

Kapitel E

Schwingungen und Wellen

“Worte verbinden nur,
wo unsere Wellenlängen längst übereinstimmen..”
- Max Frisch

Schwingungen und Wellen gehören wohl zu den wichtigsten Themen in der Physik. Praktisch in allen Gebieten der klassischen und modernen Physik kommen Schwingungen und Wellen vor, oder zumindest der Formalismus der Schwingungen und Wellen wird verwendet. Zum Beispiel in der Festkörperphysik: Dort werden die Bewegungen der Atome im Festkörper durch harmonische Schwingungen angenähert. Die Quantenphysik nach Schrödinger beschreibt Teilchen als Wellenfunktionen, und so weiter. Dieses Kapitel legt die Grundlage für das Verständnis späterer Theorien und Modelle.

Das Bild eines Tropfens, der beim Auftreffen auf Wasser eine Welle erzeugt, veranschaulicht die grundlegenden Konzepte von Schwingungen und Wellen. Dieses Naturphänomen bietet einen anschaulichen Einstieg in das Thema und gleichzeitig sieht es einfach schön aus. Das folgende Bild stammt aus [30].



Schwingungen und Wellen sind grundlegende Phänomene, die in vielen Bereichen der Physik und der Naturwissenschaften auftreten. Sie sind von grosser Bedeutung für unser Verständnis der Akustik, des Lichts, der Elektrizität und sogar der Quantenmechanik. Das folgende Zitat von Nikola Tesla veranschaulicht die Bedeutung dieses Kapitels sehr gut.

Wenn Sie die Geheimnisse des Universums finden
wollen, denken Sie in Begriffen von Energie, Frequenz
und Schwingung.
N. Tesla

Aus seiner Sicht Motivation genug, sich mit diesem Kapitel zu befassen. In diesem Kapitel werden wir uns zuerst mit der *harmonischen Schwingung* beschäftigen, die sich im Gegensatz zur Welle nur an Ort und Stelle bewegt und sich damit nicht ausbreitet. Danach werden wir *mechanische Wellen* behandeln und dabei den wichtigen Spezialfall der stehenden Welle untersuchen. Als Anwendungskapitel werden im letzten Abschnitt einige Aspekte der *Akustik* diskutieren. Eine ausführliche Behandlung dieses Themas würde den Rahmen sprengen und wird daher den weiterführenden Schulen überlassen.

1 Harmonische Schwingungen

Lernziele

- Sie kennen die Definition einer Schwingung und kennen die wesentlichsten Größen, um eine solche zu beschreiben.
 - Sie kennen die Definition einer harmonischen Schwingung und können die Bewegungsgleichung herleiten.
 - Sie verstehen die allgemeine Vorschrift einer harmonischen Schwingung und können sie in verschiedenen Formen ausdrücken.
 - Sie können für verschiedene Anwendungen die Bewegungsgleichung herleiten und daraus die Winkelgeschwindigkeit bestimmen.
 - Sie können die gedämpfte Schwingung von einer nicht gedämpften Schwingung unterscheiden und diese qualitativ in einem Ort-Zeit-Diagramm zeichnen.
 - Sie wissen, was eine erzwungene Schwingung ist und können Beispiele nennen.
 - Sie verstehen, wie bei einer erzwungenen Schwingung Resonanz auftreten kann.
 - Sie kennen den Zeigerformalismus und können ihn für einfache Systeme anwenden.
 - Sie wissen, wie man Schwingungen addieren kann und können daraus die Schwebung ableiten.
-

Schwingungen breiten sich, wie bereits in der Einleitung angedeutet, nicht im Raum aus. Das wohl bekannteste, aber nicht einfachste Beispiel einer Schwingung ist ein Pendel. Wir werden im Laufe dieses Kapitels jedoch sehen, dass es noch viele andere Bewegungen gibt, die im Grunde als Schwingungen beschrieben werden können. Ein Beispiel hierfür ist die Bewegung eines Holzstücks, das ins Wasser geworfen wird und so lange schwingt, bis es seine Gleichgewichtslage erreicht hat.

Im Bereich der Schwingungen spielt die harmonische Schwingung eine zentrale Rolle. Wie der französische Mathematiker Jean-Baptiste de Fourier¹ beweisen konnte, lassen sich alle periodischen Bewegungen aus harmonischen Schwingungen zusammensetzen, seien sie noch so kompliziert. Daher führt das Verständnis der harmonischen Schwingungen dazu, dass die komplizierten Schwingungen in der Regel recht einfach behandelt werden können.

Def. 1: (*Schwingung*) *Bewegung um eine Ruhelage, deren Richtungssinn in gleichen zeitlichen Abständen ändert.*

Man bezeichnet ein schwingendes System auch als Oszillator. Hier sind einige Beispiele:

- Kinderschaukel
- Pendeluhr
- Boje im Wasser
- ...

Zwei wichtige Größen, die wir aus dem Kapitel zur Kreisbewegung (siehe Abschnitt B.2.5) kennen, sollen hier nur nochmals kurz wiederholt werden:

- Periode T : Zeit für eine vollständige Schwingung (Hin-und-Her).
- Frequenz f : Die Anzahl Schwingung pro Sekunde oder $f = \frac{1}{T}$.
- Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz ω : Winkelveränderung pro Zeit, also $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ oder $\omega = 2\pi f$.

¹Jean-Baptiste Joseph Fourier (21. März 1768 bei Auxerre - 16. Mai 1830 in Paris) war ein französischer Mathematiker und Physiker. Er beschäftigte sich nebenbei auch mit der Physik, und zwar mit der Wärmeausbreitung in Festkörpern. Neben der Herleitung der Gleichungen enthielt sie einen Lösungsansatz mittels Fourierreihen. In einem Artikel von 1824 beschrieb er zum ersten Mal die wesentlichen Mechanismen des atmosphärischen Treibhauseffekts. Mit der Fourieranalyse legte er einen Grundstein für den Fortschritt der modernen Physik und Technik.

Im Folgenden sollen das Feder- und Fadenpendel, die gedämpfte und erzwungene Schwingung, sowie die Überlagerung und die Fourieranalyse behandelt werden. Vor die Überlagerungen von Schwingungen werden wir eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung von Schwingungen betrachten, nämlich den sogenannten Zeigerformalismus. Dieser kann auch für mechanische Wellen, elektrische Schwingkreise und später sogar in der Quantenmechanik verwendet werden.

1.1 Feder- und Fadenpendel

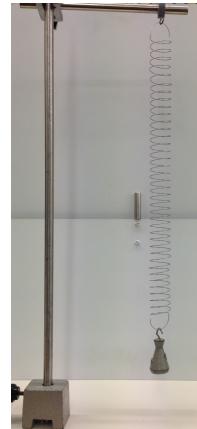
In diesem Abschnitt betrachten wir zum einen das Federpendel und zum anderen das Fadenpendel. Dabei werden wir erkennen, dass das Federpendel im Gegensatz zum Fadenpendel harmonisch schwingt. Dennoch wird es möglich sein, das Fadenpendel als harmonische Schwingung zu beschreiben.

1.1.1 Federpendel

Das Federpendel stellt wohl die einfachste harmonische Schwingung dar und soll daher einführend besprochen werden. Betrachten wir dazu das folgende einfache Experiment.

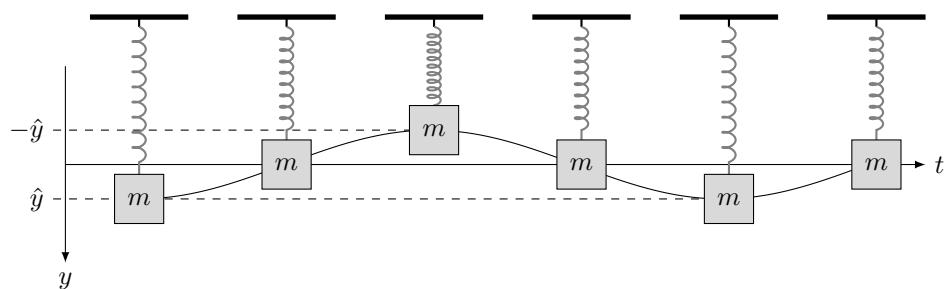
Exp. 1: Federpendel

Eine Masse wird an einer Feder gehängt. Die Feder soll als reibungslos gelten, d.h., es treten keine Verluste auf (vgl. Abb.).



Nun wird die Masse leicht ausgelenkt und danach losgelassen. Dies führt dazu, dass die Masse eine Schwingung vollzieht, in diesem Fall sogar eine harmonische Schwingung. Dazu jedoch später mehr. Der Richtungssinn ändert sich deutlich in gleichen zeitlichen Abständen.

Nun betrachten wir dieses System etwas genauer und möchten auch die Bewegungsgleichung herleiten. Dazu betrachten wir diese Bildsequenz, wobei die einzelnen Bilder eine zeitliche Abfolge der Bewegung darstellen.



Nur aus diesen sechs Punkten erkennt man bereits, dass die Bewegung der Masse in der Zeit einer Kosinusfunktion entspricht. Dass dies wirklich so ist, kann das folgende Experiment zeigen, welches durch Walter Lewin in einer seiner berühmten Vorlesungen "Physics I: Classical Mechanics" am Massachusetts Institute of Technology (MIT) vorgetragen wurde ([Harmonischer Oszillator](#)). Da die Funktion in diesem Fall bei \hat{y} beginnt, erhalten wir:

$$y(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t),$$

wobei ω_0 noch ein zu definierender Parameter² darstellt. Nun soll diese Funktion mit den Gesetzen der Mechanik hergeleitet werden. In der Ruhelage gilt:

$$F_{\text{res}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_g - F_F = 0.$$

Lenkt man nun die Masse um y aus der Ruhelage aus, gilt:

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= ma \\ F_g - F'_F &= ma, \end{aligned}$$

wobei F'_F die durch das Auslenken erhöhte Federkraft ist. Es gilt also: $F'_F = F_F + Dy$. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$F_g - F_F - Dy = ma \quad \Rightarrow \quad -Dy = ma,$$

wobei die Bedingung für die Ruhelage verwendet wurde. Legen wir die Gleichgewichtslage bei $y = 0$ fest, dann ist $\Delta y \hat{=} y$. Die Beschleunigung a hängt über die zeitliche Ableitung³ mit der Geschwindigkeit zusammen und die Geschwindigkeit wiederum mit dem Ort also:

$$a = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} \quad \text{und} \quad v = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y} \quad \Rightarrow \quad a = \ddot{y}.$$

Somit kann man die Beschleunigung als zweite Ableitung des Ortes identifizieren. Daraus ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$-Dy = m\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{D}{m} \cdot y.$$

Diese Gleichung zeigt also, dass die Beschleunigung proportional zur Auslenkung und somit nicht konstant ist. Dies ist intuitiv einleuchtend, da bei Verkürzung der Feder die Kraft und damit auch die Beschleunigung abnimmt.

Diese Gleichung ist eine sogenannte Differentialgleichung. Eine Differentialgleichung hat als Lösungen Funktionen und keine Zahlen. Wie lässt sich diese Gleichung lesen? *Wir suchen eine Funktion, welche zweimal abgeleitet wieder die Funktion gibt, multipliziert mit einem Parameter.*

Die einzigen Funktionen, welche nach zweimaliger Ableitung sich selbst wieder geben, sind die Sinus- und die Kosinusfunktion. Betrachten wir zur Überprüfung die erratene Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t) \\ \dot{y}(t) &= -\hat{y} \sin(\omega_0 t) \cdot \omega_0 \\ \ddot{y}(t) &= -\hat{y} \cos(\omega_0 t) \cdot \omega_0^2 = -\omega_0^2 \cdot y(t). \end{aligned}$$

Wir erkennen also, dass für $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ die Funktion $y(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t)$ die Bewegungsgleichung löst. Aus der Mathematik wissen wir, dass, wenn ein Ansatz eine Differentialgleichung löst, dann ist es der einzige und er ist eindeutig. Daraus lässt sich nun eine allgemeine Aussage formulieren:

Def. 2: (Harmonische Schwingung) Eine Schwingung ist harmonisch, falls die Beschleunigung $a = \ddot{y}$ proportional zur Auslenkung y ist, d. h.

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0,$$

wobei der Proportionalitätsfaktor durch die Kreisfrequenz ω_0 gegeben ist. Die allgemeine Lösung der harmonischen Schwingung ist:

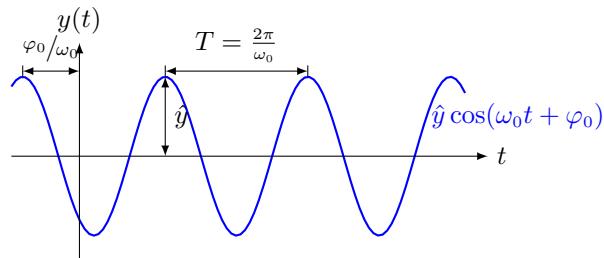
$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \dot{y}(t) &= v(t) = -\omega_0 \hat{y} \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \ddot{y}(t) &= a(t) = -\omega_0^2 \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned}}$$

wobei \hat{y} die maximale Auslenkung oder Amplitude und φ_0 die Phasenverschiebung sind.

Bevor wir uns davon überzeugen, dass ω_0 tatsächlich die Kreisfrequenz darstellt, betrachten wir diese Funktion graphisch etwas genauer und versuchen, die verschiedenen Größen zu identifizieren.

