Туаев М.А.   БФЗ – 22 – КТ – 1

Задача 1.

$$\Phi = \oint \bar E d\bar s = ES\cos\alpha$$

$\Rightarrow E = \Phi/(S\cos\alpha)$, ~~Eq~~ $F = qE \Rightarrow$

$$\Rightarrow F = \sigma S \frac{\Phi}{S\cos\alpha} = \frac{\sigma\Phi}{\cos\alpha}.$$

В случае перп. напр. угол между $\bar E$ и $\bar{ds} = 0$

$$\Rightarrow F_\perp = \sigma\Phi.$$

Ответ: $F_\perp = \sigma\Phi$

Задача 2.

$$\Phi = 4\pi q = ES \Rightarrow E = \frac{4\pi q}{S}$$

Сила, действ. на грань тетраэдра, равна:

$$F = \frac{\sigma S}{4} \cdot E = \frac{\sigma S}{4} \cdot \frac{4\pi q}{S} = \pi\sigma q$$

Задача 3.

а) Внутри: $E = 0$ (т. Гаусса) $\Rightarrow \varphi(r) = const$.

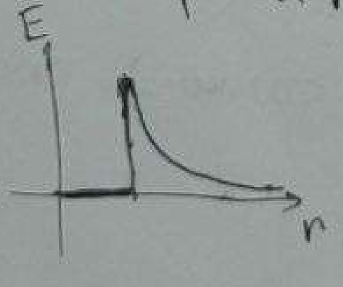
Т.к. $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(r) = 0$!!!

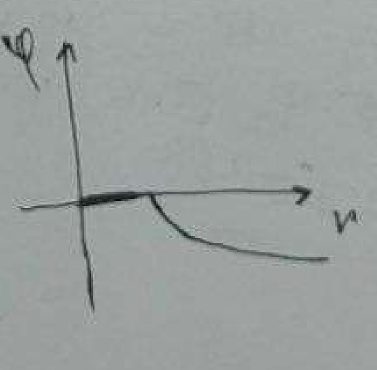
Вне: $\cancel{\oint \bar E d\bar s = E 4\pi R^2 = 4\pi Q \Rightarrow E = \frac{Q}{R^2}}$

$\cancel{\Rightarrow \varphi = Q}$

$$\oint \bar E ds = E 4\pi r^2 = 4\pi Q \Rightarrow E = \frac{Q}{r^2}$$

$\Rightarrow \varphi = Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$, где R – радиус сферы.





б) Внутри: $E\,4\pi r^2 = 4\pi\,\frac{4}{3}\pi r^3\rho \Rightarrow E = \frac{4}{3}\pi\rho r$

$\varphi = -\int \frac{4}{3}\pi\rho r\,dr = -\frac{2}{3}\pi\rho r^2 + C$

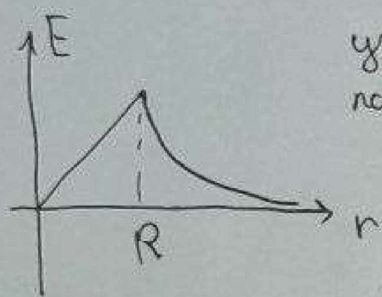
$\varphi(0)=0 \Rightarrow C=0!$

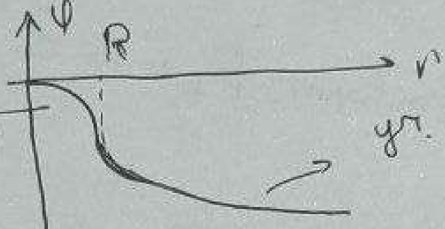
Вне: $E\,4\pi r^2 = 4\pi\,\frac{4}{3}\pi R^3\rho \Rightarrow E = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\frac{1}{r^2}$

$\varphi = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\frac{1}{r} + C'$

$\varphi(R) = -\frac{2}{3}\pi\rho R^2 = \frac{4}{3}\pi\rho R^2 + C' \Rightarrow C' = -2\pi\rho R^2$

$\varphi = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\frac{1}{r} - 2\pi\rho R^2$

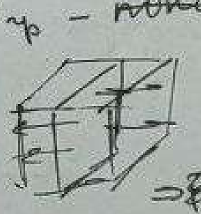




Задача 4.

