·

Χρήση εργαλείων ασύγχρονης επικοινωνίας και συνεργασίας για τη δημιουργία νοημάτων για τα Μαθηματικά από μαθητές/-τριες Γυμνασίου: Η περίπτωση της συμμεταβολής.

Δημήτρης Διαμαντίδης[1], Χρήστος Μάλλιαρης[2]

[1] 2ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνων dimitrd@ppp.uoa.gr

[2] 2ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών, chrismalliaris@gmail.com

Περίληψη

Η έννοια της συμμεταβολής, η ένταξή της στα σχολικά μαθηματικά, η διδασκαλία της και η χρήση της από τους/τις μαθητές/-τριες έχει απασχολήσει και συνεχίζει να απασχολεί την έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης και της Διδακτικής των Μαθηματικών. Στην παρούσα έρευνα, ακολουθώντας κυρίως την προσέγγιση των Saldanha και Thompson για τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές/-τριες γύρω από τη συμμεταβολή, αναλύουμε τις ενέργειες μαθητών/-τριών Β' Γυμνασίου που διερευνούν έναν μικρόκοσμο σχεδιασμένο σε περιβάλλον ψηφιακής τεχνολογίας, με ευκαιρίες δημιουργίας προσωπικών νοημάτων για τη συγκεκριμένη έννοια και ανταλλάσσουν ιδέες, συζητώντας με τη χρήση ενός εργαλείου ασύγχρονης επικοινωνίας μεταξύ τους και με τους καθηγητές τους.

Abstract

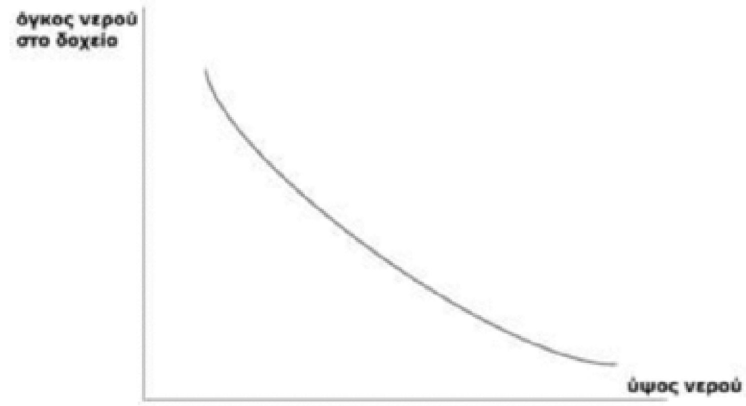
The concept of co-variation in Mathematics Education is a common domain of research among researchers that are interested in students' meaning making around Mathematics, learning and teaching Mathematics at school and using mathematical concepts to address tasks. In this study, we adapt mostly Saldahna and Thompson's approach to co-variation and co-variational thinking in order to understand the process of students' meaning making around co-variation in more detail. We analyze the actions of Grade-8 students investigating a challenging microworld designed in a digital environment, while discussing their ideas with their peers and their teachers in a threaded discussion forum.

Εισαγωγή και θεωρητικό πλαίσιο

Η έννοια της συμμεταβολής υπεισέρχεται στο περιεχόμενο των σχολικών Μαθηματικών, και αυτό φαίνεται να ξεκινά στο Γυμνάσιο. Αν θέλαμε να μιλήσουμε για τη συμμεταβολή με «δύο λόγια» -και πριν ακόμα αναλυθεί στη συνέχεια του κειμένου- θα λέγαμε ότι πρόκειται για τη νοητική εικόνα του ατόμου για δύο ποσότητες που μεταβάλλονται από κοινού με μία αντιστοιχία μεταξύ των τιμών τους. Σύμφωνα με τον Kleiner (1989), κάποιες προσεγγίσεις της έννοιας της συνάρτησης, όπως η αντίληψη ενός συνεχούς τρόπου μεταβολής ποσοτήτων που η σχέση μεταξύ τους μπορεί να προσδιοριστεί από έναν τύπο ή μία γραφική παράσταση, ή όπως η θεώρηση ότι οι τιμές μίας μεταβλητής καθορίζονται πλήρως και με μοναδικό τρόπο από τις τιμές μίας άλλης μεταβλητής, με μία ορισμένη και ρητή αντιστοιχία μεταξύ τους, σχετίζονται με τη συμμεταβολή.

