) steckt und durch Spaltung freigesetzt wird. Diese ist ebenfalls eine potentielle Energie.
- *Ruheenergie*
  Als Ruheenergie wird die Energie bezeichnet, welche in einer Masse steckt, unabhängig von der Bindung, also auch in Elementarteilchen. Dies ist die einzig neue Art von Energie.

Im nächsten Abschnitt wird die *Leistung* definiert, die eng mit der Arbeit verbunden ist. Nur durch die Leistungsdefinition ist es möglich, Arbeiten mit demselben Betrag zu unterscheiden.

3.2 Leistung

Wenn man verschiedene Arbeiten miteinander vergleichen möchte, die mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchgeführt werden, ist es notwendig, die Leistung zu berücksichtigen. Dabei entspricht der Sprachgebrauch der physikalischen Definition. Zur Verdeutlichung betrachten wir das folgende Beispiel.

Bsp. xii.
Eine Familie spaziert an einem schönen Tag in 4 h auf den Üetliberg (870 m ü.M.). Ein Ausdauersportler rennt in 1.5 h auf den Üetliberg. Zürich liegt auf 410 m ü.M. Bestimmen Sie die Arbeit von beiden Männern ($m \sim 80\,\mathrm{kg}$).
Lsg: $W \approx 370\,\mathrm{kJ}$.

Lösung:

Uns ist jedoch klar, dass der Sportler mehr leistet. Deswegen definieren wir die Leistung wie folgt:

Def. 5: *(Leistung) Die Leistung P ist definiert als die Arbeitsänderung ΔW pro Zeit Δt, d. h.*

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

Die Einheit ist: $[P] = \mathrm{J/s} = \mathrm{W}$, wobei W für Watt[7] steht.

[7] James Watt (30. Januar 1736 in Greenock - 25. August 1819 in seinem Haus in Heathfield, Staffordshire) war ein schottischer Erfinder.

J. Watt
(1736-1819)

James Watt war ein schottischer Ingenieur und Erfinder des 18. Jahrhunderts, der für die Entwicklung der Dampfmaschine von entscheidender Bedeutung war. Watts bedeutendste Errungenschaft war die Verbesserung der Dampfmaschine durch die Einführung des separaten Kondensators, der die Effizienz und Leistungsfähigkeit erheblich steigerte. Seine Innovationen revolutionierten die Art und Weise, wie Energie erzeugt und genutzt wurde, und legten den Grundstein für die Modernisierung von Industrie und Verkehr. Watts Arbeit hatte einen enormen Einfluss auf die industrielle Entwicklung und den technologischen Fortschritt. James Watt bleibt eine herausragende Figur in der Geschichte der Technik und der industriellen Revolution.

Bsp. xiii.
Welche Leistung erbringen der Vater und der Sportler im oberen Beispiel? Lsg: $P_\mathrm{V} \approx 26\,\mathrm{W}$, $P_\mathrm{S} \approx 68\,\mathrm{W}$

Lösung:

Die Einheit Watt für die Leistung ist nicht mit der Einheit kWh zu verwechseln, welche für die Energie verwendet wird. Beachten Sie, dass $1\,\mathrm{kWh} \mathrel{\widehat{=}} 3.6\,\mathrm{MJ}$ sind.

Bsp. xiv.
Was kann man mit einer kWh tun? a) Wie hoch können Sie eine Masse von $1\,\mathrm{kg}$ im Schwerefeld der Erde hochheben, falls Sie von einer konstanten Fallbeschleunigung ausgehen? b) Wie schnell fährt ein Auto ($m = 1000\,\mathrm{kg}$) mit dieser Energie? Lsg: a) $\Delta y \approx 360\,\mathrm{km}$, b) $v \approx 305\,\mathrm{km/h}$

Lösung:

Betrachten wir die Leistung für einen Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch die Kraft $\vec{F}$ bewegt, dann gilt für die Leistung:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Damit gilt folgendes Gesetz:

Ges. 3: *(Mechanische Leistung der Translation) Die mechanische Leistung P der Translationsbewegung ist das Produkt aus der aufzuwendenden Kraft $\vec{F}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in Richtung der Kraft, damit gilt:*

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}.}$$

Die Leistung wird hier als Skalarprodukt berechnet und es gelten dieselben Regeln wie bei der Arbeit.

In der Autoindustrie wird stattdessen eine traditionelle Einheit für die Leistung verwendet, nämlich die Pferdestärke[8] (PS). Betrachten wir dazu, das folgende Beispiel:

Bsp. xv.
Eine Pferdestärke PS ist definiert als die Leistung, die erbracht werden muss, um einen Körper der Masse $m = 75\,\mathrm{kg}$ entgegen dem Schwerefeld der Erde (bei Fallbeschleunigung $9.80665\,\mathrm{m/s^2}$) mit einer Geschwindigkeit von $1\,\mathrm{m/s}$ zu bewegen. Bestimmen Sie daraus den Umrechnungsfaktor zwischen Watt und PS. Lsg: $735.5\,\mathrm{W}$

Lösung:

Im Radsport dient die Leistung oft als Indikator, um zwischen normalen und gedopten Fahrern zu unterscheiden. Amateure erreichen möglicherweise eine Leistung von 200 bis 300 Watt, während Spitzensportler über 300 Watt erreichen. Der französische Sportwissenschaftler Antoine Vayer äusserte sich wie folgt: Ab 410 Watt ist eine Leistung verdächtig, ab 430 Watt ist sie mirakulös und ab 450 Watt haben wir es mit einem Mutanten zu tun. Der Sieger von 2013 sowie 2015 erreicht fast 450 Watt und kommt damit an Werte heran, welche von nachgewiesenen Dopingsündern wie Lance Armstrong, Jan Ullrich oder Marco Pantani erreicht wurden.

Die Leistung bei einem Berganstieg mit dem Fahrrad oder zu Fuss ist sehr einfach zu berechnen, da der Kraftaufwand im Grunde nur durch die Gewichtskraft gegeben ist. Folgend betrachten wir den Vergleich zwischen Mensch und Maschine:

Bsp. xvi.
Den letzten Aufstieg nach Ax-3-Domaines legte Christopher Froome in 14 Minuten und 20 Sekunden zurück. Dies nach einer Fahrt von bereits 185 km. Der Aufstieg geht von 768 m auf 1360 m hoch. Froome hat einen sehr tiefen BMI. Er wiegt lediglich 66 kg bei einer Grösse von 1.86 m. Bestimmen Sie die Leistung, welche er damit erreicht hat. ($g \approx 9.81\,\mathrm{m/s}$) Lsg: $P \approx 446\,\mathrm{W}$

Lösung:

Das folgende Beispiel ist erneut ein Skiliftproblem. Sie können die relevante Formel aus einer vorherigen Aufgabe abschreiben und lediglich die Leistung berechnen.

Bsp. xvii.
Ein Skilift-Betreiber möchte seine Gäste ($m \leq 150\,\mathrm{kg}$) innert 8 min den Berg hochziehen. Dabei soll die Geschwindigkeit möglichst konstant gehalten werden. Welche Leistung ist notwendig, falls die Strecke knapp 1 km ist. Die mittlere Steigung des Hanges ist 20%, der Lift zieht unter einem Winkel von 35° und die Reibung sei 0.01. Bestimmen Sie die nötige Leistung. Lsg: $P \approx 640\,\mathrm{W}$

[8] Die Einheit wurde 1783 von James Watt eingeführt und zwar um die Leistung seiner Dampfmaschine mit der Leistung von Pferden zu vergleichen.

Lösung:

Nachdem wir nun die Bedeutung der Leistung motiviert und anhand von Beispielen verdeutlicht haben, möchten wir einen der bedeutendsten Sätze der Mechanik formulieren: den *Leistungssatz der Mechanik*.

3.2.1 Leistungssatz der Mechanik

Der Leistungssatz ist eine Verallgemeinerung des *Energiesatzes der Mechanik*, welcher davon abgeleitet wird. Der Leistungssatz macht darüber eine Aussage, wie sich ein System verändert, wenn Leistungen es verändern. Es gilt:

Ges. 4: *(Leistungssatz der Mechanik) Der Leistungssatz der Mechanik besagt, dass die Summe aller an einem abgeschlossenen System angreifenden Leistungen P_i zu jedem Zeitpunkt gleich der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie E_kin des Systems sind, d. h.*

$$\boxed{\frac{\Delta E_\text{kin}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} P_i.}$$

Die Gesamtleistung ergibt sich selbstverständlich aus der Summe der konservativen Leistungen $P_{i,\text{k}}$ und der nicht-konservativen Leistungen $P_{i,\text{nk}}$. Betrachten wir nicht die zeitliche Änderung, dann lässt sich der Leistungssatz umschreiben in den *Energiesatz der Mechanik*. Es gilt:

$$\Delta E_\text{kin} = \sum_{i=1}^{n} P_i \Delta t$$

und mit $W_\text{ges} = \sum_{i=1}^{n} P_i \Delta t$ erhalten wir:

Ges. 5: *(Energiesatz der Mechanik) Die Zu- oder Abnahme der kinetischen Energie ΔE_kin eines Körpers ist gleich der ihm zu- oder abgeführten Arbeit W_ges, d. h.*

$$\boxed{\Delta E_\text{kin} = W_\text{ges},}$$

wobei $W_\text{ges} = W_\text{k} + W_\text{nk}$ einen konservativen und nicht konservativen Anteil hat.

Nachfolgend zwei äquivalente Formulierungen des Energiesatzes:

Energie ist gespeicherte Arbeit.

und

Energie ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Bevor wir uns mit dem Wirkungsgrad befassen, möchten wir einen kurzen Überblick geben. Angenommen in einem System wird keine nicht konservative Arbeit verrichtet, also $W_\text{nk} = 0$, dann gilt:

$$\Delta E_\text{kin} = W_\text{k}.$$

Da jedoch mit der Definition der potentiellen Energie $W_\text{k} = -\Delta E_\text{pot}$ gilt, folgt:

$$\Delta E_\text{kin} = -\Delta E_\text{pot} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_\text{kin} + \Delta E_\text{pot} = 0.$$

Dies bedeutet jedoch, dass die Energie konstant bleibt, sofern keine nicht konservative Arbeit vorhanden ist:

$$E_\text{kin} + E_\text{pot} = \text{konst.}$$

Energie hätte wohl keine so wichtige Bedeutung, wenn sie nicht eine äusserst überraschende Eigenschaft besässe. Sie kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Das bedeutet, dass Energie immer nur von einem System in ein anderes umgewandelt wird, wobei diese Umwandlung oft mit Verlusten einhergeht. Die Grösse, die diese Verluste quantifiziert, ist der Wirkungsgrad. Im Folgenden wird er kurz erläutert.

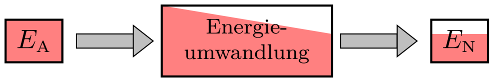
3.2.2 Wirkungsgrad

Im Alltag sind Energieumwandlungen selten perfekt. Das bedeutet, dass nicht die gesamte Energie von einer Form in die andere umgewandelt wird. Die häufigsten Verluste entstehen dabei durch Reibungseffekte, wobei der Luftwiderstand ebenfalls als eine Form der Reibung betrachtet werden kann. Der Wirkungsgrad dient als Mass für die Energieumwandlung und ist wie folgt definiert.

Def. 6: *(Wirkungsgrad) Der Wirkungsgrad η ist definiert als das Verhältnis aus der Nutzenergie E_{N} und der Antriebsenergie E_{A}, d. h.*

$$\boxed{\eta = \frac{E_{\mathrm{N}}}{E_{\mathrm{A}}} \leq 1}$$

Da die Nutzenergie niemals grösser sein kann als die Antriebsenergie, ist der Wirkungsgrad immer kleiner oder gleich eins[9]. Diese beiden Grössen können schematisch wie folgt verstanden werden:



Daraus lässt sich schliessen, dass die Antriebsenergie in die Maschine eingespeist wird und die Nutzenergie am Ausgang freigesetzt wird. Die Maschine wandelt somit die Antriebsenergie in Nutzenergie um.

Bsp. xviii.
Bestimmen Sie den Wirkungsgrad einer perfekten Maschine. Lsg: –

Lösung:

Diese letzte Gleichung kann auch als Energieerhaltung betrachtet werden. Bei einer idealen Maschine treten keinerlei Reibungseffekte und Verluste auf. Da Energie weder erzeugt noch vernichtet werden kann, muss der Wirkungsgrad eins betragen. Als Beispiel aus der Automobilindustrie sei folgendes genannt.

Bsp. xix.
Wenn ein VW Polo mit der konstanten Geschwindigkeit von 120 km/h auf der Autobahn fährt, gibt der Motor eine Leistung von $P = 45\,\mathrm{kW}$ an die Räder ab. Der Benzinverbrauch beträgt $V = 7.5\,\ell$ auf 100 km. Der Energiegehalt von Benzin liegt bei $\epsilon = 15\,\mathrm{kWh}$ pro Liter. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad des Autos. Lsg: $\eta \approx 33\%$

Lösung:

In der folgenden Tabelle sind einige interessante Wirkungsgrade aus den Bereichen Energieversorgung, Alltag und Tierwelt aufgeführt.

[9] Eine Begründung für diese Aussage findet sich im Kapitel F. 3.

