Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Project: Βέλτιστη επιλογή κερδών ελεγκτή τύπου PID με χρήση μεθόδων εξελικτικής υπολογιστικής

Μαστραλέξη Χριστίνα Μαρία (9284)

Ιανουάριος 2021

Εισαγωγή

Σκοπός της εργασίας είναι η βέλτιστη επιλογή κερδών για έναν ελεγκτή τύπου PID με χρήση των μεθόδων εξελικτικής υπολογιστικής, τις οποίες αναλύσαμε ήδη σε θεωρητικό επίπεδο στο μάθημα. Το tuning του ελεγκτή, στα πλαίσια της εργασίας, θα γίνει με τη χρήση γενετικών αλγορίθμων και οι απαραίτητες υλοποιήσεις για τον σκοπό αυτό θα γίνουν στο περιβάλλον του MATLAB. Στην παρούσα αναφορά θα γίνει μια σύντομη περιγραφή του προβλήματος, θα γίνουν οι απαραίτητοι υπολογισμοί για τα ζητούμενα της εργασίας, θα αναδειχθεί η λειτουργία των μεθόδων και συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος και τέλος θα παρουσιαστούν τα τελικά αποτελέσματα που προκύπτουν.

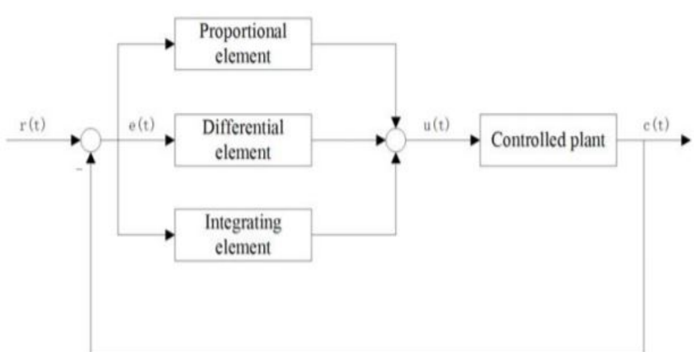
Περιγραφή του προβλήματος

Δεδομένου ότι έχουμε ένα σύστημα δύο εισόδων και δύο εξόδων, στο οποίο $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4] \in \mathbb{R}^4$ είναι το διάνυσμα καταστάσεων, $u = [u_1 \quad u_2] \in \mathbb{R}^2$ είναι η είσοδος ελέγχου και $y = [x_1 \quad x_3] \in \mathbb{R}^2$ είναι η έξοδος, θέλουμε να ελέγξουμε το σύστημα, του οποίου η αναλυτική μορφή μας είναι άγνωστη, με τη βοήθεια ενός ελεγκτή PID και να βρούμε τα κέρδη K_P, K_I, K_D. Γνωρίζουμε ακόμα ότι:

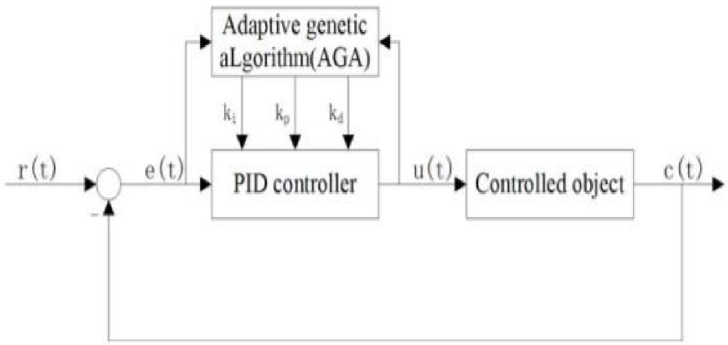
$$e(t) = [x_1(t) - y_{d,1}(t) \quad x_3(t) - y_{d,2}(t)]$$

και επίσης από την εκφώνηση δίνεται η αρχική θέση του συστήματος και η επιθυμητή έξοδος του συστήματος με ικανοποίηση 6 απαιτήσεων:

1. σφάλματα παρακολούθησης εξόδου στη μόνιμη κατάσταση το πολύ $\pi/180$ [rad]
2. υπερύψωση στα σφάλματα παρακολούθησης εξόδου το πολύ $\pi/180$ [rad]
3. χρόνος αποκατάστασης των σφαλμάτων παρακολούθησης εξόδου στη ζώνη $[-\pi/180 \quad \pi/180]$ το πολύ 1 [s]
4. είσοδο ελέγχου που η στιγμιαία της τιμή είναι κατά το δυνατό μικρότερη και σε κάθε περίπτωση όχι μεγαλύτερη από 18 [V]
5. είσοδο ελέγχου που η στιγμιαία της μεταβολή είναι κατά το δυνατό μικρότερη και σε κάθε περίπτωση όχι μεγαλύτερη από 160 [V/s]
6. είσοδο ελέγχου που η συνολική της μεταβολή είναι κατά το δυνατό μικρότερη.



Εικόνα 1: Block διάγραμμα του PID Controller



Εικόνα 2: Tuning του PID ελεγκτή με τη χρήση γενετικών αλγορίθμων

Τους δείκτες που περιγράφουν τις παραπάνω απαιτήσεις καλούμαστε για αρχή να τους ορίσουμε και στην συνέχεια να τους επαναδιατυπώσουμε διακριτοποιώντας τους, δηλαδή θεωρώντας ότι στη διάθεσή μας έχουμε μετρήσεις με δειγματοληψία σταθερής περιόδου των σημάτων x(t) και u(t). Με την βοήθεια αυτών στη συνέχεια καλούμαστε να ορίσουμε κατάλληλη fitness function, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να επιλύσουμε το πρόβλημα με χρήση των γενετικών αλγορίθμων. Είναι, δηλαδή, μια συνάρτηση κόστους που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε με το εργαλείο των ΓΑ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις μας και τελικά να προκύψουν και τα κατάλληλα κέρδη Κ του ελεγκτή. Η συνάρτηση αυτή στα πλαίσια του προβλήματος μας πρέπει να ικανοποιεί τα εξής:

1. η τιμή ικανότητας που αποδίδεται σε κάθε χρωμόσωμα να ανήκει στο διάστημα [0,100), με το 0 να αντιστοιχεί στη βέλτιστη τιμή ικανότητας.

2. από την τιμή της συνάρτησης ικανότητας θα πρέπει να είναι φανερό αν το χρωμόσωμα ικανοποιεί ή όχι τις προϋποθέσεις σχεδίασης.
   Ενδεικτικά γι αυτό αντιστοιχούμε το διάστημα (50,100) στο γεγονός παραβίασης έστω μιας από τις προϋποθέσεις σχεδίασης. Αν παραβιάζεται έστω μία από τις προϋποθέσεις σχεδίασης, τότε η τιμή ικανότητας του χρωμοσώματος θα είναι μεγαλύτερη του 50 ενώ όσο πιο κοντά βρίσκεται η τιμή ικανότητας στο 100 τόσο «περισσότερο» παραβιάζονται οι περιορισμοί.

Ακόμα, πρέπει να σημειωθεί πως, όπως ορίζεται από την εκφώνηση, τα κέρδη K_P, K_D δεν θα πρέπει να ξεπερνούν το 100 ενώ η τιμή των K_I δεν θα πρέπει να ξεπερνά το 10. Μαζί με την εκφώνηση δίνεται και το αρχείο **simclosedloop.p** το οποίο χρησιμεύει στην λήψη των μετρήσεων των σημάτων $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), u_1(t), u_2(t)$, δηλαδή προσομειώνει το σύστημα του οποίου την αναλυτική μορφή δεν την έχουμε, όπως αναφέρθηκε. Ως όρισμα δίνουμε τα κέρδη $K_{P,1}, K_{P,2}, K_{I,1}, K_{I,2}, K_{D,1}, K_{D,2}$, τα οποία ουσιαστικά θα τροφοδοτούνται από τον μηχανισμό των γενετικών αλγορίθμων, και τον όρο tf της επιλογής μας, που είναι ο επιθυμητός τελικός χρόνος παρατήρησης των σημάτων. Σημειώνουμε ότι η συχνότητα δειγματοληψίας είναι ορισμένη στα 0.1 [s]. Στην έξοδο παίρνουμε [x,t,u], όπου το πρώτο όρισμα x είναι το διάνυσμα καταστάσεων, οι 4 πρώτες στήλες του οποίου μας δίνουν τα $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$, το t είναι το διάνυσμα των χρονικών στιγμών στις οποίες πραγματοποιήθηκε η δειγματοληψία και το όρισμα u είναι πίνακας 2 στηλών, καθεμία από τις οποίες είναι το $u_1(t), u_2(t)$ αντίστοιχα.