Δύο είναι οι πιο διαδεδομένες προσεγγίσεις για την έννοια της συμμεταβολής και τον τρόπο που νοηματοδοτείται από τους/τις μαθητές/-τριες. Σύμφωνα με τους Confrey και Smith (1994), η συμμεταβολή μεταξύ δύο ποσοτήτων y και x γίνεται αντιληπτή ως η δυνατότητα να μπορεί κανείς να αλλάξει την τιμή της y από y_m σε y_m+_1 σε συντονισμό με την αλλαγή της τιμής της x από xm σε xm+1. Σε αυτήν την προσέγγιση, χαρακτηριστική είναι η αναφορά στον συντονισμό. Συνήθως, η αποτύπωση της εικόνας μίας συμμεταβολής (π.χ. με μία γραφική παράσταση) σε συγκεκριμένο πρόβλημα με τρόπο που δεν ανταποκρίνεται στη πραγματικότητα σχετίζεται με την αδυναμία συντονισμού των μεταβαλλόμενων ποσοτήτων (ibid).

Εικόνα 1. Μορφή γραφικής παράστασης της σχέσης ύψους-όγκου νερού σε δοχείο/δεξαμενή που αδειάζει, στην έρευνα των Stanley & Vidakovic, που δείχνει την αδυναμία συντονισμού της μεταβολής των δύο ποσοτήτων



Για παράδειγμα, οι Stanley & Vidakovic (2015) ζήτησαν από μαθητές/-τριες να κάνουν μία γραφική παράσταση της σχέσης του ύψους-όγκου του νερού σε ένα δοχείο/δεξαμενή που αδειάζει. Κάποιοι/Κάποιες μαθητές/-τριες σχεδίασαν γραφικές παραστάσεις που δήλωναν ότι, καθώς το ύψος αύξανε (στον οριζόντιο άξονα), ο όγκος μειωνόταν, κάτι που έδειξε ότι οι μαθητές/-τριες δεν μπόρεσαν να συντονίσουν μεταξύ τους τις δύο μεταβλητές (ύψος νερού και όγκο), καθώς μεταβάλλονταν με τον χρόνο, ώστε να περιγράφεται σωστά η μεταξύ τους σχέση (Εικόνα 1).

Στην παρούσα εργασία ακολουθούμε κυρίως την προσέγγιση των Saldanha και Thompson (1998), όπως αυτή εξελίχθηκε από τον Thompson (2002) και τους Thompson και Carlson (2017), και η οποία αποτελεί επέκταση της προσέγγισης των Confrey και Smith, καθώς αναφέρεται πιο λεπτομερώς στον τρόπο που οι μαθητές/-τριες αντιλαμβάνονται καταστάσεις που περιγράφονται από ποσότητες και σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων. Οι Saldanha και Thompson

(1998) μιλούν για τη συμμεταβολή ως τη νοητική εικόνα δύο ποσοτήτων που οι τιμές τους μεταβάλλονται ταυτόχρονα, με τη σημείωση ότι η εικόνα αυτή κυριαρχεί της νοητικής εικόνας της μεταβολής κάθε ποσότητας χωριστά. Έτσι, ο συντονισμός ως χαρακτηριστικό της συμμεταβολής δύο ποσοτήτων A και B αντικαθίσταται από ένα «παραγόμενο νοητικό αντικείμενο» (multiplicative image & object) που εκφράζει κάθε στιγμιότυπο αυτής της μεταβολής και είναι επίσης μεταβαλλόμενο. Κάθε κατάσταση αυτού του παραγόμενου αντικειμένου εκφράζει το «ταίριασμα» των αντίστοιχων τιμών των A και B. Το σημαντικό στοιχείο που μας ώθησε, ώστε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση των Saldahna και Thompson, ήταν η προέκταση της ερμηνείας τους όχι μόνο στην αντίληψη αλλά και στη χρήση της έννοιας της συμμεταβολής, από τους/τις μαθητές/-τριες. Συγκεκριμένα, η «ύπαρξη» του παραγόμενου νοητικού αντικειμένου που προαναφέρθηκε δίνει τη δυνατότητα στο άτομο να εντοπίσει και να εξεικονίσει μέσω συγκεκριμένων ιδιοτήτων αυτού του αντικειμένου τη συμμεταβολή των ποσοτήτων. Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της σχέσης δύο ποσοτήτων (μία σε κάθε άξονα ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων) είναι η εξεικόνιση ενός τέτοιου παραγόμενου νοητικού αντικειμένου.

