MSKalkulator REŠENJE

Podzadatak 1 (5 bodova): $1 \leq N \leq 10 \; i \; 1 \leq \mathrm{a}[i] \leq 10^5$

Jednostavan brute force u kome za svaku operaciju izračunamo konačan rezultat kao da je ona izvršena van prostorije (kao množenje), a ostale kao stepenovanje. Stepenovanje se izvršava kroz for petlju. Kompleksnost: O(N^2*max(a$[i]$))

Podzadatak 2 (20 bodova): $1 \leq N \leq 10^3$

Potrebno implementirati binarno stepenovanje. https://cp-algorithms.com/algebra/binary-exp.html
Opet uraditi brute force kao i u prethodnom test-casu, samo sa ubrzanim stepenovanje.
O(N^2*log(max(a$[i]$)))

Podzadatak 3 (75 bodova): $1 \leq N \leq 10^5$

Teorema 1. (Ojlerova teorema):

$$a^{\varphi(p)} \equiv 1 \; (mod \; p)$$

Kako je p po postavci zadatka prost broj $10^9 + 7$ onda je $\varphi(p) = 10^9 + 6$.

Teorema 2.:

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

Teorema 3. (iz T1):

$$a^{x \; mod \; \varphi(p)} \equiv a^x \; (mod \; p)$$

Recimo sada da imamo niz od N brojeva a[0], a[1], a[2], ... , a[n], i inicijalni broj na kalkulatoru K. Uradićemo isti “brute-force” kao i u prva dva zadatka, tako sto ćemo proveriti za svako mnozenje, situaciju kada se ono vrši van prostorije. Hajde da posmatramo množenje sa indeksom m (0<=m<n). Tada sve operacije pre m-te koje smo radili su bila stepenovanja, pa smo pomnozili to sa a[m], i onda nastavili stepenovati sa preostalim operacijama. To se matematicki moze zapisati:

$$(K^{a[0]*a[1]*\ldots*a[m-1]} * a[m])^{a[m+1]*\ldots*a[n-1]}$$

Kako ovo efikasno izracunati za svako m < n? DP. Prvi deo jednačine $K^{a[0]*a[1]*\ldots*a[m-1]}$ mozemo efikasno izračunati kao pre-calculation, jednostavnom for petljom i brzim stepenovanjem.
Drugi deo jednačine koji možemo redukovati na: $X^{a[m+1]*\ldots*a[n-1]}$ gde je X neki proizvoljan broj. Deo u eksponentu ne moramo mnoziti, nego jednostavno modulisati sa $\varphi(p)$ na osnovu teoreme 3, i onda samo trebamo izracunati jedno binarno stepenovanje.

Kompleksnost je: $O(N \log(\max(\mathrm{a}[i])))$