а) Натянем на куб другой вн. куб, размеры к-ого превышают размеры рассм. куба на беск. малую величину. Тогда поток через одну из граней вн. куба равен:

$\Phi = \Phi_\Sigma + \Phi_{гр}$, где $\Phi_{гр}$ – ~~поло~~ поток одн. грани



$E\cdot 2l^2 = 4\pi\sigma l^2$

$\Rightarrow E = 2\pi\sigma$

$\Rightarrow \Phi_{гр} = ES = 2\pi\sigma l^2$

Из Т. Гаусса:

$6\Phi = 4\pi\cdot 6l^2\sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi = 4\pi l^2\sigma$

$\Rightarrow \Phi_\Sigma = \Phi - \Phi_{гр} = 4\pi l^2\sigma - 2\pi\sigma l^2 = 2\pi\sigma l^2$

Восп. рез-ом 1 задачи:

$F = \sigma\cdot\Phi_\Sigma$ (т.к. сохр. только ⊥ сост.)

$\Rightarrow \underline{\underline{F = 2\pi\sigma^2 l^2}}$

б) Аналогично пред. задаче:

$\Phi = \Phi_\Sigma + \Phi_{гр} = \Phi_\Sigma + 2\pi\sigma S$, где S – пл. одной из граней тетраэдра

Из Т. Гаусса:

$$4\Phi = 4\pi(4S\sigma) \Rightarrow \Phi = 4\pi\sigma S$$

$$\Rightarrow \Phi_\Sigma = \Phi - \Phi_{гр} = 2\pi\sigma S$$

$$S = \frac{1}{2} l^2 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

$$\Rightarrow \Phi_\Sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\sigma l^2$$

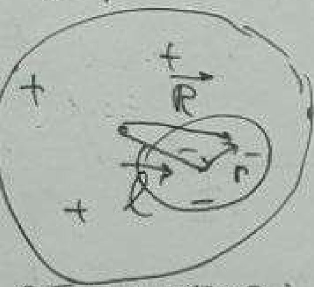
$$F = 2\pi\sigma^2 S = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\sigma^2 l^2}}$$

Задача 5

Воспользуемся суперпозицией напр.
Найдем поле внутри шара заряж. положительно:

$$E_+ = \frac{4}{3}\pi\rho R$$

Векторно: $\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{R}$



$\vec{r} = \vec{R} - \vec{l}$

Теперь поле отрицательного шара внутри пол., нах. на $\vec{l}$ от центра:

$$\vec{E}_- = \frac{4}{3}\pi(-\rho)\vec{r} = -\frac{4}{3}\pi\rho(\vec{R} - \vec{l}) = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{l} - \frac{4}{3}\pi\rho\vec{R}$$

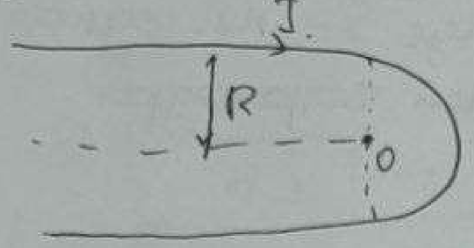
Тогда:

$$|\vec{E}_\Sigma| = \sqrt{|\vec{E}_+ + \vec{E}_-|^2} = \sqrt{\left|\frac{4}{3}\pi\rho\vec{l} - \frac{4}{3}\pi\rho\vec{R} + \frac{4}{3}\pi\rho\vec{R}\right|^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi\rho l}}$$

Данная задача аналогичн изм. т.к. заряды комп. и ~~вм~~ вместо отр. шара ~~получ~~ получается полость

Задача 6.



