1.04.

1. $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $Re\, z = \frac{1}{2}$, $Im\, z = \frac{1}{2}$

2. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{(1-i)^2}{2}\right)^3 = (-i)^3 = i$; $Re\, z = 0$, $Im\, z = 1$

3. $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)^3 = e^{5\pi i} = -1$;
$Re\, z = -1$, $Im\, z = 0$

4. $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2 = \left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{(2+i)(1+i)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{2}\right)^2 =$

$= \frac{-8+6i}{4} = -2 + \frac{3}{2}i$; $Re\, z = -2$, $Im\, z = \frac{3}{2}$

5. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{(1+i)^8}{2^3} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8}{2^3} = \frac{2^4 e^{i\frac{\pi}{4}8}}{2^3} =$

$= 2e^{i2\pi} = 2$; $Re\, z = 2$, $Im\, z = 0$

1.06

1. $z = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$; $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$

2. $z = -3 = 3e^{+\pi i}$; $|z| = 3$, $\arg z = \pi$

3. $1 + i^{123} = z = 1 + i^{120} \cdot i^2 \cdot i = 1 - i =$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$; $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{7\pi}{4}$

4. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$; $|z| = 1$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$

5. $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$; $|z| = 1$, $\arg z = \frac{3\pi}{2}$

6. $-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) =$

$= \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7} = e^{\frac{6\pi}{7}i}$, $|z| = 1$, $\arg z = \frac{6\pi}{7}$

7. $\cancel{(-4+3i)^3 = \left(5e^{i\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)}\right)^3 = 125e^{3i\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)}} =$

$= \cancel{125 e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right.}} \cancel{\ldots 5}$

$$(-4+3i)^3 = \left(5e^{i\,\mathrm{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)}\right)^3 = 125\,e^{i3\left(\mathrm{arcctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= 125\,e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+3\,\mathrm{arcctg}\frac{4}{3}\right)} = 125\,e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+3\,\mathrm{arcctg}\frac{4}{3}\right)};$$

$$|z| = 125, \quad \arg z = -\frac{\pi}{2} + 3\,\mathrm{arcctg}\,\frac{4}{3}$$

8. $$(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6} = \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^8\left(2e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)^{-6} =$$

$$= 2^4 \cdot 2^{-6} \cdot e^{2\pi i} \cdot e^{-10\pi i} = \frac{1}{4};$$

$$|z| = \frac{1}{4}, \quad \arg z = 0$$

9. $$1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7} = 1+\cos^2\frac{\pi}{14}-\sin^2\frac{\pi}{14}+i2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14} =$$

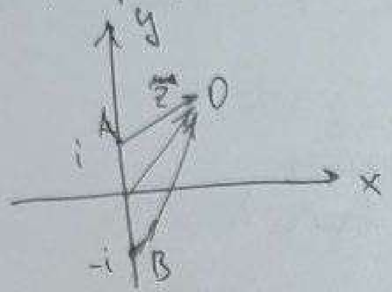
$$= 2\cos^2\frac{\pi}{14}+i2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14} = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{14}\,e^{i\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{14}\right]\right)} = 2\cos\frac{\pi}{14}\,e^{i\frac{\pi}{14}};$$

$$|z| = 2\cos\frac{\pi}{14}, \quad \arg z = \frac{\pi}{14}$$

1.21 (1, 4, 5)

1. Граф. решение

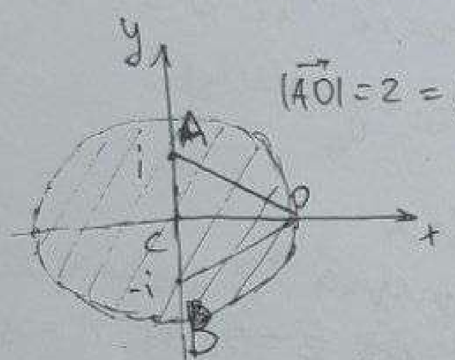


Заметим, что $|z-i|+|z+i|\leq 4$ аналогично условию $|\vec{AO}|+|\vec{OB}|=4$

$\Rightarrow$ Наша область имеет вид эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Найдем a^2 и b^2 из графика.

