Programa becas capital humano

17PFC-73282

Curso Teoría de Conjuntos y Lógica Proposicional

capTIC enjoy IT

LÓGICA PROPOSICIONAL

- Proposición lógica
- Ejemplos
- Conectores lógicos
- Ejemplos
- Tablas de verdad
- Ejemplos

¿Qué es Proposición lógica?

Proposición lógica

Una proposición (o enunciado) es una oración con valor referencial o informativo, de la cual se puede predicar su veracidad o falsedad, es decir, que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez.

La proposición es la expresión lingüística del razonamiento, que se caracteriza por ser verdadera o falsa empíricamente, sin ambigüedades. Son proposiciones las oraciones aseverativas, las leyes científicas, las fórmulas matemáticas, las fórmulas y/o esquemas lógicos, los enunciados cerrados o claramente definidos. No son proposiciones las opiniones y suposiciones; los proverbios, modismos y refranes; los enunciados abiertos no definidos; las oraciones interrogativas, exclamativas, imperativas, desiderativas y dubitativas; las interjecciones en general; ni las operaciones aritméticas.

Valor de verdad

El valor de verdad de una proposición depende no solamente de las relaciones entre las palabras del lenguaje y los objetos en el mundo, sino también del estado del mundo y del conocimiento acerca de ese estado. El valor de verdad de la oración Juan canta depende no solamente de la persona denotada en Juan y el significado del verbo cantar, sino también del momento cuando esta oración es expresada. Juan probablemente canta ahora, pero ciertamente que no siempre está cantando.

De la misma manera, se debe hacer una distinción entre la oración gramatical propiamente dicha, a la que se llama enunciado, y el contenido o significado del enunciado, que es la proposición.

Los siguientes enunciados representan en realidad a la misma proposición:

- En la Habana hace mucho calor.
- La Habana es una ciudad muy calurosa.
- La temperatura media de la Habana es bastante alta.

Proposición lógica

Las proposiciones se pueden dividir en dos tipos básicos **Proposición simple** y **Proposición compuesta**.

En la **proposición simple**, se da una afirmación con el resultado implícito.

Ejemplo: **El Gorro es Azul**

En la **proposición compuesta** se da la proposición lleva las interjecciones o conexiones (y- o) y de esta se pueden separar oraciones como:

a) El lápiz es rojo o amarillo.

b) Héctor es comerciante y Víctor es abogado

LÓGICA PROPOSICIONAL

Proposición lógica

Una proposición debe tener la cualidad de ser verdadera o falsa y una oración o concepto que no tiene uno u otro sentido no puede ser considerado como proposición lógica; es así que la lógica proporcional en su concepto previo solo puede tener tres elementos:

- Proposición
- Valor verdadero o
- Valor falso

Proposición Simple – Ejemplos

1) Un caballo negro.
2) Él está dormido.
3) Mi computadora.
4) Es un teléfono.
5) Está lloviendo.
6) Un día nublado.
7) Usa zapatos.
8) Se está peinando.
9) Lava su ropa.
10) Está planchando.
11) Vamos a comer.
12) Va a leer.
13) Salió el sol.
14) Va caminando.

Proposición Compuesta – Ejemplos

1) “El frijol es amarillo o negro” (en esta oración se puede comprobar si el frijol es de un color u otro estando dividida entre amarillo y negro y de éstos se desprende la verdad).
2) “Su teléfono es negro o rosa” (En esta oración, se puede comprobar si el teléfono es de un color u otro, teniendo sólo dos posibilidades).
3) “Él está componiendo coches o motocicletas” (Esta oración tiene la discrepancia entre el tipo de compostura que hace).
4) “La computadora es grande o pequeña” (La oración se divide por el tamaño lo que nos dará la conclusión correspondiente).
5) “La computadora es negra o blanca” (tiene una discrepancia que puede cargar la veracidad en un sentido u otro).

Ejercicios:

Proposición Simple y Compuesta

¿Qué es Conectores lógicos?

Conectores lógicos

Los conectivos lógicos nos permiten definir operaciones con proposiciones. Son símbolos que enlazan dos o más proposiciones simples para formar una proposición compuesta.