Δείκτες J

Σαν πρώτο βήμα, λοιπόν, θα οριστούν οι δείκτες J_1 έως J_6 που σχετίζονται με τις απαιτήσεις που αναλύθηκαν στην περιγραφή, κατάλληλοι για την μέτρηση χαρακτηριστικών στα σήματα $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), u_1(t), u_2(t)$.

1. Το σφάλμα παρακολούθησης εξόδου στη μόνιμη κατάσταση ορίζεται από την θεωρία του αυτομάτου ελέγχου ως:

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t)$$

Αυτό φυσικά συμβαίνει για το e(t) που ορίσαμε πάνω, για τα δύο επιμέρους σφάλματα. Έτσι ορίζουμε το J_1.

2. Η υπερύψωση στα σφάλματα παρακολούθησης εξόδου, που θα συμβολίζεται με J_2, ορίζεται ως εξής:
Υποθέτουμε ότι αυτό που θέλουμε τελικά είναι μηδενικό σφάλμα παρακολούθησης εξόδου επομένως αν το σφάλμα e(0) είναι θετικό, η υπερύψωση που ψάχνουμε είναι $|min(e(t))|$ ενώ αν το σφάλμα e(0) είναι αρνητικό, η υπερύψωση που ψάχνουμε είναι $|max(e(t))|$.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση η αρχική θέση του συστήματος μας δίνεται και είναι:

$$[x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0) \quad x_4(0)] = [110\pi/180 \quad 0 \quad 100\pi/180 \quad 0]$$

Επομένως, τα αρχικά σφάλματα στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι $e_1(0) < 0$ για το πρώτο σφάλμα και $e_2(0) > 0$ για το δεύτερο οπότε στην κάθε περίπτωση θεωρώ τις υπερυψώσεις του σφάλματος όπως είπαμε και επάνω.

3. Το J_3 είναι ο χρόνος αποκατάστασης t_s των σφαλμάτων παρακολούθησης εξόδου στη ζώνη $[-\pi/180 \quad \pi/180]$, δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται το σύστημα ώστε ο το σφάλμα να σταθεροποιηθεί ανάμεσα στις τιμές ανάμεσα στο διάστημα $[-\pi/180 \quad \pi/180]$. Εδώ να σημειωθεί ότι προφανώς, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που προκύπτουν από την ανάλυση γραμμικών συστημάτων γιατί δεν ξέρουμε την αναλυτική έκφραση του συστήματος. Επομένως, ο μόνος τρόπος προσδιορισμού αυτού του χρόνου είναι αλγοριθμικός.

4. Το J_4 το ορίζουμε ως:
$$J_4 = max|u_i(t)|, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2.$$
εφόσον θέλουμε έναν δείκτη με τον οποίο να μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η στιγμιαία τιμή της εισόδου ελέγχου θα είναι όσο το δυνατόν μικρότερη και κατώτερη από το όριο που ορίζεται από την εκφώνηση. Με τη max στιγμιαία τιμής των εισόδων να είναι μικρότερη από αυτό το όριο τότε μπορούμε όντως να εξασφαλίσουμε τα ζητούμενα.

5. Το J_5 το ορίζουμε ως:
$$J_5 = max|u_i'(t)|, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2.$$
εφόσον θέλουμε έναν δείκτη με τον οποίο να μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η στιγμιαία τιμή της μεταβολής της εισόδου ελέγχου θα είναι όσο το δυνατόν μικρότερη και κατώτερη από το όριο που ορίζεται από την εκφώνηση. Με τη max στιγμιαία τιμής της μεταβολής των εισόδων να είναι μικρότερη από αυτό το όριο τότε μπορούμε όντως να εξασφαλίσουμε τα ζητούμενα.

6. Το J_6 το ορίζουμε ως:
$$J_6 = \int |u_i'(\tau)|\, d\tau \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2.$$
εφόσον θέλουμε έναν δείκτη με τον οποίο να μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η συνολική μεταβολή της εισόδου ελέγχου θα είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.

