5 Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

Lernziele

- Sie verstehen den elektrischen Schwingkreis mit all den verschiedenen elektrischen Bauelementen.
- Sie können zum elektrischen Schwingkreis die Differentialgleichung lösen.
- Sie kennen und verstehen einige Anwendungen zum elektrischen Schwingkreis.
- Sie verstehen die Entstehung einer elektromagnetischen Welle durch einen offenen Schwingkreis.
- Sie können die Maxwell'schen Feldgleichungen nachvollziehen.
- Sie kennen die drei vorgestellten Strahlungsquellen.

Es war James Clerk Maxwell, ein schottischer Physiker, der erkannte, dass Licht im Grunde genommen eine elektromagnetische Welle ist. Vor ihm waren die beiden Gaussschen Gesetze für das elektrische und magnetische Feld sowie das Faradaysche Gesetz bekannt. Das Ampèresche Gesetz kannte man zwar bereits, es war jedoch nicht konsistent mit den anderen Gesetzen. Die anderen Gesetze waren bereits Lorentzinvariant, das letzte jedoch nicht. Diese Inkonsistenz hat Maxwell behoben und führte den sogenannten Verschiebungsstrom ein. Erst dadurch war es ihm möglich, aus diesen vier Gleichungen die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen abzuleiten.

Im vorherigen Kapitel haben wir Schaltungen betrachtet, die Kapazitäten oder Induktivitäten beinhalten. Dies soll nun fortgesetzt werden, denn es bildet den Ausgangspunkt für das Verständnis von elektromagnetischen Wellen. Bevor wir zu den Strahlungsquellen kommen, betrachten wir zuerst den *elektrischen Schwingkreis* und gehen dann zum *offenen Schwingkreis* und zur Antenne über. Anschliessend widmen wir uns den *Maxwellschen Feldgleichungen* und leiten daraus die elektromagnetischen Wellen ab. Schliesslich werden wir die verschiedenen Arten von *Strahlungsquellen* untersuchen.

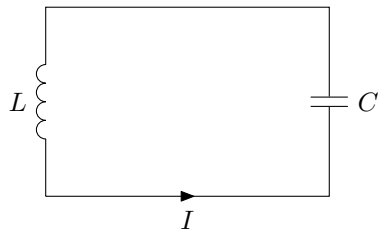
5.1 Elektrische Schwingkreis

In diesem Abschnitt behandeln wir verschiedene Schwingkreise. Wir haben bereits die Vorstufe des Schwingkreises besprochen, nämlich die Schaltungen mit Wechselspannung, Kapazität und Induktivität, die auch als C-Schwingkreise und L-Schwingkreise bezeichnet werden. Manche Definitionen beschreiben einen Schwingkreis als den periodischen Austausch von Energie zwischen dem magnetischen Feld der Spule und dem elektrischen Feld des Kondensators. Dies ist im C- und L-Schwingkreis nicht der Fall.

In diesem Zusammenhang sollen nur Serieschaltungen von L, C und R Widerständen betrachtet werden. Es wird sich zeigen, dass wir die Theorie des harmonischen Oszillators[1] hier wieder verwenden werden können. Wir schauen uns den LC- und den LCR-Schwingkreis ohne Quelle und den LCR-Schwingkreis mit Quelle an.

5.1.1 LC-Schwingkreis ohne Quelle

Der LC-Schwingkreis ohne Quelle besteht aus einer Kapazität und einer Induktivität. Die Schaltung sieht wie folgt aus:



Nach Anwendung der Maschenregel ergibt sich, dass die Summe der Spannungen über der Kapazität U_C und der Induktivität U_L verschwindet, das heisst.

$$U_\mathrm{C} + U_\mathrm{L} = 0$$

[1] Zur Repetition schauen Sie sich doch das Kapitel E.1 nochmals an.

Es gilt $U_\mathrm{C} = \frac{Q}{C}$ und $U_\mathrm{L} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ und somit erhalten wir:

$$\frac{Q}{C} + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Q}{C},$$

wobei $I = \dot{Q}$ verwendet wurde. Wir erinnern uns an die Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx.$$

Damit erhalten wir analog:

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{LC}Q$$

und somit ist $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Somit ist auch klar, was die Lösung dieser Gleichung ist, es gilt:

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad I(t) = -I_0\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

wobei $I_0 = Q_0\omega_0$ ist. Der Schwingkreis schwingt mit einer Kreisfrequenz, die umgekehrt proportional zum Produkt aus der Wurzel von Induktivität und Kapazität ist.

Leider ist es in der Praxis nicht möglich, nur mit diesen einfachen Mitteln eine ungedämpfte Schwingung zu erreichen. Dies liegt daran, dass sowohl die Kapazität als auch vor allem die Induktivität einen hohen Innenwiderstand aufweisen. Durch Hinzufügen einiger elektrischer Bauteile könnte man eine ungedämpfte Schwingung erzeugen, jedoch bleibt dies an dieser Stelle unbelegt. Da auch der gedämpfte Fall behandelt wird, wird das Experiment erst im folgenden Abschnitt gezeigt.

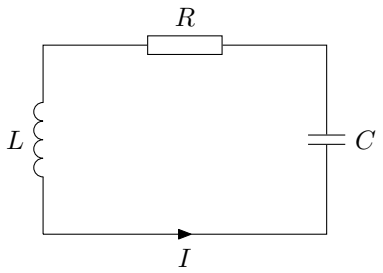
Vor der Behandlung des nächsten Schwingkreises lösen wir noch das folgende Beispiel.

Bsp. i.
Ein Kondensator der Kapazität $2\,\mu$F werde auf $20\,$V aufgeladen und dann mit einer Spule der Induktivität $6\,\mu$H verbunden. a) Berechnen Sie die Frequenz dieses Schwingkreises und b) die Amplitude des Stroms.
Lsg: a) $f \approx 4.6 \cdot 10^4\,$Hz, b) $I_0 \approx 11.5\,$A

Lösung:

5.1.2 LCR-Schwingkreis ohne Quelle

Der LCR-Schwingkreis ohne Energiequelle ist im Wesentlichen dem LC-Schwingkreis analog, jedoch mit dem Unterschied, dass die Induktivität nun real und damit auch mit einem Innenwiderstand versehen ist. Dieser wird in der Darstellung explizit berücksichtigt.



Analog zu vorhin, wenden wir auch hier die Maschenregel an und erhalten:

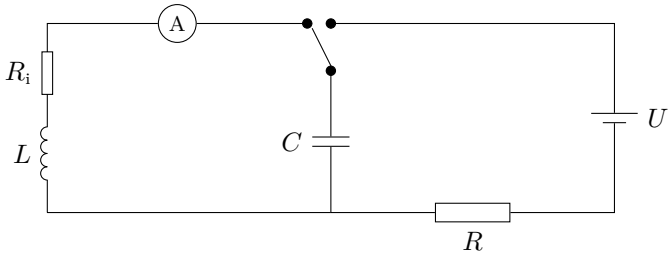
$$U_\mathrm{C} + U_\mathrm{L} + U_\mathrm{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{C} + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR = 0.$$

Mit $I = \dot{Q}$ erhalten wir wieder eine Differentialgleichung in Q, d. h.

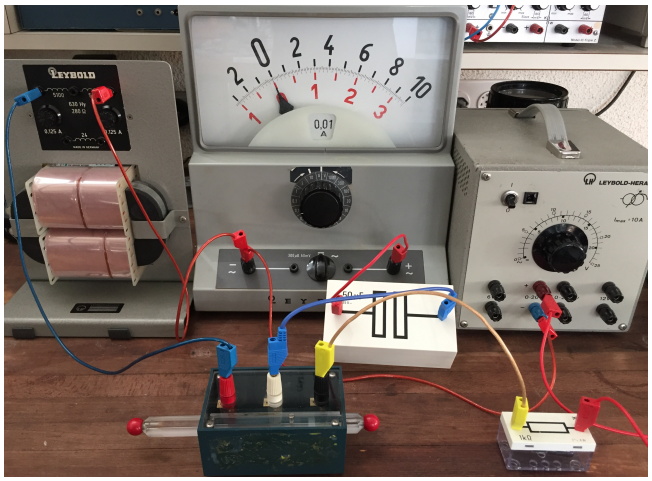
$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Diese DGL entspricht einer gedämpften Schwingung der Form: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$. Da wir diese DGL bereits im Kapitel E Abschnitt 1 gelöst haben, soll sie hier nicht mehr gelöst werden. Wir schauen uns jedoch diese Situation im Experiment an.

Exp. 1: LCR-Schwingkreis
Der LCR-Schwingkreis ist im Grunde auch ein realer LC-Schwingkreis, da die Innenwiderstände grosser Induktivitäten sehr hoch sind. In diesem Zusammenhang betrachten wir nun einen realen LC-Schwingkreis, bei dem wir zwei Maschen mit einem Schalter verbinden. Die rechte Masche dient der Aufladung der Kapazität, wobei wir einen Widerstand zwischen den beiden Elementen schalten, um den Ladestrom gering zu halten. In der linken Masche ist lediglich eine Induktivität mit der Kapazität verbunden. Da die Induktivität einen hohen Innenwiderstand aufweist, kann diese Schaltung auch als LCR-Schwingkreis betrachtet werden. Das Schaltbild verdeutlicht dies wie folgt:

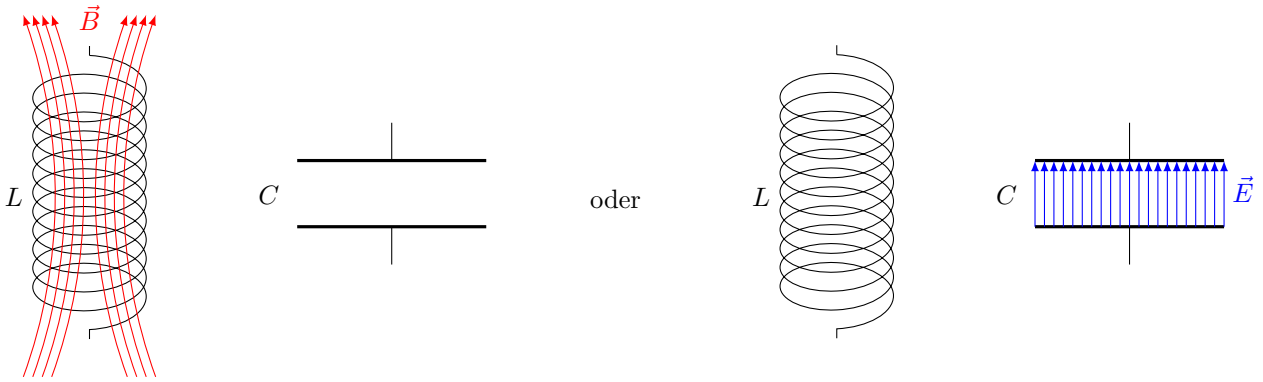


Es wurde ein Widerstand von 1 kΩ, eine Kapazität von 50 μF und eine Induktivität von 630 H mit einem Innenwiderstand von 280 Ω gewählt.