²Wir verwenden die Winkelgeschwindigkeit ω_0 und nicht die Frequenz f , da $y(T) = \hat{y}$ sein muss. Dies ist nur der Fall, wenn $\omega_0 T = 2\pi$ ist. Ein weiterer Grund ist, dass das Argument des Kosinus resp. Sinus ein Winkel sein muss und die Frequenz eben kein Winkel ist.

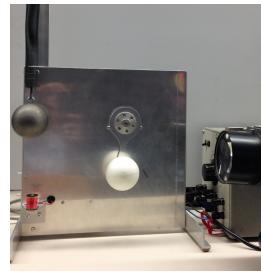
³In der Physik wird die zeitliche Ableitung häufig mit einem Punkt und die örtliche Ableitung mit einem Strich abgekürzt. Analog zur Schreibweise in der Mathematik, wobei dort jede Ableitung mit einem Strich dargestellt wird.



Das nachfolgende Experiment soll nun zeigen, dass der Parameter ω_0 tatsächlich die Kreisfrequenz ist.

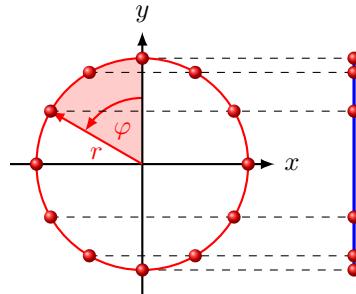
Exp. 2: Projektion einer Kreisbewegung

Mit diesem Experiment können die Projektion einer Kreisbewegung und die Schwingung einer Feder verglichen werden. Dazu wird die Kugel auf einer Kreisbahn und der Körper des Federpendels beleuchtet. Durch eine elektrische Schaltung wird sichergestellt, dass diese zwei Bewegungen gleichzeitig gestartet werden (vgl. Abb.).



Es zeigt sich, dass die Projektion der Kreisbewegung und das Federpendel nahezu synchron schwingen. Die Unregelmässigkeiten kommen einerseits davon, dass das Pendel an Energie verliert und andererseits nicht perfekt vertikal schwingt. Somit können wir die Bewegung der weissen Kugel und die der schwarzen miteinander vergleichen.

Die Position der weissen Kugel auf der Kreisbahn kann durch den Winkel φ und den Abstand r charakterisiert werden. Betrachten wir die Skizze für eine Kreisbewegung und dessen Projektion auf die y -Achse.



Da die weisse Kugel mit einer konstanten Geschwindigkeit angetrieben wird, hat sie auch eine konstante Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Es gilt also:

$$\varphi(t) = \omega_0 t.$$

Damit ist die y -Koordinate der weissen Kugel:

$$y(t) = r \cos(\varphi(t)) = r \cos(\omega_0 t),$$

was genau der Lösung für die harmonische Schwingung entspricht. Damit haben wir einerseits gezeigt, dass die Projektion einer Kreisbewegung eine harmonische Schwingung ist, und andererseits, dass der Parameter ω_0 tatsächlich der Kreisfrequenz entspricht.

Weiter kann man auch die Bedingung für die harmonische Schwingung herleiten. Die Beschleunigung bei einer Kreisbewegung ist:

$$a = -\omega_0^2 \cdot r$$

Für die vertikale Beschleunigung gilt dann:

$$\ddot{y} = a \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \cdot r \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \cdot y.$$

Bevor wir uns mit einigen Beispielen beschäftigen, müssen wir noch etwas zu den Anfangsbedingungen sagen. Die allgemeine Funktion, welche wir soeben hergeleitet haben, lautet:

$$y(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Diese Funktion ist nicht eindeutig, da wir noch zwei freie Parameter haben, nämlich \hat{y} und φ_0 .⁴ Wir unterscheiden grundsätzlich drei Arten von Anfangsbedingungen:

- Die Masse wird um y_0 ausgelenkt und *ohne* Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Formal lauten dann die Bedingungen:

$$y(t=0) \equiv y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t=0) \equiv 0.$$

Wendet man diese zwei Anfangsbedingungen auf die allgemeine Funktion an, erhält man die eindeutige Lösung:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t).$$

- Die Masse wird *nicht* ausgelenkt und mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 losgelassen. Formal lauten dann die Bedingungen:

$$y(t=0) \equiv 0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t=0) \equiv v_0.$$

Wendet man diese zwei Anfangsbedingungen auf die allgemeine Funktion an, erhält man die eindeutige Lösung:

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

- Die Masse wird um y_0 ausgelenkt und mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 losgelassen. Formal lauten dann die Bedingungen:

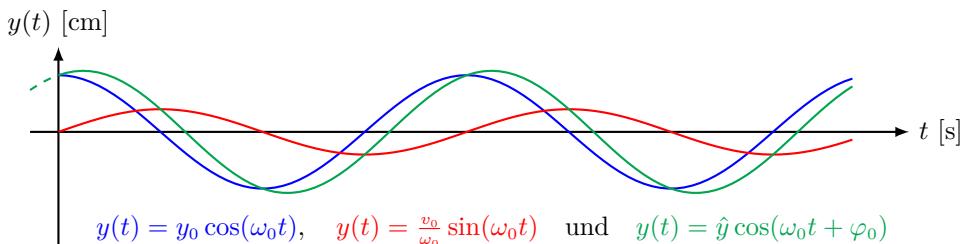
$$y(t=0) \equiv y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t=0) \equiv v_0.$$

Wendet man diese zwei Anfangsbedingungen auf die allgemeine Funktion an, erhält man die eindeutige Lösung:

$$y(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

wobei $\hat{y} = \frac{y_0}{\cos(\varphi_0)}$ und $\varphi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{y_0\omega_0}\right)$ sind.

Grafisch sehen die drei Lösungen für $y_0 = 1 \text{ cm}$ und $v_0 = 20 \text{ cm/s}$ sowie $\omega_0 = 50 \text{ rad/s}$ wie folgt aus:



Nun betrachten wir zwei Beispiele, wobei wir versuchen, möglichst viel davon zu verwenden, was wir soeben hergeleitet haben.

Bsp. i.

Eine Masse von 500 g wird an einer Feder gehängt und um 5 cm nach unten ausgelenkt und ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen, sodass sie harmonisch schwingt. Bestimmen Sie a) die Federkonstante D , falls die Periode 1 s ist und b) die Geschwindigkeit und Beschleunigung 0.2 s nach dem oberen Umkehrpunkt.
Lsg: a) $D \approx 20 \text{ N/m}$, b) $\dot{y} \approx 0.3 \text{ m/s}$, $\ddot{y} \approx -0.61 \text{ m/s}^2$

Lsg: a) $D \approx 20 \text{ N/m}$, b) $\dot{y} \approx 0.3 \text{ m/s}$, $\ddot{y} \approx -0.61 \text{ m/s}^2$

Lösung:

⁴ ω_0 ist kein freier Parameter, sofern das Experiment schon aufgebaut ist und die Masse sowie die Feder gegeben sind.

Man sieht bereits an diesem Beispiel, dass dieser Formalismus sehr wertvoll ist. Müsste man dies ohne Kenntnis der Schwingung lösen, wäre dies um einiges schwieriger. Betrachten wir das nächste Beispiel.

Bsp. ii.

Eine Masse von 200 g hänge an einer Feder mit der Federkonstante von 30 N/m und werde von der Ruhelage aus mit der Anfangsgeschwindigkeit von 5 m/s nach oben angestossen. Bestimmen Sie a) die Funktion $y(t)$ b) die Periode T und c) die maximale Beschleunigung für diese Bewegung. Lsg: a) – b) $T \approx 0.5\text{ s}$, c) $a_{\max} \approx 60\text{ m/s}^2$

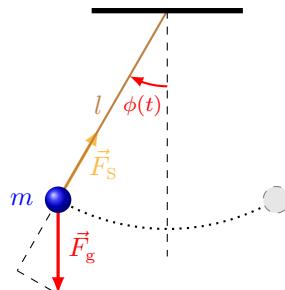
Lösung:

Nun betrachten wir das etwas schwierigere Fadenpendel, welches wie wir sehen werden, nur für kleine Auslenkwinkel harmonisch schwingt.

1.1.2 Fadenpendel

Das Fadenpendel ist ein schönes Beispiel dafür, wie ein scheinbar sehr einfaches System sehr schwierig und formal unlösbar werden kann. Nur durch Vereinfachung gelingt es, dieses Problem zu lösen.

Das Fadenpendel ist durch einen massiven Körper und eine masselose Schnur charakterisiert. Da sich der Körper auf einem Kreissegment bewegt, wird die Lage des Pendelkörpers vereinfacht in Polarkoordinaten beschrieben. Wir verwenden dazu die Pendellänge l und den momentanen Auslenkwinkel $\phi(t)$. Ein weiterer Vorteil dieses Koordinatensystems ist, dass das zweidimensionale Problem $(x(t), y(t))$ zu einem eindimensionalen Problem $(\phi(t), l)$ vereinfacht wird. Dies, weil die Pendellänge konstant bleibt. Betrachten wir die folgende Skizze:



Die Kraft, die dafür verantwortlich ist, dass der Körper die Bahnkurve beschreibt, ist $F_g \sin \phi$, da sich die andere Komponente der Schwerkraft mit der Seilkraft aufhebt. Man erhält also

$$-F_g \sin \phi = ma \Rightarrow -g \sin \phi = a.$$

Wir sehen bereits, dass die Beschleunigung nicht mehr proportional zur Auslenkung ist, sondern vom Sinus der Auslenkung abhängt. Damit erfüllt diese Bewegungsgleichung nicht mehr die Bedingung einer harmonischen Schwingung.

Diese Bewegungsgleichung soll nun trotzdem gelöst werden. Dazu müssen wir sie aber approximieren. Dies gelingt uns nur, wenn wir kleine Auslenkungen ϕ betrachten. In diesem Fall ist nämlich

$$\sin \phi \sim \phi.$$

Setzt man die lineare Beschleunigung a als Winkelbeschleunigung $\alpha = \ddot{\phi}$ ein, so gilt: $a = l\ddot{\phi}$.

$$-\frac{g}{l} \cdot \phi = \ddot{\phi}.$$

Auch hier ist die Bedingung der harmonischen Schwingung erfüllt. Die Winkelbeschleunigung ist der Auslenkung proportional. Wir erhalten also wieder die gleiche Lösung wie beim Federpendel:

$$\phi(t) = \hat{\phi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

wobei in diesem Fall die Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist.

Solange wir also ein Fadenpendel nicht zu stark auslenken, können wir davon ausgehen, dass es sich um eine harmonische Schwingung handelt⁵. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

Bsp. iii.

Eine Pendeluhr hat in der Regel eine Frequenz von einem Hertz. a) Wie lange muss die *Schnur* sein, damit dies erfüllt werden kann. b) Wieso haben nicht alle Pendeluhrnen das gleich lange Pendel. Lsg: a) $l \approx 0.25\text{ m}$

Lsg: a) $l \approx 0.25$ m

Lösung:

Bevor wir uns weiteren Schwingungsarten zuwenden, soll ein weiteres Beispiel zur Auftriebskraft behandelt werden.

Bsp. iv.

Ein verschlossenes, zylindrisches Glasrörchen mit der Masse von 0.1 kg und einer Querschnittsfläche von 3 cm^2 wird in Wasser mit der Dichte 1000 kg/m^3 eingetaucht. Aus der Gleichgewichtslage wird es um eine Strecke $\hat{y} = 2 \text{ cm}$ ins Wasser hinein gedrückt und losgelassen. Gehen wir davon aus, dass keine Reibung herrscht.

- a) Zeigen Sie, dass es sich hierbei um eine harmonische Schwingung handelt. Bestimmen Sie b) die Funktion $y(t)$, c) die Periode T sowie d) die maximale Geschwindigkeit und e) die maximale Beschleunigung.

Lsg: a) -, b) -, c) $T \approx 1.15$ s, d) $v_{\max} \approx 0.11$ m/s, $a_{\max} \approx 0.6$ m/s²

Lösung:

Solche harmonischen Schwingungen sind im Allgemeinen sehr selten. Die meisten, wenn nicht sogar alle Schwingungen werden auf die eine oder andere Weise gedämpft.

1.2 Gedämpfte und erzwungene Schwingung

Wie bereits erwähnt, wird grundsätzlich jede Schwingung gedämpft, d.h. sie verliert durch Reibung Energie. In manchen Fällen ist dies sogar erwünscht, in anderen nicht. Dann kann die Schwingung durch Anregung von aussen aufrechterhalten werden. Solche Schwingungen nennt man erzwungen.

⁵Im Physikunterricht der Mittelschule kann jedes Fadenpendel als harmonischer Oszillator betrachtet werden.

1.2.1 Gedämpfte Schwingung

Eine reale mechanische Schwingung ist in der Regel nicht reibungsfrei. Das bedeutet, dass die Schwingung durch Reibung Energie verliert und somit die Schwingungsamplitude abnimmt. Eine solche Schwingung wird als gedämpfte Schwingung bezeichnet. Im Allgemeinen sind solche Schwingungen nicht mehr harmonisch. Die Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung hat einen zusätzlichen Reibungsterm F_R , der der Ursache entgegenwirkt.