С осью O_y эллипс пер. в точках $(0,2)$ и $(0,-2)$

С осью Ox эллипс пер. в точках $(\sqrt{3},0)$ и $(-\sqrt{3},0)$, что можно ~~понятн~~ понять из рис.



$|\vec{AO}|=2=|\vec{BO}|$ ~~[illegible]~~ т.к. треуг. равнобедр.

$\Rightarrow |\vec{CO}|=\sqrt{|\vec{AO}|^2-|\vec{CA}|^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

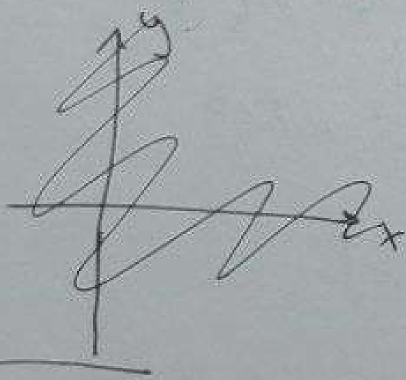
Также для $-\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Из ан.-геом. $a^2=3$ и $b^2=4$

Тогда нужная нам обл. лежит внутри ~~Ответ~~ $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$. Т.е. $\boxed{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}<1}$

4. $|1+z|<|1-z| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}<\sqrt{(1-x)^2+y^2}$

~~Рассмотрим $|1+z|=|1-z|$. Из. на графике~~



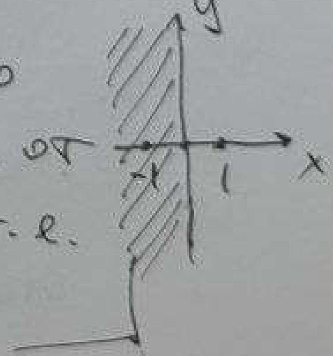
$\Rightarrow (x+1)^2+y^2<(1-x)^2+y^2$

$x^2+2x+1+y^2<1-2x+x^2+y^2$

$\Rightarrow x<0$

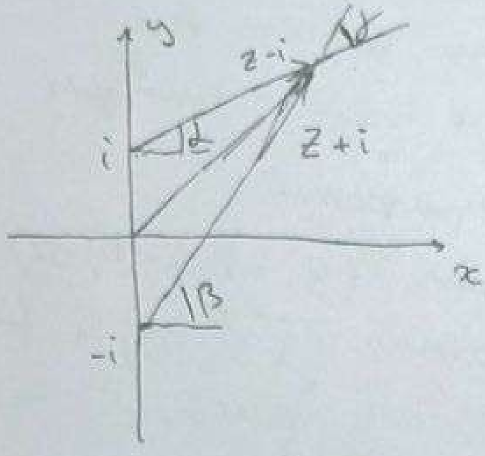
Ответ: Полуплоскость слева от O_y $(x<0)$

Графически мы получаем ~~[illegible]~~ условие, что нам нужна ~~прямая~~ точка, лежащая на расст. от точек $(1,0)$ и $(-1,0)$ на равном расст., т.е. прямая совп. с O_y.



5. $0 < \arg\frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \arg\left(-\frac{z-i}{z+i}\right) < \frac{\pi}{2}$

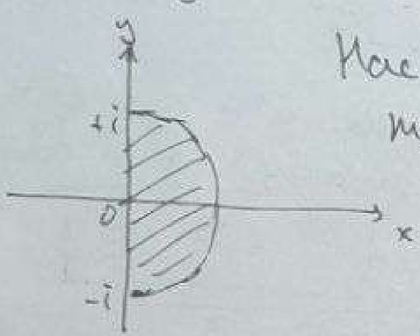
Графическое решение:



Нас инт. угол $\gamma = \alpha - \beta$.
(т.к. при делении аргументы выч.)

