

Reconstrucción de un objeto usando curvas y superficies de Bezier

Camilo Andres Maldonado
Ingeniería de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá-Colombia
camilo_maldonado@javeriana.edu.co

Jimmy Alejandro Castro Sabogal
Ingeniería de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá-Colombia
ja.castros@javeriana.edu.co

John Stiven García
Ingeniería de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
john_garcia@javeriana.edu.co

Pablo Veintemilla Ramirez
Ingeniería de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
p_veintemilla@javeriana.edu.co

Abstract— (It is intended to show the steps of the process for the reconstruction of a three-dimensional object based on the mathematical concepts of curves and Bézier surfaces)

Keywords—Bézier, surfaces, curves, Blender, reconstrucción

I. INTRODUCCION

El auge de la era digital ha traído muchas nuevas herramientas útiles para representar las entidades del mundo real en un computador. A medida que la tecnología avanza, el ser humano ha ido desarrollando habilidades para simular las cosas físicas que nos rodean. Esto con el fin de conseguir avances científicos y tecnológicos que facilitan la vida del hombre en la tierra.

En el mundo de las curvas y rutas en el modelado existe una herramienta muy útil llamada curvas de Bézier. Estas curvas ayudan no solo a controlar las curvaturas fácilmente, sino que además permite generar curvas suaves con gran facilidad. Es una técnica de interpolación que permite, a partir de unos puntos de control, generar rutas, curvas y sólidos cuando se rotan las curvas generadas. En este documento, mostraremos como utilizamos las herramientas Blender y Python para la generación del Jarrón propuesto y hallar los errores de las reconstrucciones propuestas.

II. OBJETIVO

Tomando como punto de partida el modelo tridimensional de un objeto (Para este caso en particular será el de un jarrón) cuyo modelo se muestra en la parte a de la figura 1, se tomarán las coordenadas de algunos de puntos que pertenecen a este objeto para la reconstrucción de este. El producto de esta reconstrucción tendrá las curvas de nivel que fueron usadas en la reconstrucción del objeto como se aprecia en la parte b de la figura 1.

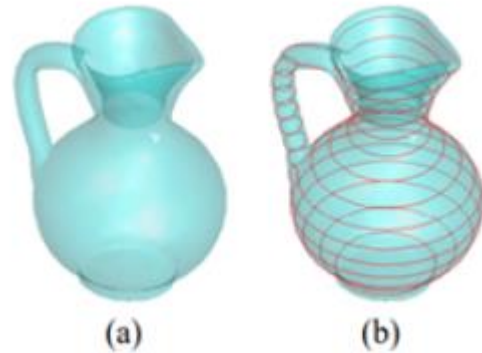


Figura 1. Modelo de la jarra y reconstrucción de esta [2]

III. MARCO TEÓRICO

Como eje central sobre el cual se basará nuestra reconstrucción tendremos el trabajo realizado por Ingeniero Pierre Bézier [5] que desarrollo un modelo matemático para la descripción y modelado de curvas y superficies conocidas como Curvas de Bézier y Superficies de Bézier. Este trabajo realizado por Pierre Bézier cuenta con un uso extendido en los programas computacionales para la realización de diseño [1], como, por ejemplo: AUTOCAD, COREL, ADOBE ILLUSTRATOR, BLENDER, etc.

A. Curvas de Bézier

La descripción de una curva de Bézier se hace a través de polinomios [5]. Para poder realizar este modelado[3] se deben tener un punto inicial a con coordenadas (x_1, y_1) y un punto final b (x_2, y_2) , para unir estos dos puntos se puede hacer mediante un trazado recto o uno curvo, este último tiene infinitas formas. Los otros componentes importantes son los llamados puntos de control estos puntos con coordenadas de la forma (x, y) corresponden a interpolaciones entre los extremos la curva (punto inicial y punto final) y son estos los que permiten dar forma a la curva. Cuando más puntos de control

tenga la curva mayor será el grado del polinomio, una línea recta correspondería a una curva de Bézier de grado 1.