Prozesse	**Antriebsenergie**	**Nutzenergie**	**Wirkungsgrad** [%]
Kernkraft	atomar	elektrisch	10
Solarzellen	elektromagnetisch	elektrisch	35
Wärmekraftwerk[10]	chemisch	elektrisch & thermisch	95
Wasserkraftwerk	mechanisch	elektrisch	85
Glühlampe	elektrisch	elektromagnetisch	4
LED	elektrisch	elektromagnetisch	20
Elektroherd	elektrisch	thermisch	55
Induktionsherd	elektrisch	thermisch	80
Tauchsieder	elektrisch	thermisch	98
Sonnenkollektoren	elektromagnetisch	thermisch	80
Fotosynthese	elektromagnetisch	chemisch	35
Glühwürmchen	chemisch	elektromagnetisch	95
Mensch	chemisch	mechanisch	25

Es müssen einige Fakten erwähnt werden. Betrachtet man die Erzeugung von elektromagnetischer Energie, wird deutlich, dass der Mensch nur eine Effizienz von 20% erreicht, während das Glühwürmchen darüber lacht. Zudem ist die Nutzung von Sonnenenergie ein wichtiger Aspekt. Hierbei gibt es einen signifikanten Unterschied zwischen der Nutzung als thermische oder elektrische Energie. Abschliessend sollte der grosse Unterschied zwischen einem Tauchsieder und einem elektrischen Herd beachtet werden. Der Unterschied verdeutlicht, warum für die Erwärmung von Wasser der Tauchsieder besser geeignet ist.

Damit beenden wir den Abschnitt über Energie. Bevor wir jedoch das Gesetz der Energieerhaltung und einige Anwendungen betrachten, wollen wir den Impuls einführen. Der Impuls ist eine weitere wichtige physikalische Grösse.

3.3 Impuls

Die Bedeutung und Relevanz dieser neuartigen Grösse sollte nicht unterschätzt werden. Ein erster überzeugender Beweis dafür zeigt sich im zweiten Newton'schen Gesetz, wo Newton den Begriff des Impulses implizit, wenn auch nicht explizit, verwendet hat. Heute würde Newton das zweite Newton'sche Gesetz wie folgt formulieren:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

oder in Worten, die Kraft F ist die Änderung des Impulses Δp pro Zeit.

Obschon dieser Begriff vertrauter erscheint, ist er nicht so einfach zu definieren. Auch wenn wir ihm im Alltag öfter begegnen als z.B. der Kraft. Dazu später mehr.

Def. 7: *(Impuls) Der Impuls $\vec{p}$ eines Körpers ist definiert als Produkt aus der Masse m des Körpers und dessen Geschwindigkeit $\vec{v}$, d. h.*

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Die Einheit ist: $[p] = \mathrm{kg\,m/s}$.

Betrachten wir ein Beispiel aus der Tenniswelt.

Bsp. xx.
Ein Tennisball ($m = 58\,\mathrm{g}$) fliegt nach einem Aufschlag mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von etwa $v = 180\,\mathrm{km/h}$. Bestimmen Sie den Impuls des Balles. Lsg: $p \approx 2.9\,\mathrm{kg\,m/s}$

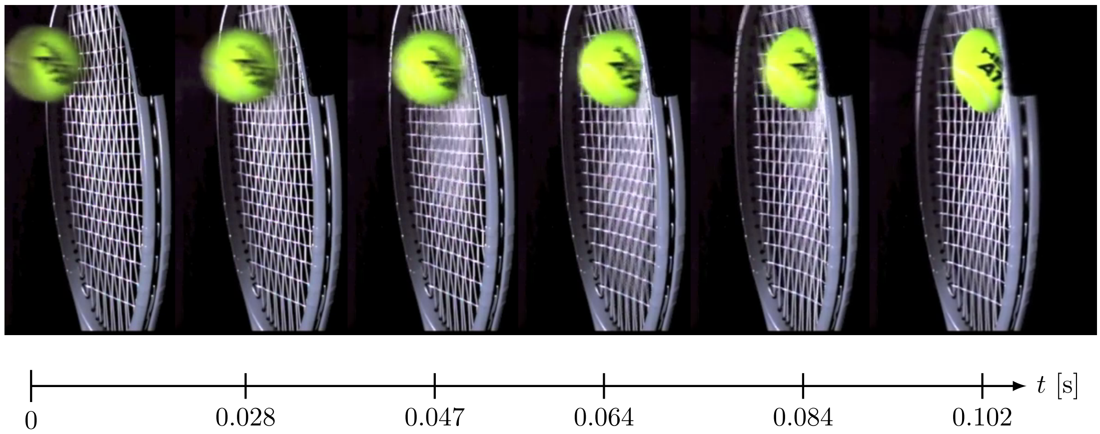
[10] mit Wärme-Kraft-Kopplung

Lösung:

Woher kommt dieser Impuls eigentlich und was ist er nun? Also die Frage nach dem was, kann ich genauso wenig beantworten, wie die Frage nach dem wieso, vielleicht nur so viel. Jeder Körper der sich bewegt, hat einen Impuls ungleich null[11]. Merken Sie sich zum Impuls am besten folgenden Satz:

Der Impuls ist die Fähigkeit, Kraft zu übertragen.

Die Frage nach der Ursache ist von Interesse und kann beantwortet werden. Betrachten wir dazu die Situation, wenn der Schlägerkopf den Ball trifft. Die folgende Bildsequenz aus dem Video (vgl. Video: Tennisschlag) veranschaulicht diese Situation deutlich.



Es ist offensichtlich, dass die Berührung mit dem Schlägerkopf Zeit benötigt. Obwohl diese Zeit kurz ist, kann sie nie null sein. In diesem Fall beträgt sie knapp eine Zehntelsekunde. Während dieser Zehntelsekunde dehnt sich das Netz aus und der Ball verformt sich. Sofern wir die Ballverformung vernachlässigen, können wir mithilfe des Federgesetzes die Kraft berechnen, die vom Schlägerkopf ausgeübt wird. Diese Kraft beeinflusst den Ball eine Sekunde lang und führt zu einer Veränderung des Impulses. Dies führt uns zur nächsten Definition.

Def. 8: *(Kraftstoss) Der Kraftstoss $\Delta\vec{p}$ ist das Produkt aus der Kraft $\vec{F}$ und dem Zeitintervall Δt, d. h.*

$$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t}$$

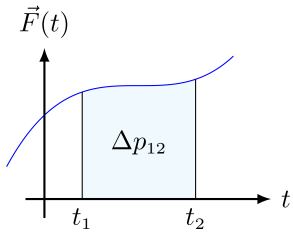
Die Einheit des Impulses und des Kraftstosses ist identisch. Trotzdem wird oft eine andere Bezeichnung verwendet, die eher an eine Kraftwirkung als an einen Impuls erinnert, nämlich: $[\Delta p] = \mathrm{Ns}$.

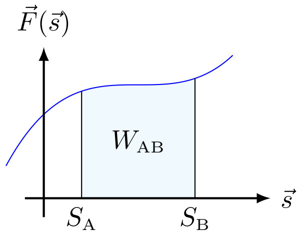
Wie bereits erwähnt, ist diese Definition nur unter der Annahme einer konstanten Kraft $\vec{F}$ geltend. Im Allgemeinen ist die Kraft jedoch nicht konstant. Daher lautet die exakte Definition des Kraftstosses:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t.$$

Bitte beachten Sie, dass wir nun zwei ähnliche Funktionen haben, die oft sehr ähnlich dargestellt werden. Eine zeigt die Kraft als Funktion der Zeit (links im Bild) und wird als Kraftstoss bezeichnet, die andere zeigt die Kraft als Funktion der Strecke (rechts im Bild) und wird als Arbeit bezeichnet.

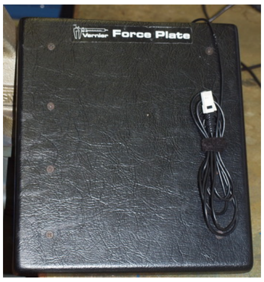
[11] Für Körper ohne Masse, wie z. B. das Licht, versagt diese klassische Definition und muss durch die quantenmechanische Definition ersetzt werden: $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.



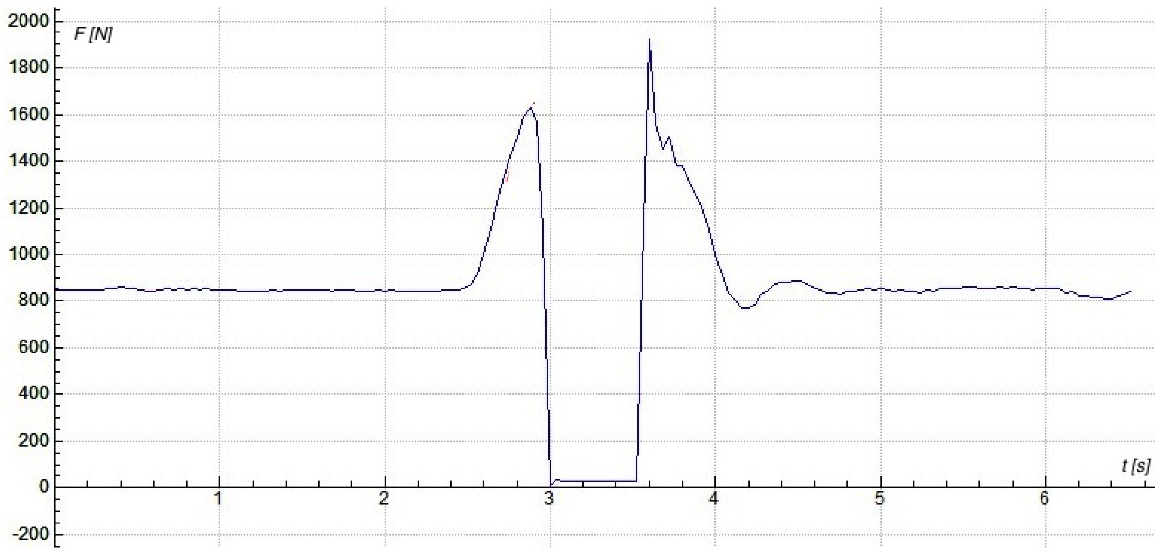


Wie an den Grafiken ersichtlich ist, können sie leicht verwechselt werden. Physikalisch gesehen sind sie jedoch vollständig unterschiedlich.

Bsp. xxi.
Die folgende Grafik wurde mit einer Kraftplatte erzeugt. Mit einer Kraftplatte[12] (vgl. Abb.) kann man den Kraftverlauf als Funktion der Zeit darstellen.



Bei einem Sprung aus der Hocke heraus sieht man, wie die Funktion zuerst ansteigt, um dann fast senkrecht auf null zu fallen. Während einer kurzen Zeit bleibt es bei null, um dann wieder fast senkrecht aufzusteigen. Schliesslich pendelt es sich wieder bei der statischen Gewichtskraft ein.



An diesem Beispiel erkennt man, dass wir den Kraftstoss, also die Impulsänderung, nicht durch die einfach Definition berechnen können. Um in diesem Beispiel den Kraftstoss zu bestimmen, müssten wir die Fläche unter der Kurve bestimmen, wobei wir hier nicht die gesamte Fläche bestimmen müssen, sondern nur die Fläche bis zur statischen Gewichtskraft. Bestimmen Sie den Kraftstoss durch eine geschickte Näherung. Lsg: $\Delta p_{\mathrm{L}} \approx 240\,\mathrm{Ns}$, $\Delta p_{\mathrm{R}} \approx 250\,\mathrm{Ns}$

[12] Die Kraftplatte enthält Dehnungsmessstreifen auf Biegebalken, einen Sensor für jeden Fuss der Kraftplatte. Bei Belastung verbiegt sich der Biegebalken reversibel ein wenig und der aufgeklebte Dehnungsmessstreifen wird verlängert. Dadurch ändert sich der elektrische Widerstand, was als Messsignal ausgewertet wird.

Lösung:

Mit Hilfe der obigen Berechnungen haben wir die Änderung des Impulses bestimmt. Selbstverständlich könnte diese Messung auch mithilfe des Programms durchgeführt werden, jedoch würde uns dann der Spass an der praktischen Anwendung fehlen.

Überprüfen Sie, ob der Sprung kinematisch sinnvoll ist. Lesen Sie dazu die Flugzeit im Diagramm ab und bestimmen den Anfangsimpuls. So können Sie die Anfangsgeschwindigkeit berechnen. So können Sie die Anfangsgeschwindigkeit berechnen.

Im nächsten Beispiel werden wir den Abschlag eines Golfballs betrachten. In einem Filmausschnitt ist zu sehen, dass auch der sehr harte Golfball stark verformt wird. Es wird deutlich, dass hier eine grosse Kraft während einer kurzen Zeit wirken muss.

Bsp. xxii.
Beim Golfspielen wird der Ball vom Kopf des Schlägers nur für Sekundenbruchteile berührt (vgl. Film: Verformung Golfball). Entsprechend grosse Kräfte bewirken die erwünschte Beschleunigung. Um einige Berechnungen durchführen zu können, machen wir folgende Annahmen: Der Ball wird waagrecht geschlagen. Er hat eine Masse von 45 g und erhält einen Kraftstoss von 2.7 Ns. Bestimmen Sie a) die Geschwindigkeit nach dem Stoss, b) die mittlere Kraft bei einer Stossdauer von 1/1000 s und c) die mittlere Beschleunigung des Balles während des Stosses.

Lsg: a) $v \approx 60\,\mathrm{m/s}$, b) $F \approx 2.7\,\mathrm{kN}$, c) $a \approx 6 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s^2}$

Lösung:

Betrachten wir das Aktionsgesetz in der Form

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

genauer. Es ist erkennbar, dass die Kraft grösser wird, wenn die Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ auch grösser ist, insbesondere wenn dies in sehr kurzer Zeit Δt geschieht – was fast noch interessanter ist. Die Umkehrung gilt natürlich auch: Die Krafteinwirkung ist gering, wenn sowohl die Impulsänderung sehr klein ist als auch dies über einen längeren Zeitraum passiert. Hier sind einige Alltagsbeispiele, die eines der beiden Szenarien widerspiegeln.

- Beim Herunterspringen sollte man in die Knie gehen.
- Der Boxer trägt Handschuhe.
- Bei einem Autounfall wird der Airbag aufgeblasen.