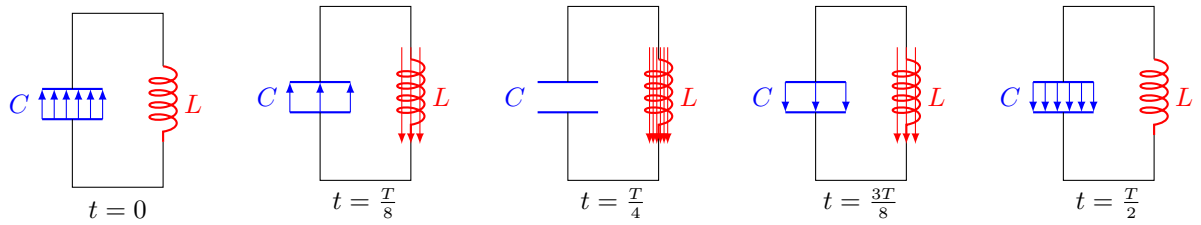


Nachdem die Kapazität geladen worden ist, wird der Schalter auf die linke Position gestellt, um zu beobachten, wie der Strom gedämpft um die Nulllage schwingt. Aufgrund des beachtlich hohen Widerstands ergibt sich eine fast überkritische Dämpfung.

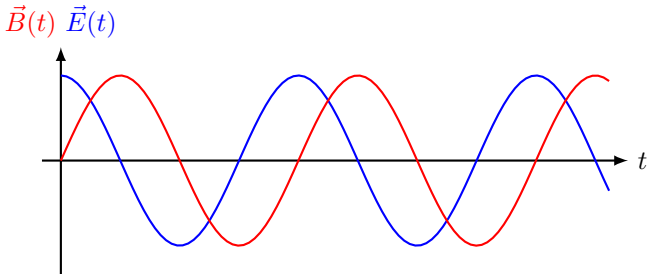
Lassen Sie uns den Schwingkreis genauer betrachten und herausfinden, was hier tatsächlich schwingt. Dafür vergrössern wir die Spule und die Kapazität etwas, und vernachlässigen den Widerstand, um die Dämpfung ausser Acht zu lassen.



Der Strom in der Spule erzeugt ein Magnetfeld, welches jedoch nur entsteht, wenn die Kapazität sich entlädt. In diesem Moment verschwindet das elektrische Feld. Das Magnetfeld erzeugt wiederum ein Gegenstrom, welcher der Ursache entgegenwirkt und somit zu einer Reduktion des Feldes führt. Dadurch lädt sich die Kapazität wieder auf und es entsteht erneut ein elektrisches Feld. Im ungedämpften Fall schwingt der Schaltkreis, indem er abwechselnd magnetische und elektrische Felder erzeugt.



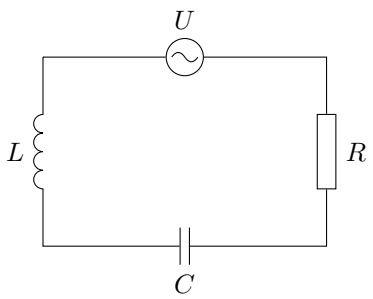
Die Darstellung der elektrischen und magnetischen Felder in Abhängigkeit von der Zeit entspricht dem folgenden Diagramm.



Als letzten Schwingkreis schauen wir uns den LCR-Kreis mit einer Quelle an. Der Leser wird wahrscheinlich bereits erkannt haben, um welche Art von Schwingung es sich dabei handelt.

5.1.3 LCR-Schwingkreis mit Quelle

Wir betrachten nun einen Schwingkreis, der aus einer Wechselspannungsquelle und mehreren elektrischen Komponenten in einer Reihe besteht. Die Wechselspannungsquelle erzeugt dabei den Schwingkreis. Der Aufbau des Schwingkreises ist wie folgt:



Die Reihenfolge dieser Elemente spielt keine Rolle. Auch hier verwenden wir die Maschenregel und erhalten:

$$U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \frac{Q}{C} - IR = 0.$$

Hier sollten wir eine andere Lösung wählen. Wir leiten die Gleichung nach der Zeit ab, um nicht wieder über die Ladung gehen zu müssen, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C}.$$

Dies entspricht einer erzwungenen gedämpften Schwingung, welche durch eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben wird. Wir beabsichtigen, diese Differentialgleichung mittels komplexem Ansatz zu lösen. Sei

$$U(t) = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad \text{und} \quad I(t) = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi)}.$$

Eingesetzt in die DGL erhalten wir eine komplexe Gleichung:

$$(-\omega^2 L + \mathrm{i}\omega R + \frac{1}{C})I = \mathrm{i}\omega U.$$

Es zeigt sich, dass in diesem Fall der Umweg über die komplexen Zahlen formal vieles vereinfacht. Jedoch müssen wir, um fortfahren zu können, einen komplexen Widerstand definieren. Wir verwenden dabei die gleichen Prinzipien im realen Fall.

Def. 1: *(Komplexer Widerstand) Der komplexe Widerstand Z ist definiert als das Verhältnis aus der komplexen Spannung U und dem komplexen Strom I, d. h.*

$$\boxed{Z = \frac{U}{I}}$$

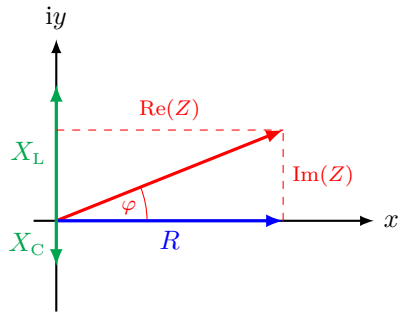
Mit dieser Definition ergibt sich für den komplexen Widerstand Z:

$$Z = \frac{U}{I} = R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

oder mithilfe der Blindwiderstände (X_C,X_L):

$$Z = \frac{U}{I} = R + \mathrm{i}\left(X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C}\right).$$

Der komplexe Widerstand kann in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ als Zahl mit dem Realteil $\mathrm{Re}(Z) = R$ und Imaginärteil $\mathrm{Im}(Z) = (X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C})$ dargestellt werden.



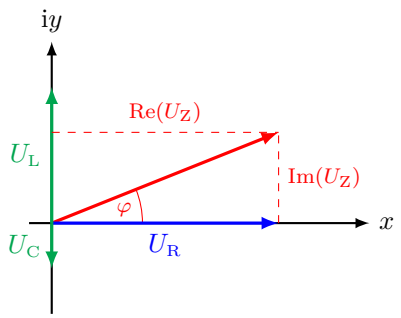
Solche Diagramme heissen Zeigerdiagramme und sind in der Elektrotechnik sehr praktisch, um Phasenverschiebungen schnell und einfach zu berechnen. Bitte beachten Sie, dass Z ein komplexer Widerstand ist und somit nicht real. Jede physikalisch sinnvolle Lösung muss real sein. Daher ist der Scheinwiderstand, auch Impedanz genannt, sein Betrag.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C})^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

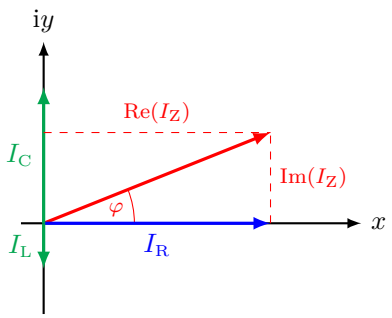
Der Winkel φ, der die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom beschreibt, lässt sich durch folgende Formel berechnen:

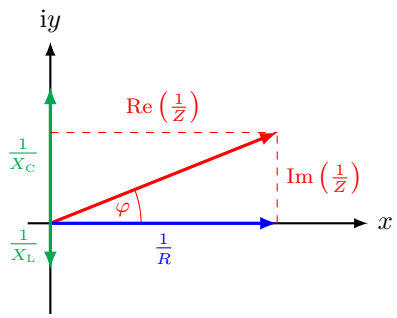
$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Tatsächlich konnten die Widerstände in diesem Fall nur miteinander addiert werden, da es sich um eine Serieschaltung handelt und im Prinzip die komplexen Spannungen miteinander addiert wurden, d.h.



Analog gilt für die Parallelschaltung von ohmschen Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten, dass die Ströme addiert werden[2], also:





Daraus erhalten wir:

$$I_Z = I_R + \mathrm{i}(I_C - I_R) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_R}\right).$$

und die Phasenverschiebung:

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}.$$

Wir kehren jetzt zurück zur Schwingkreis der Serieschaltung. Leider gibt es immer noch das Problem, dass die Spule aufgrund ihres Innenwiderstands ohne ohmschen Widerstand nicht richtig funktioniert. Das bedeutet, dass wir immer eine gedämpfte erzwungene Schwingung haben und Resonanzeffekte nur begrenzt auftreten. Trotzdem betrachten wir kurz, was passiert, wenn wir die Anregungsfrequenz kontinuierlich erhöhen.

- Für niedrige Frequenzen ist der induktive Blindwiderstand $X_L = \omega L$ gering und der kapazitive $X_C = \frac{1}{\omega C}$ sehr hoch. Die Amplitude des Stroms $I_0 = \frac{U_0}{|Z|}$ ist dementsprechend niedrig. Die Phasenverschiebung φ ist negativ.

- Steigt die Frequenz weiter an, so erhöht sich der induktive Widerstand X_L und der kapazitive Widerstand X_C verringert sich. Wenn $X_L = X_C$ gilt, erreicht der Scheinwiderstand $|Z|$ sein Minimum, was gleich R ist und somit die Stromamplitude ihr Maximum erreicht. Die Phasenverschiebung beträgt dann null. Diesen Effekt können wir somit erzielen, wenn

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- Bei einer Erhöhung der Frequenz, wird der induktive Widerstand X_L grösser als der kapazitive Widerstand X_C. Der Scheinwiderstand erhöht sich dadurch erneut und die Stromamplitude nimmt wieder ab. Es entsteht eine positive Phasenverschiebung.

Bevor wir uns das Experiment ansehen, werden wir unser Verständnis anhand einiger Beispiele vertiefen. Diese wurden direkt aus [18] entnommen.

Bsp. ii.
Ein Reihenschwingkreis, bestehe aus einer Spule mit einer Induktivität 2 H, einem Kondensator mit einer Kapazität 2 μF und einem Widerstand von 20 Ω werden von einem Generator variabler Frequenz gespeist, der eine Wechselspannung mit einem Scheitelwert von 100 V liefer. Welchen Wert hat a) die Resonanzfrequenz? Wie

[2] Beachten Sie, dass sich die Richtungen der Induktivitäten und Kapazitäten geändert haben. Dies hängt jedoch nur davon ab, ob der Imaginärteil mit i oder mit $\frac{1}{\mathrm{i}}$ multipliziert wird. Für die Impedanz am Ende spielt das keine Rolle, da die Klammer quadriert wird.

gross ist b) der Scheitelwert I_0 des Stroms und c) die Phasenverschiebung φ, wenn am Generator eine Frequenz von 60 Hz eingestellt wird? Lsg: a) $f_0 \approx 80\,\mathrm{Hz}$, b) $I_0 \approx 0.18\,\mathrm{A}$, c) $\varphi \approx -88°$

Lösung:

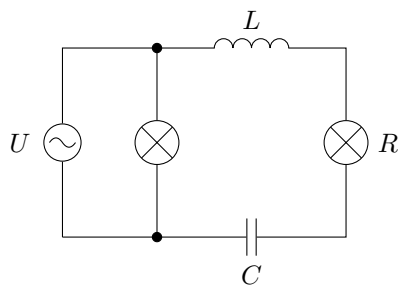
Wir setzen die Untersuchung des gleichen Schwingkreises fort und beschränken uns dabei auf den Resonanzfall. Betrachten wir das folgende Beispiel.