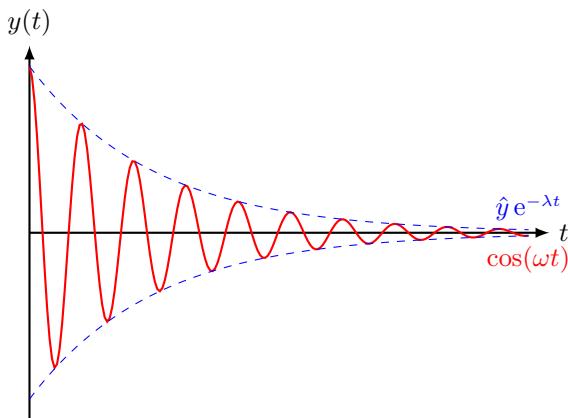
$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= ma \\ -Dy + F_R &= m\ddot{y} \end{aligned}$$

Im Falle einer Masse auf einem Tisch entspricht F_R der Gleitreibung und ist, abgesehen vom periodisch wechselnden Vorzeichen, konstant. Der Luftwiderstand hingegen ist geschwindigkeitsabhängig, und wenn wir von der sogenannten *Stokesschen Reibung* ausgehen, ist die Reibung $F_R = -2m\delta\dot{y}$, wobei δ die Dämpfungskonstante oder *Abklingkonstante* ist. Wir erhalten die folgende Bewegungsgleichung für eine gedämpfte Schwingung:

$$m\ddot{y} = -Dy - 2m\delta\dot{y} \Rightarrow \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0,$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ist.

Diese Gleichung erfüllt nicht mehr die Voraussetzung für eine harmonische Schwingung, da die Beschleunigung nicht mehr proportional zur Auslenkung ist. Die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist schon etwas schwieriger und nicht mehr so einfach durch Raten zu finden. Wenn wir versuchen, die Lösung zu erraten, indem wir sie zuerst zeichnen, sieht die Lösung wahrscheinlich wie folgt aus:



Man erkennt, dass es sich um eine Kosinusfunktion mit sich ändernder Amplitude handelt. Die Amplitude wird kleiner und kleiner. Da wir immer noch die Differentialgleichung erfüllen müssen, nehmen wir an, dass die Amplitude eine Exponentialfunktion ist. Wir gehen also vom Ansatz aus:

$$y(t) = \hat{y} e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$$

aus.

Jetzt beginnt das grosse Rechnen. Um diesen Ansatz zu überprüfen, setzen wir ihn in die Differentialgleichung ein. D.h. wir müssen die erste und zweite Ableitung bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\lambda \cdot \underbrace{\hat{y} e^{-\lambda t} \cos(\omega t)}_{y_c} - \omega \cdot \underbrace{\hat{y} e^{-\lambda t} \sin(\omega t)}_{y_s} \\ &= -\lambda \cdot y_c - \omega \cdot y_s \\ \ddot{y}(t) &= \lambda^2 \cdot \hat{y} e^{-\lambda t} \cos(\omega t) + 2\lambda\omega \cdot \hat{y} e^{-\lambda t} \sin(\omega t) - \omega^2 \cdot \hat{y} e^{-\lambda t} \cos(\omega t) \\ &= \lambda^2 \cdot y_c + 2\lambda\omega \cdot y_s - \omega^2 \cdot y_c \end{aligned}$$

In die Differentialgleichung eingesetzt erhält man

$$\underbrace{\lambda^2 \cdot y_c + 2\lambda\omega \cdot y_s - \omega^2 \cdot y_c}_{\ddot{y}} + 2\delta \cdot \underbrace{(-\lambda \cdot y_c - \omega \cdot y_s)}_{\dot{y}} + \omega_0^2 \cdot y_c = 0$$

Durch Vergleich der Koeffizienten vor y_c und y_s erhält man:

$$(\lambda^2 - \omega^2 - 2\delta\lambda + \omega_0^2) y_c + (2\lambda\omega - 2\delta\omega) y_s = 0.$$

Da dieser Term zu jeder Zeit null sein muss, kann dies nur der Fall sein, wenn die Koeffizienten verschwinden, d. h.

$$\lambda^2 - \omega^2 - 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2\lambda\omega - 2\delta\omega = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt unmittelbar, dass $\lambda = \delta$ ist. Eingesetzt in die erste Gleichung erhält man:

$$\delta^2 - \omega^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung der gedämpften Schwingung folgende Funktion:

Ges. 1: (*Gedämpfte Schwingung*) Eine gedämpfte Schwingung mit einer Stokes-Dämpfung gehorcht der Bewegungsgleichung:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0.$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichung ist:

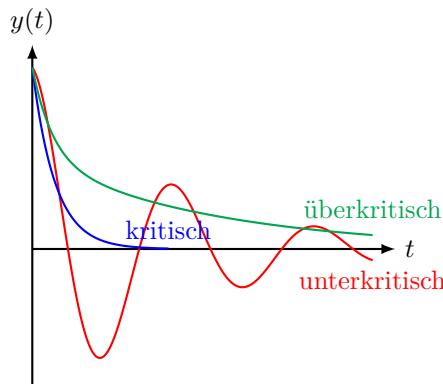
$$y(t) = \hat{y} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

wobei $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ ist.

Wir sehen also, dass die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung kleiner ist als die der ungedämpften Schwingung. Es gibt jedoch zwei Fälle, in denen das System überhaupt nicht mehr schwingt. Dies ist der Fall, wenn die Dämpfung einen kritischen Wert annimmt. Betrachten wir den folgenden Zusammenhang

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = \begin{cases} \omega_0^2 > \delta^2, & \text{unterkritische Dämpfung} \\ \omega_0^2 = \delta^2, & \text{kritische Dämpfung} \\ \omega_0^2 < \delta^2, & \text{überkritische Dämpfung} \end{cases}$$

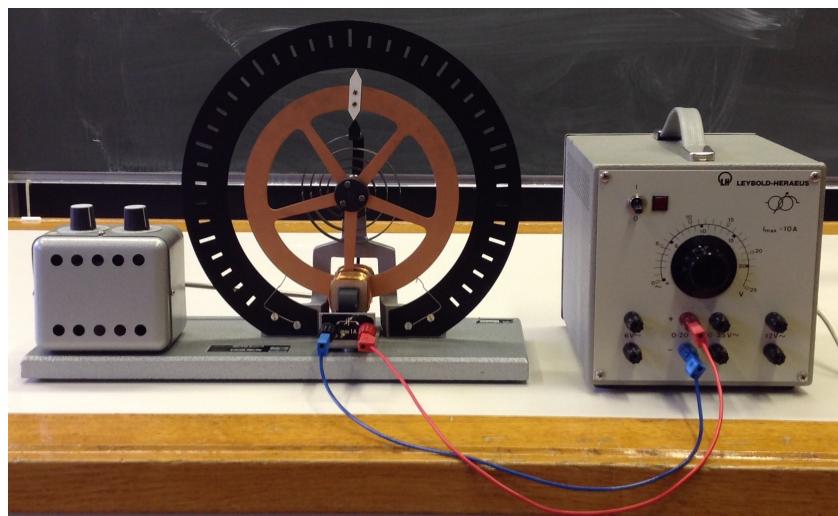
Graphisch stellen sich diese drei Lösungen wie folgt dar:



Mit dem folgenden Experiment können alle drei Arten der Dämpfung sehr schön demonstriert werden.

Exp. 3: Pohlsches Drehpendel

Mit dem Drehpendel nach Pohl lassen sich die verschiedenen Arten der Dämpfung gut demonstrieren. Das Drehpendel wird an eine Spannungsquelle angeschlossen und die Schwingung durch eine Wirbelstrombremse gedämpft (siehe Abb.).



Je nach Stromstärke in der Spule ist die Dämpfung kritisch bis überkritisch. Es ist nicht einfach, den überkritischen Fall vom kritischen Fall zu unterscheiden. Der kritische Fall erreicht die Gleichgewichtslage in der Regel schneller, während der überkritische Fall je nach Grösse die Gleichgewichtslage gar nicht oder nur sehr langsam erreicht.

Nachdem wir nun viel gerechnet haben und vor lauter Ableitungen die Physik nicht mehr sehen, wollen wir uns noch ein sehr angewandtes Beispiel ansehen.

Bsp. v.

Ein Kind auf einer Schaukel wird bis zu einer erträglichen Höhe geschubst und dann gebeten, nicht weiter zu schaukeln. Es zeigt sich, dass in diesem Fall die Schaukel mit einer Länge von 2 m nach etwa 10 s noch eine Auslenkung von 10% aufweist. Bestimmen Sie daraus a) die Abklingkonstante δ und b) die Kreisfrequenz ω der gedämpften Schwingung.

Lsg: a) $\delta \approx 0.23 \text{ s}^{-1}$, b) $\omega \approx 2.2 \text{ rad/s}$

Lösung:

Für mathematisch Interessierte findet sich im Anhang Kapitel M.4.2 eine kurze Theorie der linearen Differentialgleichungen. Wir betrachten nun den letzten, aber nicht den allgemeinsten Fall. Wir betrachten eine ideale Schwingung mit äusserer Anregung.

1.2.2 Erzwungene Schwingung

Unter erzwungener Schwingung versteht man eine Schwingung, bei der von aussen periodisch eine Kraft einwirkt. Als Beispiel soll der folgende Versuch dienen:

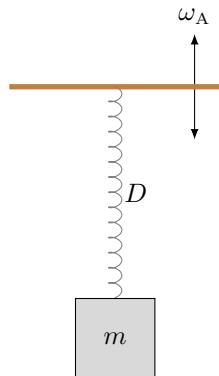
Exp. 4: Erzwungene Schwingung

Eine Masse ist an einer Feder aufgehängt. Das andere Ende der Feder wird nicht aufgehängt, sondern frei in der Hand gehalten (siehe Abbildung).



Man erkennt sehr schnell, dass nicht jede Anregung eine Wirkung hat und dass einige Anregungen eine sehr grosse Wirkung haben. Je näher die Anregungsfrequenz an der Eigenfrequenz liegt, desto grösser ist die Wirkung. Dazu ein Demonstrationsvideo: [Resonanzverhalten Federpendel](#).

Dieses Phänomen bezeichnet man als *Resonanz* und die optimale Anregungsfrequenz als Resonanzfrequenz. Betrachten wir dies etwas genauer.



Bei einer erzwungenen Schwingung soll die äussere Anregung proportional zu einer Sinusfunktion sein, d.h. es wird der Ansatz gewählt

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_A t).$$

Für die Bewegungsgleichung erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= m\ddot{y} \\ -Dy + F_0 \sin(\omega_A t) &= m\ddot{y}. \end{aligned}$$

In diesem Fall erhalten wir eine inhomogene Differentialgleichung:

$$a_0 \sin(\omega_A t) = \ddot{y} + \omega_0^2 y,$$

wobei $a_0 = \frac{F_0}{m}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ die Eigenfrequenz ist. Das Lösen von inhomogenen Differentialgleichungen ist nicht sehr einfach aus diesem Grund beschränken wir uns auf die Analyse der Amplitude der Schwingung. Nehmen wir den folgenden Ansatz: $y(t) = \hat{y} \sin(\omega_A t)$ dann gilt:

$$a_0 \sin(\omega_A t) = -\omega_A^2 \hat{y} \sin(\omega_A t) + \omega_0^2 \hat{y} \sin(\omega_A t).$$

Durch Vereinfachung und auflösen nach der Amplitude \hat{y} erhalten wir:

$$\hat{y} = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega_A^2}.$$

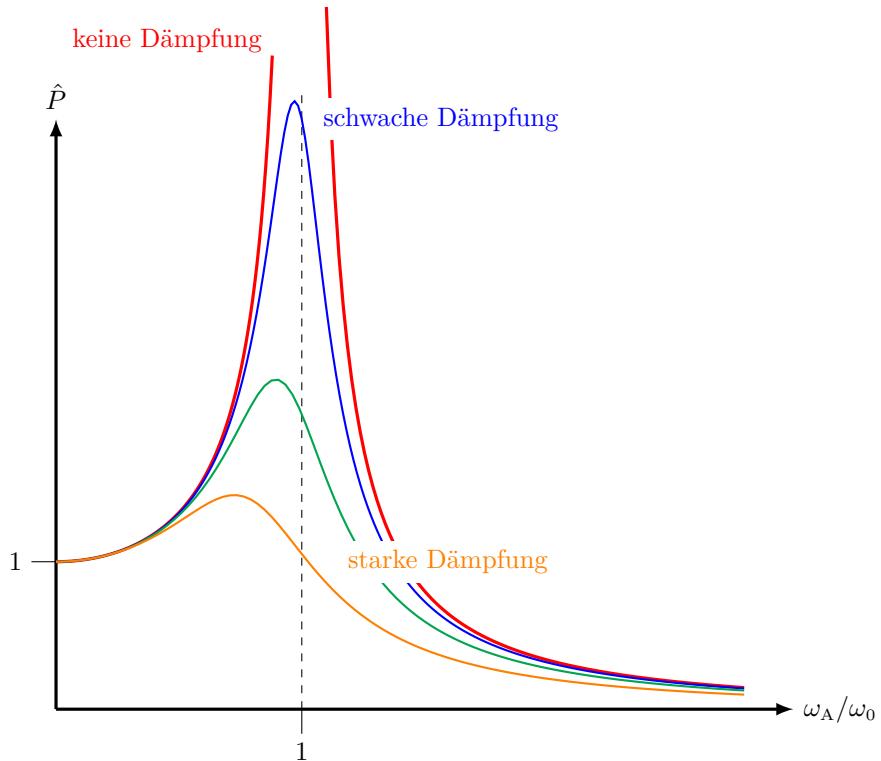
An diesem Term erkennt man sehr schnell, dass der Nenner gegen Null geht, wenn sich die Erregerfrequenz immer mehr der Eigenfrequenz nähert und damit die Amplitude gegen unendlich geht. Man spricht dann auch von der *Resonanzkatastrophe*. Es gilt:

$$\omega_A \rightarrow \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{y} \rightarrow \infty.$$

Um dieses Verhalten besser zu verstehen, wird nicht die Amplitude selbst dargestellt, sondern sie wird noch durch die Amplitude ohne Erregerfrequenz normiert, d.h.

$$\hat{P} = \left| \frac{\hat{y}(\omega_A)}{\hat{y}(\omega_A = 0)} \right|$$

dargestellt. Ausserdem wird sie nicht als Funktion der Erregerfrequenz, sondern als Funktion des Verhältnisses der Erregerfrequenz zur Eigenfrequenz dargestellt: ω_A/ω_0 . Dies sieht wie folgt aus:



In der Technik werden periodische Anregungen meist durch rotierende Maschinen erzeugt. Stimmen die Eigenfrequenzen anderer Bauteile mit dieser Drehfrequenz überein, kann dies zu starken Schwingungen und im Extremfall zur Zerstörung der Maschine führen. Aus diesem Grund dämpft man die Schwingungen und achtet darauf, dass keine Anregungen mit der Eigenfrequenzen in der Nähe der Maschine auftreten.