- In Kampfsportarten werden die Schläge sehr schnell ausgeführt.
- usw.

Überlegen Sie sich aus Ihrem Alltag weitere Beispiele und Anwendungen, in denen die Beziehung zwischen Impulsänderung und Kraft genutzt wird. Damit haben wir Energie und Impuls ausreichend eingeführt und können nun zu den Erhaltungssätzen übergehen. Sowohl die Energie als auch der Impuls sind Erhaltungsgrössen und werden im nächsten Abschnitt erläutert.

3.4 Erhaltungssätze

In diesem Kapitel wird zunächst der Energieerhaltungssatz eingeführt und einige Anwendungen sollen ihn vertiefen. Danach wird aus dem Aktionsgesetz der Impulserhaltungssatz hergeleitet, wobei daraus die Gesetze bei Stossprozessen abgeleitet werden können. Schliesslich müssen Energie- und Impulserhaltung gemeinsam betrachtet werden, um komplexere Anwendungen, wie beispielsweise das ballistische Pendel, zu verstehen und zu berechnen.

Emmy Noether
(1882-1935)

Bereits Mitte des 19. Jahrhunderts wurde über Erhaltungssätze diskutiert. Doch es gibt kein physikalisches Gesetz, aus welchem sich beispielsweise der fundamentale Energieerhaltungssatz ableiten lässt. Es überrascht daher nicht, dass viele namhafte Physiker immer wieder versucht haben, den Energieerhaltungssatz zu widerlegen. Dass eine Frau, die bisher im Schatten vieler Männer stand und kaum Anerkennung fand, ein Theorem in der Mathematik beweist, mit dem jede Erhaltungsgrösse hergeleitet werden kann, hat schon fast etwas Ironisches und gleichzeitig Befriedigendes. Und weil das noch nicht genug ist, hat sie dieses wichtige Theorem in einer Schaffungspause entdeckt, weil sie zur Abwechslung mal etwas anderes tun wollte.

Emmy Noether[13] hatte im Jahr 1918 das nach ihr benannte Theorem formuliert, welches elementare physikalische Begriffe wie Energie und Impuls mit geometrischen Eigenschaften verband.

Theorem 1: *(Noether-Theorem) Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgrösse.*

Eine Symmetrie beschreibt eine Transformation wie eine Drehung oder Verschiebung, die das Verhalten eines physikalischen Systems nicht ändert. Wenn diese Transformationen kontinuierlich durchgeführt werden können, wird von kontinuierlicher Symmetrie gesprochen. Hingegen gibt es diskrete Symmetrien, die nur bestimmte Werte zulassen, wie zum Beispiel die Drehung eines Quadrats, die nur vier Winkel erlaubt. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir drei Beispiele.

- Symmetrie der Zeit (auch Homogenität der Zeit genannt):
  Der Zeitpunkt eines physikalischen Experiments spielt keine Rolle, da die Zeit eine kontinuierliche Symmetrie darstellt. Somit folgt aus dem Noether-Theorem, dass es eine Erhaltungsgrösse gibt, in diesem Fall die Energie. Ein Beispiel hierfür ist das Pendel, dessen Periode zu jedem Zeitpunkt gemessen werden kann.
- Symmetrie des Raumes (auch Homogenität des Raumes genannt):
  Der Austragungsort eines Experiments spielt keine Rolle, da er eine kontinuierliche Symmetrie darstellt. Die Erhaltungsgrösse ist der Impuls. Zum Beispiel bei geradlinigen Bewegungen kann die Geschwindigkeit an jedem beliebigen Ort gemessen werden.
- Rotationssymmetrie (auch Isotropie des Raumes genannt):
  Die Raumrichtung hat keinen Einfluss, wodurch sich die Erhaltung des Drehimpulses ergibt (vgl. Kap. C.2.3). Ein Beispiel hierfür ist das Karussell, bei dem die Winkelgeschwindigkeit in beliebigen Raumwinkeln gemessen werden kann.

Ein Beweis dieses Theorems geht weit über den Mathematikunterricht der Mittelschule hinaus und wird auch im Studium der Physik selten vorausgesetzt. Aus diesem Grund lassen wir es dabei und wenden uns wieder der Physik zu - genauer gesagt dem Energieerhaltungssatz.

3.4.1 Energieerhaltungssatz (EES)

Als erster hat der Arzt Julius Robert von Mayer[14] den Energieerhaltungssatz formuliert. Er hat 1842 durch Versuche den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents festgestellt und so nachgewiesen, dass sich Bewegungsenergie vollständig in Wärme umwandeln lässt. Unabhängig von Mayer tat dies auch 1843 James Prescott Joule,

[13] Amalie Emmy Noether, geboren am 23. März 1882 in Erlangen und verstorben am 14. April 1935 in Bryn Mawr, Pennsylvania, war eine deutsche Mathematikerin, die grundlegende Beiträge zur abstrakten Algebra und theoretischen Physik leistete. Insbesondere revolutionierte Noether die Theorie der Ringe, Körper und Algebren. Im Jahr 1918 entwickelte sie das nach ihr benannte Theorem, welches elementare physikalische Begriffe wie Energie und Impuls mit geometrischen Eigenschaften verbindet.

[14] Julius Robert von Mayer (25. November 1814 in Heilbronn - 20. März 1878) war ein deutscher Arzt und Physiker.

dessen Arbeiten damals weit bekannter waren, aber auch weitere Physiker und Ingenieure wie Ludwig August Colding[15] in Dänemark (ebenfalls 1843). Endgültig ausformuliert wurde der Energieerhaltungssatz 1847 von Hermann von Helmholtz[16]. In Berlin referierte er am 23. Juli 1847 über die Konstanz der Kraft und untermauerte den Energieerhaltungssatz.

Namhafte Physiker wie Niels Bohr[17] versuchten mehrmals den Energiesatz abzuändern oder nur eine teilweise Gültigkeit zuzuweisen. Immer wieder pochte er auf einen statistischen Energieerhaltungssatz, welcher nur im Mittel gelten sollte, besonders für Quantenphänomene.

Der Energieerhaltungssatz wird heute allgemein als gesichert betrachtet und wird oft zur Definition von Energie herangezogen. Er ist ein Spezialfall des Energiesatzes der Mechanik für konservative Kräfte. Aus

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{ges}} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{k}},$$

wobei $W_{\text{ges}} = W_{\text{k}} + W_{\text{nk}}$ und $W_{\text{nk}} = 0$. Mit $W_{\text{k}} = -\Delta E_{\text{pot}}$ gilt:

$$\Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = 0,$$

dass die Änderung der mechanischen Energie verschwindet. D.h aber, wenn die Summe der Änderungen null ist, dass die Energie erhalten ist. Damit lautet der Energieerhaltungssatz wie folgt:

Ges. 6: *(EES) In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie E_{ges} erhalten, d. h.*

$$\boxed{E_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{n} E_i = \text{konst.},}$$

wobei unter abgeschlossen ein System gemeint ist, welches mit seiner Umgebung nicht wechselwirkt.

In der Regel betrachten wir zwei Situationen, A und B, und vergleichen dann die Energie an diesen beiden Situationen. Daraus ergibt sich:

$$E^A_{\text{ges}} = E^B_{\text{ges}},$$

wobei wir künftig einfach nur $E_{\text{A}} = E_{\text{B}}$ schreiben werden.

In diesem Gesetz haben wir zur Vereinfachung die Summennotation benutzt. Die Bedeutung wird in Kapitel M.5.1 erklärt.

Systeme ohne Reibung

Zunächst betrachten wir reibungsfreie Systeme, in denen die Energie vollständig umgewandelt wird und somit keine Verluste auftreten.

Bsp. xxiii.
Lernbeispiel
Nach diesem Lernbeispiel wissen Sie, wie Sie den Energieerhaltungssatz zur Lösung schwieriger Probleme einsetzen können. Folgen Sie den Anweisungen Schritt für Schritt:

1. Skizzieren Sie folgende Situation. Eine zusammengedrückte ($\Delta x = 0.5\,\text{m}$) Feder (Federkonstante $D = 10\,\text{N/m}$) liegt auf einer horizontalen Fläche und wird durch eine Kraft in dieser Position gehalten. Vor der Feder befindet sich eine ruhende Kugel ($m = 2\,\text{kg}$).

2. Wir unterscheiden Energien im Zustand A (vor der Energieumwandlung) und Energien im Zustand B (nach der Energieumwandlung). Zeichnen Sie in der Skizze ein A und ein B ein.

3. Stellen Sie die Gleichung $E_{\text{A}} = E_{\text{B}}$ auf und geben Sie an, welche Energie(n) das System im Zustand A und welche Energie(n) es im Zustand B besitzt. (Es kommen nur 3 Energieformen in Frage: kinetische Energie E_{kin}, potentielle Energie der Schwerkraft $E_{\text{pot,S}}$ und potentielle Energie der Federkraft $E_{\text{pot,F}}$.)

---

[15] Ludwig August Colding (13. Juli 1815 in Arnakke bei Holbæk - 1888) war ein dänischer Physiker und Ingenieur. Er gilt als einer der Wegbereiter des Energieerhaltungssatzes und der mechanischen Wärmetheorie.

[16] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (31. August 1821 in Potsdam - 8. September 1894 in Charlottenburg) war ein deutscher Physiologe und Physiker. Als Universalgelehrter war er einer der vielseitigsten Naturwissenschaftler seiner Zeit und wurde auch Reichskanzler der Physik genannt.

[17] Niels Henrik David Bohr (7. Oktober 1885 in Kopenhagen - 18. November 1962) war ein dänischer Physiker. Er erhielt 1921 die Hughes-Medaille der Royal Society und den Nobelpreis für Physik im Jahr 1922 für seine Verdienste um die Erforschung der Struktur der Atome und der von ihnen ausgehenden Strahlung.

4. Setzen Sie die entsprechenden Formeln für die Energien ein und löse die Gleichung nach der Geschwindigkeit auf.

5. Nun werden die Werte eingesetzt. Damit kann die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Loslassen der Feder berechnet werden.

Lsg: $v \approx 1.1\,\mathrm{m/s}$

Lösung:

Nachfolgend werden Beispiele betrachtet, die verdeutlichen sollen, dass die Kinematik bereits bei einfachen Systemen an ihre Grenzen stösst und wie der Energieerhaltungssatz in solchen Situationen zur Lösung des Problems führen kann.

Bsp. xxiv.
Ein Stein wird aus der Höhe y mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 heruntergeworfen. Bestimmen a) die Geschwindigkeit kurz vor dem Auftreffen am Boden und b) die Geschwindigkeit auf halber Höhe.

Dieses Problem kann sowohl mit den Regeln der Kinematik als auch mit dem Energieerhaltungssatz gelöst werden. Exemplarisch sollen hier jeweils beide Wege verwendet werden. Lsg: –

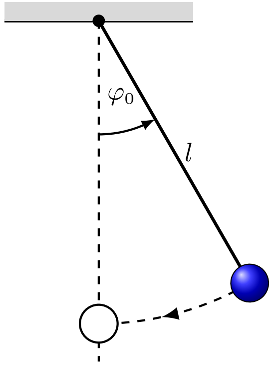
Lösung:

Es ist zu erwarten, dass an dieser Stelle die dritte kinematische Formel verwendet wird. Diese Formel wurde durch Eliminierung der Zeit erstellt[18]. Es scheint, dass der Weg über die Kinematik in diesem Fall schneller und einfacher ist. Es darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass wir zur Herleitung der dritten Formel einen erheblichen Aufwand betrieben haben, der für einen fairen Vergleich hier natürlich berücksichtigt werden müsste.

Mit dem nachfolgenden Beispiel wird deutlich, dass der kinematische Ansatz bereits an seine Grenzen stösst.

Bsp. xxv.
Das Pendel wird um den Winkel φ_0 ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen.

[18] Das Noether-Theorem gibt uns tieferes Verständnis für die Tatsache, dass Zeit in Bezug auf Energie verschwindet.

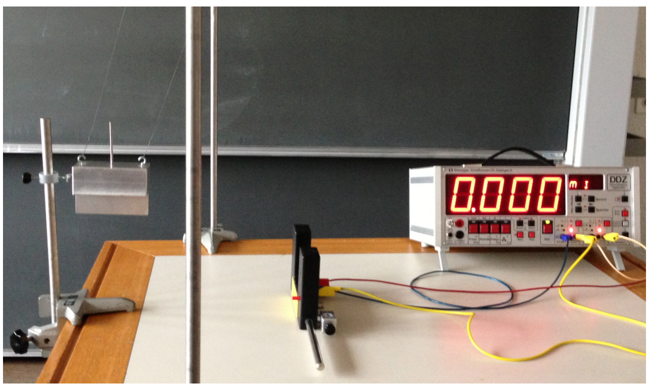


Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit. Lsg: –

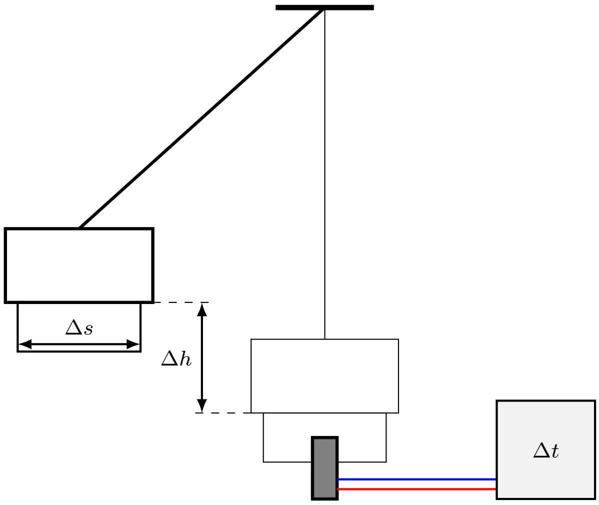
Lösung:

Dieses Beispiel soll nun auch experimentell überprüft werden. Dazu soll das folgende Experiment durchgeführt werden.