Στην συνέχεια, χρειάζεται να επαναδιατυπωθούν οι παραπάνω δείκτες για διαθέσιμες μετρήσεις με δειγματοληψία σταθερής περιόδου των σημάτων x(t) και u(t), δηλαδή τα σήματα είναι διαθέσιμα στη μορφή $x_1(n), x_2(n)$, $x_3(n), x_4(n), u_1(n), u_2(n)$, για n = 0,.., N-1, όπου N ο συνολικός αριθμός μετρήσεων. Αυτές θα είναι και οι εκφράσεις που θα χρησιμοποιήσουμε τελικά στην υλοποιήση για να πετύχουμε τις προδιαγραφές που θέλουμε, γι'αυτό και παρακάτω θα γίνει αναλύσουμε παραπάνω τον αλγοριθμικό τρόπο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την εύρεση αυτών των μεγεθών.

1. Το J_1 είναι το σφάλμα παρακολούθησης εξόδου στη μόνιμη κατάσταση και στην πράξη αρκεί αλγοριθμικά να ελέγξουμε αν το σφάλμα συγκλίνει σε τιμή που να είναι ανάμεσα στο διάστημα [-π/180, π/180]. Αυτό θα γίνει ελέγχοντας τις τελευταίες, έστω k, τιμές του σφάλματος που εμείς ορίζουμε και εφόσον αυτές φαίνεται να συγκλίνουν, μπορούμε να θεωρήσουμε πως αυτή η απαίτηση που σχετίζεται με το J_1 ικανοποιείται, εφόσον η ακριβής τιμή της δεν είναι εύκολο να βρεθεί, και η τιμή στην οποία θα θέλαμε να συγκλίνει είναι το 0. Σημειώνουμε ότι εδώ έχουμε επιλέξει ενδεικτικά k=50 αλλά φυσικά αυτό είναι μια ελεύθερη επιλογή που έχουμε κάνει.

2. Σε σχέση με το J_2 ισχύει ό,τι αναφέρθηκε και νωρίτερα απλώς για διακριτές τιμές και πιο συγκεκριμένα για το e_1, το θα είναι το $|max(e_1(n))|$, ενώ για το e_2, το θα είναι το $|min(e_2(n))|$. Επομένως, για την απαίτηση που σχετίζεται με τον χρόνο υπερύψωσης το J_2 μπορεί να είναι το max των δύο αυτών τιμών με απαίτηση να είναι μικρότερο από π/180. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε ότι και οι δύο ποσότητες δεν θα ξεπεράσουν το άνω όριο που έχει τεθεί.

3. Για το J_3 ισχύει και πάλι ό,τι έχει ήδη αναφερθεί. Θέλουμε δηλαδή να βρούμε αυτόν τον χρόνο στον οποίο το σφάλμα από εκεί και στο εξής σταθεροποιείται ανάμεσα στις τιμές του διαστήματος $[-\pi/180 \quad \pi/180]$. Η εύρεση μπορεί να γίνει με αλγοριθμικό τρόπο εξετάζοντας τις τιμές των σφαλμάτων ξεκινώντας από το τέλος και βρίσκοντας ουσιαστικά την τελευταία τιμή για την οποία το σφάλμα δεν ξεπερνά τα όρια της ζώνης που έχει τεθεί από την εκφώνηση. Η χρονική αυτή στιγμή είναι ο χρόνος αποκατάστασης. Φυσικά εδώ σημειώνουμε ότι αυτό πρέπει να συμβεί για καθένα από τα e_1,e_2 και πάλι μπορούμε να θέσουμε το J_3 να είναι το max των δύο αυτών τιμών με απαίτηση να είναι μικρότερο από 1[s].

4. Για το J_4 κάνουμε την εξής απλή παραλλαγή:

$$J_4 = max|u_i(n)|, \quad i = 1,2 \quad n = 0,..,N-1.$$

δηλαδή και πάλι παίρνουμε τη max στιγμιαία τιμή των εισόδων ελέγχου για τις N τιμές που έχουμε στη διάθεση μας. Για την απαίτηση που σχετίζεται με το J_4 θα απαιτήσουμε η ποσότητα αυτή να είναι μικρότερη απο 18[V].