La base matemática para la creación de estos polinomios son polinomios de Bernstein. Para una curva de Bézier lineal se obtiene la siguiente formula [1]:

$$B_i^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

Un ejemplo de cómo se vería esta curva se puede apreciar en la siguiente imagen:

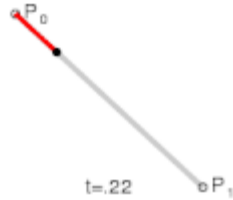


Figura 1. Curva de Bézier lineal [4]

Una curva de Bézier cuadrática está dada por la expresión [4]:

$$B_i^2(t) = (1-t)^2P_0 + (1-t)tP_1 + t^2P_2$$

Una representación grafica de esta curva se puede ver de la siguiente manera:

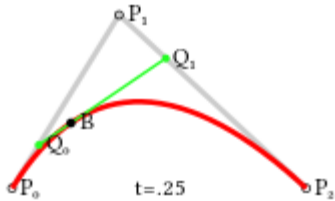


Figura 2. Curva de Bézier cuadrática [4]

La generalización para la construcción de este polinomio está dado por la siguiente expresión [3]:

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)P_i; \forall t \in [0,1]$$

B. Superficies de Bézier

Estas superficies comparten varias características [1] con las curvas de Bézier como el uso de puntos de control, aspectos similares en la interpolación, pero tiene una gran diferencia con respecto a estas y es que esta superficie no tiene que pasar por los puntos de control [6], sino que trata de aproximarse a estos puntos. Una superficie de Bézier de grado (n,m) está definida por un conjunto (n+1,m+1) puntos de control $k_{i,j}$. Normalmente se usan las superficies bidimensionales que pueden ser definidas por una superficie paramétrica donde la posición del punto p en función de las coordenadas paramétricas u,v están dadas por:

$$p(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) k_{i,j}$$

Esta superficie está definida por una maya de control con la siguiente forma [1]:

$$\text{malla de control, } \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{0,0} & \mathbf{c}_{0,n} \\ \mathbf{c}_{m,0} & \mathbf{c}_{m,n} \end{pmatrix}$$

Y descrita a través de la siguiente superficie paramétrica [1]:

$$c(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad u, v \in [0,1].$$

IV. DESARROLLO DE UNA SOLUCIÓN

1.1 Representación de la figura 3D

Para comenzar con la reconstrucción de la figura se construyó un modelo tridimensional de un jarrón mediante el programa de modelado Blender. Para desarrollar este modelo el jarrón se dividió en dos partes: la primera el cuerpo del jarrón como se muestra en la figura 2 y la segunda la manija del jarrón que se muestra en la figura 3.



Figura 3. Vista frontal del cuerpo del jarrón

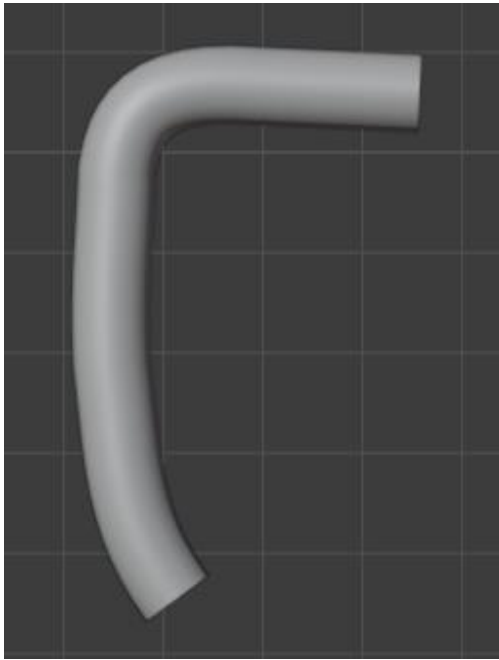


Figura 4. Vista frontal de la manija del jarrón

Luego de esto se formo toda la construcción de la figura en tercera dimensión que dio como resultado el modelo del jarrón a partir del cual tomaremos como referencia para la creación de la reconstrucción. Este resultado se aprecia en la figura 4 y la figura 5.

