Ejercicios de Lógica

Conectivos lógicos:

1.- **Conjunción** , se simboliza por $\wedge$. La proposición compuesta $p \wedge q$ es verdadera sólo cuando ambas proposiciones p y q lo son.

2.- **Disyunción** , se simboliza por $\vee$. La proposición compuesta $p \vee q$ es verdadera si al menos una de las proposiciones p o q lo es.

3.- **Implicancia** , se simboliza por $\Rightarrow$. La proposición compuesta $p \Rightarrow q$ es falsa cuando el antecedente p es verdadero y el consecuente q es falso.

4.- **Equivalencia** , se simboliza por $\Leftrightarrow$. La proposición compuesta $p \Leftrightarrow q$ es verdadera cuando ambas proposiciones p y q tienen el mismo valor de verdad.

Leyes fundamentales del algebra proposicional:

Taulogias Básicas:

1) **Principios Lógicos:**
   a) **del Tercero Excluído:** $p \vee \sim p \equiv T$
   b) **de No contradicción:** $\sim (p \wedge \sim p) \equiv T$
   c) **de Identidad:** $p \Rightarrow p \equiv T$

2) **Inferencias inmediatas:**

   de Simplificación y Amplificación:
   a) $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$
   b) $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$

   Modus Ponens y Tollens:
   c) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv T$
   d) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p \equiv T$

3) **Silogismos:** a) **Hipotético:** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv T$
   b) **Disyuntivo:** $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s) \equiv T$

Equivalencias Logicas:

1) **De la negación:** a) $\sim(T) \equiv C$; $\sim(C) \equiv T$; $\sim(\sim p) \equiv p$

b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

c) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$, **Leyes de Morgan**

d) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$; $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

2) **De la Alternación y la Conjunción:**

a) $p \vee T \equiv T$; $p \vee C \equiv p$; $p \wedge T \equiv p$; $p \wedge C \equiv C$

b) $p \vee p \equiv p$; $p \wedge p \equiv p$ **(Idempotencia)**

c) $p \vee q \equiv q \vee p$; $p \wedge q \equiv q \wedge p$ **(Conmutativa)**

d) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$; $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ **(Asociativa)**

e) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **(Distributiva)**

f) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$; $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ **(Leyes de Absorción)**

3) **Del Condicional y el Bicondicional:**

a) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$; $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ **(Conversiones)**

b) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$; $p \Leftrightarrow q \equiv \sim q \Leftrightarrow \sim p$ **(Contrapositivas)**

c) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ **(Bicondicional)**

Ley De Morgan Para Cuantificadores:

La proposición "Es falso que para cada x de S, p (x)" es equivalente a la proposición "Existe x de S tal que es falso que p(x)". Simbólicamente:

$$\sim[\ \forall\ x \in S: p(x)] \Leftrightarrow [\ \exists\ x \in S / \sim p(x)]$$

De donde se deduce, negando ambas proposiciones y reemplazando ~p(x) por p(x), que:

$$\sim[\ \exists\ x \in S / p(x)] \Leftrightarrow [\ \forall\ x \in S: \sim p(x)]$$

Ejercicios:

1. Considere los enunciados representados por las proposiciones p y q :

   p: 4 es un número primo y q: 4 es divisor de 32

   Exprese en español los enunciados representados por:

   a) $p \wedge q$ b) $q \Rightarrow \sim p$ c) $\sim p \Leftrightarrow q$

   d) $\sim p \vee q$ e) $\sim p \Rightarrow \sim q$ f) $(q \wedge \sim p) \vee \sim q$

2. Si se sabe que p es falsa, q es verdadera y que r es falsa, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

   a) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ b) $(\sim p \Rightarrow \sim r) \wedge q$

   c) $(p \wedge \sim r) \Leftrightarrow q$ d) $\sim(\sim p \Rightarrow r) \wedge (\sim r \vee p)$

3. Considere las proposiciones, p: Él es Ingeniero Comercial, q: Él es Informático, r: Él es empresario. Escriba en forma simbólica los siguientes enunciados:

   a) Él no es Ingeniero Comercial ni Informático, pero si Empresario.

   b) Él no es Ingeniero Comercial y es Informático.

   c) Ser Ingeniero Comercial o Empresario es lo mismo que ser Informático.

   d) Si él es Ingeniero Comercial e Informático, entonces es Empresario.

   e) Si no es Ingeniero Comercial y es Informático, entonces es Empresario.

   f) Es Ingeniero Comercial sólo si es Economista y Empresario.

4. Si se sabe que $\sim p \wedge q \equiv C$, demuestre, usando álgebra proposicional, que:

   $[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)] \vee p \equiv T$

5. Si $\sim p \vee q \equiv T$, demuestre que $[(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)] \vee q \equiv T$

6. Demuestre que los esquemas $p \Rightarrow (q \vee r)$ y $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ son lógicamente equivalentes.

7. Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q y r en cada uno de los siguientes casos, sabiendo que el valor de verdad del esquema propuesto es el que se indica.

   a) $[\sim(p \Rightarrow q) \wedge (r \vee q)]$: V

   b) $\{[(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)] \vee (p \Rightarrow r)\}$: F

   c) $\{[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee r)] \wedge \sim [p \Rightarrow (q \wedge r)]\}$: V

   d) $\{[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)]\}$: F

   e) $\{\sim[p \wedge (q \Rightarrow r)] \vee [(p \vee q) \Rightarrow \sim(p \wedge r)]\}$: F. Comente su resultado.

8. Demuestre que si q tiene el valor de verdad F, entonces la proposición compuesta
$(\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow [(q \wedge r) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$ resulta ser Falsa.

9. Considere tres proposiciones p, q y r de las cuales se sabe que $p \wedge q$ es Verdadero, y que $q \wedge r$ es Falso. Determine el valor veritativo del esquema $(r \vee p) \Rightarrow (r \wedge p)$.

10. Demuestre, usando álgebra lógica, las siguientes equivalencias entre esquemas.

a) $q \Rightarrow [\sim p \Rightarrow (p \vee q)] \equiv \sim(p \wedge \sim p)$

b) $p \wedge [\sim(p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)] \equiv \sim(p \Rightarrow p)$

c) $p \vee \sim[p \wedge (q \vee \sim p)] \equiv T$

d) $[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \equiv p$

e) $\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \equiv p$

e) $[(p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge \sim p)] \equiv \sim q$

f) $q \wedge \sim[(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)] \equiv p \wedge q$

11. Demuestre que los siguientes enunciados son lógicamente equivalentes:

I "Si Juan termina de solucionar ese problema y el horario de trabajo terminó, entonces se retira muy satisfecho"

II "Juan no terminó de solucionar ese problema o el horario de trabajo no terminó, o Juan se retira muy satisfecho"

12. Demuestre que el valor de verdad de $\sim(p \Rightarrow \sim q) \wedge [(p \wedge r) \Rightarrow (q \vee \sim r)]$ es independiente del valor de verdad de la proposición r.

13. Dado el conjunto A = { 1, 2, 3, 4, 5 }, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\exists!\, x \in A \,/\, x + 3 = 10$ b) $\forall x \in A : x + 3 \leq 10$

c) $\exists x \in A \,/\, x + 3 < 5$ d) $\forall x \in A : x + 3 \leq 7$

14. Dado el conjunto A = { 1, 3, 5, 7 }, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(\exists x \in A \,/\, 4x^2 - 19x - 5 = 0) \vee (\exists x \in A \,/\, x^2 = x)$

b) $(\exists x \in A \,/\, 2x + 3y = 5x) \wedge (\exists x \in A \,/\, 2x = x)$

15. Simplifique, obteniendo una proposición de tipo afirmativo.

a) $\sim\{[\exists x \text{ en } U \,/\, p(x)] \Rightarrow [\exists x \text{ en } U \,/\, \sim q(x)]\}$

b) $\sim\{\exists x \text{ en } U \,/\, [p(x) \wedge \sim q(x)]\}$

c) $\sim\{[\exists x \text{ en } U \,/\, p(x)] \wedge [\forall x \text{ en } U \,/\, \sim q(x)]\}$

d) $\sim\{[\forall x \text{ en } U/ p(x)] \Rightarrow [\forall x \text{ en } U/ q(x)]\}$

e) $\sim\{[\exists x \text{ en } U/ \sim p(x)] \Rightarrow [\forall x \text{ en } U/ \sim q(x)]\}$

16. Traduzca a lenguaje simbólico, luego niegue y finalmente escriba la frase que corresponda a la negación, de las siguientes proposiciones:

a) Todos los números son racionales y existen números que no son enteros.

b) Algunas leyes no son legítimas pero deben ser respetadas.

c) Algunos ingenieros cantan y hacen deportes.

d) Existe al menos una empresa que hace pernos pero no tuercas.

e) Ningún hombre rico es feliz.

f) De las personas presentes en la reunión de Directorio, ninguno era fumador.

g) Si todos los Ingenieros Civiles tuviesen una segunda fuente de ingreso podrían proyectarse profesionalmente y aumentar sus rentas.

Algunas respuestas:

2. a) V c) F d) V

3. a) $\sim p \wedge \sim q \wedge r$ d) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ e) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$

7. a) p: V q: F r: V b) p: V q: V r: F d) p: F q: V r: F

9. F

13. a) F b) V c) V d) F

15. a) $[\exists x \in \cup / p(x)] \wedge [\forall x \in \cup / q(x)]$

c) $[\forall x \in \cup / \sim p(x)] \vee [\exists x \in \cup / q(x)]$

e) $[\exists x \in \cup / \sim p(x)] \wedge [\exists x \in \cup / q(x)]$