Exp. 1: EES-Pendel
Für dieses Experiment wird diese Konstruktion verwendet.



Der Körper wird ohne Anfangsgeschwindigkeit freigegeben. Wir erfassen dabei die Höhendifferenz mit Δh und die Geschwindigkeit, mit der das Pendel durch die Lichtschranke geht. Da die Geschwindigkeit nicht direkt gemessen werden kann, messen wir die Zeit Δt, während der die Lichtschranke unterbrochen wird, sowie die Strecke Δs, mit der das Pendel die Schranke unterbricht (siehe Skizze).



Die Energieerhaltung besagt, dass die potenzielle Energie am tiefsten Punkt gleich der kinetischen Energie ist.

$$E_{\text{pot}} = mgy = \frac{1}{2}mv^2 = E_{\text{kin}},$$

wobei $\Delta y = h$ ist. Die Geschwindigkeit bestimmen wir durch:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

und vergleichen diesen Wert mit dem theoretisch errechneten Wert aus der Energieerhaltung, d. h.

$$v = \sqrt{2gy}.$$

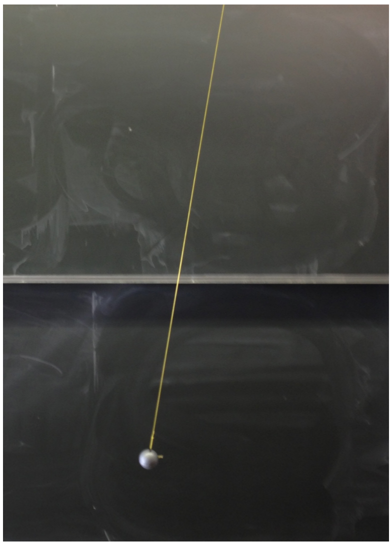
Wir messen die Zeit zweimal und berechnen daraus den Durchschnitt. Ebenso ermitteln wir die Höhe und erhalten somit folgende Messwerte:

y_1 [cm]	y_2 [cm]	Δy [cm]	y [cm]	v_{theo} [m/s]
18.0	12.5	5.5	5.5	1.04
Δs [cm]	t_1 [ms]	t_2 [ms]	$\bar{t}$ [s]	v_{exp} [m/s]
10	96	97	0.0965	1.04

Wie wir sehen, gibt es eine solide Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen des Experiments und der Theorie.

Eine Mutprobe und zugleich ein faszinierendes Experiment ist das Grosse Pendel, welches im folgenden beschrieben wird.

Exp. 2: Mutprobenpendel
Die schwere Kugel an einem Deckenpendel wird weit genug ausgelenkt, um die Nasenspitze einer Schülerin gerade nicht zu berühren. Anschliessend wird sie (ohne Anfangsgeschwindigkeit) losgelassen. Handelt es sich hierbei um eine Mutprobe? Wenn nein, warum nicht?



Betrachten wir ein Beispiel, um zu zeigen, dass auch eine Vereinigung aller hier eingeführten Energieformen möglich ist.

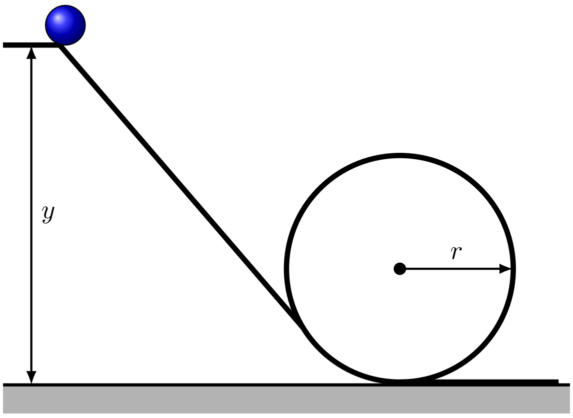
Bsp. xxvi.
Eine Feder ($D = 2500\,\mathrm{N/m}$), die vertikal auf dem Boden steht, wird um $0.15\,\mathrm{m}$ zusammengedrückt. Darauf liegt eine Kugel mit der Masse $450\,\mathrm{g}$.

Bestimmen Sie a) die Geschwindigkeit in einer Höhe von $3.1\,\mathrm{m}$ und b) die Höhe bei einer Geschwindigkeit von $2.3\,\mathrm{m/s}$. Alle Höhen sind von der Gleichgewichtslage der Feder aus gemessen. Lsg: a) $v_1 \approx 7.7\,\mathrm{m/s}$, b) $y_2 \approx 5.8\,\mathrm{m}$

Lösung:

Die Regeln der Kreisbewegung können auch angewendet werden, wenn es in Wirklichkeit keine vollständige Kreisbewegung gibt, sondern nur Teilabschnitte des angenommenen Kreises durchfahren werden oder der Kreis nur einmal durchlaufen wird. Im folgenden Beispiel ist dies der Fall.

Bsp. xxvii.
Hier soll das Looping-Problem für den reibungsfreien Fall gelöst werden. Folgender allgemeiner Looping sei gegeben.

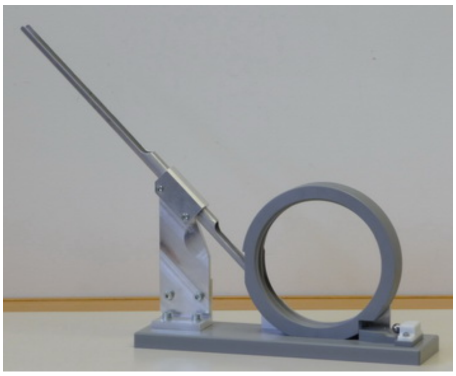


Bestimmen Sie die Beziehung zwischen y und r, sodass die Kugel den Looping gerade noch durchläuft, sofern die Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird. Lsg: –

Lösung:

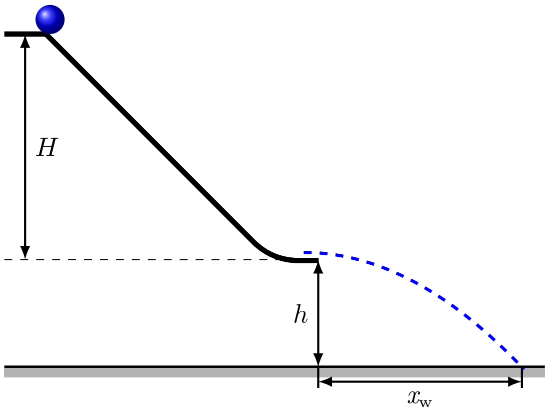
Im Folgenden betrachten wir einen kleinen Looping und überprüfen seinen Zusammenhang. Hierbei sind zwei Effekte zu berücksichtigen, von denen lediglich einer vernachlässigt werden kann. Zum einen die Reibung und zum anderen die Rotationsenergie, welche hier nicht ausser Acht gelassen werden darf.

Exp. 3: Looping
Für diesen kleinen Looping suchen wir die minimale Höhe, bei der die Kugel gerade noch den Looping bewältigen kann, und vergleichen ihn mit dem theoretischen Wert aus der Formel ($h = \frac{5}{2}r$). Die Differenz sollte etwa der Rotationsenergie entsprechen.



Wir schauen uns noch ein vorerst letztes Beispiel zur Energieerhaltung in Zusammenhang mit dem horizontalen Wurf an. Dabei werden wir ein überraschendes Ergebnis finden.

Bsp. xxviii.
Eine Kugel wird aus einer Höhe H über der Abwurfstelle losgelassen. Sie rollt reibungsfrei die Ebene herunter und geht dann in einen horizontalen Wurf über (vgl. Abbildung).



Finden Sie einen Ausdruck für die Wurfweite x_{w} als Funktion der Anfangshöhe H und der Rampenhöhe h. Was fällt Ihnen bei diesem Ausdruck auf? Tipp: Ermitteln Sie zunächst die Anfangsgeschwindigkeit des horizontalen Wurfs.
Lsg: –

Lösung:

Systeme mit Reibung

Nun betrachten wir Systeme, bei denen die Reibung berücksichtigt wird. Obwohl in diesen Fällen die Energie für den Körper nicht erhalten ist, können solche Probleme trotzdem mithilfe des Energiesatzes gelöst werden. In diesen Fällen gilt nämlich:

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = W_{\mathrm{k}} + W_{\mathrm{nk}} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\mathrm{kin}} + \Delta E_{\mathrm{pot}} = W_{\mathrm{nk}},$$

wobei $W_{\mathrm{k}} = -\Delta E_{\mathrm{pot}}$ ist. Dies können wir auch kurz in der Form:

$$\Delta E_{\mathrm{mech}} = W_{\mathrm{nk}}$$

schreiben, wobei $\Delta E_{\mathrm{mech}} = \Delta E_{\mathrm{kin}} + \Delta E_{\mathrm{pot}}$ ist. Vergleichen wir dies mit der bisherigen Schreibweise erhalten wir:

$$E_{\mathrm{B}} - E_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{nk}}.$$

Sofern die nicht konservative Arbeit bestimmt werden kann, sind solche Probleme lösbar, wie das folgende einführende Beispiel zeigt.

Bsp. xxix.
Lernbeispiel
Nach diesem Beispiel verstehen Sie den Unterschied zwischen Problemen mit Reibung und Problemen ohne Reibung. Folgen Sie den Anweisungen Schritt für Schritt:

1. Eine Kugel mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$ rolle über eine horizontale und raue Fläche mit dem Reibungskoeffizienten $\mu_{\mathrm{R}} = 0.5$. Nach der gesuchten Strecke bleibt die Kugel stehen. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

2. Auch hier unterscheiden wir Energien im Zustand A (vor der Energieumwandlung) und Energien im Zustand B (nach der Energieumwandlung mit Reibung). Zeichnen Sie in der Skizze A und B ein.

3. Stellen Sie die Gleichung $E_\mathrm{B} - E_\mathrm{A} = W_\mathrm{R}$ auf und geben Sie an, welche Energie(n) das System im Zustand A und welche Energie(n) es im Zustand B besitzt. Die Reibungsarbeit entspricht immer der Reibungskraft mal die zurückgelegte Strecke, also $W_\mathrm{R} = -F_\mathrm{R}\Delta s$. (Es kommen nur 3 Energieformen in Frage: kinetische Energie E_kin, potentielle Energie der Schwerkraft $E_\mathrm{pot,S}$ und potentielle Energie der Federkraft $E_\mathrm{pot,F}$.)

4. Setzen Sie die entsprechenden Formeln für die Energien ein und lösen Sie die Gleichung nach der Strecke auf.

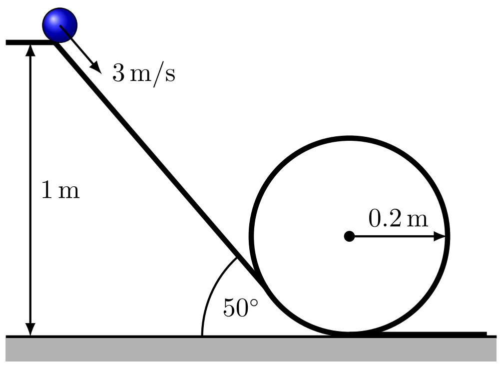
5. Nun werden die Werte eingesetzt. Damit kann die Strecke der Kugel berechnet werden.

Lsg: $\Delta x \approx 23\,\mathrm{m}$

Lösung:

Wir erkennen an diesem Beispiel, dass die Energie für den Körper zwar nicht erhalten ist, dennoch muss die Gesamtenergie erhalten sein. Die Energie geht durch die Reibung in *innere Energie* über. Dieser Begriff der inneren Energie wird in der Wärmelehre später genauer eingeführt und erklärt. Nun betrachten wir den Looping erneut, jedoch mit Reibung.

Bsp. xxx.
Eine Kugel (600 g) wird aus einer Höhe von 1 m mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 3 m/s losgelassen. Der Looping (vgl. Bild) hat einen Radius von 0.2 m. Für die Reibung nehmen wir eine konstante Kraft von 2 N an.

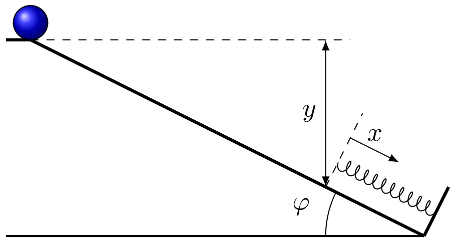


a) Welche Geschwindigkeit muss die Kugel am obersten Punkt des Loopings mindestens haben und b) welche Geschwindigkeit hat sie tatsächlich. (Setzen Sie die Strecke aus einer Geraden und einem Halbkreis zusammen.)
Lsg: a) $v_1 \approx 1.4\,\mathrm{m/s}$, b) $v_2 \approx 2.8\,\mathrm{m/s}$

Lösung:

Bevor wir nun das Thema der Energieerhaltung verlassen, noch ein etwas anspruchsvolleres Problem.

Bsp. xxxi.
Eine Kugel ($m = 150\,\mathrm{g}$) rutscht ohne Anfangsgeschwindigkeit aus einer Höhe von $y = 2\,\mathrm{m}$ eine schiefe Ebene ($\varphi = 30°$, $\mu_\mathrm{G} = 0.5$) herunter, an dessen unteres Ende eine Feder ($D = 20\,\mathrm{N/m}$) befestigt ist.



Bestimmen Sie die Längenänderung der Feder, wobei Sie die Reibung nicht vernachlässigen dürfen. Lsg: $x \approx 20.6\,\mathrm{cm}$

Lösung:

Wir haben nun die Energieerhaltung behandelt und wenden uns nun dem zweiten Erhaltungssatz zu: dem Impulserhaltungssatz.