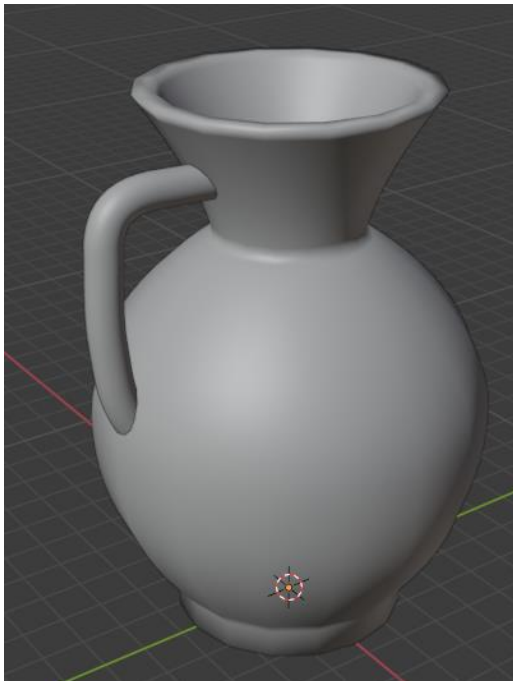


Figura 5. Vista en perspectiva del modelo del jarrón



Figura 6. Vista frontal del modelo del jarrón

1.2 Puntos de control

Tomando como ventaja el uso de curvas y superficies de Bézier por parte del programa de modelado Blender y que están se aplicaron en la construcción del modelo del jarrón se pudo obtener con facilidad estos puntos de control. Estos puntos están representados por coordenadas con la siguiente forma $P [x, y, z]$. La toma de estos puntos de control se realiza a mano, con la función “extrude” y se van adecuando para proporcionar curvatura y tamaño.

Los puntos de control que corresponden al cuerpo del jarrón son los siguientes:

x	y	z
-0.00992	1.4535	0.1988
-0.015357	2.1815	0.35347
-0.014894	2.6253	0.003247
-0.018433	2.6171	0.4252
-0.038924	3.7783	2.0627
-0.018305	2.1974	0.68988
-0.051872	4.4202	3.1588
-0.085766	4.3967	7.163
-0.067548	4.1688	5.171
-0.087998	2.1953	8.8926
-0.095889	1.805	10.081
-0.083784	1.3175	8.9817
-0.10992	2.524	11.254
-0.12152	3.0753	12.251
-0.11989	2.7665	12.265
-0.013883	2.1736	0.18526
-0.016663	2.6212	0.21423
-0.009929	1.7502	0.002165
-0.020203	2.613	0.63618
-0.016831	2.1894	0.52168
-0.02389	2.5691	1.0994
-0.068851	4.4135	5.1613
-0.046323	3.9925	2.7907
-0.084529	4.0651	7.2384
-0.086371	1.621	9.0838
-0.084625	1.9034	8.6903
-0.096565	1.4575	10.392
-0.12234	3.2296	12.245
-0.11341	2.4197	11.734
-0.12071	2.9209	12.258

Tabla 1: Puntos de control del cuerpo del jarrón

Ahora, los puntos de control para la manija del jarrón fueron los siguientes:

x	y	z
4.776	-3.6382	-0.03996
6.3034	-4.4061	-0.056926
7.8705	-4.5106	-0.073958
9.1687	-4.4799	-0.08618
10.313	-4.3808	-0.095872
10.667	-3.0346	-0.099877
10.616	-1.9611	-0.099176
10.565	-0.88771	-0.09847
5.5496	-3.8563	-0.048463
6.9192	-4.3992	-0.064652
8.7061	-4.5551	-0.080947
9.8178	-4.4646	-0.092291
10.765	-4.2049	-0.099243
10.641	-2.4679	-0.099526
10.591	1.4244	-0.098825

Tabla 2: Puntos de control de la manija del jarrón

1.3 Resultados

Utilizando el lenguaje de programación Python se hizo uso de las funciones de cálculo de las superficies de Bézier dados los puntos de control. Del modelado de Blender se obtuvieron los valores de radio de las circunferencias y las alturas en el eje Z usadas para el tallado del jarrón y los puntos de la curvatura de la manija, de tal forma que se pudieran calcular estimados de los puntos sobre el jarrón del modelo. Dentro de lo que es el código se tiene una cantidad de n secciones en las que se van a dividir las circunferencias para tomar los puntos, evidentemente si estas divisiones son mayores, al tener una cantidad mayor de puntos el trazado de las superficies será mayor, aunque la complejidad con la que se hagan los trazos.