Поле в точке O можно рассм. как суперпозицию двух полубеск. проводов и одного провода в форме полуокр. $\vec{B}_\Sigma = 2B_1 + B_\cap$

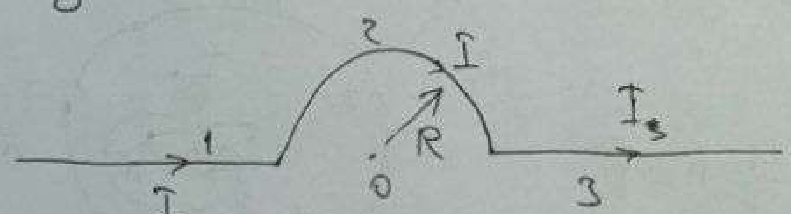
$$B_1 = \frac{1}{2} B_{беск} = \frac{1}{2}\frac{2I}{cR} = \frac{I}{cR}$$

$$B_\cap = \int \frac{I}{c}\frac{[d\bar{l}, \bar{r}]}{r^3} = \int \frac{I}{c}\frac{dl}{r^2} \left(\text{т.к. } d\bar{l} \perp \bar{r}\right)$$

$$= \frac{I}{c}\int_0^{\pi} \frac{R\,d\alpha}{R^2} = \frac{I}{c}\frac{\pi R}{R^2} = \frac{I}{c}\frac{\pi}{R}$$

$$\Rightarrow |\vec{B}| = \frac{2I}{cR} + \frac{\pi I}{cR} = \underline{\underline{\frac{I}{cR}(2+\pi)}}$$

Задача 7.



Участки 1 и 3 не создают ~~магн~~. инд., т.к. $[d\vec{l}, \vec{r}] = 0$!
Тогда $\vec{B}_\Sigma$ в центре окр. состоит только из $B_\cap$. $\vec{B}_\cap$ найдено в пред. задаче:

$$|\vec{B}_\cap| = \frac{\pi I}{cR} \Rightarrow |\vec{B}_\Sigma| = \underline{\underline{\frac{\pi I}{cR}}}$$

Задача 8

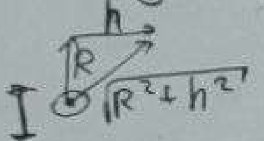
Нужно найти $B(h)$. По суперпозиции $B(h)$ будет состоять из $B_1(h)$ окр. и $B_2(h)$ беск. провода.

Найдем $|B_1(h)|$:

$$|B_1(h)| = \oint dB_{1z} = \frac{I}{c}\oint \frac{R\,dl}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{I}{c}\,\frac{2\pi R^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi\frac{I}{c}\,\frac{R^2}{(R^2+h^2)^{3/2}};$$

Найдем $|B_2(h)|$:

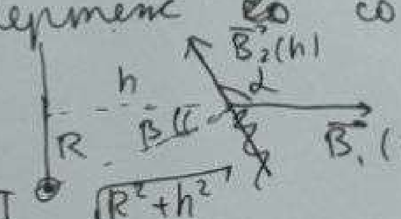


$$\Rightarrow \oint B\,dl = B\,2\pi\sqrt{R^2+h^2} = \frac{4\pi}{c} I$$

$$\Rightarrow B = \frac{2I}{c}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$|B_2(h)| = \frac{2I}{c}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

Чертеж со стороны, где ток идет на нас.



Найдем $\cos\alpha$:

$\cancel{\alpha + \frac{\pi}{2}}$ $\beta + \pi - \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\beta.$$

$\sin\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$. Тогда по т. косинусов:

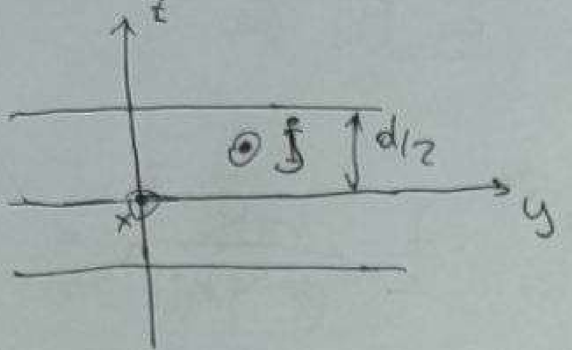
$$|B_\Sigma(h)| = \frac{2I}{c}\left[\frac{\pi^2 R^4}{(R^2+h^2)^3} + \frac{1}{(R^2+h^2)} - 2\frac{\pi R^2}{(R^2+h^2)^2}\cos\alpha\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2I}{c}\left[\frac{\pi^2 R^4}{(R^2+h^2)^3} + \frac{1}{(R^2+h^2)} + \frac{2\pi R^3}{(R^2+h^2)^{5/2}}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{2\pi I}{c}\left[\frac{R^4}{(R^2+h^2)^3} + \frac{1}{\pi^2(R^2+h^2)} + \frac{2R^3}{\pi(R^2+h^2)^{5/2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