CONECTIVOS LÓGICOS ELEMENTALES:

NOMBRE	SIMBOLO	TRADUCCIÓN
NEGACIÓN	$\sim$	No, no es el caso
CONJUNCIÓN	$\wedge$	Y
DISYUNCIÓN (INCLUSIVA)	$\vee$	o
DISYUNCIÓN EXCLUSIVA	$\underline{\vee}$	o … o
CONDICIONAL	$\rightarrow$	si …., entonces
BICONDICIONAL	$\leftrightarrow$	si y sólo si

NEGACIÓN (~):

Sea p una proposición. La negación de p es la proposición ~p que se lee “no p”, “no es el caso que p” y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla de verdad:

p	*~p*
V	F
F	V

La tabla anterior dice, en forma sintética, q[illegible]lsa cuando p es verdadera y que ~p es verdadera cuando p es falsa. Este mismo resultado lo podemos expresar en forma analítica mediante la siguiente igualdad:

$$\mathbf{VL\ (\sim p) = 1 - VL\ (p)}$$

Ejemplos de NEGACIÓN (~):

“Π no es un número racional “

p: Π es un número racional

VL (p) = 0(falsa)

(~p) es verdadera ya que p es falsa y se leer ía Π no es un número racional

De forma analítica:

VL (~p) = F -VL (p)

VL (~p) = F - F

VL (~p) = V

CONJUNCIÓN (Λ):

Sean p y q dos proposiciones. La conjunción de p y q es la proposición p Λ q, que se lee "p y q", y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla de verdad:

p	*q*	*p ^ q*
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

CONJUNCIÓN (Λ):

La tabla de verdad o la igualdad anterior nos indica que p Λ q es verdadera en el caso de que p y q sean ambos verdaderos, y que es falso en los otros tres casos.

También se puede definir la conjunción mediante la siguiente igualdad:

$$\mathbf{VL\ (p \land q) = min\ \{\ VL\ (p),\ VL\ (q)\ \}}$$

min es el valor mínimo de los valores lógico

Ejemplos de CONJUNCIÓN (Λ):

"2+2=5 y 3 es primo"
p: 2+2=5
q: 3 es primo

VL(p) =V
VL(q) =F

(p Λ q) es falsa, por que basta con que una sea falsa para que la proposición compuesta sea falsa

De forma analítica:

VL(p Λ q) = min { VL(p) , VL(q) }
VL(p Λ q) = min { V , F }
VL(p Λ q) = V

DISYUNCIÓN (V):

Sean p y q dos proposiciones. La disyunción de p y q es la proposición p v q, que se lee “p o q”, y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla de verdad:

p	*q*	*p* v *q*
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

DISYUNCIÓN (V):

La tabla de verdad o la igualdad anterior nos indica que p v q es verdadera en el caso de que p sea verdadera, q sean verdadera o ambas son verdaderas, y solamente es falso cuando ambas, p y q, sean falsas.

También se puede definir la conjunción mediante la siguiente igualdad:

$$VL\ (p \lor q) = \max \{ VL\ (p), VL\ (q) \}$$

max es el valor máximo de los valores lógico

Ejemplos de DISYUNCIÓN (V):

"un cuadrilátero tiene cuatro lado ó 5 es par"

p: un cuadrilátero tiene cuatro lados

q: 5 es par

VL (p) = V

VL (q) = F

(p V q) es verdadera, porque basta con que una sea verdadera para que la proposición compuesta sea verdadera

De forma analítica:

VL (p V q) = max { VL(p) , VL(q) }

VL (p V q) = max { V , F }

VL(p V q) = V

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA ($\veebar$):

Sean p y q dos proposiciones. La disyunción exclusiva de p y q es la proposición $p \veebar q$, que se lee "o p o q ", y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA ($\veebar$):

Comparando la tabla de verdad de la disyunción con la tabla de disyunción exclusiva se ve que se diferencian en la primera fila. La disyunción exclusiva p $\veebar$ q es falsa si ambas, p y q son verdaderas.

También se puede definir la conjunción mediante la siguiente igualdad:

$$\mathbf{VL\ (p \veebar q) = |\ VL\ (p),\ VL\ (q)\ |}$$

Ejemplos de DISYUNCIÓN EXCLUSIVA ($\veebar$):

“4 es múltiplo de 2 o ½ es un número racional”

p: 4 es múltiplo de 2
q: ½ es un número racional

VL (p) = V
VL (q) = V

($p \veebar q$) es falsa, ya que ambos valores lógicos son iguales, verdaderos.