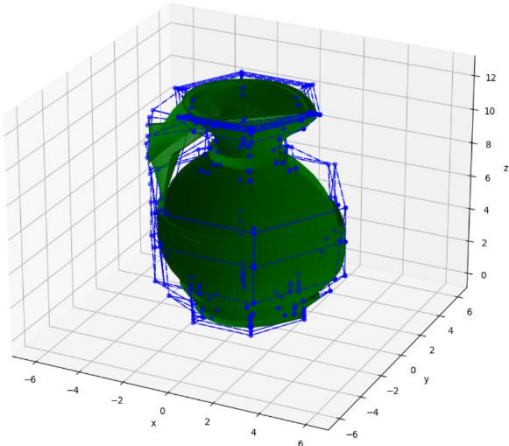


Figura 7. Vista en perspectiva del jarrón en Python

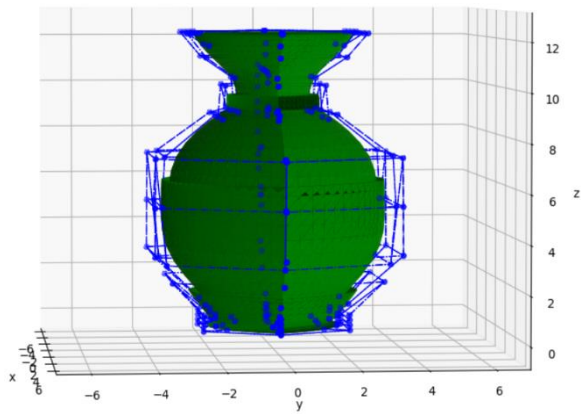


Figura 8. Vista frontal del jarrón en Python

2. Representación de letras con curvas de Bézier

Utilizando las curvas de Bézier se necesita representar la palabra “jarrón”. Así que Se construyeron una serie de curvas de tal forma que entre ellas se pueda leer la palabra “Jarrón” haciendo uso de unos puntos calculados aplicando curvas de Bezier para lograr curvas suaves.

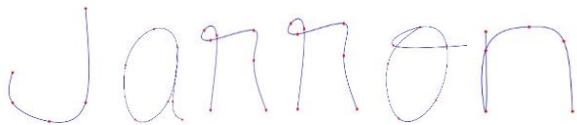


Figura 9. Palabra “jarrón” escrita por medio de curvas de Bezier

REFERENCIAS

- [1] MOOT, "Curva de Bézier", mott.pe, 2020. [Online]. Available: <https://glosario.mott.pe/disenopalabras/curva-bezier>. [Accessed: 11-Nov- 2020].
- [2] E. Herrera Daza, "Interpolación", 2020.
- [3] O. Galdames Bravo, "Modelización con curvas y superficies de Bézier", Modelización en la educación y el aprendizaje de las ciencias , núm. 14, págs. 184,185,186, 2020.
- [4] Wkipedia, "Curva de Bézier", Es.wikipedia.org , 2020. [En línea]. Disponible: https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_B%C3%A9zier. [Consultado: 06- Nov- 2020].
- [5] Ecured, "Pierre Étienne Bézier - EcuRed", Ecured.cu , 2020. [En línea]. Disponible: https://www.ecured.cu/Pierre_%C3%89tienne_B%C3%A9zier. [Consulta: 09- Nov- 2020].
- [6] R. Miranda Molina, "Geometría Dinámica» Curvas de Bézier ", Geometriadinamica.cl , 2020. [Online]. Disponible: <http://www.geometriadinamica.cl/2010/12/curvas-de-bezier/>. [Consultado: 10 de noviembre de 2020].
- [7] A. Lucas, "Cómo dibujar hermosas curvas de Bézier - Alex John Lucas, un diseñador tipográfico", Alex John Lucas, un diseñador tipográfico , 2020. [En línea]. Disponible: <https://alexjohnlucas.com/type/bezier>. [Consultado: 11 de noviembre de 2020].
- [8] Geogebra, "Curvas de Bézier", Geogebra.es , 2020. [Online]. Disponible: http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/bach/actividades/geometria/geo_2D/bezier/actividad.html. [Consultado: 14 de noviembre de 2020].