3.4.2 Impulserhaltungssatz (IES)

Der Impulserhaltungssatz ist bereits in einem Gesetz enthalten, das wir vor einiger Zeit besprochen haben, nämlich dem Wechselwirkungsgesetz. Zur Erinnerung schreiben wir das Wechselwirkungsgesetz hier noch einmal vereinfacht wie folgt auf:

$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}.$$

Davon ausgehend soll hier der Impulserhaltungssatz hergeleitet werden. $F_{1\to2}$ ist die Kraft von Körper 1 auf Körper 2, daher führt sie zu einer Beschleunigung von Körper zwei, also $F_{1\to2} = m_2 a_2$ und $F_{2\to1}$ ist die Kraft von Körper 2 auf Körper 1 und damit $F_{2\to1} = m_1 a_1$. Damit erhalten wir

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2.$$

Die Beschleunigung ist definiert als $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ damit erhalten wir folgende Beziehung:

$$m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t_1} = -m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t_2}.$$

Die Zeitdifferenzen $\Delta t_1 = \Delta t_2$, da die Wechselwirkung für beide Körper gleich schnell abläuft. Damit kann dieser Term wegmultipliziert werden und man erhält

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2.$$

Der Impuls ist definiert als $\vec{p} = m\vec{v}$ damit ist $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$ und somit erhalten wir

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

oder

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \vec{0},$$

was nichts anderes heisst als, dass durch die Wechselwirkung von zwei Körpern die Summe der Impulsänderungen verschwindet.

Betrachten wir nun eine Wechselwirkung zwischen zwei Körpern. Der erste Körper hat den Impuls $\vec{p}_1$ und der zweite den Impuls $\vec{p}_2$ vor der Wechselwirkung und $\vec{p}_1'$ und $\vec{p}_2'$ nach der Wechselwirkung. Der Gesamtimpuls des Systems nach der Wechselwirkung beträgt

$$\vec{p}_{\text{nach}} = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

und mit $\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$ gilt $\vec{p}' = \vec{p} + \Delta\vec{p}$ und damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{\text{nach}} &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\
&= \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_2 \\
&= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 \\
&= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\text{vor}}
\end{aligned}$$

da $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$ ist. Damit ist der Gesamtimpuls vor der Wechselwirkung gleich dem Gesamtimpuls nach der Wechselwirkung und damit ist der Impuls erhalten. Es gilt damit

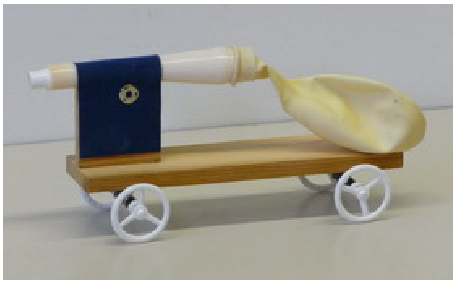
Ges. 7: *(IES) In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls $\vec{p}_{\text{ges}}$ erhalten, d. h.*

$$\boxed{\vec{p}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{konst.},}$$

wobei unter abgeschlossen ein System gemeint ist, welches mit seiner Umgebung nicht wechselwirkt.

Betrachten wir dazu das folgende einfache Handexperiment.

Exp. 4: Impulsstromwagen
Bei diesem Versuch wird deutlich, dass die ausströmende Luft in die eine Richtung geht und der Wagen in die andere. Durch die Impulserhaltung ist es möglich, die Geschwindigkeit des Wagens qualitativ zu bestimmen, sofern man den Luftstrom bestimmen kann.



Dieser Versuch ist etwas schwierig zu quantifizieren. Betrachten wir stattdessen das folgende Beispiel, das physikalisch dasselbe ist, aber viel einfacher zu berechnen.

Bsp. xxxii.
Auf einem reibungsfreien Rollbrett stehend, werfen Sie einen Medizinball $m_{\text{Ba}} = 5\,\text{kg}$ mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 4\,\text{m/s}$ von Ihnen weg.

Mit welcher Geschwindigkeit rollt das Brett und Sie danach und in welche Richtung, falls das System vorher in Ruhe war? Lsg: $v_{\mathrm{Br}} \approx 0.3\,\mathrm{m/s}$

Lösung:

Lassen Sie uns noch ein einfaches Impulserhaltungssatz-Beispiel betrachten.

Bsp. xxxiii.
Ein offener Güterwagen rollt reibungslos unter einem vertikal einfallenden Regenschauer, wobei eine beträchtliche Regenmenge in den Wagen fällt und sich ansammelt. Denken Sie über die Wirkung der sich ansammelnden Regenmenge auf Geschwindigkeit, Impuls und kinetische Energie des Wagens nach. [13] Lsg: –

Lösung:

Das folgende Experiment zeigt die Impulserhaltung auf eine einfache, aber meiner Meinung nach sehr anschauliche Weise.

Exp. 5: Wagen mit Kugel
Betrachten Sie den folgenden Wagen:

Die Kugel wird auf die Rampe des stehenden Wagens gelegt. Im ersten Fall ist die Rampe am Ende offen, im zweiten Fall ist die Rampe am Ende geschlossen. Was passiert?

Im ersten Fall hat die Kugel vorher und nachher einen Impuls. Um dies auszugleichen, muss der Wagen nachher auch einen Impuls haben, d.h. der Wagen rollt in die entgegengesetzte Richtung.
Im zweiten Fall hat die Kugel vorher einen Impuls und nachher keinen. Der Wagen muss also keinen Impuls ausgleichen, er bleibt stehen.

Wenn man sich mit der Impulserhaltung beschäftigt, kommt man nicht umhin, die Rakete zu betrachten. Die klassische Rakete funktioniert nach dem Prinzip der Impulserhaltung. In der Regel wird ein Gas oder eine Flüssigkeit mit hoher Geschwindigkeit nach hinten beschleunigt. Durch die Impulserhaltung wird die Rakete, ähnlich wie beim Impulsantrieb, nach oben getrieben. Das folgende Experiment veranschaulicht dies auf eindrucksvolle Weise.

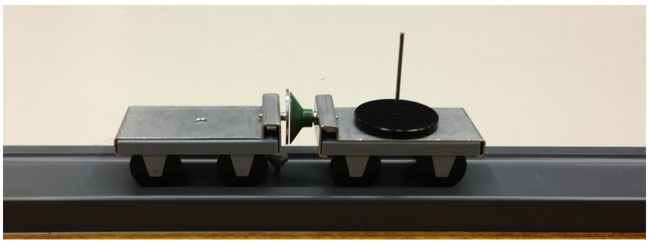
Exp. 6: Rakete
In der nächsten Rakete befindet sich eine PET-Flasche, die mit Hilfe einer Fahrradpumpe weiter mit Luft gefüllt wird, d.h. im Inneren der Rakete wird ein Überdruck erzeugt. Sobald das Ventil wieder geöffnet wird (durch Ziehen an der rosa Schnur), strömt die Luft mit hoher Geschwindigkeit aus und die Rakete steigt auf.

Im ersten Versuch wird die Rakete nur mit Luft gefüllt, d.h. was hinten wieder herauskommt, ist *nur* Luft. Beim zweiten Versuch füllen wir zuerst etwas Wasser in die Rakete und setzen sie dann mit der Luftpumpe unter Druck. Das Ergebnis ist verblüffend! Warum?

Die Antwort ist ganz einfach, auch hier gilt die Impulserhaltung, d.h. Masse der Luft mal Geschwindigkeit ist gleich Masse der Rakete mal Geschwindigkeit der Rakete. Da aber die Masse der Luft sehr klein ist, passiert nicht viel. Beim zweiten Versuch ist jedoch die Masse des Wassers mal der Geschwindigkeit des Wassers gleich der Masse der Rakete mal der Geschwindigkeit der Rakete. Da die Dichte des Wassers etwa 1000 mal grösser ist als die der Luft, ist auch die Masse 1000 mal grösser und damit der Impuls.

Bevor wir uns einem etwas anspruchsvolleren Problem zuwenden, schauen wir uns das folgende Experiment an.

Exp. 7: Unelastischer Stoss
Zwei Wagen unterschiedlicher Masse fahren mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aufeinander zu. Was passiert?



Betrachten wir die Situation ganz allgemein, dann gilt mit $m_1 < m_2$:

$$\vec{p}_{\mathrm{L}} = m_1\vec{v}_1 \quad \text{und} \quad \vec{p}_{\mathrm{R}} = m_2\vec{v}_2.$$

und danach

$$\vec{p}\,'_{\text{nach}} = (m_1 + m_2)\vec{v}\,'.$$

Der Gesamtimpuls muss erhalten sein, damit gilt

$$\vec{p}_{\text{vor}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}\,' = \vec{p}_{\text{nach}}.$$

Damit ist $\vec{v}\,'$:

$$\vec{v}\,' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Diese Formel zeigt, dass die Richtung nach der Kollision nicht nur von der Masse des Wagens abhängt, sondern auch vom Produkt aus Masse und Geschwindigkeit.

Solche Vorgänge sind auch unter dem Begriff *vollkommen inelastischer Stoss* bekannt. Darunter versteht man einen Stossvorgang zwischen zwei Körpern, die sich nach dem Stoss gemeinsam weiterbewegen.

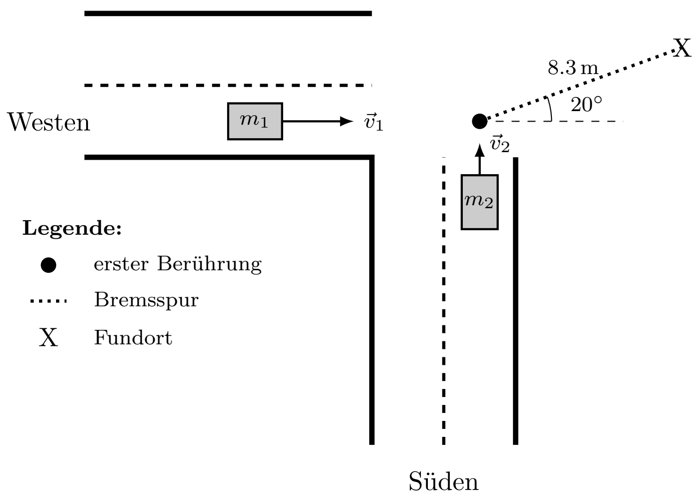
Betrachten wir ein einfaches Beispiel eines inelastischen Stosses.

Bsp. xxxiv.
Der kleine Wagen von oben mit der Masse 500 g fahre mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s auf den zweiten Wagen ($m_2 = 300\,\text{g}$) auf, der mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s auf den ersten zufährt. Die Wagen fahren nach dem unelastischen Stoss gemeinsam weiter. Welche Geschwindigkeit haben sie nach dem Stoss. Lsg: $v' \approx 2\,\text{m/s}$

Lösung:

Das nächste Beispiel ist ebenfalls ein unelastischer Stoss, aber diesmal fahren die Wagen nicht in die gleiche Richtung und daher muss der vektorielle Charakter des Stosses berücksichtigt werden.

Bsp. xxxv.
In einem Unfallprotokoll steht folgendes:
Zwei etwa gleich schwere Autos sind an einer Kreuzung verunfallt. Das von Westen heranfahrende Auto hat das Rotlicht übersehen. Das von Süden kommende Auto fuhr beim Crash soeben an. Die Autos haben sich offenbar beim Crash ineinander verkeilt. Die Reibung war etwa 0.85. Wir gehen davon aus, dass das von Westen kommende Auto eine überhöhte Geschwindigkeit hatte. Betrachten Sie folgende Unfallskizze.



Mit diesen Informationen, welche einfach nach einem Unfall gemessen werden können, sollen Sie nun die Geschwindigkeiten beider Autos vor dem Unfall bestimmen. Lsg: $v_1 \approx 80\,\text{km/h}$, $v_2 \approx 30\,\text{km/h}$

Lösung:

Eine weitere interessante Grösse bei vollkommen unelastischen Stössen ist die sog. *Deformationsenergie*. Diese ist wie folgt definiert:

Def. 9: *(Deformationsenergie) Die Deformationsenergie E_{Def} ist die Energiedifferenz bei unelastischen Stössen, zwischen der Energie vor dem Stoss E_{ges} und der Energie nach dem Stoss E'_{ges}, d. h.*

$$\boxed{E_{\mathrm{Def}} = E_{\mathrm{ges}} - E'_{\mathrm{ges}}.}$$

Diese Formel wird nicht so häufig gebraucht, dennoch verdeutlicht sie den Sachverhalt, dass die Energie bei unelastischen Stössen nicht erhalten ist.

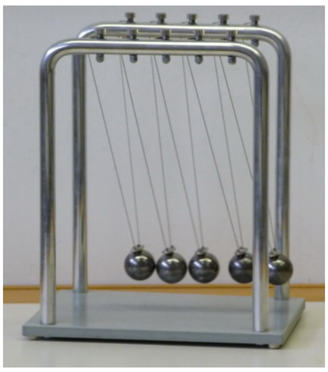
Zeige, dass die Verformungsenergie von zwei Körpern, die völlig unelastisch miteinander kollidieren, wie folgt berechnet werden kann:

$$E_{\mathrm{Def}} = \frac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Eigentlich müssen Sie lediglich die kinetischen Energien vergleichen.

Bevor wir zu den Anwendungen der beiden Sätze kommen, ein sehr berühmtes Experiment, das sogenannte Newtonsche Pendel[19].

Exp. 8: Newtonpendel
Das Newtonsche Pendel ist wohl das am weitesten verbreitete Experiment und findet sich häufig als Dekoration auf Schreibtischen.



Jeder weiss, dass immer genau so viele Kugeln nach rechts gestossen werden, wie nach links auf die ruhenden Kugeln stossen. Warum das so ist, wissen wahrscheinlich die wenigsten.