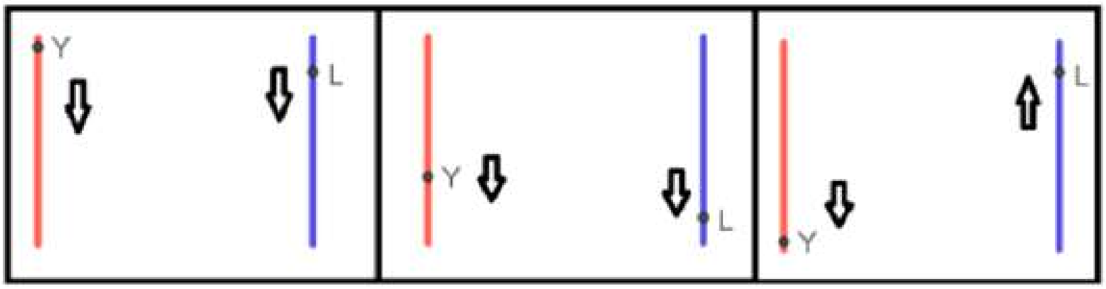
Οι Johnson et al (2017), ακολουθώντας την προσέγγιση των Saldahna και Thompson, προσπάθησαν να περιγράψουν κάποιες από τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μαθητές/-τριες Γυμνασίου παράγουν τέτοια νοητικά αντικείμενα για να απαντήσουν σε προβλήματα. Έτσι, συμπέραναν ότι αυτό συμβαίνει αμεσότερα σε προβλήματα που οι σχετιζόμενες ποσότητες μετρώνται με γραμμικές μονάδες μέτρησης (π.χ. μήκος) και όχι τετραγωνικές ή κυβικές (π.χ. εμβαδόν ή όγκος). Με αφορμή αυτό το συμπέρασμα, στην παρούσα εργασία προσπαθήσαμε να καταλάβουμε βαθύτερα τον μηχανισμό πίσω από τη δημιουργία τέτοιων παραγόμενων νοητικών αντικειμένων από μαθητές/-τριες, χρησιμοποιώντας έναν μικρόκοσμο κατασκευασμένο σε ψηφιακό περιβάλλον που τα παιδιά μπορούσαν να διερευνήσουν και στη συνέχεια να συζητήσουν τις υποθέσεις και τα συμπεράσματά τους με τους/τις συμμαθητές/-τριές τους σε ένα περιβάλλον ασύγχρονης επικοινωνίας. Η απόφασή μας για έναν τέτοιο σχεδιασμό προέκυψε από τα χαρακτηριστικά του μικρόκοσμου αλλά και την αξία της επικοινωνίας στη μαθησιακή διαδικασία: Οι υπολογιστικοί μικρόκοσμοι ενσωματώνουν ένα σύνολο από μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, ώστε να δίνουν στους/στις μαθητές/-τριες τη δυνατότητα να εμπλακούν σε διερευνητική δραστηριότητα που έχει νόημα για τους/τις ίδιους/ίδιες και στη δημιουργία μαθηματικών νοημάτων μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένα προβλήματα (Noss & Hoyles, 1996, Healy & Kynigos, 2010). Η πρόσθετη αξία των μικρόκοσμων ως περιβαλλόντων μάθησης ενισχύεται, όταν η διερευνητική διαδικασία γίνεται σε ένα περιβάλλον πυκνής δημοσιοποίησης και ανταλλαγής ιδεών μεταξύ των παιδιών (Harel & Papert, 1991), κάτι που μπορεί να συμβεί σε ένα περιβάλλον ασύγχρονης επικοινωνίας.