5. Ομοίως για το J_5:

$$J_5 = max|u_i'(n)|, \quad i = 1,2 \quad n = 0,..,N-1.$$

. Για την απαίτηση που σχετίζεται με το J_5 θα απαιτήσουμε η ποσότητα αυτή να είναι μικρότερη απο 160[V]. Σημειώνουμε ότι για τον υπολογισμό αυτής της ποσότητας στο MATLAB χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση **diff** που προσφέρεται.

6. Για το J_6 προφανώς το ολοκλήρωμα θα γίνει άθροισμα των όρων:

$$J_6 = \sum_{n=0}^{N-1} u_i'(n), \quad i = 1,2.$$

. Σημειώνουμε ότι για τον υπολογισμό αυτής της ποσότητας στο MATLAB χρησιμοποιήθηκαν οι συναρτήσεις **diff** και **sum**.

Συνάρτηση Ικανότητας (Fitness Function)

Για την συνάρτηση ικανότητας δημιουργήθηκε η συνάρτηση **fitness_function.m**. Θυμίζουμε από την θεωρία ότι η συνάρτηση ικανότητας είναι στην προκειμένη περίπτωση η αντικειμενική μας συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση και λειτουργεί σαν μια συνάρτηση κόστους, η οποία για κάθε λύση μας δείχνει πόσο κοντά βρισκόμαστε στην επιθυμητή απόκριση του συστήματος. Αρχικά, στην συνάρτηση αυτή παίρνουμε τις μετρήσεις που προκύπτουν για τα εκάστοτε κέρδη K με την **[x,t,u] = simclosedloop(kp1,kp2,ki1,ki2,kd1,kd2,tf)** και έπειτα ορίζουμε τις επιθυμητές εξόδους που θέλουμε το σύστημα να παρακολουθεί και τα σφάλματα παρακολούθησης. Στην συνέχεια, υπολογίζουμε τις ποσότητες J_i, i = 1,..,6, με τρόπο που έχει ήδη αναφερθεί στην προηγούμενη παράγραφο και με τη βοήθεια αυτών ελέγχουμε αν ικανοποιούνται οι απαιτήσεις που έχουν αναφερθεί. Πιο συγκεκριμένα:

- $J_1 > -\pi/180$ && $J_1 < \pi/180$
- $J_2 \leq \pi/180$
- $J_3 \leq 1$
- $J_4 \leq 18$
- $J_5 \leq 160$

και επιπλέον θέλουμε οι J_4,J_5,J_6 να έχουν όσο μικρότερη τιμή γίνεται. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι θα πρέπει να ενταχθούν στον τύπο της συνάρτησης ικανότητας, ώστε να γίνουν όσο το δυνατόν μικρότερες. Δεδομένου του ότι στοχεύουμε στην ικανοποίηση των απαιτήσεων εκτός από την ελαχιστοποίηση συγκεκριμένων ποσοτήτων γίνεται φανερό ότι η μη ικανοποίηση τους θα πρέπει να ισάγει μια "ποινή" στην συνάρτηση ικανότητας, δηλαδή πρόσθεση μιας ποσότητας, με σκοπό να οδηγηθούμε προς το ελάχιστο και την ικανοποίηση των απαιτήσεων.
Σύμφωνα με την εκφώνηση, η τιμή ικανότητας που αποδίδεται σε κάθε χρωμόσωμα θα πρέπει να ανήκει στο διάστημα [0,100), με το 0 να αντιστοιχεί στη βέλτιστη τιμή ικανότητας ενώ ταυτόχρονα θα πρέπει να είναι ανερό αν το χρωμόσωμα ικανοποιεί ή όχι τις προϋποθέσεις σχεδίασης. Αυτό υλοποιείται με τον τρόπο που προτείνεται, δηλαδή αν οι προυποθέσεις ικανοποιούνται θα έχουμε μια τιμή στο [0,50] ενώ αν δεν ικανοποιούνται η τιμή θα βρίσκεται στο (50,100). Ταυτόχρονα, έχει γίνει και μια προσπάθεια διαβάθμισης, δηλαδή να γίνεται φανερό πόσο μακριά ή κοντά βρίσκονται οι τιμές στη ανώτερη επιτρεπτή τιμή για την οποία ικανοποιούνται οι προυποθέσεις ή να γίνεται φανερό πόσες από αυτές δεν ικανοποιούνται, αν είμαστε σε αυτή την περίπτωση.