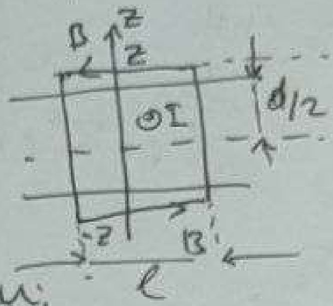
$$|B_\Sigma(0)| = \frac{2\pi I}{cR}\left(1 + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right)^2 = \frac{2\pi I}{cR}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)^4$$

Задача 9.



$j = j_0 \frac{z^2}{d^2}$!

При $z > \frac{d}{2}$:



~~Теорема о циркуляции:~~

~~Вне:~~ $\cancel{2Bl + 0 + Bl + 0 = \frac{4\pi}{c} j z l = \frac{4\pi}{c} j_0 \frac{(d/2)^2}{d^2} \cdot l\, 2z}$

$$\cancel{2l \cdot B = \frac{4\pi}{c} 2l \cdot z\, j_0 \frac{1}{4}}$$

$$\cancel{B(z) = \frac{\pi}{c} j_0 \cdot z}$$

~~Внутри:~~ $\cancel{2Bl = \frac{4\pi}{c} j_0 \frac{z^2}{d^2} l\, 2z}$

$$\cancel{B(z) = \frac{4\pi}{c} j_0 \frac{z^3}{d^2}}$$

Вне:

$$2Bl = \frac{4\pi}{c}\int j\,dS = \frac{4\pi}{c}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} j_0 \frac{z^2}{d^2} l\,dz =$$

$$= \frac{4\pi}{c} j_0 \frac{l}{d^2} \frac{z^3}{3}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{d/2} = \frac{4\pi}{c} j_0 \frac{l}{d^2} \frac{1}{12} d^3$$

$$\Rightarrow B = \frac{\pi j_0 d}{c} \frac{1}{6}, \quad z > d/2$$

Внутри:

$$2Bl = \frac{4\pi}{c}\int_{-z}^{z} j_0 \frac{z^2}{d^2} l\,dz = \frac{4\pi}{c} j_0 \frac{l}{d^2} \cdot \frac{2}{3} z^3$$

$$\Rightarrow B(z) = \frac{4\pi}{3c} j_0 \frac{z^3}{d^2}, \quad z < \frac{d}{2}$$

Ответ:

$$B(z) = \begin{cases} \frac{\pi j_0 d}{6c}, & z > \frac{d}{2} \\ \frac{4\pi}{3c} \frac{j_0 z^3}{d^2}, & z < \frac{d}{2} \end{cases}$$

Задача 10.

Рамка обладает магнитным моментом $\mathcal{M} = a^2 \cancel{c} I$. Тогда для нее справедливы формулы:

$$B_{\parallel} = \frac{1}{c} \frac{2\mathcal{M}\cos\alpha}{r^3} \quad \text{и} \quad B_{\perp} = \frac{1}{c} \frac{\mathcal{M}\sin\alpha}{r^3}$$

Отсюда:

$$B = \sqrt{B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2} = \sqrt{\frac{4}{c^2} \frac{\mathcal{M}^2\cos^2\alpha}{r^6} + \frac{1}{c^2} \frac{\mathcal{M}^2\sin^2\alpha}{r^6}} =$$

$$= \frac{\mathcal{M}}{cr^3} \sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\mathcal{M}}{cr^3} \sqrt{3\cos^2\alpha + 1} =$$

$$= \frac{a^2 I}{cr^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$$