Bsp. iii.
Nehmen Sie den gleichen Schwingkreis wie im letzten Beispiel an. a) Bestimmen Sie die Scheitelwerte der Spannungen: über dem Widerstand, über der Spule und über der Kapazität im Resonanzfall abfallen. b) Zeichnen Sie das dazugehörige Zeigerdiagramm. Lsg: a) $U_\mathrm{R} \approx 100\,\mathrm{V}$, $U_\mathrm{L} \approx U_\mathrm{C} \approx 5\,\mathrm{kV}$, b) –

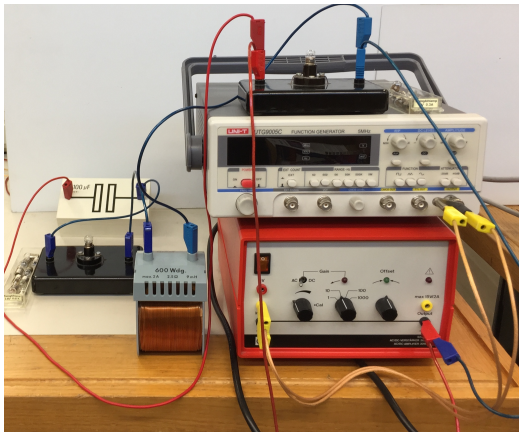
Lösung:

Wir sind nun in der Lage, das folgende Experiment zu verstehen. Hier soll nicht die Schwingung, sondern das Resonanzverhalten gezeigt werden.

Exp. 2: LCR-Schwingkreis mit Quelle
Eine Wechselspannungsquelle mit veränderlicher Frequenz ist in Reihe mit einer Glühlampe geschaltet. Parallel dazu ist ein LCR-Schwingkreis geschaltet, in dem ebenfalls eine Glühlampe als zusätzlicher Widerstand dient. Die Schaltung sieht wie folgt aus:



Da wir in der Sammlung leider keine Wechselspannungsquelle mit variabler Frequenz haben, die eine ausreichend hohe Leistung liefern kann, um die Lämpchen zum Leuchten zu bringen, müssen wir der Spannungsquelle noch einen Verstärker dazu schalten. Das sieht dann so aus:



Wir verwenden eine Spule mit 600 Windungen und einer Induktivität von $L = 9\,\mathrm{mH}$, einen Kondensator mit einer Kapazität von $C = 100\,\mu\mathrm{F}$. Im Schwingkreis haben wir eine Lampe mit $3.8\,\mathrm{V}/0.07\,\mathrm{A}$ und parallel dazu eine mit $6\,\mathrm{V}/0.3\,\mathrm{A}$.

Mit diesem Aufbau können wir zeigen, dass die Impedanz frequenzabhängig ist. Wie wir bereits hergeleitet haben, gilt für die Impedanz

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C})^2}.$$

Damit ist die Stromamplitude im Schwingkreis:

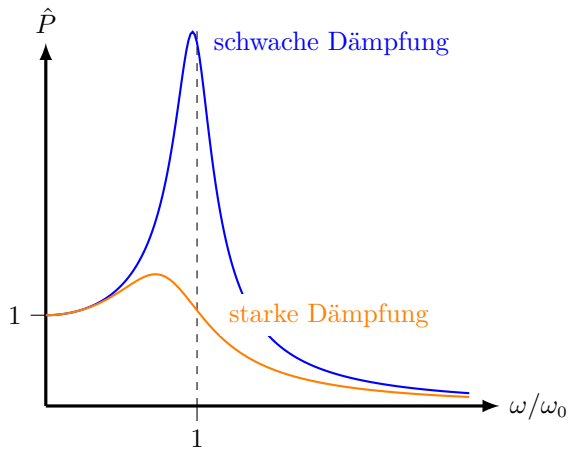
$$I_0 = \frac{U_0}{|Z|}$$

und wird gross, wenn $|Z|$ klein ist und umgekehrt. Das Maximum wird von $|Z|$ im Resonanzfall erreicht, wenn nämlich $X_\mathrm{L} = X_\mathrm{C}$ ist. Dies gilt in diesem Fall für eine Frequenz von:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 170\,\mathrm{Hz}.$$

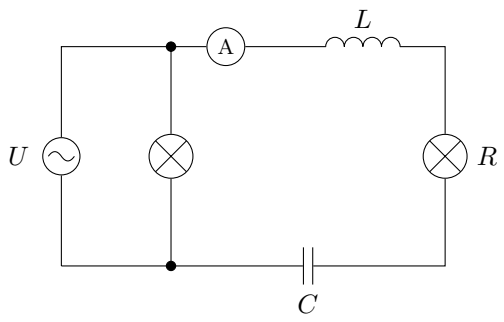
Qualitativ sollte das Lämpchen im Schwingkreis heller leuchten, wenn wir die Quelle um die Resonanzfrequenz einstellen, und weniger hell, wenn wir weit über und weit unter der Resonanzfrequenz sind.

Im Kapitel E haben wir die erzwungene Schwingung behandelt und auch das Resonanzverhalten untersucht. Sie haben dabei die folgende Grafik für eine schwache und eine starke Dämpfung gesehen:



Ein ähnlicher Verlauf kann auch für den Strom im Schwingkreis gemessen werden. Dies soll im folgenden Versuch untersucht werden, der fast baugleich ist.

Exp. 3: LCR-Schwingkreis mit Quelle und Strommessung
Die Schaltung ist praktisch die gleiche wie im letzten Experiment, ausser dass wir jetzt die Stromstärke im Schwingkreis messen. Die Schaltung sieht also wie folgt aus



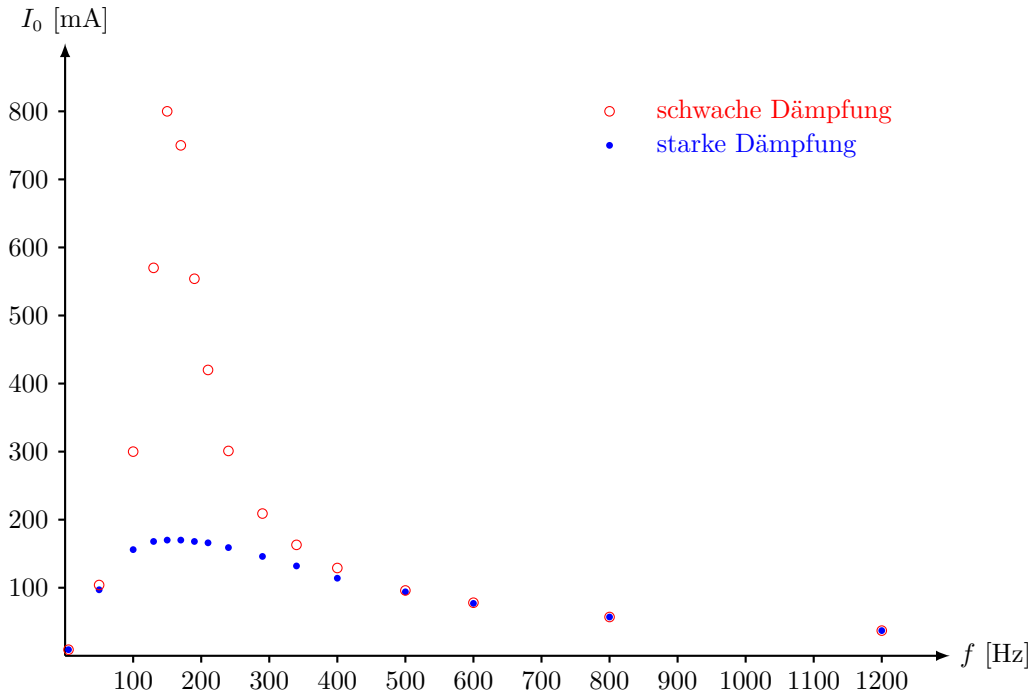
Wir messen nun die Stromamplitude bei verschiedenen Frequenzen und tragen sie schliesslich als Funktion der Frequenz auf.

Starke Dämpfung								
Frequenz f [Hz]	5	50	100	130	150	170	190	210
Stromamplitude I_0 [mA]	9	97	156	168	170	170	168	166
Frequenz f [Hz]	240	290	340	400	500	600	800	1200
Stromamplitude I_0 [mA]	159	146	132	114	94	77	57	37

Bevor die Werte grafisch dargestellt werden, soll die gleiche Messung wiederholt werden, jedoch ohne Glühlampe im Schwingkreis. Dies sollte zu einer geringeren Dämpfung führen.

Schwache Dämpfung								
Frequenz f [Hz]	5	50	100	130	150	170	190	210
Stromamplitude I_0 [mA]	9	104	300	570	800	750	554	420
Frequenz f [Hz]	240	290	340	400	500	600	800	1200
Stromamplitude I_0 [mA]	301	209	163	129	96	78	57	37

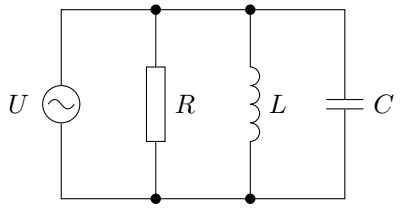
Stellt man dies grafisch dar, so erhält man eine ähnliche Kurve wie oben.



Die Grafik zeigt einen ähnlichen Verlauf, wie wir ihn für starke und schwache Dämpfung erwartet haben. Die starke Dämpfung kommt natürlich von der Glühlampe, die einen grossen Innenwiderstand hat. Sobald man die Glühlampe entfernt, erhält man eine deutliche Resonanz.

Bevor wir uns am Ende dieses Abschnitts einer Anwendung zuwenden, möchten wir neben der Reihenschaltung auch die Parallelschaltung betrachten. Dies soll anhand des folgenden Beispiels geschehen.

Bsp. iv.
Leiten Sie für folgende parallel Schaltung die Impedanz $|Z|$ her. Beachten Sie dabei, dass auch hier die Knotenregel gilt.



Da sich Blindwiderstände formal wie ohmsche Widerstände verhalten, können wir direkt die Knotenregel verwenden. Lsg: –

Lösung:

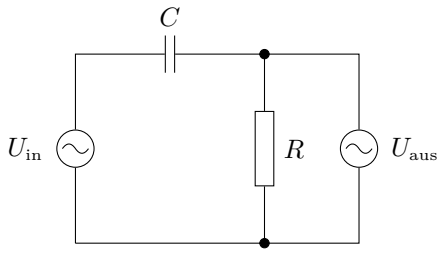
Nach dieser etwas komplizierten Berechnung wird eine schöne Anwendung gezeigt, der Hoch- und Tiefpassfilter.

5.1.4 Anwendung - Hoch- und Tiefpassfilter

Sowohl der Hochpassfilter als auch der Tiefpassfilter werden zunächst theoretisch behandelt und dann experimentell überprüft.