⇒ Интересующая нас область – полукруг с центром в точке (0, 0)

Кроме этого наш полукруг должен проходить через точки $+i$ и $-i$ ⇒
⇒ радиус полукруга равен единице.



Нас инт. правая половина полукруга с центром в точке ~~(0,0)~~ $z=0$ и $r=1$.

Аналитическое решение:

$$0 < \arg\frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{-x+i(1-y)}{x+i(1+y)} < i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{-x^2+ix(1-y)+i(1+y)x+1-y^2}{x^2+(1+y)^2} < i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{-x^2-y^2+1}{x^2+(1+y)^2} + i\frac{2x}{x^2+(1+y)^2} < i$$

1. $\frac{-x^2-y^2+1}{x^2+(1+y)^2} = 0 \Rightarrow x^2+y^2=1$
2. $\frac{2x}{x^2+(1+y^2)} = 0 \Rightarrow x = 0$

Отсюда ясно, что нас инт. обл.

$$\begin{cases} x^2+y^2<1 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow$$ Полукруг, аналогичный геом. решению.

1.51

1. $\sum\limits_n \sin n\theta = \mathrm{Im}\left(\sum\limits_n e^{in\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\dfrac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right)$

(Сумма геом. прогрессии)

$$e^{i\theta}-1 = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right) = e^{\frac{i\theta}{2}}\, 2i\sin\frac{\theta}{2}$$

$$e^{in\theta}-1 = e^{\frac{in\theta}{2}}\, 2i\sin\frac{n\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_n \sin n\theta = \mathrm{Im}\left[e^{i\theta}\frac{e^{\frac{in\theta}{2}}\, 2i\sin\frac{\theta n}{2}}{e^{\frac{i\theta}{2}}\, 2i\sin\frac{\theta}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{Im}\, e^{i\theta+\frac{in\theta}{2}-\frac{i\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{Im}\, e^{\frac{i\theta}{2}(n+1)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,\sin\frac{(n+1)\theta}{2} \qquad \text{ч.т.д.}$$

1.52 1. способ

1. $\sum\limits_n \cos(2n-1)\theta = \mathrm{Re}\left[\sum e^{i(2n-1)\theta}\right] =$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\left(1 + e^{i2\theta} + e^{i4\theta} + \dots\right)\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\frac{e^{i2n\theta}-1}{e^{i2\theta}-1}\right] = \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\frac{e^{\frac{i2n\theta}{2}}\, 2i\sin\frac{2n\theta}{2}}{e^{\frac{i\theta 2}{2}}\, 2i\sin\frac{\theta\cdot 2}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{Re}\left[e^{i\theta+in\theta-i\theta}\right] = \frac{\sin n\theta\cos n\theta}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta} \qquad \text{ч.т.д.}$$

2. способ.

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos(2n-1)\theta =$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos 3\theta + \dots + 2\sin\theta\cos(2n-1)\theta}{2\sin\theta} =$$

$$= \frac{\cancel{\sin 2\theta} + (\cancel{\sin 4\theta} - \cancel{\sin 2\theta}) + (\cancel{\sin 6\theta} - \cancel{\sin 4\theta}) + \dots \sin 2n\theta}{2\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta} \quad \text{т.т.д}$$

2. $$\sum_n (-1)^{n+1} \sin(2n-1)\theta = \operatorname{Im}\left[\sum (-1)^{n+1} e^{i(2n-1)\theta}\right] =$$

$$= \operatorname{Im}\left[e^{i\theta}\left(1 - e^{i2\theta} + e^{i4\theta} + \dots\right)\right] = \operatorname{Im}\left[e^{i\theta} \frac{(-e^{i2\theta})^n - 1}{-e^{i2\theta} - 1}\right] =$$

$$= \operatorname{Im}\left[e^{i\theta} \frac{(-1)^{n+1} e^{i2\theta n} + 1}{2\cos\theta\, e^{i\theta}}\right] = \cancel{\operatorname{Im}}$$

$$= \frac{1}{2\cos\theta} \operatorname{Im}\left[(-1)^{n+1}(\cos 2\theta n + i \sin 2\theta n) + 1\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2\cos\theta}\sin 2\theta n = (-1)^{n+1}\frac{\sin 2\theta n}{2\cos\theta} \quad \text{т.т.д}$$