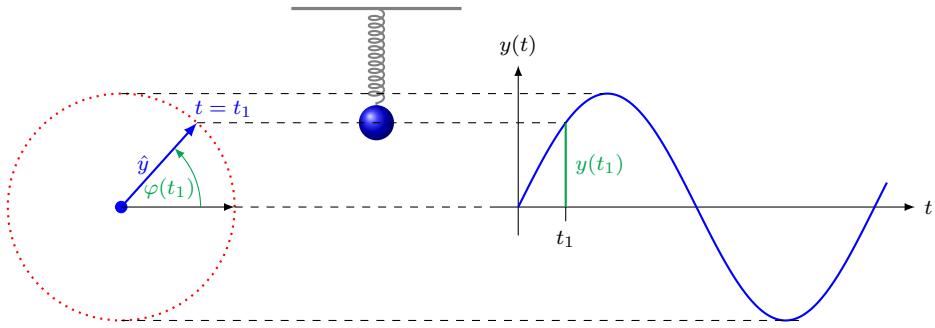
Bevor wir zur Beschreibung der Überlagerung von Schwingungen übergehen, wenden wir uns dem Zeigerformalismus zu. Dies ist eine neue Art, Schwingungen oder Wellen auf einfache Weise zu beschreiben.

1.3 Zeigerformalismus

Der Zeigerformalismus, der hier zum ersten Mal eingeführt wird, hat ein sehr breites Anwendungsgebiet, das von der Mechanik bis zur Quantenphysik reicht. Ein berühmtes Werk hierzu ist das Buch von Richard Feynman: *QED: The strange theory of light and matter* [37], in dem der Zeigerformalismus zunächst erklärt und dann auf verschiedene quantenphysikalische Phänomene angewendet wird.

In diesem Abschnitt soll der Zeigerformalismus erstmals eingeführt und anhand einiger Beispiele verständlich gemacht werden. Im nächsten Kapitel über mechanische Wellen wird dieser Formalismus weiter entwickelt.

Im Experiment (Exp. 83) haben wir gesehen, dass eine vertikale Schwingung als Projektion einer Kreisbewegung identifiziert werden kann. Dies ist im Wesentlichen die Grundidee des Zeigerformalismus. So wie die Kugel auf der Kreisbahn mit der Zeit rotiert, so kann auch ein Zeiger, der nichts anderes als ein Vektor ist, mit der Zeit rotieren. Betrachten wir folgende Situation: Auf der linken Seite der Abbildung haben wir den Zeiger, in der Mitte das schwingende Objekt - in diesem Fall ein Federpendel - und auf der rechten Seite die übliche Darstellung als Sinusfunktion im y - t -Diagramm:



Dieses Bild zeigt sehr gut, dass der Zeiger eine einfache Darstellung einer Schwingung ist. Die Länge des Zeigers entspricht der Amplitude der Schwingung und aus der Orientierung ergibt sich die aktuelle Auslenkung der Schwingung. In der dargestellten Situation gilt also

$$y(t_1) = \hat{y} \cdot \sin(\varphi(t_1)),$$

was genau dem rechten Bild und dem linken Bild entspricht, so dass diese beiden Abbildungen gleichwertig sind. Es ist auch klar, dass der Winkel φ mit der Winkelgeschwindigkeit über $\dot{\varphi}(t) = \omega t$ zusammenhängt, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des Zeigers ist.

Wenn man sich das linke Bild etwas genauer anschaut, sollte man auch verstehen, woher diese Darstellung ihren Namen hat. Sie erinnert stark an den Zeiger einer Uhr. Aber was soll das Ganze? Es ist keineswegs eine Vereinfachung. Wo ist der Nutzen dieses Zeigerformalismus?

Der wirkliche Nutzen wird erst deutlich, wenn man beginnt, zwei oder mehr Schwingungen zu addieren. Dann reduziert sich das Problem auf die Addition von Vektoren bzw. Zeigerpfeilen. Bleiben wir aber zunächst bei einer Schwingung und lösen das folgende Beispiel.

Bsp. vi.

Zur Vereinfachung der Darstellung wird häufig auch nur ein Zeiger gezeichnet ohne den Kreis dazu. Zeichnen Sie die Zeiger für eine harmonische Schwingung $y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t)$ für $t_1 = 0$, $t_2 = T/4$ und $t_3 = 3T/4$. Lsg: -

Lösung:

Wir werden immer wieder auf den Zeigerformalismus zurückkommen und ihn an geeigneter Stelle als alternative Beschreibung verwenden.

1.4 Überlagerung von Schwingungen

Unter Schwingungsüberlagerung versteht man die Addition von Schwingungen. In der Regel treten Schwingungen nicht alleine auf, d.h. mehrere Schwingungen kommen z.B. gleichzeitig aus einem Lautsprecher. Aber auch die zuvor besprochene erzwungene Schwingung ist eine Form der Überlagerung. Dabei wird die Anregungsschwingung der Eigenschwingung überlagert. Wie für Kräfte und Geschwindigkeiten gilt auch für Schwingungen das Superpositionsprinzip:

Ges. 2: (*Überlagerung*) Die momentanen Auslenkungen von sich überlagernden Teilschwingungen addieren sich (vektoriell) zur Auslenkung der resultierenden Bewegung.

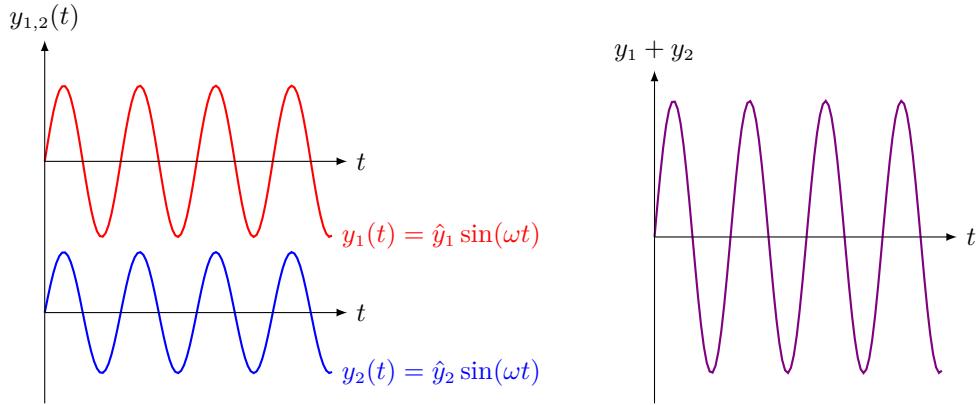
Wir betrachten nun zwei Fälle der Überlagerung, einmal, wenn die Frequenzen der Schwingungen gleich sind, und einmal, wenn sie unterschiedlich sind.

1.4.1 Konstruktive und destruktive Interferenz

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wenn die Frequenzen gleich sind. Reduzieren wir das Problem auf zwei Schwingungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$. Dann gilt

$$y_1(t) = \hat{y}_1 \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = \hat{y}_2 \sin(\omega t).$$

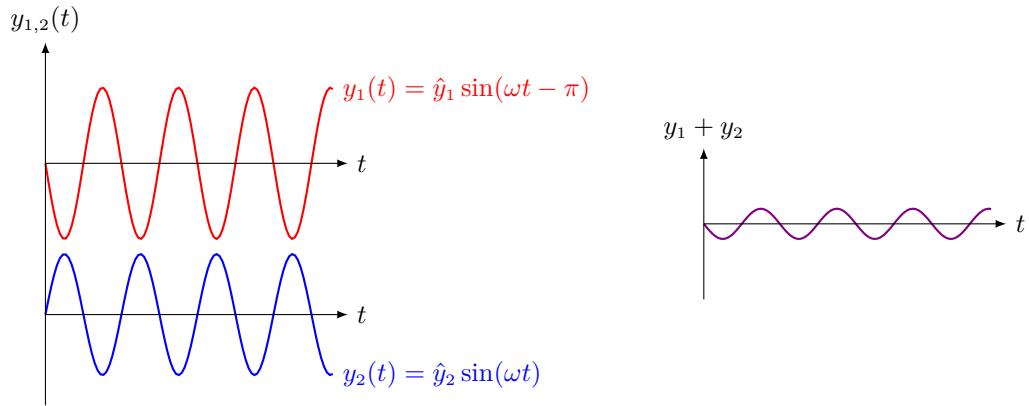
Beachten Sie, dass die Amplituden \hat{y}_1 und \hat{y}_2 im Allgemeinen nicht gleich sein müssen. Grafisch sieht die Überlagerung wie folgt aus:



Die Summe der beiden Schwingungen ergibt also eine Schwingung mit gleicher Frequenz, aber gröserer Amplitude. Es gilt:

$$y_1 + y_2 = \hat{y}_1 \sin(\omega t) + \hat{y}_2 \sin(\omega t) = (\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \sin(\omega t).$$

Diese Art der Überlagerung wird als *konstruktive Interferenz* bezeichnet. Das Gegenteil ist die *destruktive Interferenz*, die wie folgt aussieht:

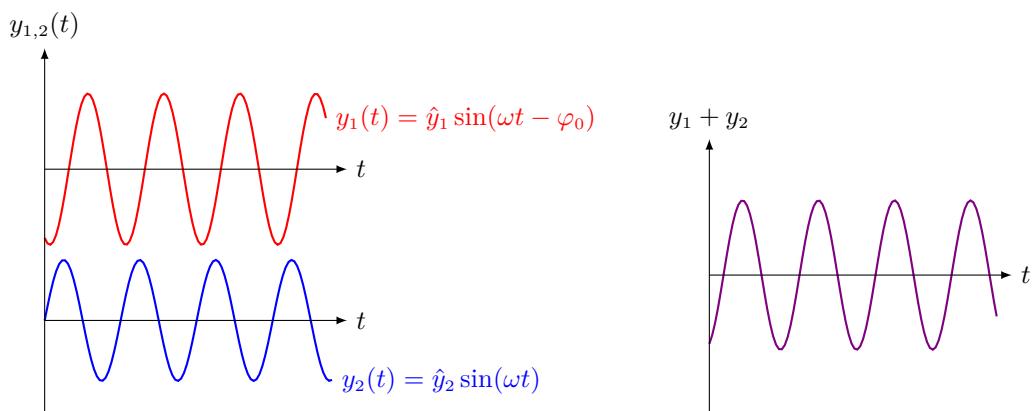


Da in diesem Fall die eine Schwingung genau um die Phase π verschoben ist, führt die Überlagerung zu einer Subtraktion der beiden Amplituden, denn $\sin(\omega t - \pi) = -\sin(\omega t)$. Es gilt also:

$$y_1 + y_2 = -\hat{y}_1 \sin(\omega t) + \hat{y}_2 \sin(\omega t) = (\hat{y}_2 - \hat{y}_1) \sin(\omega t).$$

Sind die Amplituden der beiden Schwingungen gleich gross, so heben sie sich bei destruktiver Interferenz vollständig auf.

Im Allgemeinen erhält man jedoch immer eine Schwingung mit gleicher Frequenz, aber beliebiger Amplitude, wie die folgende Abbildung zeigt:



Den Beweis für diese Behauptung überlassen wir an dieser Stelle dem Leser und beschränken uns darauf, im folgenden Beispiel die destruktive Interferenz mit dem Zeigerformalismus zu erläutern.

Bsp. vii.

Zeigen Sie mit Hilfe des Zeigerformalismus die destruktive Interferenz. Beachten Sie, dass die Zeiger bei einer Überlagerung von zwei Schwingungen einfach addiert werden können. Lsg: -

Lsg: —

Lösung:



Zeige, dass die Überlagerung zweier beliebiger Schwingungen gleicher Frequenz immer eine Schwingung gleicher Frequenz ergibt.

Betrachten wir nun den zweiten und wahrscheinlich etwas interessanteren Fall, nämlich die sogenannte *Schwebung*.