Hochpassfilter

Ein elektrischer Hochpassfilter ist eine Schaltung, die hohe Frequenzen praktisch ungedämpft passieren lässt, tiefe Frequenzen jedoch unterdrückt. Eine der vielen möglichen Ausführungen ist die folgende:



Mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln erhält man für die linke Masche mit der Eingangsspannung U_{in} und dem Strom I durch den Widerstand R:

$$U_{\text{in}} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} I + RI \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{\left(R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}\right)} U_{\text{in}}.$$

Aus der rechten Masche erhalten wir die Ausgangsspannung U_{aus}:

$$U_{\text{aus}} = IR \quad \Rightarrow \quad U_{\text{aus}} = \frac{R}{\left(R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}\right)} U_{\text{in}}.$$

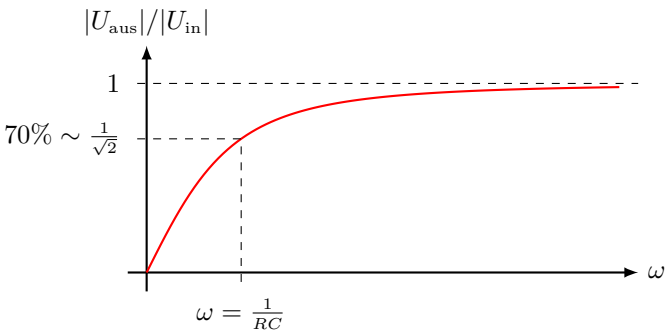
Wir suchen natürlich die tatsächliche Ausgangsspannung, also müssen wir den Betrag von U_{aus} berechnen. Zuerst machen wir den Nenner bruchfrei, indem wir mit $\mathrm{i}\omega C$ erweitern. Dann machen wir den Nenner reell, indem wir mit dem Komplexkonjugierten $(1 - \mathrm{i}\omega CR)$ erweitern. Man erhält schrittweise

$$U_{\text{aus}} = \frac{R}{\left(R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}\right)} \cdot U_{\text{in}} = \frac{\mathrm{i}\omega CR}{\mathrm{i}\omega CR + 1} \cdot U_{\text{in}} = \frac{\omega^2 C^2 R^2 + \mathrm{i}\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \cdot U_{\text{in}}.$$

Daraus können wir nun den Betrag nehmen und erhalten:

$$|U_{\text{aus}}| = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \cdot |U_{\text{in}}|.$$

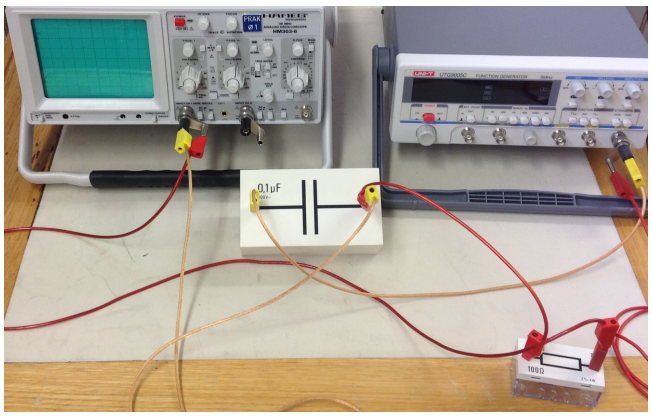
Das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung für ein Hochpassfilter sieht daher wie folgt aus:



Man erkennt, dass bereits nach der Kreisfrequenz von $\omega = \frac{1}{RC}$ 70% des Eingangssignals ausgegeben werden.

Etwas Ähnliches wollen wir uns im Experiment ansehen, und es ist sehr interessant zu sehen, wie eine Rechteckfunktion gefiltert wird. Die Fourier-Analyse hat gezeigt, dass die steilen Flanken der Rechteckimpulse durch die hohen Frequenzen und die flachen Flanken durch die tiefen Frequenzen erzeugt werden. Da der Hochpassfilter die hohen Frequenzen weniger schwächt als die tiefen, werden die Anstiegs- und Abfallflanken fast ungeschwächt durchgelassen. Überprüfen wir das im Experiment.

Exp. 4: Hochpassfilter
Ein Rechteckimpuls wird durch ein Hochpassfilter geschickt, und das Oszilloskop zeigt sowohl das Eingangssignal als auch das Ausgangssignal an (siehe Abbildung).

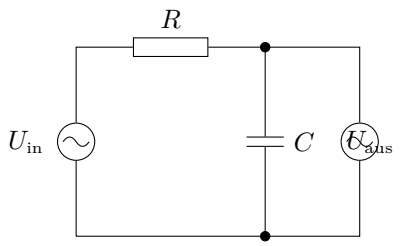


Man sieht sehr deutlich, wie die steilen Kanten des Pulses praktisch ungehindert passieren, während die flachen Zwischenstücke stark gefiltert werden.

In ähnlicher Weise betrachten wir nun den Tiefpassfilter. Wie das Wort schon sagt, werden hier die tiefen Frequenzen durchgelassen.

Tiefpassfilter

Ein elektrischer Tiefpassfilter ist eine Schaltung, die tiefe Frequenzen praktisch ungedämpft passieren lässt, hohe Frequenzen jedoch unterdrückt. Eine der vielen möglichen Ausführungen ist die folgende:



Im Wesentlichen ist er dem Hochpassfilter sehr ähnlich. Nur die Kapazität und der Widerstand werden ausgetauscht. Man spricht von einem Hochpassfilter erster Ordnung. Bei höherer Ordnung wird noch eine Induktivität hinzugefügt.

Mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln erhält man für die linke Masche mit der Eingangsspannung U_{in}, den Strom I und den Widerstand R:

$$U_{\text{in}} = RI + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{\left(R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}\right)} U_{\text{in}}.$$

Aus der rechten Masche erhalten wir die Ausgangsspannung U_{aus}:

$$U_{\text{aus}} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} I \quad \Rightarrow \quad U_{\text{aus}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{i}\omega C}}{\left(R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}\right)} U_{\text{in}}.$$

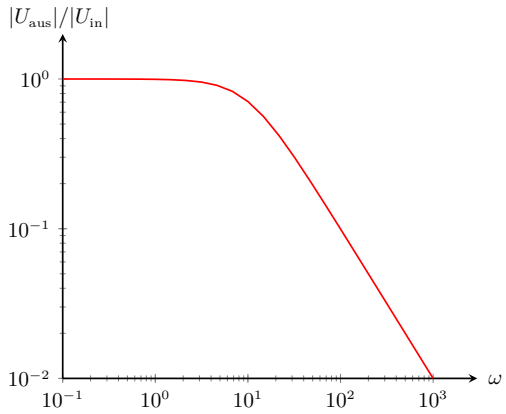
Wir suchen natürlich die reale Ausgangsspannung, daher müssen wir den Betrag von U_{aus} berechnen. Wir machen zuerst den Nenner bruchfrei, indem wir mit $\mathrm{i}\omega C$ erweitern. Danach soll der Nennen reell werden, dies durch Erweitern mit dem Komplexkonjugierten $(1 - \mathrm{i}\omega CR)$. Wir erhalten schrittweise:

$$U_{\text{aus}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{i}\omega R}}{\left(R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}\right)} \cdot U_{\text{in}} = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\omega CR} \cdot U_{\text{in}} = \frac{1 - \mathrm{i}\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \cdot U_{\text{in}}.$$

Daraus können wir nun den Betrag nehmen und erhalten:

$$|U_{\text{aus}}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \cdot |U_{\text{in}}|.$$

Das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung für ein Tiefpassfilter ist also wie folgt. Beachten Sie, dass es sich um eine doppelt-logarithmische Skala handelt. Diese Darstellung wurde mit $RC = 0.1$ erzeugt.



Es ist zu beachten, dass nur sehr kleine Frequenzen ($< 10\,\text{Hz}$) durchgelassen werden. Je nachdem, welche Frequenzen gefiltert werden sollen, muss ein anderer Widerstand und eine andere Kapazität gewählt werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Bsp. v.
Sie möchten einen Hochpassfilter und einen Tiefpassfilter bauen, der a) die hohen Frequenzen ab $f_1 = 1\,\text{kHz}$ zu 90% durchlässt und b) die tiefen Frequenzen unterhalb von $f_2 = 10\,\text{Hz}$ zu 90% durchlässt. Bestimmen Sie für beide Varianten das Produkt aus Widerstand R und Kapazität C. Lsg: a) $(CR)_{\text{H}} \approx 330\,\mu\text{F}\,\Omega$, b) $(CR)_{\text{T}} \approx 7.7\,\text{mF}\,\Omega$

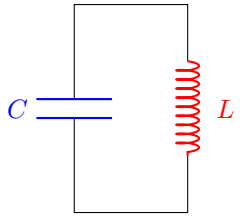
Lösung:

In einer Jukebox ist ein solcher Hoch- und Tiefpassfilter eingebaut. In der Regel haben Musikboxen zwei Ausgänge, einen grösseren und einen kleineren. Aus dem kleineren Ausgang kommen die hohen Töne, er ist also mit einem Hochpassfilter versehen. Der grössere Ausgang liefert die tiefen Töne und wird durch ein Tiefpassfilter bestimmt.

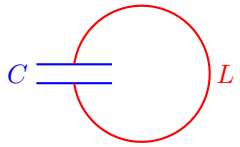
5.2 Offener Schwingkreis

Der offene Schwingkreis - auch Hertzscher Dipol genannt - ist eine Möglichkeit, eine Antenne zu realisieren. Im Folgenden soll nur die Idee skizziert werden, da eine genaue Untersuchung des Phänomens zum einen sehr zeitaufwendig und zum anderen mathematisch anspruchsvoll ist.

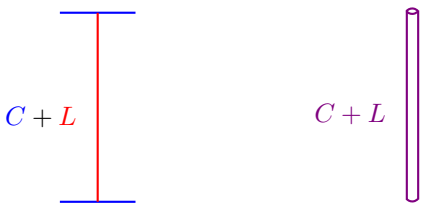
Im letzten Abschnitt wurde der elektromagnetische Schwingkreis behandelt, bei dem die Energie periodisch zwischen dem magnetischen und dem elektrischen Feld hin und her pendelt. Die Idee des Hertzschen Dipols ist es, aus einem geschlossenen Schwingkreis einen offenen Schwingkreis zu erzeugen. Betrachten wir folgende Ausgangssituation



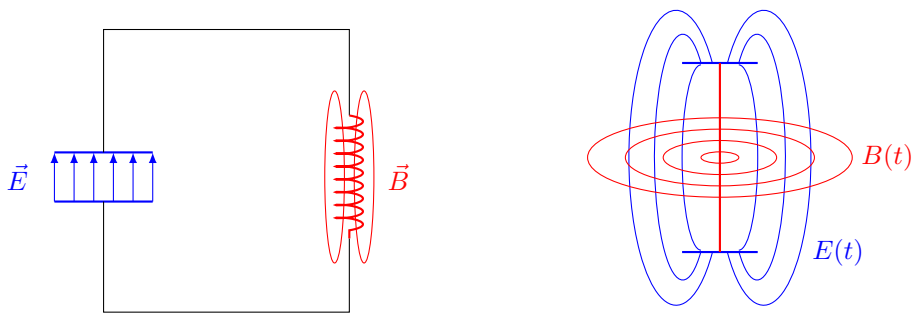
Dieser geschlossene Schwingkreis kann nun kontinuierlich in einen offenen Schwingkreis überführt werden. Die Induktivität L der Spule geht dabei in die Induktivität des Leiters über, wie in der folgenden Abbildung dargestellt.