Η έρευνα και τα αποτελέσματα

Ο μικρόκοσμος

Ο υπολογιστικός μικρόκοσμος που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα σχεδιάστηκε στο λογισμικό GeoGebra. Πρόκειται για έναν μικρόκοσμο του οποίου μία σειρά στιγμιοτύπων φαίνονται στην εικόνα 2. Ο χρήστης του μικρόκοσμου πατώντας ένα κουμπί θέτει σε κίνηση τα σημεία (Y και L) πάνω στα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα. Η κίνηση επαναλαμβάνεται (τα σημεία παλινδρομούν) και η θέση των δύο σημείων είναι συσχετισμένη με τρόπο που η ύπαρξή της σχέσης αυτής αλλά και η μορφή της δεν είναι ορατή στο χρήστη. Το ερώτημα που τίθεται προς διερεύνηση είναι: «Υπάρχει κάποια σχέση που να συνδέει την κίνηση των δύο σημείων;» Ο μικρόκοσμος έχει δύο μορφές. Στη μορφή A υπεισέρχεται μία «ομαλή» σχέση μεταξύ των θέσεων των σημείων Y και L (εικόνες 2 και 3). Συγκεκριμένα η θέση των Y και L είναι συνάρτηση μίας τριγωνομετρικής σχέσης με όρισμα t και 2t αντίστοιχα (όπου t είναι μία «κρυφή» μεταβλητή, στο πρωτόκολλο κατασκευής του μικρόκοσμου, κάτι σαν «χρόνος»). Στη μορφή Β (εικόνα 4) η σχέση που καθορίζει τη θέση του Υ παραμένει η ίδια, ενώ η σχέση που καθορίζει τη θέση του W είναι μία πολύκλαδη συνάρτηση του t κατά τμήματα γραμμική (δηλ. πολυγωνική γραμμή), που για κάποια διαστήματα του t είναι ακόμα και σταθερή, κι έτσι το W παραμένει ακίνητο, για αυτά τα διαστήματα.

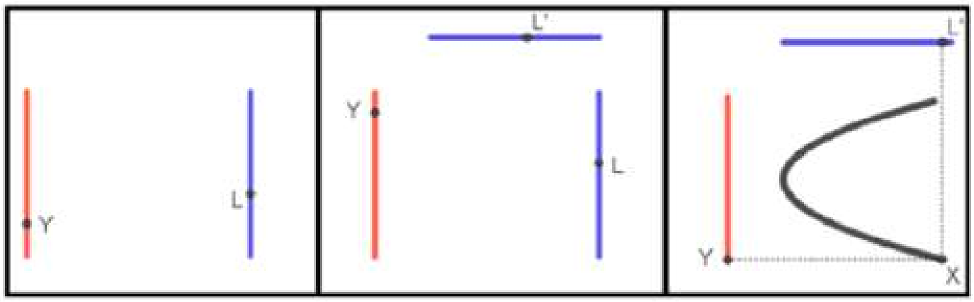
Εικόνα 2. Τρία διαδοχικά στιγμιότυπα (από αριστερά προς τα δεξιά) του μικρόκοσμου που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα. Σε κάθε στιγμιότυπο τα σημεία Υ και L κινούνται κατά τη φορά του αντίστοιχου βέλους επί του κόκκινου και του μπλε ευθύγραμμου τμήματος, αντίστοιχα.