Επομένως, η τιμή της συνάρτησης ικανότητας, έστω C, είναι:

$$C = 49 + n \cdot 50/6$$

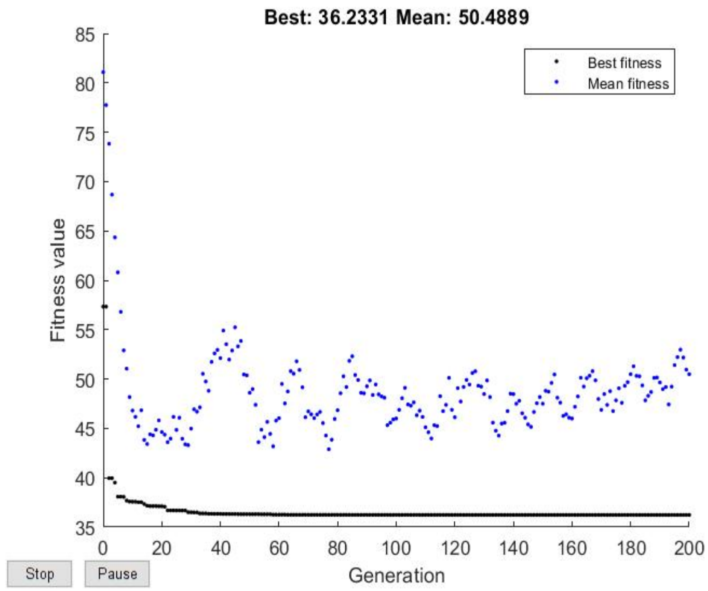
όταν γίνονται n στο πλήθος παραβιάσεις προυποθέσεων. Όταν δεν έχουμε καμία παραβίαση αλλά ταυτόχρονα θέλουμε τόσο την ελαχιστοποίηση των J_4,J_5,J_6 όσο και τον περιορισμό της τιμής C στο [0,50] μπορούμε να υπολογίζουμε την C ως εξής:

$$C = J4 \cdot 50/(3 \cdot 18) + J5 \cdot 50/(3 \cdot 160) + J6/50)$$

για την οποία οι συντελεστές προέκυψαν μετά από μελέτη για το scaling που αποφασίσαμε να κάνουμε στις τιμές.
Σημειώνουμε πως αυτή η προσέγγιση της συνάρτησης ικανότητας δεν είναι μοναδική αλλά θα μπορούσαν να υπάρχουν και άλλες εκφράσεις της που να μας φέρνουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Επίλυση με την χρήση γενετικών αλγορίθμων

Για την επίλυση του τελικού προβλήματος στο script **main.m** θα χρησιμοποιήσουμε τον γενετικό αλγόριθμο **ga** που υπάρχει υλοποιημένος στο περιβάλλον του MATLAB. Ο γενετικός αλγόριθμος εφαρμόζεται στην fitness_function, η οποία παίρνει ως όρισμα 6 μεταβλητές, δηλαδή τα κέρδη kp1,kp2,ki1,ki2,kd1,kd2, και επιστρέφει την τιμή ικανότητας. Επομένως, ο αλγόριθμος τροφοδοτεί με τα ορίσματα την fitness_function από τα οποία παίρνουμε τις μετρήσεις του συστήματος και υπολογίζεται η τιμή C των χρωμοσωμάτων την οποία προσπαθεί να μειώσει. Σε ό,τι αφορά τις παραμέτρους του γενετικού αλγορίθμου, ορίσαμε το πληθυσμό σε κάθε γενιά ίσο με 100 και τον μέγιστο αριθμό γεννεών 200. Οι τιμές αυτές προέκυψαν μετά από διάφορες δοκιμές και συνδυασμούς τιμών. Όπως γνωρίζουμε και από την θεωρία των γενετικών αλγορίθμων, ανάλογα με το πρόβλημα έχοντας έναν μικρό αριθμό πληθυσμού η ακρίβεια της λύσης μειώνεται ενώ η επιλογή ενός πολύ μεγάλου πληθυσμού είναι πιθανό να καταστήσει την διαδικασία πολύ χρονοβόρα χωρίς κάποια ουσιαστική βελτίωση του αποτελέσματος. Ακόμα, έχουμε ορίσει περιορισμούς για τα κέρδη K όπως ζητείται, δηλαδή $kp1, kp2 < 100$, $ki1, ki2 < 10$ και $kd1, kd2 < 100$.