Eine der möglichen Ideen ist die Impulserhaltung. Bei einer ausgelenkten Kugel könnten sich nämlich zwei Kugeln lösen, die aber nur die halbe Geschwindigkeit haben.

$$p_{\mathrm{R}} = mv \quad \text{und} \quad p_{\mathrm{L}} = 2m\frac{1}{2}v = mv,$$

[19] Die Namensgebung ist nicht eindeutig geklärt. Man nimmt an, dass der Name Newtonpendel vom englischen Schauspieler, Simon Prebble um 1967 zum ersten Mal verwendet wurde.

wodurch der Impuls erhalten wird. Wenn jedoch sowohl der Impulserhaltungssatz als auch der Energieerhaltungssatz gefordert werden, dann und nur dann müssen Anzahl und Geschwindigkeit gleich sein.

Auf Spielplätzen erkennt man Physiker sofort, wie das folgende Bild zeigt:

Das Newtonsche Pendel ist somit bereits eine erste Anwendung, bei der sowohl der Energieerhaltungssatz als auch der Impulserhaltungssatz berücksichtigt werden müssen.

Zeigen Sie formal, dass das Newtonpendel nur auf diese Weise pendeln kann. Sie können sich auf eine schwingende Masse beschränken.

3.4.3 Anwendungen von Energie- und Impulserhaltungssatz

In diesem Abschnitt sollen einige Anwendungen des Energie- und Impulserhaltungssatzes vorgestellt werden. Zum einen wird der vollkommen elastische Stoss in einer und in zwei Dimensionen betrachtet, zum anderen das sogenannte ballistische Pendel.

Völlig elastischer Stoss in 1D

Unter einem vollkommen elastischen Stoss verstehen wir, dass zwei Körper so miteinander wechselwirken, d.h. stossen, dass sowohl der Impuls als auch die Energie erhalten bleiben. Im Allgemeinen betrachten wir also folgende Situation

vor dem Stoss: nach dem Stoss:

wobei zwei Massen (m_1, m_2) und zwei Anfangsgeschwindigkeiten ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$) gegeben sind. Gesucht werden die zwei Endgeschwindigkeiten ($\vec{v}_1'$, v_2'), d. h. es müssen zwei Gleichungen aufgestellt werden: den Energie- und den Impulserhaltungssatz.

Der Energieerhaltungssatz für diesen Stoss lautet:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2'}^2.$$

Durch Vereinfachung erhalten wir

$$m_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_1')(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2(\vec{v}_2' + \vec{v}_2)(\vec{v}_2' - \vec{v}_2).$$

Die zweite Gleichung ist der Impulserhaltungssatz für diesen geraden Zentralstoss:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

Eine ähnliche Umformung führt auf

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)$$

Um dieses nichtlineare Gleichungssystem zu lösen, verwenden wir die Divisionsmethode,[20] dabei erhalten wir:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_1') = (\vec{v}_2' + \vec{v}_2)$$

Daraus folgt durch umformen:

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_1 + \vec{v}_1' - \vec{v}_2.$$

Setzen wir diese in die umgeformte Impulserhaltungsgleichung ein, erhalten wir:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2\left((\vec{v}_1 + \vec{v}_1' - \vec{v}_2) - \vec{v}_2\right).$$

Lösen wir nach der gesuchten Variable auf, dann erhalten wir:

$$\boxed{\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

und analog für $\vec{v}_2'$:

$$\boxed{\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}}$$

Damit haben wir zwei Formeln für die Geschwindigkeit nach dem Stoss gefunden. Im Gegensatz zum elastischen Stoss lohnt es sich hier, diese Formeln aufzuschreiben, da sie nicht so schnell hergeleitet werden können.

Leiten Sie diese Formeln für den elastischen Stoss auf den inelastischen Stoss um. (Tipp: Betrachten Sie den elastischen Stoss als inelastischen Stoss, der nur für einen kurzen Moment inelastisch ist.)

Bevor wir auf zwei Sonderfälle eingehen, berechnen wir ein einfaches Beispiel mit diesen Formeln.

Bsp. xxxvi.
Zwei Billardkugeln rollen aufeinander zu. Die eine hat eine Geschwindigkeit von $3\,\mathrm{m/s}$ und die andere hat eine Geschwindigkeit $1\,\mathrm{m/s}$. Der Stoss soll elastisch und gerade sein. Welche Geschwindigkeiten haben die Kugeln nach dem Stoss, sofern die Massen gleich gross sind? Lsg: $v_1' \approx -1\,\mathrm{m/s}$, $v_2' \approx 3\,\mathrm{m/s}$

Lösung:

Nun aber zu den beiden Sonderfällen, die uns zeigen sollen, dass auch Stösse mit nur einer Kugel durchaus elastisch und damit lösbar sein können.

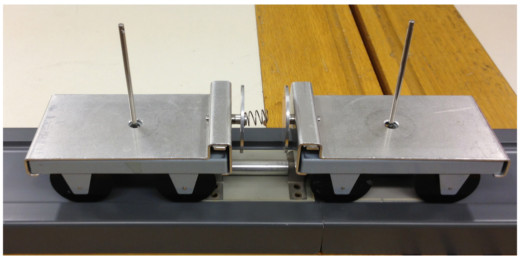
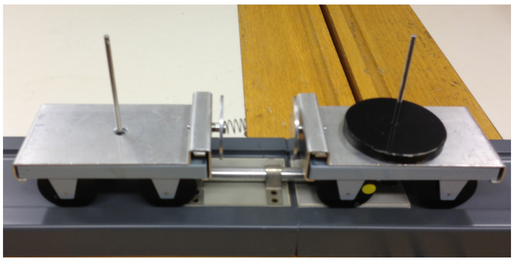
Bsp. xxxvii.
Der erste Spezialfall ist ein Stoss zwischen zwei exakt gleichen Körper, wobei der eine zuvor im Stillstand ist. Der zweite ist z. B. ein Schuss eines Körpers gegen eine Wand. Bestimmen Sie für diese Fälle die Endgeschwindigkeiten für a) $m_1 = m_2$, $v_1 \neq 0$ und $v_2 = 0$ und b) $m_1 \lll m_2$, $v_1 \neq 0$ und $v_2 = 0$. Lsg: –

[20] Bei der Divisionsmethode muss darauf geachtet werden, dass der Nenner ungleich Null ist. In diesem Fall ist er nur null, wenn $\vec{v}_1 = \vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2 = \vec{v}_2'$. Dieser Fall gilt nur, wenn es keinen Stoss gibt.

Lösung:

Das folgende Experiment soll den ersten Fall veranschaulichen.

Exp. 9: Elastischer Stoss
Mit diesem Experiment kann sowohl der eine Spezialfall

als auch der allgemeine Fall gezeigt werden.

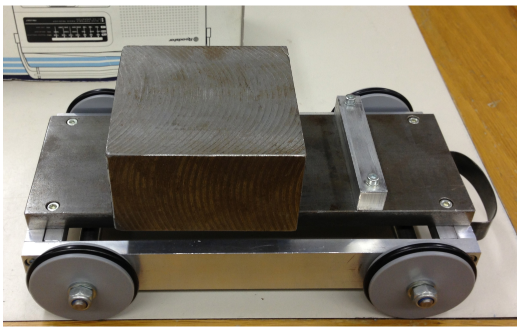
Das folgende Video ist eines meiner Lieblingsvideos, weil es die Schönheit der Mathematik und der Physik auf beeindruckende Weise verbindet: 3Blue1Brown: The most unexpected answer to a counting puzzle und 3Blue1Brown: Why do colliding blocks compute pi?

Das folgende Experiment zeigt sehr schön den Unterschied zwischen einem elastischen und einem unelastischen Stoss.

Exp. 10: Magischer Wagen
Mit diesem Wagen kann sowohl ein elastischer Stoss als auch ein unelastischer Stoss simuliert werden.

Im ersten Fall federt der Wagen zurück, d.h. es handelt sich um einen elastischen Stoss. Im zweiten Fall aber nicht, also ein unelastischer Stoss. Wie ist das möglich?

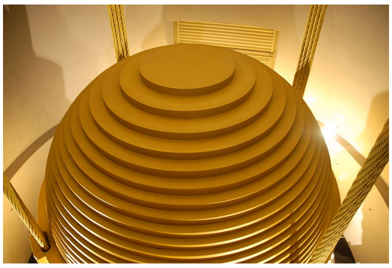
Das Geheimnis steckt natürlich unter der Kartonschachtel.



> Es handelt sich um einen grossen, schweren Metallklotz, der sich im ersten Fall nicht bewegen kann, da er bereits am Rand steht. Im zweiten Fall befindet sich der Klotz vor dem Aufprall noch im hinteren Bereich, so dass er praktisch die gesamte Bewegungsenergie aufnehmen kann.

Dieses Prinzip wird vom Wolkenkratzer *Taipei 101* in Taipeh, der Hauptstadt Taiwans, angewendet (vgl. Abb.).

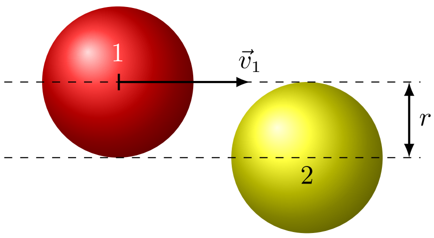
Wird durch Wind der Wolkenkratzer in Schwingungen versetzt, nimmt das sogenannte *Tilgerpendel* (vgl. Abb.) die Schwingung auf und dämpft dadurch diejenige des Hauses. Dieses im Taipei ist das grösste seiner Art. Sein Gewicht ist mit 660 Tonnen beachtlich.



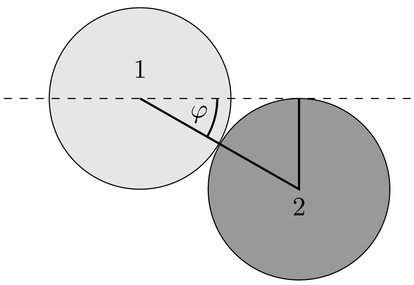
Die riesige Kugel ist an Seilen aufgehängt und kann frei schwingen.

Elastischer Stoss in 2D

Wir analysieren nun einen vollkommen elastischen Zusammenstoss in zwei Dimensionen. Dies bedeutet, dass wir folgende Situation vereinfachen:



Die erste Kugel bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ auf die ruhende zweite Kugel zu. Die Mittelpunkte der Kugeln befinden sich dabei im Abstand r zueinander. Beim Stoss wirkt nur die Normalkraft, da ein völlig elastischer Stoss betrachtet wird. Demnach wird sie entlang der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten beschleunigt.



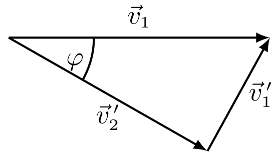
Damit ist der Winkel:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{r}{2r}\right) = 30^\circ$$

Die interessante Frage ist nun, in welche Richtung die Kugel 1 weiterrollen wird. Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir den Impuls- und Energieerhaltungssatz. Aus dem Impulserhaltungssatz folgt.

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2' \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

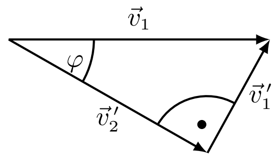
d. h. dass die Geschwindigkeitsvektoren ein geschlossenes Dreieck bilden.



Aus dem Energieerhaltungssatz folgt

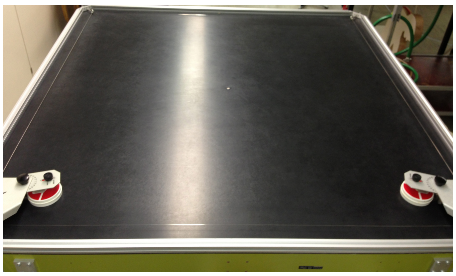
$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_1')^2 + \frac{1}{2}m(v_2')^2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = (v_1')^2 + (v_2')^2$$

und damit ist das Dreieck rechtwinklig, d. h. der Winkel zwischen den Kugeln nach dem Stoss ist 90°.



Das folgende Experiment auf einem Luftkissen veranschaulicht diesen Zusammenhang deutlich.

Exp. 11: Elastischer Stoss in 2D
Eine Scheibe wird auf einem stillstehenden Körper auf einem Luftkissentisch platziert und geschoben. Die Ausgangsposition wird so gewählt, dass der darauffolgende Zwischenwinkel gut messbar ist.

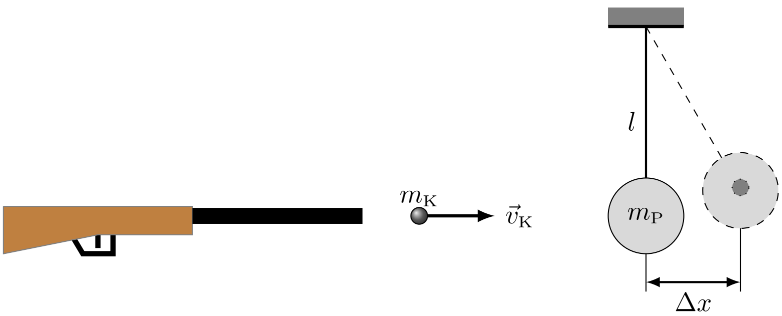


Nun kommen wir zu einer praktischen Anwendung, nämlich dem sogenannten Ballistischen Pendel.

Ballistisches Pendel

Mithilfe des ballistischen Pendels können Geschossgeschwindigkeiten gemessen werden, ohne dass dafür Hochgeschwindigkeitskameras aufgestellt werden müssen. Wir betrachten das Pendel zunächst rein theoretisch und führen im zweiten Schritt das Experiment durch.