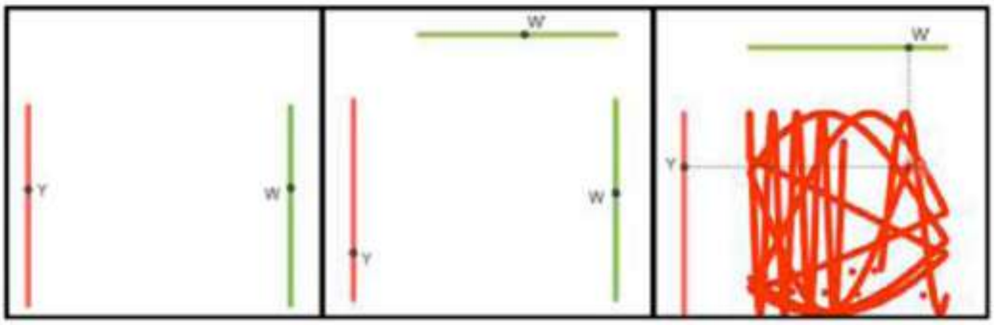
Η μεθοδολογία της έρευνας

Ο μικρόκοσμος αναρτήθηκε σε περιβάλλον η-τάξης (eclass) και οι είκοσι επτά μαθητές/-τριες ενός τμήματος της Β' Γυμνασίου είχαν την ευκαιρία να συζητήσουν στις «Συζητήσεις» (περιβάλλον ασύγχρονης επικοινωνίας) της η-τάξης γύρω από τη δραστηριότητα. Η συζήτηση είχε διάρκεια δέκα ημερών και αναρτήθηκαν 83 μηνύματα. Σε αυτήν συμμετείχαν ενεργά δέκα μαθητές/-τριες και δύο εκπαιδευτικοί ως συμμετέχοντες/παρατηρητές. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι, ενώ όλο τον μήνα Οκτώβριο συνολικά υπήρξαν στην η-τάξη 1071 επισκέψεις, διάρκειας κατά μέσο όρο 8,6 περίπου λεπτών ανά επίσκεψη, τις δέκα ημέρες της συζήτησης σημειώθηκαν 759 επισκέψεις με μέσο όρο 12,9 λεπτά περίπου ανά επίσκεψη. Η ανάλυση του περιεχομένου των συζητήσεων συμπεριλάμβανε αναγνώριση κρίσιμων περιστατικών, που ορίζονται ως επιλεγμένα τμήματα διαλόγου με ένα κεντρικό θέμα συζήτησης (Kynigos & Kolovou, 2018). Παρακάτω επικεντρωνόμαστε σε δύο τέτοια περιστατικά.

Εικόνα 3. Από αριστερά προς τα δεξιά η πρώτη, δεύτερη και τρίτη φάση της μορφής Α του μικρόκοσμου



Εικόνα 4. Από αριστερά προς τα δεξιά η πρώτη, δεύτερη και τρίτη φάση της μορφής Β του μικρόκοσμου



Πρώτο κρίσιμο περιστατικό: Η μορφή Α του μικρόκοσμου

Αρχικά στους/στις μαθητές/-τριες δόθηκε η πρώτη φάση της μορφή Α, όπως φαίνεται στην εικόνα 3. Οι μαθητές/-τριες προσπάθησαν να εντοπίσουν τη σχέση μεταξύ των θέσεων των Υ και L, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα της συζήτησης, ανάμεσα στους μαθητές/-τριες Μ1 & Μ2.

1: Μ1 [06/10/2017]: Να μετρήσουμε σε πόσο χρόνο το Υ πάει από τη μία άκρη στην άλλη και το L. Στη συνέχεια να κάνουμε το ίδιο και για το L. Έτσι θα βρούμε αν υπάρχει μία σχέση μεταξύ των κινήσεων.

2: Μ2 [07/10/2017]: Συμφωνώ με την ιδέα σου, αλλά θα πρέπει να το κάνουμε πολλές φορές κι όχι μόνο μία. Επίσης, θα πρέπει να ξεκινήσουν τα Υ και L από το ίδιο σημείο του για να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Οι μαθητές/-τριες προσπάθησαν να εντοπίσουν μία σχέση όπως περιέγραψαν, αλλά είχαν διαφωνίες ως προς τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους. Στη συνέχεια, οι εκπαιδευτικοί έδωσαν στους μαθητές/-τριες τη δεύτερη φάση μορφής Α, όπου το σημείο L' κινείται οριζόντια ακριβώς όπως το L κινείται κατακόρυφα (διατηρώντας την ίδια σχέση με το t, αλλά αυτή τη φορά μετατοπίζεται παλινδρομώντας οριζόντια). Οι μαθητές/-τριες το διαπίστωσαν αυτό, όπως φαίνεται παρακάτω:

15: Μ2 [08/10/2017]: Είτε συγκρίνουμε τα Υ και L, είτε τα Υ και L' είναι το ίδιο, γιατί απλώς τα Υ και L κινούνται στον άξονα y, αλλά το L' κινείται οριζόντια.

16: Μ1 [08/10/2017]: Ναι, αλλά καλύτερα να είναι και τα δύο στον άξονα y (πρώτη φάση), γιατί έτσι είναι δίπλα-δίπλα και τα συγκρίνουμε καλύτερα.