Das gleiche kann nun mit der Kapazität C gemacht werden, wobei die Kapazität immer kleiner wird und schliesslich in die Kapazität des geraden Leiters übergeht (siehe Abbildung).



Schliesslich kann man auch auf die beiden Platten verzichten und erhält einen einfachen geraden Draht (siehe Bild rechts). Der wesentliche Unterschied zwischen einem geschlossenen und einem offenen Schwingkreis ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Im geschlossenen Schwingkreis sind die elektrischen und magnetischen Felder räumlich lokalisiert, so dass Streufelder vernachlässigbar sind. Im offenen Schwingkreis reichen die Felder weit in den Raum hinein.



Eine zeitliche Änderung der Strom- und Ladungsdichte führt zu einer Änderung der magnetischen und elektrischen Felder. Diese Änderung breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit im Raum aus und führt zu einer Energieabstrahlung dieser Sendeanlage in Form von elektromagnetischen Wellen.

Bsp. vi.
Betrachten Sie eine Antenne und überlegen Sie sich, weshalb a) eine solche Antenne auch $\lambda/2$-Antenne genannt wird. b) Zeichnen Sie für diese Antenne das elektrische Potential $\varphi(x)$ und den Strom $I(x)$ als Funktion des Ortes. Lsg: –

Lösung:

Die erste solche Antenne wurde 1887 von Heinrich Hertz im Labor beobachtet. Natürlich fängt es hier erst an, spannend zu werden, aber wir müssen noch einige andere Konzepte einführen, so dass ich an dieser Stelle genug habe und es den Universitäten überlasse, dieses Thema weiter zu entwickeln.

Wir haben mit der Elektrizitätslehre begonnen und uns die Maxwellschen Feldgleichungen angeschaut. Damals waren wir nicht in der Lage, sie zu verstehen, wir konnten höchstens ihre Schönheit erkennen. Jetzt können wir sie verstehen.

5.3 Maxwellschen Feldgleichungen

Der schottische Physiker James Clerk Maxwell entdeckte bereits 1860, dass sich die aus Experimenten abgeleiteten Gesetze der Elektrizitätslehre oder allgemeiner der Elektrodynamik in vier Gleichungen zusammenfassen lassen. Diese Gleichungen beschreiben die Dynamik elektrischer und magnetischer Felder und haben für die Elektrodynamik eine ähnliche Bedeutung wie die Newtonschen Gesetze für die klassische Mechanik. Im Prinzip lassen sich alle elektromagnetischen Phänomene auf der Basis der Maxwellschen Gleichungen lösen, auch wenn dies in den meisten Fällen schwierig ist.

Wie bereits angedeutet, lässt sich die Existenz elektromagnetischer Wellen relativ einfach aus den Gleichungen ableiten. Zuvor sollen jedoch die vier Gleichungen vorgestellt werden. Hier nur zur Übersicht die Gleichungen in Differentialform:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \qquad \text{(Gausssches Gesetz)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{(Gausssches Gesetz)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faradaysches Induktionsgesetz)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \qquad \text{(Ampèresche Gesetz)}$$

5.3.1 Gausssches Gesetz

Wir beginnen mit den beiden Gaussschen Gesetzen, zunächst für das elektrische Feld. Dieses Gesetz wird oft auch als Coulombsches Gesetz bezeichnet, da es sich auch daraus ableiten lässt. Wie wir im Kapitel zur Elektrostatik G.1 gesehen haben, hängt der elektrische Fluss Φ_{el} durch eine geschlossene Fläche A weder von der Form der Fläche noch von der Ladungsverteilung in ihr ab, sondern nur von der Gesamtladung Q innerhalb des Volumens. Die 1. Maxwell-Gleichung in Integralform ist also:

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{el}} = \oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}.}$$

Daraus möchten wir nun die differentielle Form herleiten. Es ist einfach einsehbar, dass die Ladung Q innerhalb des Volumen V mit der Oberfläche A gegeben ist durch die Ladungsdichte ϱ:

$$Q = \int_V \varrho \, \mathrm{d}\vec{V}.$$

Der Satz von Gauss für ein allgemeines Vektorfeld $\vec{F}$ besagt:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{V} = \oint_A \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$

Beachten Sie das Nabla-Symbol $\vec{\nabla}$. Es steht für die Divergenz von einem Vektorfeld und kann auch als $\mathrm{div}\vec{F}$ geschrieben werden. Weitere Informationen zur Divergenz finden Sie im Anhang M.4. Angewendet auf die Maxwell Gleichung erhalten wir:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{V} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \varrho \, \mathrm{d}\vec{V}.$$

Da auf beiden Seiten über das gleiche Volumen integriert wird, können wir davon ausgehen, dass die Integranden gleich sein müssen, woraus die differentielle Form resultiert. Es gilt:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}.}$$

Die Herleitung der 2. Maxwell-Gleichung erfolgt analog. Der magnetischen Fluss Φ_{m} durch eine geschlossene Fläche A verschwindet. Dies wurde bereits im Kapitel über Magnetismus G.3 gezeigt. Somit ist das 2. Maxwellsche Gesetz in Integralform:

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{m}} = \oint_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0.}$$

Da Null auch als Integral über ein Volumen V geschrieben werden kann, also

$$0 = \int_V 0 \, \mathrm{d}\vec{V}$$

erhalten wir mit dem Satz von Gauss analog:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{V} = \int_V 0 \, \mathrm{d}\vec{V}.$$

Da auch hier auf beiden Seiten über dasselbe Volumen integriert wird, können wir davon ausgehen, dass die Integranden gleich sein müssen, woraus sich die differentielle Form ergibt. Es gilt:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.}$$

Wenden wir uns nun dem dritten und wohl bekanntesten Maxwellschen Gesetz zu, dem Faradayschen Induktionsgesetz.

5.3.2 Faradaysche Induktionsgesetz

Natürlich gehen wir hier von der Form aus, wie wir sie aus dem Kapitel über das Induktionsgesetz kennen. Es gilt:

$$U_{\mathrm{ind}} = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{m}}}{\partial t}.$$

Nun ist die rechte Seite ganz einfach, wir haben den magnetischen Fluss Φ_m durch eine Leiterschleife mit der Fläche A ganz allgemein definiert als:

$$\Phi_\mathrm{m} = \int_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}.$$

Dies entspricht bereits der Integralform der rechten Seite. Die linke Seite ist etwas schwieriger und erfordert einen Satz aus der Mathematik, den wir noch nicht behandelt haben. Er gilt für die induzierte Spannung:

$$U_\mathrm{int} = \oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}.$$

Wir kennen natürlich den Ausdruck $U = Es$. Hier ist s der Abstand zwischen den beiden Enden des elektrischen Feldes. In einer beliebigen Schleife entspricht dies dem Rand der Schleife, d.h. wir integrieren um die Schleife herum. Nichts anderes steht in der Formel. Schon mit diesen beiden Umformungen lässt sich das dritte Maxwellsche Gesetz in Integralform notieren. Es gilt:

$$\boxed{\oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}.}$$

Nun kommt der Satz von Stokes. Er besagt, dass das Integral eines Vektorfeldes über eine geschlossene Schleife gleich der Drehung des Feldes über die von der Schleife eingeschlossene Fläche ist, d.h. im Allgemeinen:

$$\oint_l \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_A \vec{\nabla}\times\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{A}.$$

Beachten Sie das Symbol $\vec{\nabla}\times$. Es steht für die Drehung eines Vektorfeldes und kann auch als $\mathrm{rot}\vec{F}$ geschrieben werden. Weitere Informationen zur Rotation finden sich im Anhang M.4.

Mit dem Satz von Stokes und wenn die Fläche A zeitunabhängig ist, kann die folgende Integralgleichung geschrieben werden:

$$\int_A \vec{\nabla}\times\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = -\int_A \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{A}.$$

Da auf beiden Seiten über die gleiche Fläche integriert wird, muss der Integrand gleich sein. Damit ergibt sich für das dritte Maxwell'sche Gesetz in Differentialform

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.}$$

Kommen wir nun zur letzten Maxwell-Gleichung, dem Ampèreschen Gesetz. Diese Gleichung entspricht auch dem vielleicht besser bekannten Gesetz von Biot-Savart.

5.3.3 Ampèresches Gesetz

Betrachten wir zunächst nur den ersten Teil der vierten Maxwell-Gleichung. Sie ist der ersten Gleichung sehr ähnlich, wenn man das elektrische Feld durch das magnetische Feld und die Ladungsdichte durch die Stromdichte ersetzt. Es ist auch klar, dass für das magnetische Feld nicht die Divergenz, sondern die Rotation verwendet werden muss. Dieser Zusammenhang ergibt sich direkt aus dem Biot-Savart-Gesetz. Betrachten wir einen Spezialfall des Gesetzes für einen Strom, der durch einen geraden Leiter fliesst. Für diesen gilt

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

In der letzten Maxwell-Gleichung taucht ein neuer Term auf, die so genannte Stromdichte. Im Gegensatz zu anderen Dichten, die im Allgemeinen eine Grösse pro Volumen sind, wird die Stromdichte wie folgt definiert

Def. 2: *(Stromdichte) Die elektrische Stromdichte $\vec{j}$ ist definiert als der Strom I, welche senkrecht durch eine Fläche A fliesst, damit erhalten wir für einmal keine explizite Formel:*

$$\boxed{I = \int_A \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{A}.}$$

Mit dieser Definition ist schnell einzusehen, dass

$$B = \int_A \frac{\mu_0}{2\pi r}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}A.$$

Sofern die Fläche A senkrecht zum Strom läuft, ist dieser unabhängig von r und wir können den Faktor $2\pi r$ auf die andere Seite nehmen. Wir erhalten dann:

$$2\pi r \cdot B = \mu_0 \int_A \vec{j}\,\mathrm{d}A.$$

Nun können wir die linke Seite wie folgt schreiben:

$$2\pi r \cdot B = \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l},$$

wobei l der Umfang des Kreises ist und B auf dem Kreis konstant ist. Damit erhalten wir die Gleichung:

$$\oint_l \vec{B}\,\mathrm{d}l = \mu_0 \int_A \vec{j}\,\mathrm{d}A.$$

Mit dem Satz von Stokes lässt sich dies schliesslich schreiben als:

$$\int_A \vec{\nabla} \times \vec{B}\,\mathrm{d}A = \mu_0 \int_A \vec{j}\,\mathrm{d}A$$

und damit erhalten wir den ersten Teil der Maxwell Gleichung ohne das elektrische Feld:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.}$$

Der zweite Teil der Maxwell-Gleichung ist - neben der Zusammenfassung der Gesetze - der wichtigste Beitrag von Maxwell. Er erkannte, dass ein Magnetfeld nicht nur in einem stromdurchflossenen Leiter entsteht, sondern auch, wenn sich das elektrische Feld ändert. Dies führte zum so genannten *Maxwellschen Verschiebungsstrom*. Es gilt:

Ges. 1: *(Maxwellscher Verschiebungsstrom) Ein veränderliches elektrisches Feld $\vec{E}$ induziert eine Stromdichte $\vec{j}_\mathrm{V}$.*

$$\boxed{\vec{j}_\mathrm{V} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.}$$

Damit kann das Biot-Savart-Gesetz verallgemeinert werden und erhält einen zusätzlichen Term. Die gleiche Ableitung ist für den Gesamtstrom $\vec{j}_\mathrm{ges} = \vec{j} + \vec{j}_\mathrm{V}$ möglich. Damit erhalten wir die vierte und letzte Maxwellgleichung in Differentialform:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.}$$

5.3.4 Anwendungen

Bevor wir zu zwei Anwendungen der Maxwell-Gleichungen kommen, wollen wir sie noch einmal in differentieller Form zusammenfassen.