Wir gehen von folgender Skizze aus:



Wenn wir das Problem von einer anderen Perspektive aus betrachten, erkennen wir, dass sich das Pendel aufgrund seiner Anfangsgeschwindigkeit v' aus der Ruhelage nach rechts in horizontaler Richtung um Δx ausgelenkt hat. Diese Anfangsgeschwindigkeit v' ist die gemeinsame Geschwindigkeit der Kugel und des Pendels und wird gemäss dem Impulserhaltungssatz bestimmt.

$$p_{\text{vor}} = m_{\text{K}} v_{\text{K}} = (m_{\text{K}} + m_{\text{P}})v' = p_{\text{nach}} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{m_{\text{K}} v_{\text{K}}}{m_{\text{K}} + m_{\text{P}}}$$

Dies entspricht der Anfangsgeschwindigkeit des Pendels gemäss dem Energieerhaltungssatz.

$$E_{\text{kin}_{\text{A}}} = \frac{1}{2}(m_{\text{K}} + m_{\text{P}})v'^2 = (m_{\text{K}} + m_{\text{P}})gh = E_{\text{pot}_{\text{B}}}$$

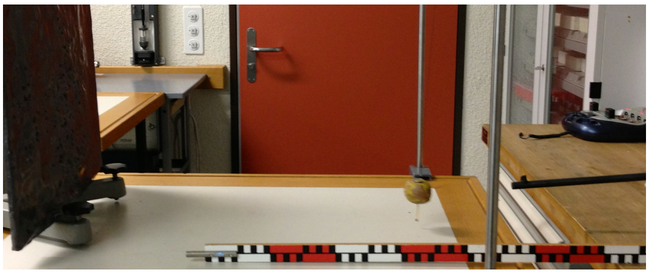
Mit $h = l(1 - \cos\varphi)$ erhalten wir schliesslich

$$\sqrt{2gl(1-\cos\varphi)} = \frac{m_{\text{K}} v_{\text{K}}}{m_{\text{K}} + m_{\text{P}}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{K}} = \frac{m_{\text{K}} + m_{\text{P}}}{m_{\text{K}}} \cdot \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)},$$

wobei $\varphi = \arcsin\left(\frac{\Delta x}{l}\right)$ ist.

Wir sind jetzt bereit, das Experiment auszuführen und die Geschwindigkeit der Kugel zu messen.

Exp. 12: Ballistisches Pendel
Das folgende Experiment ist vom Aufbau her praktisch identisch mit der Skizze. Ausnahme ist, dass das Pendel an zwei Seilen befestigt wird.



Zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Kugel brauchen wir folgende Grössen zu messen:

m_{K} [g]	m_{P} [g]	l [m]	Δx [m]
0.5	114.2	0.8	0.12

Aus diesen Werten lässt sich mit der soeben hergeleiteten Formel

$$v_{\text{K}} = \frac{m_{\text{K}} + m_{\text{P}}}{m_{\text{K}}} \cdot \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)} \approx 96\,\text{m/s},$$

wobei $\varphi = \arcsin\left(\frac{\Delta x}{l}\right)$ ist, die Geschwindigkeit bestimmen. Die Energie die bei diesem unelastischen Stoss verloren geht ist etwa 99%.

Mit dem nachfolgenden etwas abgeänderten Beispiel soll das Prinzip des ballistischen Pendels verankert werden.

Bsp. xxxviii.
Eine Kugel mit der Geschwindigkeit von 150 m/s und einer Masse von 5 g werde in einen ruhenden Block geschossen und bleibt stecken. Der Block hat eine Masse von 0.5 kg und steht auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel von 30° und einem Reibungskoeffizienten von 0.1. Bestimmen Sie die Strecke, welche der Block bis zum Stillstand entlang der Ebene nach oben zurücklegt. (Die Flugbahn der Kugel ist parallel zur schiefen Ebene.)

Lsg: $s \approx 19\,\text{cm}$

Lösung:

Damit ist dieses wichtige Kapitel zu den Erhaltungssätzen abgeschlossen. Was natürlich nicht bedeutet, dass wir es nie wieder benötigen werden. Im Gegenteil, diese Prinzipien sind äusserst wichtig und kommen in allen Bereichen der Physik immer wieder vor.

Wenn es zeitlich möglich ist, werden wir gemeinsam den Text zur "Entdeckung des Neutrinos" lesen und anschliessend den Film "Projekt Poltergeist" ansehen.

Nun gehen wir zum nächsten und letzten Thema dieses Kapitels über, der *Himmelsmechanik für Anfänger*.

Zusammenfassung Kapitel B3

1. Die *mechanische Arbeit* ΔW an einem Körper ist das Skalarprodukt aus der Kraft $\vec{F}$ und der zurückgelegten Strecke $\Delta\vec{s}$, d. h.

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}.$$

Beachten Sie, dass die mechanische Arbeit null ist, falls die Kraft und die zurückgelegte Strecke senkrecht sind und maximal, falls sie parallel resp. minimal, falls sie antiparallel sind.

2. Die Bewegungsenergie resp. *kinetische Energie* E_{kin} eines Massenpunktes m mit der Geschwindigkeit v ist definiert als

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

3. Wir unterscheiden zwei Arten von Kräften, nämlich *konservative* und nicht *konservative Kräfte*. Eine Kraft heisst konservativ, falls sie längs eines geschlossenen Weges keine Arbeit verrichtet.

4. Jede konservative Kraft führt zu einer *konservative Arbeit* und damit existiert eine *potentielle Energie*.

5. Die *potentielle Energie* E_{pot} um einen Körper vom Punkt P_0 nach P_1 zu bringen, ist definiert als die konservative Arbeit W_{k}, welche dafür am System verrichtet werden muss, d. h.

$$E_{\mathrm{pot}}(P_0) - E_{\mathrm{pot}}(P_1) = W_{\mathrm{k}} \quad \text{oder} \quad -\Delta E_{\mathrm{pot}} = W_{\mathrm{k}}.$$

Beachten Sie das Minus vor der Energiedifferenz. Dies liegt daran, dass dies streng aus dem System heraus betrachtet wird.

Daraus ergibt sich für die *potentielle Energie im Schwerefeld*:

$$E_{\mathrm{pot,S}} = mgh$$

und für die *potentielle Energie einer Feder*:

$$E_{\mathrm{pot,F}} = \frac{1}{2}Dx^2.$$

6. Die nicht konservative *Reibungsarbeit* W_{R} einer Reibungskraft F_{R} während einer Strecke Δx ist gegeben, als:

$$W_{\mathrm{R}} = -F_{\mathrm{R}}\Delta x.$$

Beachten Sie auch hier das negative Vorzeichen. Das liegt daran, dass für das System die Arbeit negativ ist, d. h. es geht Energie verloren.

7. Die Leistung P ist definiert als die Arbeitsänderung ΔW pro Zeit Δt, d. h.

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

8. Die mechanische Leistung P der Translationsbewegung ist das Produkt aus der aufzuwendenden Kraft $\vec{F}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in Richtung der Kraft, damit gilt:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

9. Der Leistungssatz der Mechanik besagt, dass die Summe aller an einem System angreifenden Leistungen P_{i} zu jedem Zeitpunkt gleich der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie E_{kin} des Systems sind, d. h.

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{kin}}}{\Delta t} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} P_{\mathrm{i}}.$$

Daraus lässt sich der für uns wichtigere *Energiesatz der Mechanik* herleiten. Für die Gesamtarbeit gilt: $W_{\mathrm{ges}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} P_{\mathrm{i}}\Delta t$ und damit folgt:

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = W_{\mathrm{ges}},$$

d. h. die Zu- oder Abnahme der kinetischen Energie ΔE_{kin} eines Körpers ist gleich der ihm zu- oder abgeführten Arbeit W_{ges}.

10. Der *Wirkungsgrad* η ist definiert als das Verhältnis aus der Nutzenergie E_{N} und der Antriebsenergie E_{A}, d. h.

$$\eta = \frac{E_{\mathrm{N}}}{E_{\mathrm{A}}} \leq 1.$$

11. Der *Impuls* $\vec{p}$ eines Körpers ist definiert als Produkt aus der Masse m des Körpers und dessen Geschwindigkeit $\vec{v}$, d. h.

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

12. Der *Kraftstoss* $\Delta\vec{p}$ ist das Produkt aus der Kraft $\vec{F}$ und dem Zeitintervall Δt, d. h.

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$$

13. In einem abgeschlossenen System ist die *Gesamtenergie eine Erhaltungsgrösse*, d. h.

$$E_{\mathrm{Tot}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} E_{\mathrm{i}} = \text{konst.},$$

wobei unter abgeschlossen ein System gemeint ist, welches mit seiner Umgebung nicht wechselwirkt.

14. In einem abgeschlossenen System ist der *Gesamtimpuls eine Erhaltungsgrösse*, d. h.

$$\vec{p}_{\mathrm{Tot}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \vec{p}_{\mathrm{i}} = \text{konst.}$$

15. Da bei unelastischen Stössen die Energie nicht erhalten ist, bestimmt man ihren Verlust, die sogenannte *Deformationsenergie* E_{Def}. Sie ist die Energiedifferenz zwischen der Gesamtenergie vor dem Stoss E_{Tot} und der Gesamtenergie nach dem Stoss E'_{Tot}, d. h.

$$E_{\mathrm{Def}} = E_{\mathrm{Tot}} - E'_{\mathrm{Tot}}.$$

16. Für die Geschwindigkeiten $(\vec{v}_1', \vec{v}_2')$ nach einem *vollkommen elastischen Stoss* bei dem die Masse m_1 mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ und die Masse m_2 mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ kollidieren, gelten:

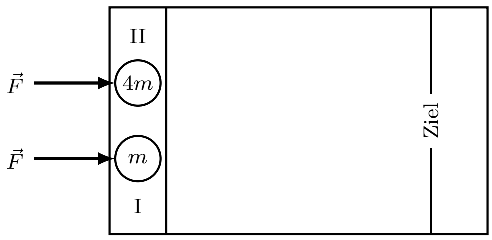
$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

und

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}.$$

Konzeptfragen Kapitel B3

1. Die Abbildung zeigt zwei Pucks auf einem reibungsfreien Tisch. Puck II ist viermal so schwer wie Puck I. Ausgehend vom Ruhezustand werden die Pucks durch zwei gleiche Kräfte über den Tisch geschoben.

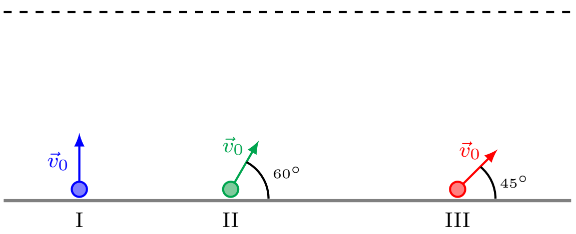


a. Welcher Puck hat die grössere kinetische Energie, wenn er die Ziellinie erreicht?
- ☐ I
- ☐ II
- ☐ Beide haben den gleichen Wert.
- ☐ Zu wenig Informationen für eine Antwort.

b. Welcher Puck erreicht als erster die Ziellinie?
- ☐ I
- ☐ II
- ☐ Sie werden beide gleichzeitig die Ziellinie erreichen.
- ☐ Zu wenig Informationen für eine Antwort.

c. Welcher Puck hat den grösseren Impuls, wenn er die Ziellinie erreicht?
- ☐ I
- ☐ II
- ☐ Sie haben beide den gleichen Impuls.
- ☐ Zu wenig Informationen für eine Antwort.

2. Drei Kugeln werden von der gleichen horizontalen Ebene mit dem gleichen Betrag der Geschwindigkeiten $\vec{v}_0$ wie unten dargestellt abgeschossen. Die Kugel I wird senkrecht nach oben geworfen, die Kugel II in einem Winkel von 60° und die Kugel III in einem Winkel von 45°.

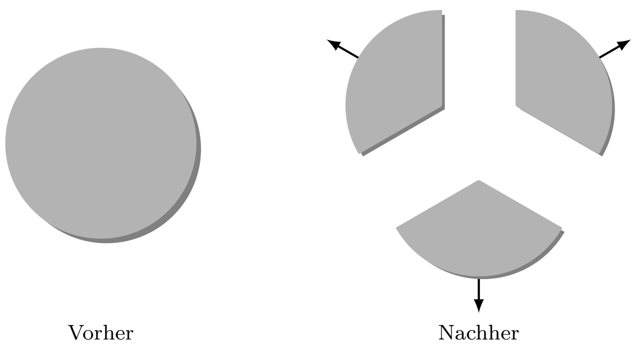


Geben Sie in der Reihenfolge der abnehmenden Geschwindigkeit (die schnellste zuerst) an, welche Geschwindigkeit jede Kugel erreicht, wenn sie die gestrichelte horizontale Linie erreicht. Alle drei Kugeln haben eine ausreichende Geschwindigkeit, um die gestrichelte Linie zu erreichen.

- ☐ I, II, III
- ☐ I, III, II
- ☐ III, II, I
- ☐ Sie haben alle die gleiche Geschwindigkeit.
- ☐ Nicht genügend Informationen, ihre Geschwindigkeiten hängen von ihren Massen ab.

3. Eine Bombe, die auf einer horizontalen, reibungsfreien Fläche ruht, explodiert und zerbricht in drei Teile, die horizontal auseinanderfliegen, wie unten dargestellt.

Ansicht von oben



Wählen Sie alle Aussagen aus, die nach der Explosion der Bombe wahr sein müssen.

I Die gesamte kinetische Energie der Bombenfragmente ist die gleiche wie die der Bombe vor der Explosion.

II Der Gesamtimpuls der Bombenfragmente ist derselbe wie der der Bombe vor der Explosion.

III Der Gesamtimpuls der Bombenfragmente ist gleich Null.

Mögliche Antwort sind:
- ☐ nur I
- ☐ nur II
- ☐ nur III
- ☐ nur II und III
- ☐ I, II und III

4. Drei Fahrräder nähern sich einem Hügel wie unten beschrieben:

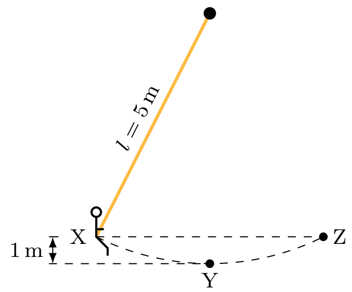
I Radfahrerin 1 hört am Fuss des Hügels auf zu treten, und ihr Fahrrad rollt den Hügel hinauf.