Το επόμενο βήμα έγινε από τους εκπαιδευτικούς που έδωσαν στους/στις μαθητές/-τριες την τρίτη φάση της μορφής Α (εικόνα 3). Σε αυτήν τη φάση, το L δεν είναι απαραίτητο, εφόσον οι μαθητές/-τριες έχουν ήδη συμφωνήσει μεταξύ τους ότι η οριζόντια και η κατακόρυφη θέση των L' και L, αντίστοιχα, είναι ισοδύναμες για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Ο μικρόκοσμος έχει τη δυνατότητα αποτύπωσης του ίχνους του σημείου Χ, καθώς αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στα επόμενα μηνύματα συμπεριλαμβάνεται και ένα μήνυμα του εκπαιδευτικού Ε:

19: Μ2 [10/10/2017]: Το σημείο Χ μας «δείχνει» τη σχέση που έχουν τα σημεία L' και Υ (εννοεί τη σχέση που έχουν οι θέσεις τους). Αν ξέρουμε κάθε φορά πού είναι το Χ, γνωρίζουμε πού βρίσκονται τα L' και Υ. Άρα, γνωρίζουμε και για τα L και Υ.

20: Ε [10/10/2017]: Άρα υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των θέσεων Υ και L;

22: Μ2 [11/10/2017]: Ναι, υπάρχει και φαίνεται από το Χ, που από αυτό καταλαβαίνουμε που είναι τα L και Υ κάθε φορά, χωρίς να χρειάζεται να τα βλέπουμε.

Δεύτερο κρίσιμο περιστατικό: Η μορφή Β του μικρόκοσμου

Στη συνέχεια, δόθηκε στους/στις μαθητές/-τριες η πρώτη φάση της μορφής Β, γρήγορα όμως ζήτησαν κάτι σαν τη δεύτερη και τρίτη φάση της προηγούμενης μορφής, καθώς δυσκολεύονταν να εντοπίσουν μία «σχέση» ανάμεσα στη θέση των Y και W (εικόνα 4 στο κέντρο και δεξιά, αντίστοιχα). Έτσι, οι εκπαιδευτικοί προχώρησαν, δίνοντας τη δεύτερη και τρίτη φάση της μορφής Β:

> 53: Μ1 [15/10/2017]: Στην πρώτη φάση, πατάω το κουμπί και αρχίζει η κίνηση, αλλά δεν μπορώ να καταλάβω τι γίνεται. Μία σταματάει το W, μία πάει γρήγορα, μία αργά, μάλλον κινείται στην τύχη.
>
> 55 : Μ2 [15/10/2017]: Στην τρίτη φάση να δεις πώς βγαίνει το ίχνος που αφήνει το Χ! Είναι χάλια, τελείως ακανόνιστο. Ενώ στο προηγούμενο (μορφή Α) έβγαινε ένα ωραίο σχήμα, εδώ είναι σαν μουτζούρα. Είναι σίγουρο ότι το W και το W κινούνται άσχετα με το Y.

Συμπεράσματα

Όπως φάνηκε από τα παραπάνω αποσπάσματα, στη μορφή Α οι μαθητές/-τριες αρχικά (πρώτη φάση) προσπάθησαν να συντονίσουν την μεταβολή των Y και L (γραμμή 16). Ωστόσο, όταν εμφανίστηκε το Χ, η παρουσία του φάνηκε να είναι «όχημα» για την παραγωγή ενός παραγόμενου νοητικού αντικειμένου που εξεικονίζεται με το Χ (και το ίχνος του) και μπορούν να το χειριστούν για να απαντήσουν σχετικά ερωτήματα για τη σχέση των θέσεων των Y και L (γραμμή 22). Έτσι, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές/-τριες δημιούργησαν νοήματα σχετικά με την έννοια της συμμεταβολής, τα οποία περιγράφονται αρχικά με την προσέγγιση των Confrey και Smith και τελικά (προς το τέλος της ενασχόλησης με τη μορφή Α) με την προσέγγιση των Saldanha και Thompson.