Ges. 2: *(Maxwell Gleichungen) Die vier Maxwell Gleichungen in differentieller Form lauten für ein elektrisches Feld $\vec{E}$ und ein magnetisches Feld B:*

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\varrho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

wobei ϱ die Ladungsdichte und $\vec{j}$ die Stromdichte sind.

Ein wichtiges Gesetz ergibt sich direkt aus der ersten und der letzten Maxwell-Gleichung, nämlich die *Ladungserhaltungsgleichung*. Geht man von der letzten Gleichung aus und nimmt die Divergenz dieser Gleichung, so erhält man

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Für jedes beliebige Vektorfeld ist die Divergenz der Rotation $\left(\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})=0\right)$ null. Da man die Ableitung nach der Zeit mit der Divergenz vertauschen kann, erhält man

$$0=\mu_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}).$$

Nun setzen wir die erste Maxwell Gleichung ein und erhalten die Ladungserhaltungsgleichung:

$$\boxed{0=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\frac{\partial\varrho}{\partial t},}$$

wobei wir noch durch μ_0 dividiert haben.

Was hat diese Gleichung mit der Ladungserhaltung zu tun? Das ist nicht schwer zu verstehen. Der zweite Term gibt die zeitliche Änderung der Ladung an. Diese ist immer umgekehrt gleich gross wie die Änderung der Stromdichte, d.h. wenn sich in einem Raumabschnitt die Ladung ändert, dann muss von irgendwo her Strom nachfliessen.

Aus den Maxwellschen Gleichungen lassen sich auch die Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen ableiten[3]. Wir nehmen zuerst die Rotation der dritten und vierten Gleichung und erhalten:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times B)$$

und ohne Stromdichte $\vec{j}=0$:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times E).$$

Nun setzen wir die dritte Maxwell Gleichung in die obere Gleichung auf der rechten Seite ein und erhalten:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

und analog für die andere Gleichung:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Für die linke Seite verwenden wir folgende Identität:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\equiv\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\boldsymbol{\Delta}\vec{A},$$

worin $\boldsymbol{\Delta}$ der Laplace-Operator ist und wie folgt definiert ist:

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{A}=\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}.$$

Damit können wir schliesslich die Wellengleichung in drei Dimensionen für das elektrische und magnetische Feld aufschreiben. Sie gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\quad\text{und}\quad\boldsymbol{\Delta}\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},}$$

wobei $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ ist. In einer Dimension erkennen wir die Wellengleichung vermutlich besser. Sie lauten:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\quad\text{und}\quad\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}.$$

Wir wollen uns nun einige Beispiele ansehen, in denen wir einige interessante Grössen und Zusammenhänge berechnen. Was sind zum Beispiel die Energie oder der Impuls einer elektromagnetischen Welle, was sind ihre Leistung oder Intensität?

Bsp. vii.

[3] Wir erinnern uns, dass die Wellengleichung eine homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, wobei auf der einen Seite der Gleichung nach dem Ort und auf der anderen nach der Zeit abgeleitet wird. Die Konstante, welche diese zwei Gleichungen verbindet, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Es gilt also:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Nehmen wir eine harmonische Welle, die sich beispielsweise in x-Richtung ausbreitet, d. h. das elektrische Feld schwingt dann in y-Richtung. Wir erhalten also den Ansatz:

$$E_y = \hat{E}_y \sin(kx - \omega t).$$

Leiten Sie aus der dritten Maxwellschen Gleichung folgende Beziehung zwischen dem elektrischen $\vec{E}$ und magnetischen Feld $\vec{B}$ her:

$$E_y = cB_z.$$

Da in diesem Fall das $\vec{E}$-Feld nur eine y-Komponente hat, erhalten Sie nur eine Beziehung für die z-Komponente des $\vec{B}$-Felds und der y-Komponente des $\vec{E}$-Felds. Lsg: –

Lösung:

Im nächsten Beispiel betrachten wir die Intensität einer elektromagnetischen Welle. Die Intensität ist wie folgt definiert

Def. 3: *(Intensität) Die Intensität I einer elektromagnetischen Welle ist definiert als die Leistung ΔP pro Fläche ΔA*

$$\boxed{I = \frac{\Delta P}{\Delta A}.}$$

Die Intensität kann auch durch die Energiedichte ausgedrückt werden. Dabei gilt

$$I = \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{\Delta E/\Delta t}{\Delta A} = \frac{\Delta E}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = w(t) \cdot v,$$

wobei $w(t)$ die Energiedichte und v die Geschwindigkeit der Welle sind. Um die effektive Leistung zu erhalten, muss man die Energiedichte mitteln. Damit sollten Sie gerüstet sein, um das nächste Beispiel zu lösen.

Bsp. viii.
Gesucht ist die gesamte Energiedichte der elektromagnetischen Welle. a) Zeigen Sie zuerst, dass die elektrische und magnetische Energiedichte gleich gross sind. b) Bestimmen Sie daraus die gesamte Energiedichte und c) geben Sie sie auch als Funktion von B und E an. d) Der von Sir John Poynting entdeckte Vektor S ist definiert als:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}.$$

Zeigen Sie den Zusammenhang zwischen dem Poynting Vektor $\vec{S}$ und der Intensität I. Lsg: –

Lösung:

Es mag Sie überraschen, aber auch eine elektromagnetische Welle hat einen Impuls und einen Druck. Natürlich haben Impuls und Druck einer elektromagnetischen Welle nicht die gleiche Form wie in der Mechanik. Im folgenden Beispiel leiten wir den Impuls her.

Bsp. ix.
Zur Bestimmung des Impulses betrachten wir den Energie und Impulsübertrag einer elektromagnetischen Welle auf ein freies, geladenes Teilchen. Die Welle bewegt sich in positiver x-Richtung und trifft auf eine ruhende Ladung. Das elektrische Feld schwinge in y-Richtung und das magnetische in z-Richtung.

a) Welche Kraft erfährt das ruhende Teilchen. b) Welche Geschwindigkeit hat das Teilchen und in welcher Richtung nach einer kurzen Zeit t_1. c) Welche kinetische Energie hat das Teilchen nun. d) Nun erfährt es auch noch eine Kraft aufgrund der magnetischen Komponente der Welle. Bestimmen Sie den Betrag dieser Kraft und die Richtung. e) Bestimmen Sie den daraus resultierenden Kraftstoss in x-Richtung, wobei Sie dies wie folgt bestimmen müssen.

$$\Delta p_x = \int_0^{t_1} F \, \mathrm{d}t.$$

f) Vergleichen Sie den Term von $\Delta p_x = p_x$ mit der kinetischen Energie E_{kin} und leiten Sie daraus die Energie-Impuls-Beziehung für eine elektromagnetische Welle her. Es gilt allgemein:

$$p = \frac{E_{\mathrm{kin}}}{c}.$$

Lsg: –

Lösung:

Schliesslich bestimmen wir den Strahlungsdruck einer elektromagnetischen Welle und stellen fest, dass Druck und Energiedichte dieselbe Einheit haben.

Bsp. x.
a) Zeigen Sie, dass der Druck auch als Arbeit pro Volumen definiert werden kann. b) Leiten Sie daraus die Formel für den Strahlungsdruck p_{Str} her. c) Geben Sie den Strahlungsdruck als Funktion der Intensität an und bestimmen Sie daraus explizit eine Formel als Funktion der elektrischen und magnetischen Felder. Lsg: –

Lösung:

Damit schliessen wir dieses sehr wichtige Thema der elektromagnetischen Schwingungen und Wellen ab und wenden uns einigen Strahlungsquellen zu.

5.4 Strahlungsquellen

In diesem Abschnitt möchten wir auf klassische Weise die Möglichkeiten betrachten, wie man elektromagnetische Strahlung erzeugen kann. Dabei werden wir die folgenden Strahlungen behandeln:

- Röntgenstrahlung,
- Synchrotronstrahlung und
- Temperaturstrahlung.

Es zeigt sich, dass die mikroskopische Ursache der Strahlung im Grunde nur quantenmechanisch richtig verstanden werden kann. Dennoch soll das Problem hier zunächst klassisch angegangen werden.

5.4.1 Röntgenstrahlung

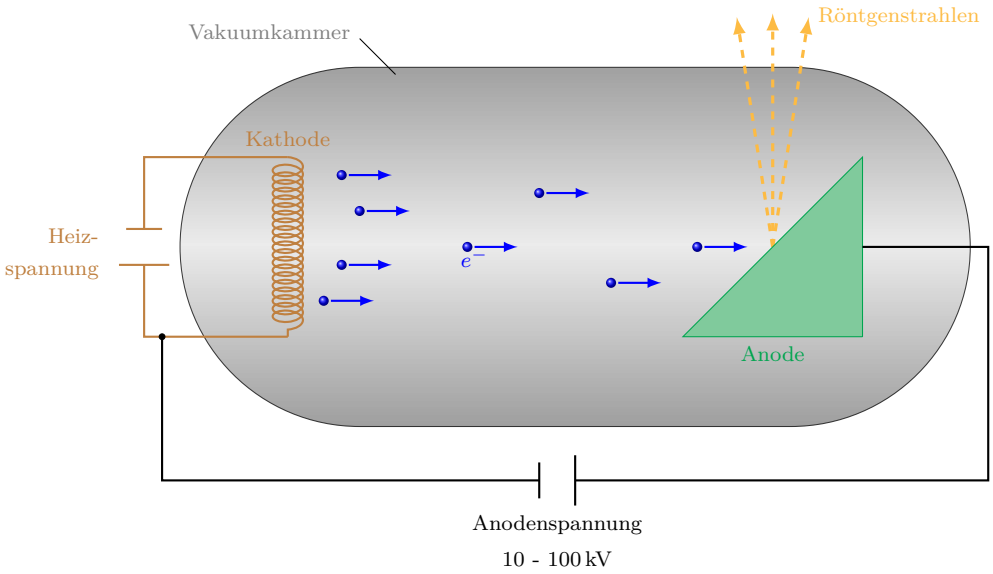
Als Röntgenstrahlung bezeichnet man elektromagnetische Wellen mit Energien zwischen 5 keV und einigen hundert keV, entsprechend Wellenlängen zwischen $250 \cdot 10$ pm und einigen pm. Röntgenstrahlung liegt im elektromagnetischen Spektrum zwischen dem ultravioletten Licht und der Gammastrahlung (wie wir später sehen werden), mit der sie sich teilweise überlappt.

Die Röntgenstrahlung wurde am 8. November 1895 von Wilhelm Conrad Röntgen[4] entdeckt und trägt ihren Namen im deutschsprachigen sowie fast im gesamten mittel- und osteuropäischen Raum zu seinen Ehren. In anderen Sprachräumen wird sie häufig mit dem von Röntgen ursprünglich selbst verwendeten Begriff X-Ray bezeichnet.