1.4.2 Schwebung

Die Schwebung ist eine Überlagerung von zwei Schwingungen unterschiedlicher Frequenz und im Allgemeinen auch unterschiedlicher Amplitude. Da aber die Verallgemeinerung für unterschiedliche Amplituden nichts zum Verständnis beiträgt, sondern im Gegenteil eher erschwert, lassen wir diese Verallgemeinerung⁶ weg und betrachten den Spezialfall für zwei gleiche Amplituden. Die Definition des Schwebens lautet daher für uns:

Def. 3: (Schwebung) Die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit nur wenig verschiedenen Frequenzen bezeichnet man als Schwebung.

Wir betrachten also Schwingungen mit gleicher Amplitude. Die graphische Darstellung einer solchen Funktion

⁶Es gilt für beliebige Amplituden und unterschiedlichen Frequenzen:

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 \sin(\omega_1 t) + \hat{y}_2 \sin(\omega_2 t) &= (\hat{y}_1 - \hat{y}_2) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) \\ &\quad + (\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right).\end{aligned}$$

zeigt sehr schnell, dass diese Überlagerung keiner harmonischen Funktion entspricht, d.h. sie kann nicht durch eine reine Sinus- oder Kosinusfunktion dargestellt werden. Es ist jedoch möglich, dass diese Funktion periodisch ist und daher als Schwingung bezeichnet werden kann.



Zeige, dass die Überlagerung zweier Schwingungen nur dann periodisch ist, wenn das Verhältnis der Frequenzen eine rationale Zahl ist.

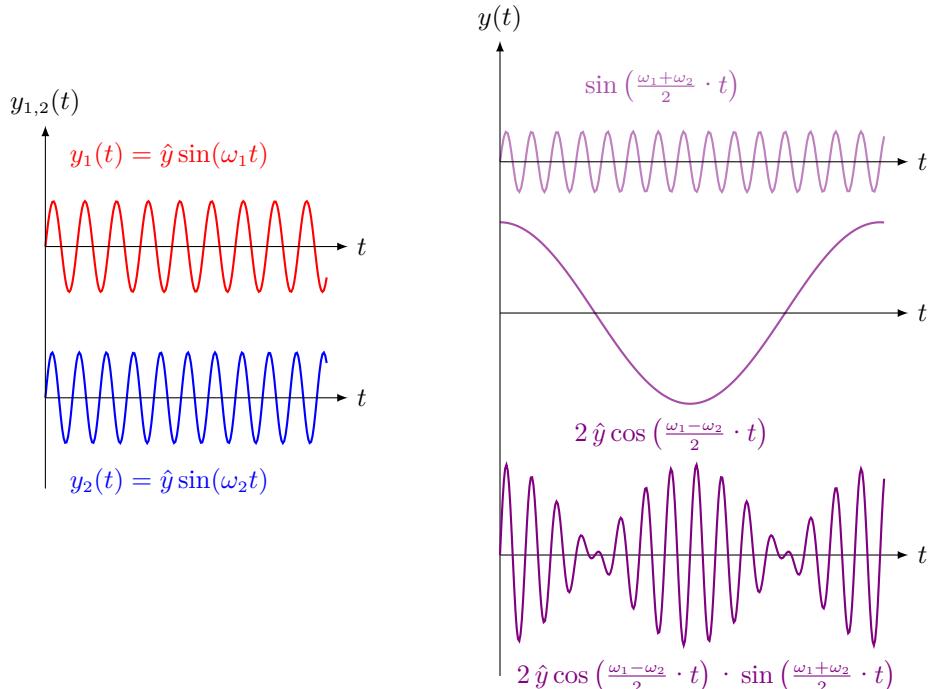
Wir untersuchen nun also die Summe von zwei harmonischen Funktionen mit der gleichen Amplitude und unterschiedlicher Frequenz, d. h.

$$y(t) = \hat{y} \sin(\omega_1 t) + \hat{y} \sin(\omega_2 t).$$

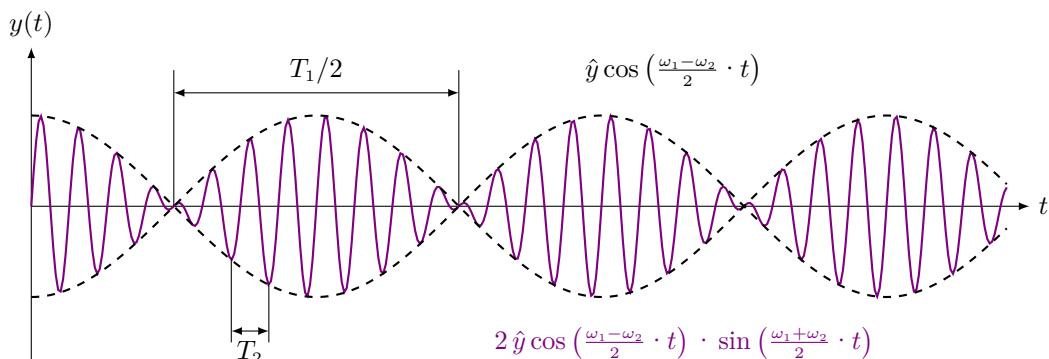
Mit dem Additionstheorem für trigonometrische Funktionen lässt sich diese Summe auch schreiben als,

$$y(t) = \underbrace{2 \hat{y} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)}_{\text{Modulation der Amplitude}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right)}_{\text{Schwingung}}.$$

Graphisch sieht dies wie folgt aus:



Man sieht sehr schön, dass die langsam schwingende Funktion die Hülfunktion und die schnell schwingende Funktion die eigentliche Funktion ist. Betrachten wir also die Schwingung noch einmal etwas grösser, so erhalten wir



Die Perioden T_1 der Umhüllenden und T_2 der Schwingung sind natürlich gegeben als:

$$T_1 = \frac{2\pi}{(\omega_1 - \omega_2)/2} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{2\pi}{(\omega_1 + \omega_2)/2}.$$

Die sogenannte *Schwebungsfrequenz* ist die doppelte Frequenz der Umhüllendenfrequenz, da wir immer nur den Betrag der Hüllkurve hören. Diese Schwebungsfrequenz kann sehr einfach hörbar gemacht werden, wie das folgende Experiment zeigt.

Exp. 5: Schwebung

Zwei Stimmgabeln gleicher Frequenz werden durch einen Schlag zum Schwingen angeregt. Mit einer Klemme wird die Frequenz einer Stimmgabel geringfügig verändert (s. Abb.).

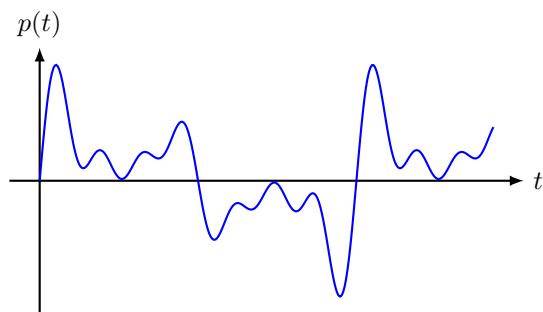


Mit einem Frequenzmessgerät werden die Frequenzen der beiden Stimmgabeln gemessen. In dem dargestellten Szenario schwanken die Frequenzen um 0.5 – 1.0 Hz, d.h. die Schwebungsfrequenz beträgt 0.25 – 0.5 Hz und damit die Schwebungsdauer $T = 1 – 2$ s, was durch das Experiment sehr gut bestätigt wird.

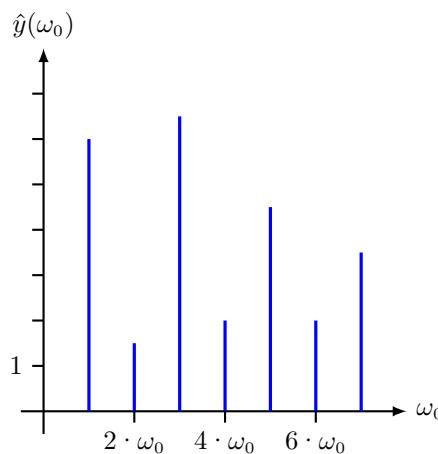
An der Schwebung erkennt man, dass periodische Funktionen im Grunde aus einer Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen bestehen. Fourier, der französische Mathematiker, hat diesen Sachverhalt verallgemeinert und wird nun kurz behandelt.

1.5 Fourier-Analyse

Bei der Fourier-Analyse handelt es sich um die Untersuchung von überlagerten Schwingungen. Darunter fallen nicht nur einfache Überlagerungen von zwei Schwingungen, wie sie im letzten Abschnitt betrachtet wurden, sondern auch komplexere Überlagerungen von beliebig vielen Schwingungen. Wir betrachten hierfür ein Beispiel aus der Musikinstrumentenkunde, nämlich die Klarinette. Die Druckschwingungen in der Klarinette sehen wie folgt aus:



Die Analyse dieser Überlagerung untersucht, aus welchen harmonischen Schwingungen sie zusammengesetzt ist. Dazu wird das Spektrum der Überlagerung betrachtet. Das Spektrum stellt in diesem Fall eine diskrete Funktion dar, welche die Amplitude als Funktion der Kreisfrequenz der einzelnen harmonischen Schwingungen darstellt. Für eine bessere Übersichtlichkeit wird nicht nur ein Punkt, sondern eine senkrechte Linie bis zum Wert der Amplitude dargestellt. Für die Klarinette sieht dies wie folgt aus:



Damit kann die Überlagerungsfunktion der Klarinette als Summe von harmonischen Funktionen einfach aufgeschrieben werden. Der folgende Ausdruck ergibt sich:

$$p(t) = 6 \sin(\omega_0 t) + 1.5 \sin(2\omega_0 t) + 6.5 \sin(3\omega_0 t) + 2 \sin(4\omega_0 t) + 4.5 \sin(5\omega_0 t) + 2 \sin(6\omega_0 t) + 3.5 \sin(7\omega_0 t).$$

Ein Klang setzt sich aus dem Grundton (hier: $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$) und den Obertönen (hier: $2f_0, 3f_0, \dots, 7f_0$) zusammen. Im Allgemeinen werden diese Obertöne, welche bei Instrumenten immer ganzzahlige Vielfache des Grundtons sind, als *Harmonische* bezeichnet. Anhand des Spektrums der Klarinette lässt sich beispielsweise erkennen, dass die Grundfrequenz sowie die dritte, fünfte und siebte Harmonische stark zum Klangbild beitragen, während die zweite, vierte und sechste Harmonische weniger Einfluss darauf haben.

Bsp. viii.

Zeichnen Sie qualitativ das Spektrum a) für eine Stimmgabe und b) für eine Schwebung.

Lsg: —

Lösung:

Das Konzept der Fourier-Analyse lässt sich selbstverständlich auf jede periodische Funktion erweitern. Jean Baptiste Fourier gelang der Beweis für diese Erweiterung bereits zu Beginn des 19. Jahrhunderts. Im Folgenden wird das Fourier-Theorem ohne Beweis erklärt und anhand eines Beispiels angewendet.

Theorem 1: (Fourier-Theorem) Eine stetige Funktion $f(t)$, die in einem endlichen Intervall periodisch fortgesetzt ist, kann mittels einer Fourier-Reihe dargestellt werden. Dabei handelt es sich um eine Reihenentwicklung aus Sinus- und Kosinusfunktionen.

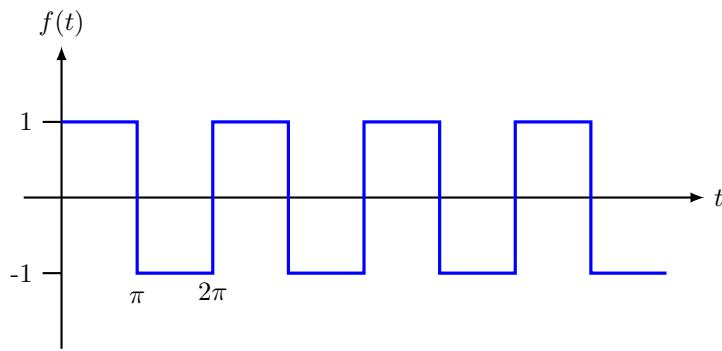
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)),$$

wobei man die Fourier-Koeffizienten durch

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt$$

auch direkt ausrechnen kann.

Betrachten wir als erstes Beispiel eine periodische Rechtecksfunktion, welche durch Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden soll. Wir nehmen die Funktion $f(t)$ in Betracht.



Diese Funktion, obwohl stetig, ist nicht überall differenzierbar und kann wie folgt analytisch dargestellt werden:

$$f(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < n\pi \\ -1, & n\pi \leq t < 2n\pi. \end{cases}$$

Nun können wir die Fourier-Koeffizienten berechnen. Beachten Sie, dass $T = 2\pi$ und $\omega_0 = 1$ ist. Beginnen wir zuerst bei a_0 .