Ωστόσο, δεν συνέβη το ίδιο στην περίπτωση της μορφής Β. Η σχέση μεταξύ των θέσεων των σημείων Y και W της μορφής Β είναι πιο ασαφής και ασυνήθιστη. Η προσέγγιση των Confrey και Smith δείχνει ότι οι μαθητές/-τριες δεν μπορούν να συντονίσουν τη μεταβολή των Y και W (γραμμή 53). Επίσης όταν οι μαθητές/-τριες προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν το παραγόμενο νοητικό αντικείμενο της μορφής Α (με την προσέγγιση των Saldanha και Thompson), για να βγάλουν συμπεράσματα για τη μορφή Β, τότε το ίχνος που προκύπτει δεν είναι εύχρηστο για εκείνους (εικόνα 4 και γραμμή 55). Φαίνεται μάλιστα ότι συγκρίνουν το ίχνος που προκύπτει με το αντίστοιχο της μορφής Α. Το ίχνος είναι «ακανόνιστο» και έτσι οι μαθητές/-τριες βγάζουν ως συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των θέσεων των σημείων Y και W, άρα και Y και W. Συνεπώς – ισχυριζόμαστε - προσθέτοντας στα συμπεράσματα των Johnson et al (2017), ότι οι μαθητές/-τριες χρησιμοποίησαν τα παραγόμενα νοητικά αντικείμενα που δημιούργησαν, πιο αποτελεσματικά όταν η σχέση/συμμεταβολή που προσπάθησαν να περιγράψουν ήταν «ομαλή» και όχι «ασυνήθιστη» με απότομες αλλαγές και περιόδους που μία από τις δύο ποσότητες παρέμεινε αμετάβλητη.

Συζήτηση

Με την παρούσα έρευνα επιχειρήσαμε να προσθέσουμε στην κατανόηση του τρόπου που οι μαθητές/-τριες Γυμνασίου δημιουργούν νοήματα γύρω από την έννοια της συμμεταβολής, όταν εμπλέκονται σε μία διερευνητική δραστηριότητα με ψηφιακό εργαλείο. Για να περιγράψουμε τα νοήματα αυτά, αλλά και τις νοητικές διεργασίες καθώς και εμπόδια που συνάντησαν οι μαθητές/-τριες χρησιμοποιήσαμε τις προσεγγίσεις των Confrey-Smith και Saldanha-Thompson. Τα συμπεράσματα που προέκυψαν δεν είναι ανεξάρτητα από τη χρήση του μικρόκοσμου στο GeoGebra σε συνδυασμό με το περιβάλλον ασύγχρονης επικοινωνίας, που βοήθησε να αποτυπωθούν οι ενέργειες των μαθητών/-τριών. Έτσι, θεωρούμε αναγκαία τη διεξαγωγή παρόμοιων ερευνών σε διαφορετικά μαθησιακά περιβάλλοντα για την πλουσιότερη κατανόηση του μηχανισμού της δημιουργίας νοημάτων από τους/τις μαθητές/-τριες για την έννοια της συμμεταβολής.

Βιβλιογραφία

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. Educational Studies in Mathematics, 26(2-3), 135-164.

Healy, L. & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. ZDM - Mathematics Education, 42(1), 63-76.

Johnson, H. L., McClintock, E., Hornbein, P., Gardner, A. & Grieser, D. (2017). When a critical aspect is a conception: Using multiple theories to design dynamic computer environments and task to promote secondary students' discernment of co-variation. In T. Dooley, & G. Gueudet (Ed.), Proceeding of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education (pp. 2738-2745). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education & ERME.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. College Mathematics Journal, 20, 232-300.

Kynigos, C., & Kolovou, A. (2018). Teachers as designers of digital educational resources for creative mathematical thinking. In L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, & J. Visnovska (Eds.), Research on Mathematics Textbooks andTeachers' Resources: Advances and issues ICME-13. Cham, Switzerland: Springer.

Noss, R. and Hoyles, C. (1996). Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers. Dordrecht: Kluwer.

Papert, S. & Harel, I. (1991). Situating Comstructionism. Ablex Publishing Corpotation.

Saldanha, L.A., & Thompson, P.W. (1998). Re-thinking co-variation from quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S.B. Berenson & W.N. Coulombe (Eds.)

Proceeding of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education-North America (pp. 298-304), Raleigh: North Carolina State University.

Stalvey, H.E., & Vidakovic, D. (2015). Students' reasoning about relationships between variables in a real-world problem. The Journal of Mathematical Behavior, 40, 192-210.

Thompson, P. W. (2002). Didactic objects and didactic models in radical constructivism. To appear in K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, L. Verschaffel (Eds)., Symbolizing, Modeling, and Tool Use in Mathematics Education (pp. 191-212). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Thompson P.W. & Carlson M. P. (2017) Variation, co-variation & functions. Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.) Compendium for research in mathematics education (pp. 421-456). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.