II Radfahrerin 2 tritt in die Pedale, so dass ihr Fahrrad mit konstanter Geschwindigkeit den Berg hinauffährt.

III Radfahrerin 3 tritt kräftiger in die Pedale, so dass ihr Fahrrad den Berg hinauf beschleunigt.

Wählen Sie alle Fälle aus, in denen die gesamte mechanische Energie des Radfahrers und des Fahrrads erhalten bleibt, ohne die verzögernde Wirkung der Reibung zu berücksichtigen.
- ☐ nur I
- ☐ nur II
- ☐ nur I und II
- ☐ nur II und III
- ☐ I, II und III

5. X und Z markieren die höchste und Y die niedrigste Position eines 50.0 kg schweren Jungen, der wie in der Abbildung dargestellt schwingt.



a. Wie hoch ist die Geschwindigkeit des Jungen am Punkt Y?
- ☐ 2.5 m/s
- ☐ 7.5 m/s
- ☐ 10.0 m/s
- ☐ 12.5 m/s
- ☐ Keine der oben genannten Möglichkeiten.

b. Wie gross ist die Kraft im Seils am Punkt Y?

- ☐ 250 N
- ☐ 525 N
- ☐ $7 \cdot 10^2$ N
- ☐ $1.1 \cdot 10^3$ N
- ☐ Keine der oben genannten Möglichkeiten.

Aufgaben Kapitel B3

Weitere einfachere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:
https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0 in den Kapiteln 6 & 8.

1. Bestimmen Sie die Arbeit in den folgenden Teilaufgaben.

a. Sie lassen eine Masse $m = 2\,\mathrm{kg}$ aus einer Höhe $\Delta h = 10\,\mathrm{cm}$ langsam runter.

b. Sie beschleunigen ein Auto von 3 Tonnen von $v_0 = 50\,\mathrm{km/h}$ auf die dreifache Geschwindigkeit.

c. Eine Feder mit der Federkonstante $D = 3\,\mathrm{N/m}$ wird aus der Ruhelage um $x = 3\,\mathrm{cm}$ verlängert.

d. Ein Körper $m = 100\,\mathrm{g}$ gleite mit dem Gleitreibungskoeffizienten $\mu = 0.3$ eine horizontale Strecke von $s = 10\,\mathrm{cm}$ entlang.

Lsg: **a.** $W_{\mathrm{Hub}} \approx -2\,\mathrm{J}$ **b.** $W_{\mathrm{Besch}} \approx 2.3\,\mathrm{MJ}$ **c.** $W_{\mathrm{Span}} \approx 1.35\,\mathrm{mJ}$ **d.** $W_{\mathrm{Reib}} \approx -3\,\mathrm{cJ}$

2. Sie schieben einen Gegenstand mit konstanter Geschwindigkeit eine schiefe Ebene der Länge $l = 5\,\mathrm{m}$ hoch. Die Reibungskraft ist $F_{\mathrm{R}} = 5\,\mathrm{N}$. Welche Arbeit leisten Sie, wenn der Gegenstand $m = 10\,\mathrm{kg}$ wiegt und die Ebene auf einer Höhe $h = 2\,\mathrm{m}$ endet.

Lsg: $W \approx 225\,\mathrm{J}$

3. Ein Lift der Neat-Tunnelbaustelle befördert 51 Tonnen in $49\,\mathrm{s}$ $900\,\mathrm{m}$ nach oben. [NZZ 4. Mai 2002 S. 15] Wie gross ist die durchschnittliche mechanische Leistung?

Lsg: $P \approx 9.4\,\mathrm{MW}$

4. In *Sulzer Technical Review 3/99* finden sich folgende Angaben über das Pumpspeicherkraftwerk XIKOU (China):

- Im Pumpbetrieb nimmt es $44\,\mathrm{MW}$ auf und fördert damit $13.1\,\mathrm{m^3/s}$ Wasser auf eine Höhe von $276\,\mathrm{m}$,
- im Turbinenbetrieb liefert es $41.4\,\mathrm{MW}$ bei einer Fallhöhe von $242\,\mathrm{m}$, einem Volumenstrom von $17.3\,\mathrm{m^3/s}$ und 600 Umdrehungen pro Minute.

a. Wie gross ist der Wirkungsgrad im Pumpbetrieb?

b. Wie gross ist der Wirkungsgrad im Turbinenbetrieb?

Lsg: **a.** $\eta_{\mathrm{P}} \approx 0.823$ **b.** $\eta_{\mathrm{T}} \approx 0.988$

5. Ein starker Schuss $v_{\mathrm{S}} = 80\,\mathrm{km/h}$ wird vom Torhüter $m_{\mathrm{T}} = 80\,\mathrm{kg}$ in der Luft gefangen. Der Ball wiegt $m_{\mathrm{B}} = 450\,\mathrm{g}$. Wie gross ist ...

a. ... der Impuls, welcher dem Torhüter übertragen wird?

b. ... die Geschwindigkeit mit welcher, der Torhüter und Ball zurückfliegen?

c. ... die Kraftwirkung auf den Torhüter, falls das Halten des Balles 0.1 s dauert?

Lsg: **a.** $\Delta p \approx 10.0\,\mathrm{kg\,m/s}$ **b.** $v \approx 0.12\,\mathrm{m/s}$ **c.** $F \approx 100.0\,\mathrm{N}$

6. Ein $150\,\mathrm{g}$ schwerer Baseball trifft mit einer Geschwindigkeit von $150\,\mathrm{km/h}$ auf einen Schläger und wird in umgekehrter Richtung mit einer Geschwindigkeit von $210\,\mathrm{km/h}$ zurückgeschlagen. Wie gross ist die mittlere Kraft, die der Schläger während des $5.0\,\mathrm{ms}$ dauernden Kontakts mit dem Ball auf diesen ausübt?

Lsg: $F \approx 3\,\mathrm{kN}$

7. Ein Golfball $m \approx 45\,\mathrm{g}$ soll die $s = 200\,\mathrm{m}$ Marke erreichen. Dies mit der kleinst möglichen Krafteinwirkung. Mit welcher Kraft müssen Sie den Ball treffen, falls der Stoss etwa eine Millisekunde dauert.

Lsg: $F \approx 2.0\,\mathrm{kN}$

8. Sie lenken ein Fadenpendel der Länge $l = 10\,\mathrm{cm}$ um den Winkel $\alpha = 60°$ aus. Welche Geschwindigkeit hat das Pendel am tiefsten Punkt, falls sie ihm eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$ geben.

Lsg: $v \approx 3.2\,\mathrm{m/s}$

9. Ein Körper der Masse $2\,\mathrm{kg}$ werde $4\,\mathrm{m}$ vor einer praktisch masselosen Feder auf einer reibungsfreien, schiefen Ebene losgelassen. Die Federkonstante sei $D = 100\,\mathrm{N/m}$, und der Neigungswinkel der Ebene betrage $\alpha = 30°$.

a. Bestimmen Sie die maximale Stauchung der Feder.

b. Die Ebene sei nicht reibungsfrei, sondern habe eine Gleitreibungszahl von 0.2 mit dem Körper. Wie gross ist dann die maximale Stauchung?

c. Wie weit bewegt sich der Körper unter den in **b.** gegebenen Voraussetzungen wieder die Ebene hinauf, nachdem er die Feder verlassen hat, gemessen von der Gleichgewichtslage der Feder aus?

Lsg: **a.** $x_\mathrm{a} = 1.0\,\mathrm{m}$ **b.** $x_\mathrm{b} = 0.79\,\mathrm{m}$ **c.** $x_\mathrm{c} = 1.5\,\mathrm{m}$

10. Sie schiessen mit einer Pistole mit Masse $m = 50\,\mathrm{g}$ durch einen Holzklotz der Masse $M = 250\,\mathrm{g}$. Das Geschoss mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $150\,\mathrm{m/s}$ durchdringt den Körper vollständig und fliegt danach noch mit 10% der Anfangsgeschwindigkeit weiter. Wie schnell bewegt sich der Klotz, sofern er vorher in Ruhe war?

Lsg: $V \approx 27\,\mathrm{m/s}$

11. Eine $m = 16\,\mathrm{g}$-Kugel werde in das $M = 1.5\,\mathrm{kg}$ Gewichtsstück eines ballistischen Pendels geschossen. Bei maximaler Auslenkung bilden die Halteschnüre einen Winkel von $\alpha = 10°$ mit der Vertikalen. Die Pendellänge betrage $l = 2.3\,\mathrm{m}$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Kugel.

Lsg: $v \approx 79.2\,\mathrm{m/s}$

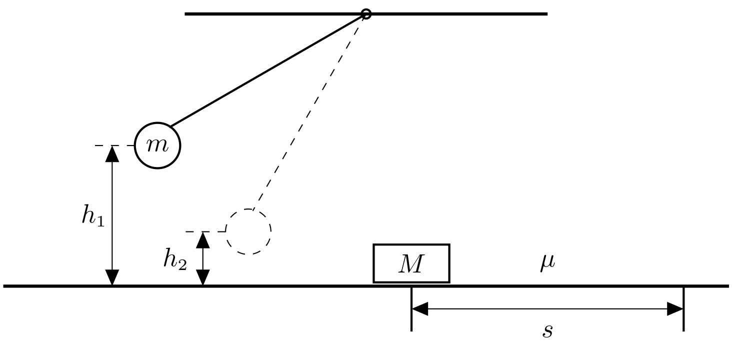
12. Mit einer Apparatur können zwei Gummibälle aus der Anfangshöhe h exakt vertikal übereinander fallen gelassen werden (m_1 über m_2). Der Aufprall am Boden und der kurz darauf folgende gegenseitige Stoss sind völlig elastisch und gerade. Die Ausdehnung der Bälle ist zu vernachlässigen. Der Stoss zwischen den Bällen nach dem Aufprall, kann auf der Höhe $h = 0\,\mathrm{m}$ angenommen werden. (m_1 kommt von oben, m_2 kommt von unten)

a. Wie hoch sind die Steighöhen h_1 und h_2 für allgemeine Massen m_1 und m_2?

b. Wie hoch sind sie im Spezialfall, dass der obere Ball m_1 viel leichter ist als der untere, d. h. $m_1 \lll m_2$?

Lsg: **a.** $h_1 = h\left(\frac{3m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)^2$, $h_2 = h\left(\frac{m_2-3m_1}{m_1+m_2}\right)^2$ **b.** $h_1 = 9h$, $h_2 = h$

13. Ein Pendel, welches aus einen Ball der Masse m bestehe, werde von der Höhe h_1 ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen und treffe am tiefsten Punkt ($h_0 = 0$) auf einen Quader der Masse M. Der Quader gleite horizontal um die Distanz s, bevor es unter dem Einfluss der Reibung mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ stehen bleibt (vgl. Skizze).



Zeigen Sie, dass die Strecke s die folgende Form hat:

$$s = \frac{9m^2}{4\mu M^2} h_1,$$

sofern der Ball nach dem Stoss mit dem Klotz um die Höhe $h_2 = 0.25h_1$ zurückreflektiert wird und der Stoss unelastisch ist. (Betrachten Sie die Körper als Massenpunkte.)

Lsg: –

Literaturverzeichnis

[1] URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter`, Juni 2012

[2] URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem`, Juni 2012

[3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935`

[4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays $B^0_{(s)}$t$\mu^+\mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007

[5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807

[6] URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Steradiant`, Juni 2012

[7] Aristoteles,

[8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590

[9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997

[10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955

[11] URL: `http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html`, September 2013

[12] URL: `http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index`

[13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011

[14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG

[15] URL: `http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/`, April 2013

[16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007

[17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG

[18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994

[19] URL: `https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical`

[20] Hans Kammer, Irma Mgeladze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG

[21] URL: `https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal`

[22] Wikipedia, URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid`, August 2013

[23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010

[24] URL: `http://www.schulserver.hessen.de/`, Oktober 2013

[25] URL: `http://www.leifiphysik.de`, September 2013

[26] URL: `http://photos.zoochat.com`, Semptember 2013

[27] URL: http://www.lab-laborfachhandel.de, Oktober 2013

[28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,

[29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014

[30] URL: https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen, März 2024

[31] URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707

[32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press

[33] URL: http://ephex.phys.ethz.ch, Februar 2015

[34] URL: http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html, März 2015

[35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas opitscher Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962

[36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004

[37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018

[38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001

[39] URL: https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en, Juli 2018

[40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998

[41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869

[42] URL: http://www.tf.uni-kiel.de, März 2014

[43] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik), März 2014

[44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014

[45] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png, März 2014

[46] URL: http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscode.htm, August 2014

[47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494

[48] URL: http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm, Oktober 2014

[49] URL: http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm, Oktober 2014

[50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014

[51] URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639, Oktober 2017

[52] URL: https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen, Oktober 2017

[53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022

[54] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode, September 2022

[55] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg, November 2023

[56] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen, April 2024

[57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor

[58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.

[59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.

[60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

[61] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Relativität_der_Gleichzeitigkeit, August 2018

[62] URL: http://static.a-z.ch, März 2015

[63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925

[64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413

[65] URL: http://www.peter-glowatzki.de, Mai 2015

[66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941

[67] URL: http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche, Mai 2015

[68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)

[69] URL: http://w3.pppl.gov/, September 2015

[70] O. Höfling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wärme. 15. Auflage. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1994

[71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database, April 2018

[72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)

[73] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung, April 2018

[74] URL: http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von..., Juni 2012

[75] L. Susskind und G. Hrabovsky, The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics, Basic Books, 2014