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) dt + \int_0^{\pi} (+1) dt \right) = 0$$

Nun die restlichen Koeffizienten für die Kosinusfunktion a_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (+1) \cdot \cos(nt) dt = 0,$$

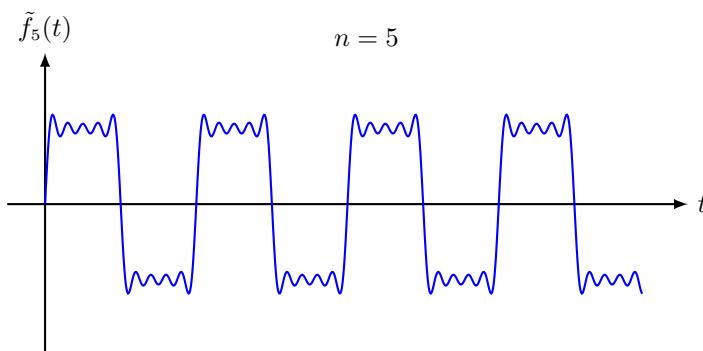
Es fallen alle Kosinus-Terme weg, was eigentlich nicht überraschend ist, da die Kosinusfunktion bezüglich der vertikalen Achse symmetrisch ist. Betrachtet man die Symmetrie der Rechteckfunktion, erkennt man, dass sie die gleiche Symmetrie wie die Sinusfunktion aufweist. Wir berechnen nun die Koeffizienten der Sinusfunktion.

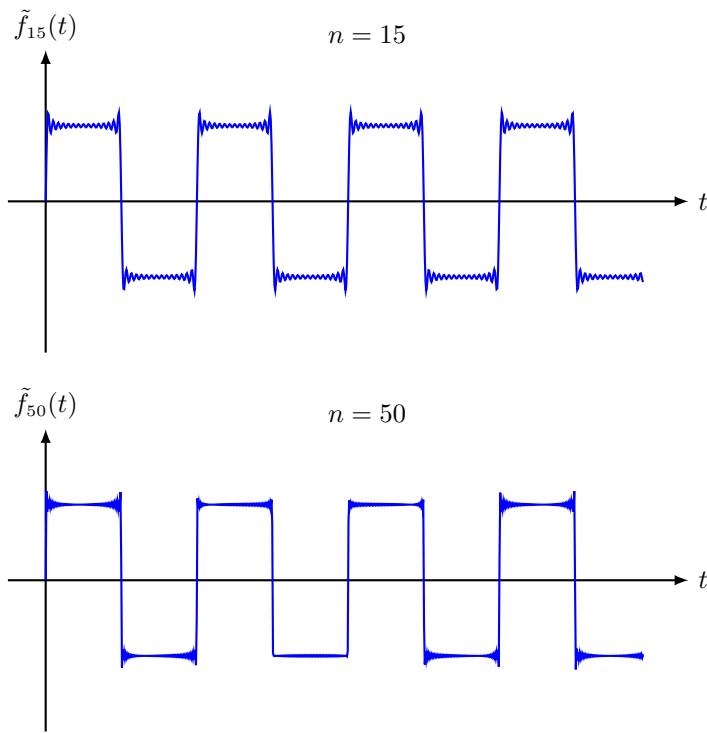
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (+1) \cdot \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} \cos(nt) \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} \cos(nt) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi) - \cos(n\pi) + 1) \\ &= \frac{1}{n\pi} (2 - 2\cos(n\pi)) \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Somit kann die Rechteckfunktion $f(t)$ durch die folgende Fourier-Reihe ausgedrückt werden:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sin(t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t) + \dots$$

Nachfolgenden betrachten wir drei Partialsummen \tilde{f} für $n = 5, 15, 50$.





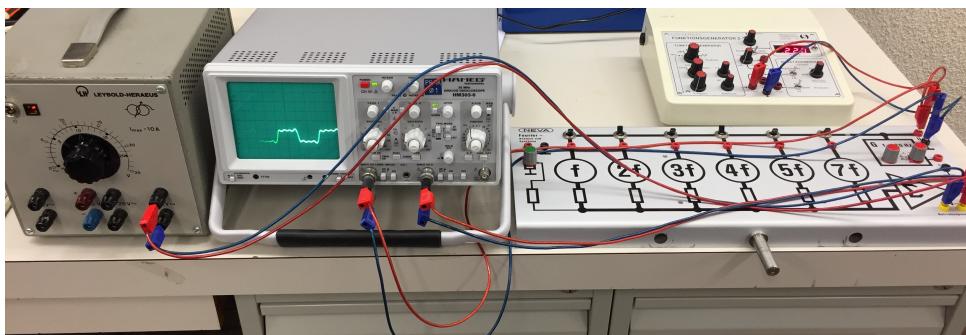
Wenn man in die Funktionen hineinzoomen könnte, wäre klar zu erkennen, dass sie immer genauer an die Rechtecksfunktion herankommen. Es ist bekannt, dass eine exakte Funktion nur durch die unendliche Summe von Summanden erreicht wird.

Das Zusammenfügen dieser einzelnen Funktionen zu einer periodischen Funktion kann als Pendant zur Fourier-Analyse betrachtet werden und wird als "harmonische Synthese" bezeichnet.

Durch dieses Beispiel wird nun deutlich, wie ein Synthesizer funktioniert. Jedes Instrument hat ein spezifisches Spektrum, welches der Synthesizer berücksichtigen muss. Durch präzises Zusammensetzen harmonischer Schwingungen ist es möglich, jeden Klang sehr gut zu reproduzieren. Aus eigener Erfahrung wissen wir jedoch, dass dies nicht perfekt mit dem realen Klang übereinstimmt. Der Grund dafür ist, dass die Klangcharakterisierung nicht nur vom Spektrum abhängt, sondern auch von der Art, wie ein Klang beginnt, vom Vorhandensein von Vibratos oder der Geschwindigkeit, mit der sich die Harmonischen aufheben. Für den Synthesizer ist es schwierig, all dies und noch einiges mehr nachzubilden, auch wenn heutige, sehr teure Modelle immer näher an die Realität herankommen. Nach dieser etwas mathematiklastigen Einführung soll nun anhand eines Experiments überprüft werden, ob die Theorie in der Praxis funktioniert.

Exp. 6: Fourier-Analyse

Das folgende Gerät dient zur Filterung eines Eingangssignals in seine Frequenzanteile. Eine Spannung von 12 V wird durch den Trafo links erzeugt, um das Gerät zu betreiben. Der Funktionsgenerator oben rechts erzeugt die Eingangsfunktion, welche auf dem Oszilloskop dargestellt wird. Das gefilterte Ausgangssignal wird unten angezeigt (vgl. Abbildung).



Zunächst wird eine Sinusfunktion als Eingangssignal verwendet, um zu zeigen, dass sie nur durch den Filter hindurchgeht, wenn sie der Grundfrequenz des Filters von $f = 220$ Hz entspricht. Um dies zu erreichen, muss die Frequenz durch den Schalter nach unten offen sein. Wenn man die Eingangsfrequenz ändert, sieht man keine Schwingungen mehr im Ausgangssignal. Dies kann für alle

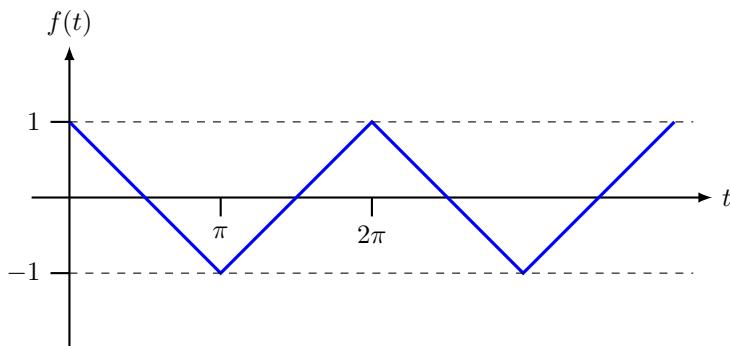
Vielfachen der Grundfrequenz überprüft werden.

Anschliessend kann anstelle der Sinusfrequenz eine Rechtecksfrequenz erzeugt werden. Das Eingangssignal zeigt die Frequenz eines Rechtecksignals. Die Frequenz setzt sich aus den ungeraden Vielfachen der Grundfrequenz zusammen. Um das Rechtecksignal zu approximieren, können die Filter für $3f$, $5f$ und $7f$ geöffnet werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts versuchen Sie selbst eine Funktion als Fourier-Reihe darzustellen.

Bsp. ix.

Betrachten Sie die nachfolgende Dreiecksfunktion $f(t)$ und finden Sie a) die Vorschrift dieser Funktion, b) die Fourier-Koeffizienten und c) nähern Sie diese Funktion mit dem Taschenrechner für $n = 10$ an.



Tipp: Betrachten Sie das richtige Intervall und schreiben Sie die Funktionen in diesem Intervall auf. Lsg: –

Lösung:

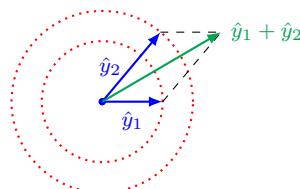
--

Wie sieht die allgemeine Überlagerung von Schwingungen im Zeigerdiagramm aus? Hierfür betrachten wir den folgenden kurzen Abschnitt.

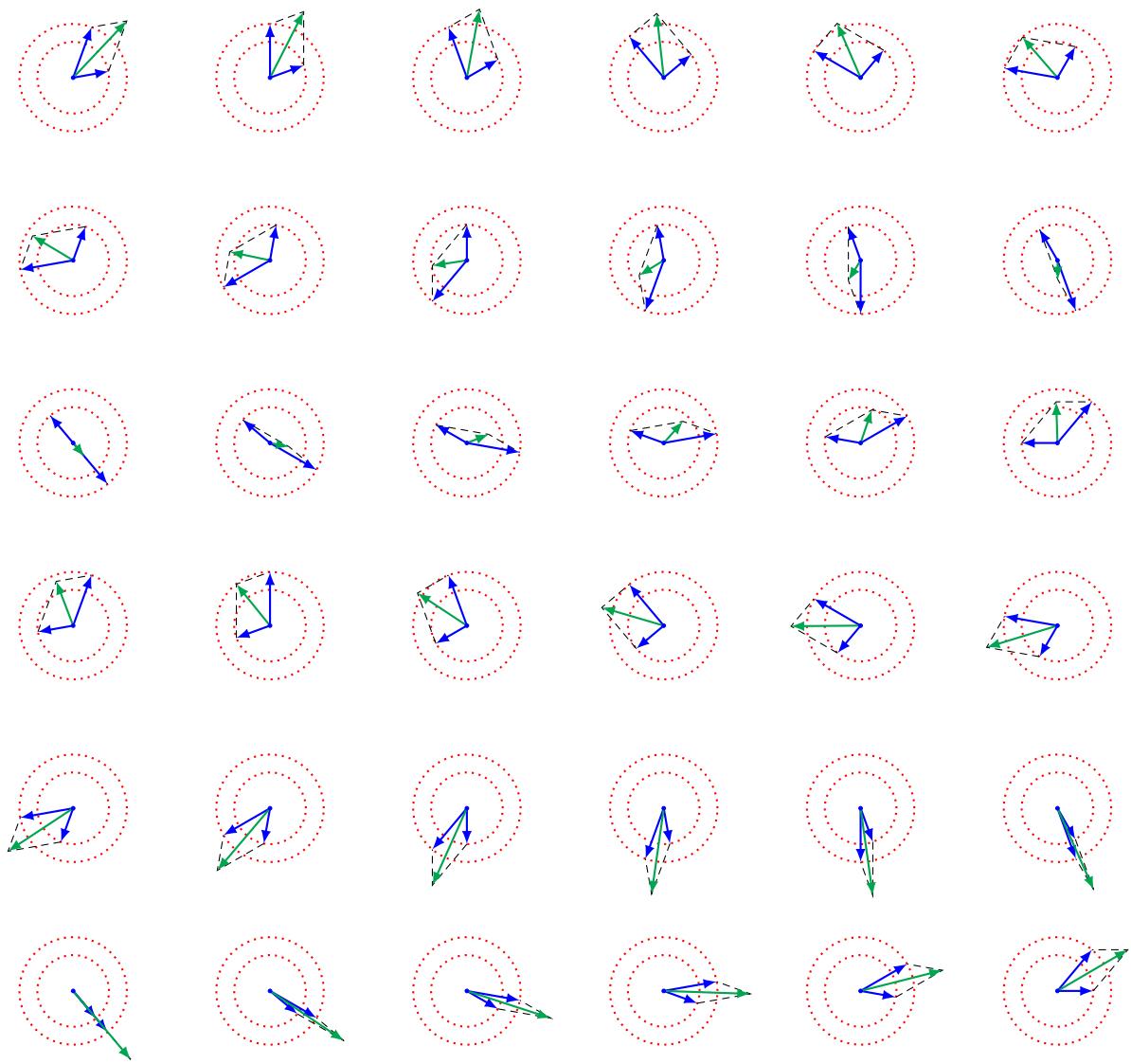
1.5.1 Überlagerung im Zeigerdiagramm

Um das Prinzip der Überlagerung von Schwingungen zu verstehen, genügt es, sich zwei Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz und Amplitude anzusehen.

Eine Momentaufnahme des Zeigerdiagramms zeigt die einzelnen Schwingungen in Blau und ihre Überlagerung in Grün.

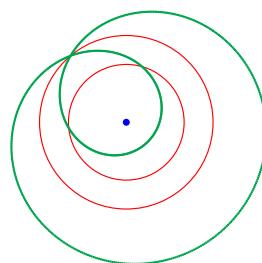


Es ist offensichtlich, dass die relative Position jeder Schwingung mit der Zeit aufgrund unterschiedlicher Geschwindigkeiten variieren kann, wodurch auch die Überlagerung verändert wird. Im Folgenden werden mehrere Momentaufnahmen dargestellt, die deutlich veranschaulichen, wie sich die Überlagerung im Laufe der Zeit ändert. Unter diesem Link [Fouriersynthese](#) ist eine dazugehörige Animation zu finden.