De forma analítica:
VL ($p \veebar q$) = | VL(p)-VL(q) |
VL ($p \veebar q$) = | V-V |
VL($p \veebar q$) = F

CONDICIONAL (→):

Sean p y q dos proposiciones. El condicional con antecedente p y consecuente q es la proposición p → q, que se lee "si p, entonces q ", y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

CONDICIONAL (→):

antecedente→ consecuente

La tabla anterior nos dice que el condicional es falso sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso; en cualquiera de los otros tres casos es falso.

También se puede definir la conjunción mediante la siguiente igualdad:

$$\mathbf{VL\ (p \rightarrow q) = min\ \{\ VL(\sim p),\ VL(q)\ \}}$$

CONDICIONAL (→):

En Matemática, las proposiciones condicionales tienen especial relevancia, debido a que la gran mayoría de sus teoremas son proposiciones de este tipo. En este caso, al antecedente se llama hipótesis y al consecuente tesis.

Otras formulaciones equivalentes de la proposición condicional $p \rightarrow q$ son:

- "p sólo si q ".
- "q si p ".
- "p es una condición suficiente para q ".
- "q es una condición necesaria para p ".
- "q se sigue de p ".
- "q a condición de p ".
- "q es una consecuencia lógica de p " .
- "q cuando p ".

Ejemplos de CONDICIONAL (→):

"Si -3 es un número real, entonces su cuadrado es positivo"

p: -3 es un número real

q: su cuadrado es positivo

VL (p) = V

VL (q) = V

(p → q) es Verdadera, ya que sólo es falso cuando el antecedente es positivo(p) y el consecuente es falso(q).

De forma analítica:

VL (p → q) = max { VL(~p), VL(q) }

VL (p → q) = max { V-V,V}

VL (p → q) = max { F,V }

VL (p → q) = V

BICONDICIONAL(↔):

Sean p y q dos proposiciones. Se llama Bicondicional de p y q a la proposición p ↔ q, que se lee "p si y solo si q", o "p es condición necesaria y suficiente para que q" y cuyo valor lógico está dado por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

BICONDICIONAL($\leftrightarrow$):

La tabla nos dice que $p \leftrightarrow q$ es verdadera cuando $VL(p) = VL(q)$ y es falsa cuando $VL(p) \neq VL(q)$

También se puede definir el condicional mediante la siguiente igualdad:

$$VL(p \leftrightarrow q) = \min \{ VL(p \rightarrow q), VL(q \rightarrow p) \}$$

Ejemplos de BICONDICIONAL(↔):

"Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo T siendo c la longitud mayor. T es rectángulo si, y sólo si a2+b2 = c2"

p: T es rectángulo

q: a2+b2 = c2

VL (p) = V

VL (q) = V

(p ↔ q) es Verdadera, ya que ambas proposiciones tienes el mismo valor lógico

De forma analítica:

VL (p ↔ q) = min { VL(p →q), VL(q →p) }

VL (p ↔ q) = min { max { VL(~p), VL(q) } , max { VL(~q), VL(p) } }

VL (p ↔ q) = min { max { V-V, V } , max { V-V, V } }

VL (p ↔ q) = min { V , V }

VL (p ↔ q) = V

Equivalencias Lógicas:

En lógica, las declaraciones p y q son lógicamente equivalentes si tienen el mismo contenido lógico. Este es un concepto semántico, dos afirmaciones son equivalentes si tienen el mismo valor de verdad en todos los modelos (Mendelson 1979:56). La equivalencia lógica de p y q algunas veces se expresa como $p \equiv q$

Epq, o $p \Leftrightarrow q$ Sin embargo, estos símbolos también se usan para la equivalencia material; su apropiada interpretación depende del contexto. La equivalencia lógica es diferente a la equivalencia material, aunque ambos conceptos estén estrechamente relacionados.

Equivalencias Lógicas:

Sea T una verdad lógica y F una falsedad lógica:

Equivalencia Nombre $p \wedge t \equiv p$

$p \vee F \equiv p$ Leyes de identidad $p \vee T \equiv T$

$p \wedge F \equiv F$ Leyes de dominación $p \vee p \equiv p$

$p \wedge p \equiv p$ Leyes de idempotencia

$\neg(\neg p) \equiv p$ Leyes de doble negación

$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ Leyes de conmutación

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ Leyes de asociación

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Leyes de distribución

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ Leyes de De Morgan

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ Leyes de absorción

$p \vee \neg p \equiv T$

$p \wedge \neg p \equiv F$ Leyes de negación

Equivalencias Lógicas:

Equivalencias lógicas que involucran declaraciones condicionales :

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$

$p \wedge q \equiv \neg (p \rightarrow \neg q)$

$\neg (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$

$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$

$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$

Equivalencias lógicas que involucran bicondicionales :

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\neg (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Ejemplos de Equivalencias Lógicas:

Las dos sentencias siguientes son lógicamente equivalentes:

Si Lisa está en Francia, entonces ella está en Europa.