(1.53) $z^n = 1$

Представим 1 в эксп. форме:

$$1 = \cancel{e^{i2\pi m}}\ e^{i2\pi m}, \text{ где } m \in \mathbb{Z}$$

Тогда

$$z_m = (z^n)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{i2\pi m}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i2\pi m \frac{1}{n}}$$

Но нас инт. только главные аргументы $(0 \le \arg z < 2\pi)$, т.е.

$$z_k = e^{\frac{i2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

ч.т.д

(1.60)

1. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_n \varepsilon^n = \varepsilon \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} = \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\sum_n \varepsilon^n\right) = \sum_n \left(\frac{d}{d\varepsilon}\varepsilon^n\right) = \sum_n n\varepsilon^{n-1}$$

С др. стороны:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\sum_n \varepsilon^n\right) = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon}{\varepsilon - 1}\right) = \frac{[(n+1)\varepsilon^n - 1](\varepsilon - 1) - \varepsilon^{n+1} + \varepsilon}{(\varepsilon - 1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)\varepsilon^{n+1} - \varepsilon - (n+1)\varepsilon^n + 1 - \varepsilon^{n+1} + \varepsilon}{(\varepsilon - 1)^2} =$$

$$= \frac{n\varepsilon^{n+1} - n\varepsilon^n - \varepsilon^n + 1}{(\varepsilon - 1)^2}.$$ По условию $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$

Тогда:

$$\sum_n n\varepsilon^{n-1} = \frac{n \cdot \overset{\varepsilon}{e^{i\cancel{\frac{2\pi k}{n}}(n+1)}} - n \cdot \overset{1}{e^{i\cancel{\frac{2\pi k}{n}}n}} - \overset{1}{\cancel{e}^{i\frac{2\pi k}{n}n}} + 1}{(\varepsilon - 1)^2} =$$

$$= \frac{n\varepsilon - n}{(\varepsilon - 1)^2} = \frac{n}{\varepsilon - 1} \quad \text{ч.т.д}$$

8.51

1. $u = \operatorname{Re} f = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$

$\Rightarrow v = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 6y^2 + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -6x^2 + 6yx + 6y^2$

$\Rightarrow C'(x) = -6x^2 \Rightarrow C(x) = -2x^3$

Тогда: $v = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + C$

$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ в нашем случае.

$f = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + i(3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3) =$

$= x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 + 6x^2y - 2y^3 + 6xy^2i - 2x^3i =$

$= (x+iy)^3 - 2i(x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3) =$

$= (x+iy)^3 - 2i(x+iy)^3 = (1-2i)z^3$

Ответ: $f = (1-2i)z^3$

2. $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $f(0) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x\cos y - y\sin y)e^x + e^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = e^x x\sin y + e^x\int(-y\sin y)\,dy + e^x\sin y + C(x) =$$

$$= e^x x\sin y + e^x\left(y\cos y - \sin y\right) + e^x\sin y + C(x) =$$

$$= (x\sin y + y\cos y)e^x + C(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (x\sin y + y\cos y)e^x + e^x\sin y + C'(x) =$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x\sin y + \sin y + y\cos y)$$

$$\Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = C$$

$$v = (x\sin y + y\cos y)e^x + C$$

Т.к. $f(0)$, то в нашем случае $C = 0$

$$\Rightarrow f = e^x\left[(x\cos y - y\sin y) + i(x\sin y + y\cos y)\right]$$

$$= e^x\left[x\cos y + i\sin y\cdot x + i(y\cos y + iy\sin y)\right] =$$

$$= e^x\left[xe^{iy} + iye^{iy}\right] = (x+iy)e^{x+iy} = \underline{\underline{ze^z}}$$