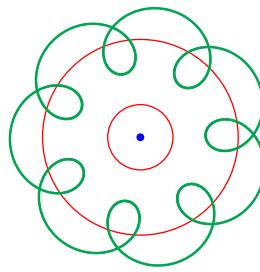


Betrachtet man den grünen Zeiger genauer, erkennt man schnell, dass es zwei Arten von Schwingungen gibt, die der grüne Zeiger anzeigen. Einerseits hat er nach der Hälfte der Bilder eine Umdrehung zurückgelegt und andererseits ändert sich auch die Amplitude dabei. Dies bedeutet, dass eine solche Überlagerung sowohl eine Modulation der Amplitude, als auch eine eigene innere Schwingung hervorruft. Dies erinnert stark an das Ergebnis aus der Schwebung.

Betrachtet man lediglich das Ende des grünen Zeigers und zeichnet eine Kurve entlang dieser Endpunkte, ergibt sich daraus eine Perizykloide.

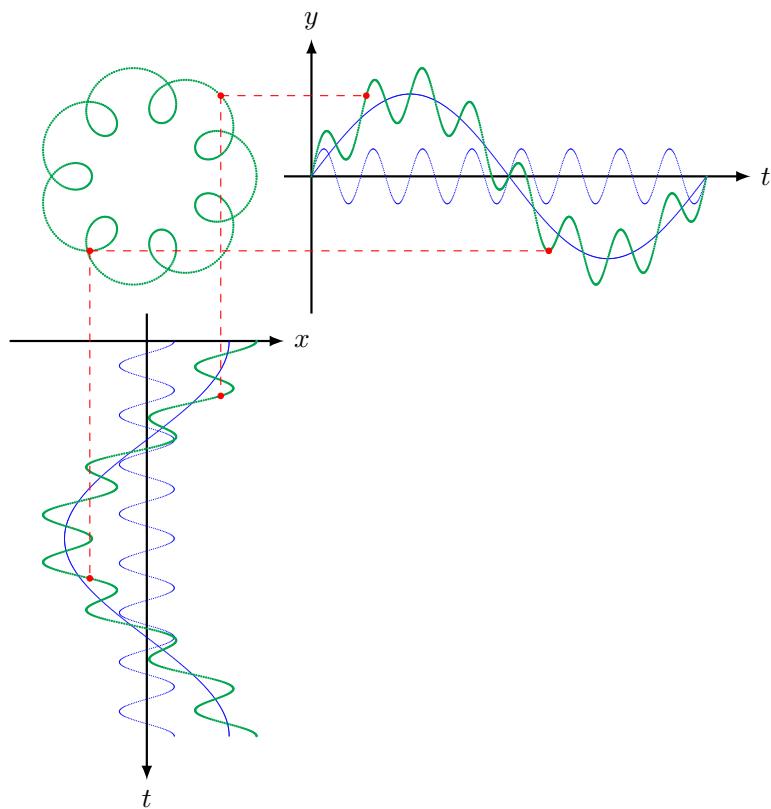


In diesem Fall ist die Perizykloide noch nicht ausreichend erkennbar. Sobald jedoch der Frequenzunterschied und Amplitudenunterschied signifikant erhöht werden, ergibt sich die folgende Abbildung:



Je mehr Zeiger und Schwingungen übereinander gelegt werden, desto komplexer wird die Interpretation der Bilder. Trotzdem werden wir auch in Zukunft gelegentlich auf diesen Zeigerformalismus zurückgreifen, um Sachverhalte anschaulicher darzustellen.

Eine solche Figur kann auch als *Lissajous-Figur*⁷ erzeugt werden. Jeder Punkt wird nach rechts und unten abgebildet, d.h. die x - und y -Koordinaten des Punktes werden getrennt eingetragen. Dies sieht wie folgt aus:



Zum Abschluss dieses Kapitels werden gekoppelte Schwingungen betrachtet. Dabei geht es nicht um das Phänomen der Schwebung, bei dem die Schwingungen entkoppelt sind, sondern um ein Beispiel mit einem Doppelpendel.

1.6 Gekoppelte Schwingungen

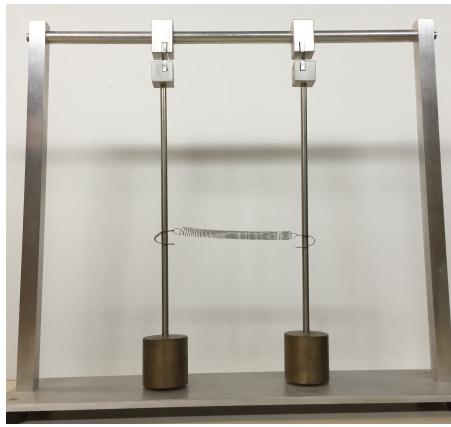
Zwei Schwingungen, die miteinander verbunden sind, bezeichnet man als gekoppelte Schwingung. Das nachfolgende Demonstrationsobjekt zeigt ein Beispiel anhand von Pendeln.

Exp. 7: Gekoppeltes Pendel

Diese gekoppelte Schwingung besteht aus zwei Pendeln, welche durch eine Feder verbunden sind (vgl. Abb.).

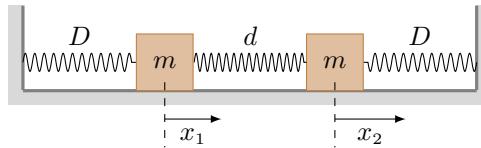
⁷Lissajous-Figuren sind Kurvengraphen, die durch die Überlagerung zweier harmonischer, rechtwinklig zueinander stehender Schwingungen verschiedener Frequenz entstehen. Sie sind benannt nach dem französischen Physiker Jules Antoine Lissajous (1822–1880).

Sie werden oft für ästhetische Zwecke verwendet. Einen besonders faszinierenden Anblick bietet die Kurve bei geringfügiger Abweichung zwischen den Schwingungsfrequenzen, weil durch die langsam rotierende Figur ein 3D-Eindruck entsteht.



Das einfache gekoppelte Pendel hat interessante Eigenschaften. Man kann nur eine Masse anregen und beobachten, wie sich die Energie auf die andere Masse überträgt. Dabei wird die Amplitude der einen Masse kleiner und die der anderen grösser. Das kann so weit gehen, dass die erste Masse still steht und nur noch die zweite schwingt. Dieser Vorgang wiederholt sich in beide Richtungen.

Wie wir bereits wissen, vollführt das Pendel keine harmonische Bewegung, daher vereinfachen wir die Situation etwas, ohne den Grundgedanken des gekoppelten Pendels und die wesentlichen Gesetzmässigkeiten zu verlieren. Zu diesem Zweck betrachten wir ein horizontales System aus zwei identischen Massen und drei Federn, wobei zwei davon gleich sind, wie in der unteren Abbildung zu sehen ist.



Jetzt müssen wir die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen aufschreiben. Dazu müssen wir alle Kräfte, die auf die Massen wirken, vektoriell addieren.

Wenn wir die linke Masse nach rechts um x_1 auslenken, wird die linke Feder gestreckt und die mittlere Feder wird zusammengedrückt. Die Feder ganz rechts spielt für die Bewegung der linken Masse keine Rolle und kann vernachlässigt werden. Somit ergibt sich folgende Gleichung:

$$-Dx_1 + d(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 \Rightarrow m\ddot{x}_1 + Dx_1 - d(x_2 - x_1) = 0,$$

wobei beachtet werden muss, dass die rechte Masse natürlich ebenfalls verschoben wird und dadurch die Koordinate x_2 verändert wird. Für die rechte Masse erhält man analog:

$$-Dx_2 + d(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_2 \Rightarrow m\ddot{x}_2 + Dx_2 - d(x_1 - x_2) = 0.$$

Diese Gleichungen können nicht separat gelöst werden. Wenn man die erste Gleichung lösen will, benötigt man die zweite Gleichung und umgekehrt. Daher spricht man von *gekoppelten Gleichungen*. Wie wir aus dem Lösen von linearen Gleichungssystemen wissen, können solche Gleichungen addiert oder subtrahiert werden. Deshalb werden wir diese beiden Gleichungen addieren und subtrahieren und erhalten dann:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + D(x_1 + x_2) &= 0 \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (D + 2d)(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Durch Substitution der Variablen erhält man schliesslich die entkoppelten Differentialgleichungen. Für $q_1 = x_1 + x_2$ und $q_2 = x_1 - x_2$ gilt:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + Dq_1 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + (D + 2d)q_2 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen haben die Form eines harmonischen Oszillators und daher die Lösungen:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \hat{q}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \\ q_2(t) &= \hat{q}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \text{mit} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2d}{m}} \end{aligned}$$

Um die Lösungen für die ursprünglichen Koordinaten zu erhalten, wenden wir Rücktransformationen an.

$$x_1 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{q_1 - q_2}{2}$$

Bevor wir fortfahren und den Spezialfall für gleiche Masse lösen, soll als Beispiel eine erste Anwendung gelöst werden.

Bsp. x.

Das Wasserstoff-Molekül H_2 ist ein lineares Molekül. Seine Schwingungen sind beschreibbar durch ein gekoppeltes Pendel aus zwei gleichen Massen. Da es frei beweglich ist, sind die Federharten der äusseren beiden Federn null ($D = 0$). a) Wie lauten $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für dieses Molekül. b) Interpretieren Sie diese allgemeine Lösung.

Lsg: —

Wir werden nun den Sonderfall mit gleicher Masse analysieren und nach den sogenannten Normalschwingungen oder Eigenschwingungen suchen. Hierfür müssen zuerst jedoch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Es gilt:

$$x_1(t=0) = x_0 \quad \text{und} \quad x_2(t=0) = x_0 \quad \text{resp.} \quad \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0.$$

Durch Anwenden der Anfangsbedingungen erhalten wir für diese erste Schwingung:

$$q_1(t) = 2x_0 \cos(\omega_1 t) \quad \text{und} \quad q_2(t) = 0.$$

In diesem Fall der gleichsinnigen Schwingung, auch als Schwingung in Phase bezeichnet, verändert sich der Relativabstand nicht. Die Kopplungsfeder wird somit nicht beansprucht. Daher wird diese Schwingung auch als die erste Normalschwingung oder Eigenschwingung des Systems bezeichnet. Die einzelnen Massen bewegen sich entsprechend.

$$x_1(t) = x_0 \cos(\omega_1 t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = x_0 \cos(\omega_1 t) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Wenn man die beiden Massen jetzt in entgegengesetzte Richtungen bewegt, schwingen sie gegensinnig oder gegenphasig. Der Schwerpunkt der beiden Massen bleibt dabei immer am gleichen Ort, während der Abstand zwischen beiden variiert. Die Kopplung wird nun maximal beansprucht.

$$q_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad q_2(t) = -2x_0 \cos(\omega_2 t).$$

Diese Schwingung in entgegengesetzter Richtung ist die zweite Normal- oder Eigenschwingung des Systems und hat eine Frequenz von:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D+2d}{m}} > \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Für die einzelnen Massen gilt:

$$x_1(t) \equiv -x_0 \cos(\omega_3 t) \quad \text{und} \quad x_2(t) \equiv x_0 \cos(\omega_3 t),$$

Daraus lässt sich schliessen, dass die Massen mit gleicher Frequenz in entgegengesetzte Richtungen schwingen. Diese beiden Schwingungsarten oder Moden sind als Eigenschwingungen bekannt. Damit schliessen wir dieses Kapitel zu den harmonischen Schwingungen und wenden uns den Wellen zu.

Zusammenfassung Kapitel E1

1. Ein *Schwingung* ist eine Bewegung um eine Ruhelage, deren Richtungssinn in gleichen zeitlichen Abständen ändert.
2. Eine Schwingung ist *harmonisch*, falls die Beschleunigung $a = \ddot{y}$ proportional zur Auslenkung y ist, d. h.

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 \cdot y \Leftrightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0,$$

wobei der Proportionalitätsfaktor durch die Kreisfrequenz ω_0 gegeben ist. Die allgemeine Lösung der harmonischen Schwingung ist:

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \dot{y}(t) &= v(t) = -\omega_0 \hat{y} \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \ddot{y}(t) &= a(t) = -\omega_0^2 \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned}$$

wobei \hat{y} die maximale Auslenkung oder Amplitude und φ_0 die Phasenverschiebung sind.

3. Eine *gedämpfte Schwingung* mit einer *Stocke'schen Dämpfung* gehorcht der Bewegungsgleichung:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0.$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichung ist:

$$y(t) = \hat{y} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

wobei $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ sind.

4. Man unterscheidet drei Arten von Dämpfung. Es gilt:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = \begin{cases} \omega_0^2 > \delta^2, & \text{unterkritische Dämpfung} \\ \omega_0^2 = \delta^2, & \text{kritische Dämpfung} \\ \omega_0^2 < \delta^2, & \text{überkritische Dämpfung} \end{cases}$$

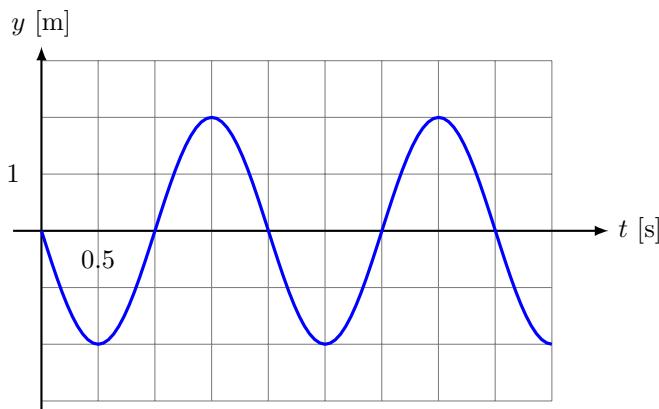
5. Addieren sich zwei Schwingungen so, dass die resultierende Amplitude grösser ist, dann spricht man von *konstruktiver Interferenz*. Falls die resultierende Amplitude kleiner ist, von *destruktiver Interferenz*.
6. Die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit nur wenig verschiedenen Frequenzen bezeichnet man als *Schwebung*.