Si Lisa no está en Europa, entonces ella no está en Francia (en símbolos, $\neg e \rightarrow \neg f$

Sintácticamente, (1) y (2) son derivables cada una de la otra a través de la regla de contraposición y doble negación.

Semánticamente, (1) y (2) son verdaderas en exactamente los mismos modelos (interpretaciones, valuaciones); a saber, aquellos en que Lisa está en Francia es falso o bien Lisa está en Europa es verdadero.

(Tener en cuenta que en este ejemplo se supone lógica clásica. Algunas lógicas no clásicas no consideran (1) y (2) lógicamente equivalentes.)

Reglas de Inferencia:

- En lógica, una regla de inferencia, o regla de transformación es una forma lógica que consiste en una función que toma premisas, analiza su sintaxis, y devuelve una conclusión (o conclusiones). Por ejemplo, la regla de inferencia llamada Modus ponendo ponens toma dos premisas, uno en la forma "Si p entonces q" y otra en la forma "p", y vuelve la conclusión "q". La regla es válida con respecto a la semántica de la lógica clásica (así como la semántica de muchas otras lógicas no clásicas), en el sentido de que si las premisas son verdaderas (bajo una interpretación), entonces también lo será la conclusión.

- Por lo general, una regla de inferencia conserva la verdad, una propiedad semántica. En muchos valores lógicos, esta conserva una designación general. Pero la acción de la regla de inferencia es puramente sintáctica, y no es necesario preservar ninguna propiedad semántica: cualquier función de conjuntos de fórmulas para fórmulas cuenta como una regla de inferencia. Por lo general, solo son importantes las reglas que sean recursivas; es decir, reglas de modo que no haya un procedimiento efectivo para determinar si cualquier fórmula dada es la conclusión de un determinado conjunto de fórmulas de acuerdo a la regla. Un ejemplo de una regla que no es efectiva en este sentido es la infinitista regla ω.1

Reglas de Inferencia:

- Como se mencionó, la aplicación de una regla de inferencia es un procedimiento puramente sintáctico. Sin embargo, debe también ser válido, o mejor dicho, preservar la validez. Para que el requisito de preservación de la validez tenga sentido, es necesaria una cierta forma semántica para las aserciones de las reglas de inferencia y las reglas de inferencia en sí mismas.

- Las reglas significativas de inferencia en la lógica proposicional incluyen modus ponens, modus tollens y contraposición. La lógica de predicados de primer orden usa reglas de inferencia para liderar con cuantificadores lógicos.

Reglas de Inferencia:

La forma estándar de reglas de inferencia

En lógica formal (y muchas áreas relacionadas), las reglas de inferencia suelen darse generalmente en la siguiente forma estándar:

Premisa#1

Premisa#2

…

Premisa#n

Conclusión

Esta expresión indica que cada vez que en el curso se haya obtenido alguna derivación lógica a partir de las premisas dadas, la conclusión especificada puede darse también por sentado . El lenguaje formal exacto utilizado para describir tanto premisas como las conclusiones depende del contexto real de las derivaciones. En un caso sencillo, se puede utilizar fórmulas lógicas, tales como en:

$$\mathbf{A \rightarrow B}$$

A _ B Esta es la regla modus ponendo ponens de la lógica proposicional. Por lo general, las reglas de inferencia se formulan como esquemas empleando metavariables.

Reglas de Inferencia:

- En la regla (esquema), las metavariables A y B pueden crear instancias de cualquier elemento del universo (o, a veces, por convención, un subconjunto restringido como proposiciones) para formar un conjunto infinito de reglas de inferencia.
- Un sistema de prueba está formado por un conjunto de reglas encadenadas entre sí para formar pruebas, también llamadas derivaciones. Cualquier derivación tiene una sola conclusión final, que es la declaración probada o derivada.
- Si las premisas quedan insatisfechas en la derivación, en consecuencia, la derivación es una prueba de una declaración hipotética: “si las premisas se mantienen, entonces la conclusión es válida.”