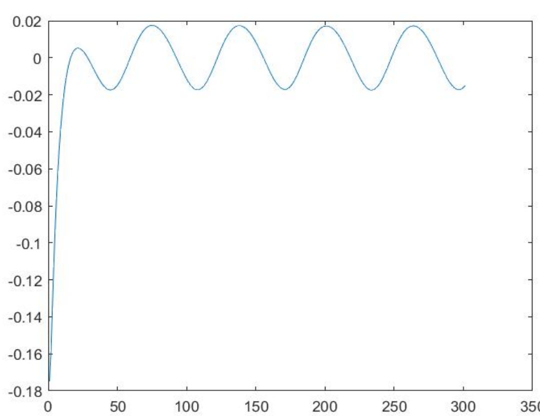
Εικόνα 1

Το διάγραμμα μας δείχνει την τιμή της συνάρτησης καταλληλότητας για το βέλτιστο σημείο μέχρι την τρέχουσα γενιά και τον μέσο όρο τον τιμών των συναρτήσεων καταλληλότητας σε κάθε γενιά.Όπως παρατηρούμε το σημείο ελαχίστου προέκυψε μετά από 200 γενιές. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για αυτό ειναι 36.2331, δηλαδή μικρότερη του 50 και έτσι καταλαβαίνουμε ότι όλοι οι περιορισμοί μας ικανοποιούνται για τα συγκεκριμένα κέρδη που προέκυψαν. Είναι προφανές πως δεν ξέρουμε την πραγματική βέλτιστη λύση γι' αυτό και δεν μπορούμε να αξιολογήσουμε την λύση που βρήκαμε, ωστόσο ικανοποιούνται οι περιορισμοί και παρακάτω θα δούμε αναλυτικά τα αποτελέσματα τα οποία παίρνουμε. Τα κέρδη K που επιλέχθηκαν είναι:

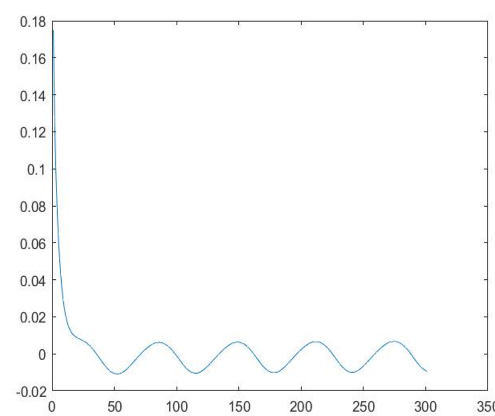
$$[\ kp1\ kp2\ ki1\ ki2\ kd1\ kd2\ ] = [\ 82.4222\ 53.5534\ 0.7019\ 1.2031\ 51.4581\ 24.1517\ ]$$

τα οποία ικανοποιούν φυσικά και τους περιορισμούς για τις τιμές των κερδών.
Βάζοντας αυτή την τιμή στο σύστημα μας παρατηρούμε για τους δείκτες:

1. Στην συγκεκριμένη περίπτωση του δείκτη J_1 επιλέγουμε να περιορίσουμε τα σφάλματα στη περιοχή [-π/180 π/180] κάτι το οποίο βλέπουμε στα ακόλουθα σχήματα:



(α) Σφάλμα e1



(β) Σφάλμα e2

2. Το J_2 έτσι όπως το ορίσαμε κατέληξε να είναι 0.0175 δηλαδή ικανοποιεί ακριβώς τον περιορισμό.

3. Το J_3 κατέληξε 1 και ικανοποιεί κι αυτό ακριβώς τον περιορισμό.
4. Το J_4 έγινε 14.3854 και παρατηρούμε ότι είναι αρκετά κοντά στον περιορισμό.
5. Το J_5 θέλαμε τόσο να ικανοποιεί τον περιορισμό όσο και να είναι όσο μικρότερη γίνεται. Η τιμή του έγινε 128.0892.
6. Για το J_6 δεν είχαμε περιορισμό, αλλά είχε ενταχθεί στην συνάρτηση ικανότητας ώστε να βγει όσο μικρότερη τιμή γίνεται. Η τελική του τιμή έγινε 478.5339.