Konzeptfragen Kapitel E1

1. Welche der folgenden Aussagen zum Federpendel sind richtig?
 - Wird die Federkonstante verändert, verändert sich auch die Eigenfrequenz der Schwingung.
 - Wird die Masse vergrössert, vergrössert sich auch die Periode der Schwingung.
 - Wird die Länge der Feder vergrössert, verändert sich die Eigenfrequenz ebenfalls.
 - Wird die Federkonstante verkleinert, verringert sich auch die Eigenfrequenz der Schwingung.

2. Bei einer Pendeluhr ist die Schwingungsdauer des Pendels für den Takt der Uhr verantwortlich, die Gewichte sorgen dafür, dass die beim Schwingen durch Reibungs- und Luftwiderstände verlorene gegangene Energie wieder zugeführt und die Schwingung aufrechterhalten bleibt. Wie muss man vorgehen, wenn die Uhr nachgeht?
 - Man muss die zum Erhalt der Schwingung notwendigen Gewichte verkleinern.
 - Man muss die zum Erhalt der Schwingung notwendigen Gewichte vergrössern.
 - Man muss das Pendelgewicht etwas hochschrauben, also das Stangenpendel verkürzen.
 - Man muss das Pendelgewicht etwas herunterschrauben, also das Stangenpendel verlängern.

3. Das Bild zeigt das Zeit-Orts-Diagramm einer mechanischen Schwingung.



Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Die Frequenz der Schwingung ist 1 Hz
 - Die Frequenz der Schwingung ist 2 Hz
 - Die Frequenz der Schwingung ist 0.5 Hz
 - Die Amplitude der Schwingung ist -2 m
 - Die Amplitude der Schwingung ist 2 m
 - Die Funktion der Schwingung ist $y(t) = -\hat{y} \cos(\omega_0 t)$
 - Die Funktion der Schwingung ist $y(t) = \hat{y} \sin(\omega_0 t)$
 - Die Funktion der Schwingung ist $y(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t)$
 - Die Funktion der Schwingung ist $y(t) = -\hat{y} \sin(\omega_0 t)$
-
4. Welche der folgenden Aussage über eine periodische Bewegung sind richtig?
 - Das Zeit-Orts-Diagramm einer periodischen Bewegung muss einen sinusförmigen Verlauf haben.
 - Damit eine Bewegung periodisch abläuft, muss auf den Körper eine Kraft mit konstantem Betrag und konstanter Richtung wirken.
 - Bei einer periodischen Bewegung muss mehrmals der Geschwindigkeitsbetrag Null vorkommen.
 - Eine Schwingung kann man immer auch als periodische Bewegung bezeichnen.
 - Ohne das Wirken einer Kraft ist eine periodische Bewegung nicht denkbar.

Aufgaben Kapitel E1

Weitere einfache Aufgaben mit ausführlichen Lösungen findet man unter:

<https://www.dropbox.com/sh/m9vlo6gwqli3nds/AABWhKMXUJG70jsXx7ovB-fDa?dl=0> im Kapitel 11.



1. Ein Pendel schwinge in einem Bereich, den man als harmonisch betrachten kann. Das Pendel braucht für 10 Schwingungen $t = 5 \text{ s}$. (Anfangsauslenkung ist $\hat{x} = 1 \text{ cm}$.)
 - a. Bestimmen Sie die Frequenz der Schwingung.
 - b. Bestimmen Sie die Pendellänge.
 - c. Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit des Pendels.
 - d. Bestimmen Sie die maximale Beschleunigung des Pendels.

Lsg: a. $f = 2 \text{ Hz}$ b. $l \approx 6.3 \text{ cm}$ c. $v \approx 0.13 \text{ m/s}$ d. $a \approx 1.6 \text{ m/s}^2$

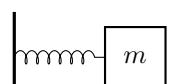
2. Ihre Freundin sitzt auf der Schaukel und will permanent angeschubst werden. Die Länge der Schaukelkette ist $l = 2 \text{ m}$.
 - a. Welche Schwingung liegt hier vor? Begründen Sie!
 - b. Bestimmen Sie die optimale Schubsfrequenz ω und begründen Sie Ihren Entscheid.
 - c. Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante δ , falls die Amplitude der Schwingung nach 10 s auf 10% der Amplitude gesunken ist.

Lsg: a. erzw. ged. Schw. b. $\omega \approx 2.2 \text{ rad/s}$ c. $\delta \approx 0.23 \text{ 1/s}$

3. Eine Federpendeluhr habe eine Federkonstante von 10 N/m .
 - a. Zeigen Sie, dass die Periode T unabhängig von der Auslenkung ist.
 - b. Bestimmen Sie die Masse, welche an das Pendel gehängt werden muss, sodass die Periode einer Sekunde entspricht.
 - c. Die Schwingung sei harmonisch und gedämpft mit einer Dämpfungskonstante von 10^{-6} 1/s . Wie häufig muss die Uhr aufgezogen werden, falls die Uhr bei $1/4$ der Amplitude jeweils wieder aufgezogen werden sollte.

Lsg: a. – b. $m \approx 250 \text{ g}$ c. $t \approx 16 \text{ d}$

4. Ein Block mit Masse m sei auf einem waagrechten Tisch mit einer Feder mit der Federkonstante D verbunden (vgl. Abb.). Die Gleitreibungszahl für die Grenzfläche zwischen Block und Tisch betrage μ . Der Block werde durch Ziehen an der Feder um x_s ausgelenkt und dann losgelassen.



- a. Begründen Sie ohne Beweis, weshalb die Kreisfrequenz durch die Gleitreibung nicht verändert wird, d.h. $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ ist.
- b. Zeigen Sie, dass die Schwingung ein harmonische ($\ddot{x}' = -\omega_0^2 x'$) ist. (Tipp: Verwenden Sie die Substitution $x' = x - x_0$ und bestimmen Sie die Konstante x_0 .)

Lsg: –

Literaturverzeichnis

- [1] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter, Juni 2012
- [2] URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem, Juni 2012
- [3] Wikipetzi, IngenieroLoco - Eigenes Werk. Based on File: Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0,
URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40278935>
- [4] CMS Collaboration, *Combination of results on the rare decays $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*, CMS-PAS-BPH-13-007
- [5] Aoyama, Tatsumi and Hayakawa, Masashi and Kinoshita, Toichiro and Nio, Makiko, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron g-2 and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, Phys. Rev. Lett. Vol. 109, 2012, 10.1103/PhysRevLett.109.111807
- [6] URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Steradian>, Juni 2012
- [7] Aristoteles,
- [8] Galileo Galilei, *De motu*, 1590
- [9] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln*, Orell Füssli, 7. Auflage, 1997
- [10] F. A. Brockhaus, *Der grosse Brockhaus*, 16. Auflage, 1955
- [11] URL: <http://www.quartets.de/acad/firstlaw.html>, September 2013
- [12] URL: <http://www.educ.ethz.ch/unt/um/phy/me/kreis/index>
- [13] Lewis C. Epstein, *Denksport Physik*, dtv, 9. Auflage, 2011
- [14] Harry Nussbaumer, *Astronomie*, 7. Auflage, 1999, vdf Hochschulverlag AG
- [15] URL: <http://lexikon.astronomie.info/mars/beobachtung2012/>, April 2013
- [16] Matthias Bartelmann, *Das Standardmodell der Kosmologie, Teil 1 und Teil 2 in Sterne und Weltraum*, Ausgabe: August 2007
- [17] Roman Sexl et al. *Einführung in die Physik - Band 1 & 2*, 3. korrigierte Auflage 2009, Sauerländer Verlag AG
- [18] Paul A. Tipler, *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 2. Auflage, 1994
- [19] URL: <https://www.etsy.com/ch/listing/1230366346/precision-made-scientific-mechanical>
- [20] Hans Kammer, Irma Mgelandze, *Physik für Mittelschulen*, 1. Auflage 2010, hep Verlag AG
- [21] URL: <https://www.auto-motor-und-sport.de/news/aerodynamik-report-spritsparmodelle-aus-dem-windkanal>
- [22] Wikipedia, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fluid>, August 2013
- [23] Basiswissen Schule Physik, Duden Paetec, Berlin 2010
- [24] URL: <http://www.schulserver.hessen.de/>, Oktober 2013
- [25] URL: <http://www.leifiphysik.de>, September 2013
- [26] URL: <http://photos.zoochat.com>, September 2013

- [27] URL: <http://www.lab-laborfachhandel.de>, Oktober 2013
- [28] Bissig Michael, *Schwimmwelt, Schwimmen lernen - Schwimmtechnik optimieren*, Schulverlag, Bern,
- [29] URL: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap09/cd259.htm, März 2014
- [30] URL: <https://www.vibos.de/veranstaltung/physik-teil-3-von-4-schwingungen-und-wellen>, März 2024
- [31] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/707>
- [32] E.F.F. Chladni, *Die Akustik*, Taschenbuch Auflage 2012, Nabu Press
- [33] URL: <http://ephex.phys.ethz.ch>, Februar 2015
- [34] URL: <http://aufzurwahrheit.com/physik/quantenmechanik-5461.html>, März 2015
- [35] M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas opitscher Erscheinungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1962
- [36] Bruno Cappeli et al. *Physik anwenden und verstehen*, Orell Füssli Verlag AG, 2004
- [37] Richard P. Feynman, *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper, 3. Auflage, 2018
- [38] Keith Johnson, *Physics for You: Revised National Curriculum Edition of GCSE*, Nelson Thornes, 2001
- [39] URL: <https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/TA.pdf?lang=en>, Juli 2018
- [40] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1998
- [41] Unbekannt, *Engraving of Joule's apparatus for measuring the mechanical equivalent of heat*, Harper's New Monthly Magazine, No. 231, August, 1869
- [42] URL: <http://www.tf.uni-kiel.de>, März 2014
- [43] URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_\(Thermodynamik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Entropie_(Thermodynamik)), März 2014
- [44] URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:20070616_Dampfmaschine.jpg, März 2014
- [45] URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Bcoulomb.png>, März 2014
- [46] URL: <http://www.bader-frankfurt.de/widerstandscode.htm>, August 2014
- [47] Carl D. Anderson, *The Positive Electron*. Physical Review 43 (6): 491–494
- [48] URL: <http://pgd5.physik.hu-berlin.de/elektrostatik/ele12.htm>, Oktober 2014
- [49] URL: <http://www.aip.org/history/lawrence/radlab.htm>, Oktober 2014
- [50] URL: http://www.solstice.de/grundl_d_tph/exp_besch/exp_besch_04.html, Oktober 2014
- [51] URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639>, Oktober 2017
- [52] URL: <https://de.serlo.org/52586/elektromagnetische-wellen>, Oktober 2017
- [53] URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum, August 2022
- [54] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Zahnradmethode>, September 2022
- [55] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Double-Rainbow.jpg>, November 2023
- [56] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>, April 2024
- [57] Proton-Proton Kollision, CERN, Lucas Taylor
- [58] Ze'ev Rosenkranz, *Albert Einstein – Derrière l'image*, Verlag Neue Zürcher Zeitung, 2005.
- [59] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17 (10): 891–921.
- [60] Albert Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, 23. Auflage, 1988

- [61] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Relativitat_der_Gleichzeitigkeit, August 2018
- [62] URL: <http://static.a-z.ch>, März 2015
- [63] Max Planck, *Vom Relativen zum Absoluten*, Naturwissenschaften Band 13, 1925
- [64] A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Physical Review 22 (5 1923), S. 409–413
- [65] URL: <http://www.peter-glowatzki.de>, Mai 2015
- [66] James Franck, *Transformation of Kinetic Energy of Free Electrons into Excitation Energy of Atoms by Impacts*, Nobel Lectures, Physics 1922-1941
- [67] URL: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/versuche>, Mai 2015
- [68] David Prutchi, Shanni Prutchi, *Exploring Quantum Physics through Hands-on Projects*, Wiley, 1 edition (February 7, 2012)
- [69] URL: <http://w3.ppp1.gov/>, September 2015
- [70] O. Höfling, Physik. Band II Teil 1, Mechanik, Wärme. 15. Auflage. Ferd. Dummfers Verlag, Bonn 1994
- [71] Kovalente Atomradien auf Basis der Cambridge Structural Database
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cambridge_Structural_Database, April 2018
- [72] G. Audi und A.H. Wapstra, Nuclear Physics A595, 409 (1995)
- [73] URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammastrahlung>, April 2018
- [74] URL: <http://www.wn.de/Muenster/2012/07/Das-Wunder-von...>, Juni 2012
- [75] L. Susskind und G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What you need to know to start doing physics*, Basic Books, 2014