W. Röntgen
(1845-1923)

Konrad Röntgen, ein deutscher Physiker des 19. und 20. Jahrhunderts, wurde weltweit bekannt durch seine Entdeckung der Röntgenstrahlen im Jahr 1895. Diese bahnbrechende Entdeckung revolutionierte die Medizin und Diagnostik, da sie erstmals ermöglichte, den inneren Aufbau des menschlichen Körpers ohne invasive Verfahren sichtbar zu machen. Röntgen erhielt 1901 den ersten Nobelpreis für Physik für diese wegweisende Entdeckung. Röntgens Arbeiten auf dem Gebiet der Röntgenstrahlung hatten nicht nur einen enormen Einfluss auf die Medizin, sondern auch auf andere wissenschaftliche Disziplinen wie die Materialforschung.

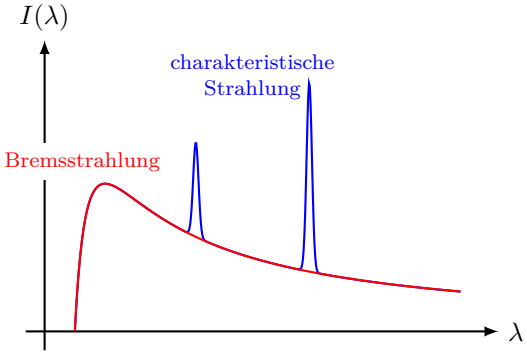
Eine mögliche Realisierung der Röntgenstrahlung ist durch die Röntgenröhre gegeben. Der Aufbau einer Röntgenröhre ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Sie besteht aus einem evakuierten Zylinder, in dem sich eine Kathode und eine Anode befinden. An die Kathode wird eine Heizspannung angelegt. Durch thermische Emission treten Elektronen aus der Kathode aus. Diese Elektronen werden durch das Potential zwischen Kathode und Anode zur Anode hin beschleunigt. Das Potential wird durch die Anodenspannung U erzeugt, die üblicherweise im Bereich von etwa $10 - 100$ kV liegt. Die Elektronen treffen mit einer Energie von $E_{\text{kin}} = eU$ (e: Elementarladung) auf die Anode.



Etwa 99% der Energie wird in Wärme umgewandelt, weshalb das Anodenmaterial in der Regel gekühlt werden muss. Etwa 1% der Energie wird in Röntgenstrahlung umgewandelt, einerseits in kontinuierliche Bremsstrahlung,

[4] Wilhelm Conrad Röntgen (27. März 1845 in Lennep, heute Stadtteil von Remscheid - 10. Februar 1923 in München) war ein deutscher Physiker.

andererseits in charakteristische Strahlung, die vom verwendeten Anodenmaterial abhängt. Der Intensitätsverlauf einer Röntgenröhre, die aus beiden Komponenten besteht, ist unten skizziert [51].



Die Bremsstrahlung entsteht, wenn die Elektronen durch das elektrostatische Feld der Anodenatome abgebremst bzw. abgelenkt werden. Diese Strahlung ist natürlich kontinuierlich, wie die rote Kurve zeigt. Die charakteristische Strahlung dagegen entsteht dadurch, dass die beschleunigten Elektronen die Anodenelektronen in den inneren Schalen herausschleudern. Da dieser Zustand instabil ist, fallen Elektronen aus höheren Schalen nach unten und emittieren dabei elektromagnetische Strahlung. Da diese, wie wir in der Quantenphysik sehen werden, nur von der Energiedifferenz der Elektronenzustände abhängt, handelt es sich um sehr scharfe Ausbrüche.

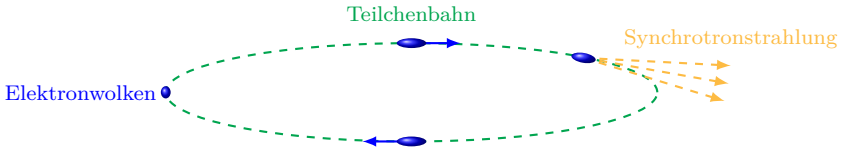
5.4.2 Synchrotronstrahlung

Das Zyklotron als Teilchenbeschleuniger wurde bereits erwähnt. Eine heute gebräuchlichere Variante ist das Synchrotron, weil man damit höhere Energien erreichen kann. Das Synchrotron ist ein Teilchenbeschleuniger, in dem z. B. Elektronen mit hohen (relativistischen) Geschwindigkeiten immer im gleichen Kreis bewegt werden. Dabei durchläuft das Teilchen immer wieder eine oder mehrere Beschleunigungsstrecken. Dadurch nimmt die Geschwindigkeit mit jeder Umdrehung zu.

Das Feld der Ablenkmagnete kann nicht wie das Magnetfeld im Zyklotron zeitlich konstant bleiben, sondern muss während der Beschleunigung jedes Teilchenpakets proportional zum wachsenden Teilchenimpuls erhöht werden. Da dies synchron erfolgen muss, spricht man von Synchrotronbeschleunigern.

Ist die Endgeschwindigkeit erreicht, verwandelt sich der Beschleuniger in einen so genannten Speicherring, in dem die Teilchen nur noch im Kreis gespeichert werden. Neben Elektronen sind alle geladenen Teilchen möglich, also auch Ionen, Protonen u.v.m.

Ähnlich wie bei der Bremsstrahlung senden geladene Teilchen Strahlung aus, wenn sie beschleunigt werden. Bei der Bremsstrahlung ist die Beschleunigung negativ, bei der Synchrotronstrahlung ist die Beschleunigung zentripetal. Diese Strahlung hängt natürlich von der Geschwindigkeit des Teilchens ab. Man kann sich die Strahlung wie folgt vorstellen:



Da die Strahlung immer senkrecht zur Beschleunigungsrichtung abgestrahlt wird, erfolgt die Abstrahlung in Richtung der Geschwindigkeit, wie im Bild angedeutet. Durch geeignete Anordnung der Magnete kann die Strahlung noch fokussiert werden[5].

Üblicherweise findet man solche Strahlung bei grösseren Beschleuniger, wie zur Zeit der Large Hadron Collider (LHC) am CERN oder der Synchrotron Lichtquelle Schweiz (SLS) am PSI[6]. Am LHC ist diese Strahlung eher unerwünscht und verursacht einen grossen Energieverlust. Am PSI ist diese Strahlung erwünscht und erreicht Wellenlängen von bis zu 0.1 nm.

5.4.3 Temperaturstrahlung

Temperaturstrahlung, auch Wärmestrahlung genannt, ist die Eigenschaft jedes Körpers, in Abhängigkeit von seiner Temperatur elektromagnetische Strahlung auszusenden. Natürlich wissen wir, dass ein Feuer elektroma-

[5] Beachten Sie, dass die Strahlung im Grunde nicht fokussiert werden kann, da elektromagnetische Strahlung keine Ladung hat und dadurch nicht abgelenkt werden kann. Was man jedoch tun, ist, dass man die Elektronwolke flacher und schmaler macht, wodurch die austretende Strahlung ebenfalls fokussierter ist.

[6] Das CERN bedeutet: Conseil européen pour la recherche nucléaire und PSI: Paul Scherrer Institut.

gnetische Wellen aussendet, denn auch eine Wärmelampe unter einer Vakuumglocke erwärmt die Glocke, ohne sie zu berühren. Wer das nicht glaubt, sollte sich einmal vorstellen, wie die Sonne die Erde erwärmen würde, wenn sie keine elektromagnetischen Wellen aussenden würde. Da die Atmosphäre ein nahezu perfektes Vakuum ist, kann es keine Wärmeleitung geben. Aus Erfahrung wissen wir, dass ein heisser Körper stärker strahlt als ein kalter. Dieser Zusammenhang wurde von Ludwig Boltzmann theoretisch hergeleitet und von Josef Stefan[7] experimentell bestätigt. Das nach ihnen benannte Gesetz lautet:

Ges. 3: *(Stefan-Boltzmann Gesetz) Die Strahlungsleistung P eines (schwarzen) Körpers mit der Oberfläche A nimmt mit der vierten Potenz der absoluten Temperatur T zu, d. h.*

$$\boxed{P = \sigma A T^4,}$$

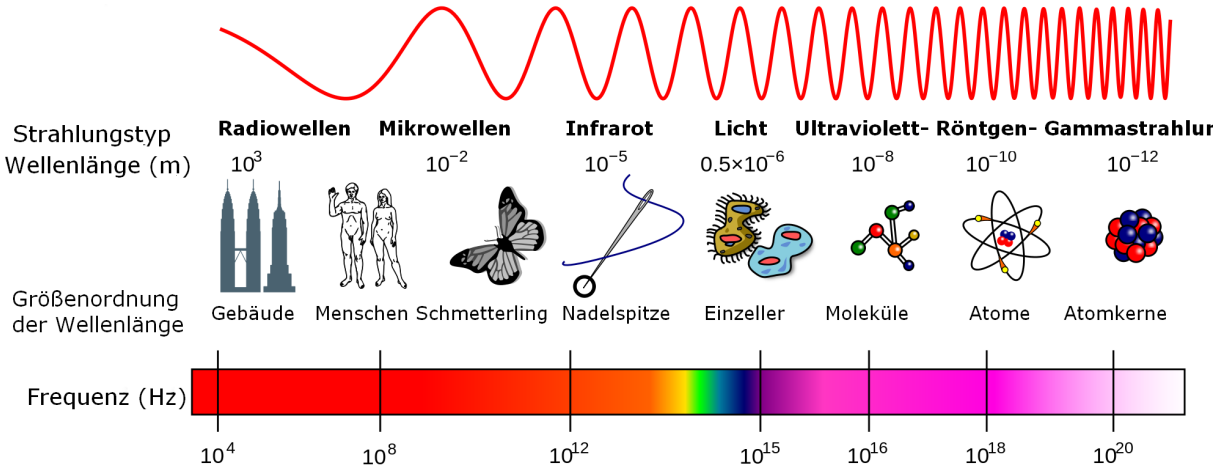
wobei $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$ *die Stefan-Boltzmann-Konstante ist.*

Betrachten wir ein einfaches Beispiel dazu.

Bsp. xi.
Nehmen wir einen (schwarzen) Körper mit einer Oberfläche von einem Quadratmeter bei Zimmertemperatur. Wie gross ist a) die Strahlungsleistung bei Zimmertemperatur und b) bei 100°C? c) Was ist der netto Leistungsumsatz nachher? Lsg: a) $P_1 \approx 420\,\mathrm{W}$, b) $P_2 \approx 1100\,\mathrm{W}$, c) $\Delta P \approx 680\,\mathrm{W}$

Lösung:

Damit schliessen wir das Kapitel über Strahlen ab, aber nicht ohne einen Überblick über die verschiedenen elektromagnetischen Wellen, das so genannte Spektrum. (Bild aus [52])



[7] Josef Stefan (24. März 1835 in St. Peter bei Ebenthal (heute Klagenfurt) - 7. Januar 1893 in Wien) war ein österreichischer Mathematiker und Physiker slowenischer Muttersprache aus Kärnten.