5. $|f| = (x^2+y^2)e^x$

$$f = |f| e^{i \arg f}$$

$$\ln f = \ln|f| + i \arg f$$

$$\ln|f| = \ln\left[(x^2+y^2)e^x\right] = \ln(x^2+y^2) + x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$$

$$v = 2\frac{x}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + y + C(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2\,\frac{1}{1+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + C'(x) =$$

$$= -\frac{2y}{x^2+y^2} + C'(x) =$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow C = \mathrm{const}$$

$$v = 2\,\mathrm{arctg}(y/x) + y + C$$

$\cancel{\ln|f| =}$

$$f = e^{\ln f} = e^{\ln(x^2+y^2)+x+i(2\,\mathrm{arctg}(y/x)+y+C)} =$$

$$= \left[\sqrt{x^2+y^2}\,e^{i\,\mathrm{arctg}(y/x)}\right]^2 e^{x+iy}\,e^{iC} =$$

$$= \underline{\underline{z^2 e^z e^{iC}}}$$, где C – вещественная константа. $(\mathrm{Im}\,C = 0)$

9.16 $C: z = it+1, \quad 0 \le t \le 1; \quad \omega = z^2$

1. $\omega = (it+1)^2 = (1-t^2) + i2t$

Найдем длину кривой, заданной параметрически как $x = 1-t^2$, $y = 2t$:

$$l = \int_0^1 \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{(-2t)^2 + 2^2}\, dt =$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt$$

найдем $I = \int \sqrt{1+t^2}\, dt$:

$$I = \left| \begin{matrix} t = tg\,\vartheta \\ dt = sec^2\vartheta\, d\vartheta \end{matrix} \right| = \int sec^3\vartheta\, d\vartheta = \left| \begin{matrix} u = sec\,\vartheta \\ du = tg\,\vartheta\, sec\,\vartheta \\ dv = sec^2\vartheta\, d\vartheta \\ v = tg\,\vartheta \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[sec\,\vartheta\, tg\,\vartheta - \int tg^2 sec\,\vartheta\, d\vartheta \right] =$$

$$= \left[sec\,\vartheta\, tg\,\vartheta - \int sec^3\vartheta\, d\vartheta + \int sec\,\vartheta\, d\vartheta \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \left[sec\,\vartheta\, tg\,\vartheta - I + \int sec\,\vartheta\, d\vartheta \right] \Rightarrow I = \frac{1}{2}\Big[sec\,\vartheta\, tg\,\vartheta +$$

$$+ \int sec\,\vartheta\, d\vartheta \Big] = \frac{1}{2}\left[sec\,\vartheta\, tg\,\vartheta + \int \frac{tg\,\vartheta\, sec\,\vartheta + sec^2\vartheta}{tg\,\vartheta + sec\,\vartheta}\, d\vartheta \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[sec\,\vartheta\, tg\,\vartheta + \int \frac{d(tg\,\vartheta + sec\,\vartheta)}{tg\,\vartheta + sec\,\vartheta} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[sec\,\vartheta\, tg\,\vartheta + \ln|tg\,\vartheta + sec\,\vartheta| \right] = \left| \begin{matrix} tg\,\vartheta = t \\ sec\,\vartheta = \sqrt{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left|\sqrt{1+t^2} + t\right| \right]$$

Тогда: $l = 2\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^1 + \ln\left|\sqrt{1+t^2}+t\right|\Big|_0^1 \right] =$

$$= \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)$$

2. $C: z = it, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad w = e^z$

Аналогично пред. задаче:

$$\ell = \cancel{\int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + 1^2}\, dt =} \int_0^{2\pi} dt$$

$w = \cos t + i \sin t \;;\; x = \cos t, \; y = \sin t$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 - (y'_t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{2\pi.}}$$