Zusammenfassung Kapitel G5

1. Der *komplexe Widerstand* Z ist definiert als das Verhältnis aus der komplexen Spannung U und dem komplexen Strom I, d. h.

$$Z = \frac{U}{I}.$$

2. Der *Scheinwiderstand* resp. *Impedanz* |Z| einer Serieschaltung aus einem Widerstand R einer Kapazität C und einer Induktivität L ist:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C})^2},$$

wobei $X_\mathrm{L} = \omega L$ und $X_\mathrm{C} = \frac{1}{\omega C}$ die Blindwiderstände sind. Die *Phasenverschiebung* φ in einer solchen Schaltung ist:

$$\tan\varphi = \frac{X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C}}{R}.$$

3. Eine Serieschaltung im *Resonanzfall*, d. h. wenn die Blindwiderstände sich gegenseitig aufheben, hat eine Frequenz von:

$$X_\mathrm{L} = X_\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

4. Für eine Parallelschaltung aus einem Widerstand R einer Kapazität C und einer Induktivität L ist die Impedanz gegeben durch:

$$\frac{1}{|Z|} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_\mathrm{L}} - \frac{1}{X_\mathrm{C}}\right)^2}.$$

Die Phasenverschiebung φ ist:

$$\tan\varphi = \frac{\frac{1}{X_\mathrm{L}} - \frac{1}{X_\mathrm{C}}}{\frac{1}{R}}.$$

5. Die *Maxwell Gleichungen* lauten in differentieller Form:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \qquad \text{(Gauss'sches Gesetz)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \text{(Gauss'sches Gesetz)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday'sches Induktionsgesetz)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j} \qquad \text{(Ampère'sche Gesetz)}$$

wobei $\vec{E}$ das elektrische und $\vec{B}$ das magnetische Feld sind sowie $\vec{j}$ die Stromdichte und $\vec{\varrho}$ die Ladungsdichte sind.

6. Die *elektrische Stromdichte* $\vec{j}$ ist definiert als der Strom I, welche senkrecht durch eine Fläche A fliesst, damit erhalten wir für einmal keine explizite Formel:

$$I = \int_A \vec{j}\cdot\,\mathrm{d}\vec{A}.$$

7. Der Maxwell'sche Verschiebungsstromdichte $\vec{j}_\mathrm{V}$ wird induziert, sofern ein veränderliches elektrisches Feld $\vec{E}$ vorliegt, d. h.

$$\vec{j}_\mathrm{V} = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

8. Die *Ladungserhaltung* folgt direkt aus den Maxwell Gleichung und hat die folgende Form:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \partial_\mathrm{t}\varrho = 0,$$

wobei $\vec{j}$ die Stromdichte und ϱ die Ladungsdichte sind.

9. Ebenfalls aus den Maxwell Gleichungen folgen für $\varrho = 0$ und $\vec{j} = 0$ die Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen. Es gilt:

$$\mathbf{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{\Delta}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2},$$

wobei $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ die Lichtgeschwindigkeit ist.

10. Die *Intensität* I einer elektromagnetischen Welle ist definiert als die Leistung ΔP pro Fläche ΔA

$$I = \frac{\Delta P}{\Delta A}.$$

11. Das elektrische Feld $|\vec{E}| = E$ und das magnetische Feld $|\vec{B}| = B$ sind über die Beziehung:

$$E = cB$$

miteinander verknüpft.

12. Der *Poynting Vektor* $\vec{S}$ einer elektromagnetischen Welle mit dem elektrischen Feld $\vec{E}$ und dem magnetischen Feld $\vec{B}$ ist:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}.$$

13. Der *Impuls* p einer elektromagnetischen Welle hängt wie folgt mit der kinetischen Energie E_{kin} der Welle ab:

$$p = \frac{E_{\text{kin}}}{c}.$$

14. Der *Strahlungsdruck* p_{Str} einer elektromagnetischen Welle der Intensität I ist:

$$p_{\text{Str}} = \frac{I}{c}.$$

15. Die *Strahlungsleistung* P eines (schwarzen) Körpers mit der Oberfläche A nimmt mit der vierten Potenz der absoluten Temperatur T zu, d. h.

$$P = \sigma A T^4,$$

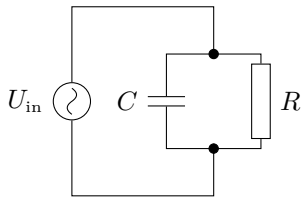
wobei $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist.

Konzeptfragen Kapitel G5

Aufgaben Kapitel G5

Weitere einfachere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:
https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0 in den Kapiteln 34. und 35.

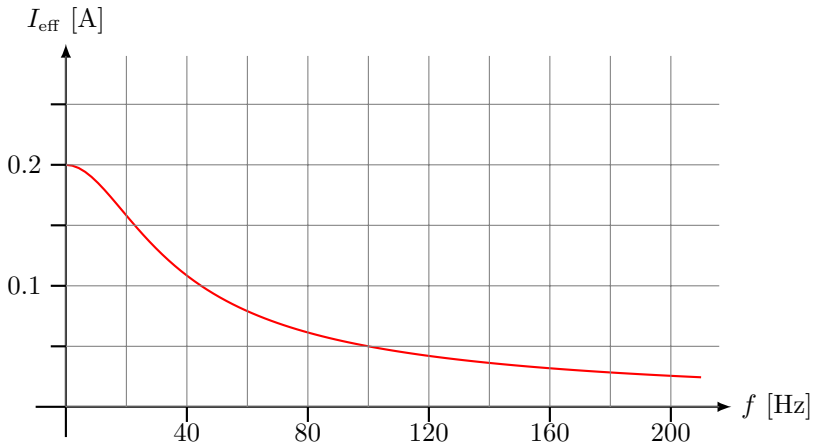
1. Ein einmal aufgeladener Kondensator behält seine Ladung nicht beliebig lang bei, es fliessen sehr kleine *Leckströme*, die zur allmählichen Entladung führen. Eine Ersatzschaltung für den realen Kondensator ist hier dargestellt.



Ermittle die Impedanz |Z| dieser Schaltung sowie die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, wenn eine sinusförmige Wechselspannung der Frequenz 50 Hz angelegt wird. Nutze dabei ein Zeigerdiagramm und die Daten $R = 1.0\,\text{M}\Omega$ und $C = 5.0\,\text{nF}$.

Lsg: $|Z| \approx 5.4 \cdot 10^5\,\Omega$, $\varphi \approx -57°$

2. Von einer Spule sollen die Induktivität L und ihr ohm'scher Widerstand R ermittelt werden. Dazu wird eine sinusförmige Wechselspannung mit variabler Frequenz f und $U_{\text{eff}} = 10.0\,\text{V}$ an die Spule gelegt. Den Zusammenhang zwischen der Frequenz f und der Stromstärke I_{eff} zeigt diese Abbildung.



Ermitteln Sie mithilfe des Diagramms den ohm'schen Widerstand R und die Induktivität L der Spule. Tipp: Das L und R sind in Serie geschalten.

Lsg: $R \approx 50\,\Omega$, $L \approx 0.3\,\text{H}$

3. Ein Plattenkondensator habe parallele und kreisförmige Platten mit dem Radius 2.3 cm. Der Plattenabstand betrage 1.1 mm, und das Dielektrikum sei Luft $\epsilon_{\text{r}} = 1$. Nun fliesse Ladung auf die untere Platte und von der oberen ab, wobei der Strom 5 A beträgt.

a. Berechnen Sie die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes zwischen den Platten.

b. Berechnen Sie den Maxwell'schen Verschiebungsstrom zwischen den Platten und zeigen Sie, dass er 5 A beträgt.

Lsg: **a.** $\dot{E} \approx 3.4 \cdot 10^{14}\,\text{V/(m s)}$ **b.** $I = 5\,\text{A}$

4. Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen im Vakuum, zeigen Sie dass die Wellengleichung für das Magnetfeld $\vec{B}$ gilt:

$$\boldsymbol{\Delta}\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2},$$

wobei $\mathbf{\Delta}\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{B}$ ist.

Lsg: –

5. Eine 100 W Glühbirne emittiere kugelförmig elektromagnetische Wellen gleichmässig in alle Raumrichtungen. Man berechne

a. die Intensität,
b. den Strahlungsdruck und
c. das elektrische und magnetische Feld

in einem Abstand von 3 m von der Lampe, unter der Annahme, dass 50 W in Form von elektromagnetischen Wellen abfliessen.

Lsg: **a.** $I \approx 0.44\,\mathrm{W/m^2}$ **b.** $p_\mathrm{s} = 1.5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Pa}$ **c.** $B_0 \approx 6.1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{T}$, $E_0 \approx 18.2\,\mathrm{V/m}$

6. Eine Astronautin schwebe im Abstand von 20 m von ihrem Raumschiff entfern im Raum sei mit einem Lasergewehr der Leistung 1000 W ausgestattet. Die Gesamtmasse von Astronautin, Raumanzug und Lasergewehr betrage 95 kg. Wie lange braucht sie, um ihr Raumschiff zu erreichen, wenn sie ihr Lasergewehr als Antrieb benutzt und es in direkter Gegenrichtung zum Schiff hält?

Lsg: $t \approx 3.4 \cdot 10^4\,\mathrm{s} \sim 9.4\,\mathrm{h}$

Literaturverzeichnis

[1] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter, Juni 2012

[2] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem, Juni 2012

[3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935

[4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays* $B^0_{(s)}t\mu^+\mu^-$ *from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007

[5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron* $g-2$ *and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807

[6] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Steradiant, Juni 2012

[7] Aristoteles,

[8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590

[9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997

[10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955

[11] URL: http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html, September 2013

[12] URL: http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index

[13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011

[14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG

[15] URL: http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/, April 2013

[16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007

[17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG

[18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994

[19] URL: https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical

[20] Hans Kammer, Irma Mgeladze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG

[21] URL: https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal

[22] Wikipedia, URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid, August 2013

[23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010

[24] URL: http://www.schulserver.hessen.de/, Oktober 2013

[25] URL: http://www.leifiphysik.de, September 2013

[26] URL: http://photos.zoochat.com, Semptember 2013

[27] URL: http://www.lab-laborfachhandel.de, Oktober 2013

[28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,

[29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014

[30] URL: https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen, März 2024

[31] URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707

[32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press

[33] URL: http://ephex.phys.ethz.ch, Februar 2015

[34] URL: http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html, März 2015

[35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas opitscher Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962

[36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004

[37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018

[38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001

[39] URL: https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en, Juli 2018

[40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998

[41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869

[42] URL: http://www.tf.uni-kiel.de, März 2014

[43] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik), März 2014

[44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014

[45] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png, März 2014

[46] URL: http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscode.htm, August 2014

[47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron.* Physical Review 43 (6): 491–494

[48] URL: http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm, Oktober 2014

[49] URL: http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm, Oktober 2014

[50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014

[51] URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639, Oktober 2017

[52] URL: https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen, Oktober 2017

[53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022

[54] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode, September 2022

[55] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg, November 2023

[56] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen, April 2024

[57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor

[58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.

[59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.

[60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

[61] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Relativität_der_Gleichzeitigkeit, August 2018

[62] URL: http://static.a-z.ch, März 2015

[63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925

[64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413

[65] URL: http://www.peter-glowatzki.de, Mai 2015

[66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941

[67] URL: http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche, Mai 2015

[68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)

[69] URL: http://w3.pppl.gov/, September 2015

[70] O. Höfling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wärme. 15. Auflage. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1994

[71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database, April 2018

[72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)

[73] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung, April 2018

[74] URL: http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von..., Juni 2012

[75] L. Susskind und G. Hrabovsky, The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics, Basic Books, 2014