EL UNIVERSO AL ALCANCE DEL CÁLCULO

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

CAPÍTULO I

1. Hay galaxias cuya luz evidencia un corrimiento al rojo z = 9. En qué porcentaje ha aumentado el universo su tamaño relativo, respecto al momento cuando la luz fue emitida. Cómo ha cambiado la densidad de galaxias en ese lapso.

2. Calcule el valor de los parámetros de Hubble y de desaceleración para los siguientes factores de escala:
   $a_1(t) = A_1 t \quad a_2(t) = A_2 t^{1/2} \quad a_3(t) = A_3 t^{2/3} \quad a_4(t) = A_4 t^2 \quad a_5(t) = A_5 e^{\alpha t}$
   Corrobore que la edad del universo es menor al tiempo de Hubble H_0^{-1} si la expansión es desacelerada, y viceversa.

3. Demuestre que $\dfrac{L}{L_H} = \dfrac{V}{c}$

4. Usando la ley observacional de Hubble, a qué distancia se encuentra una galaxia cuya luz presenta un z = 0,3, suponiendo un valor de

$$H_0 = 70 \frac{Km/seg}{Mpsc}$$

5. Cuál es la condición para que la constante de Hubble disminuya a pesar de que la expansión sea acelerada? (Ayuda: demuestre que

$$\dot{H} = -H^2(q+1)$$

   y considere para qué valores de q, el lado izquierdo es negativo.

6. Demuestre que la tasa a la cual cambia el número de galaxias encerradas en la esfera de Hubble es $\dot{N}_H = 3N_H H(t) q(t)$ Considere los casos particulares

$$a(t) \sim \exp(\alpha t) \;\; y \;\; a(t) \sim t^{2/3}$$

e integre para obtener cómo cambia el número de galaxias es cada caso. Los modelos de universos considerados los llamaremos más adelantes universos de de-Sitter, y de Einstein de-Sitter respectivamente. Puesto que las galaxias pueden entrar o salir de la esfera de Hubble, ella no representa un horizonte ni es el universo observable.

7. Demuestre que la velocidad de un fotón situado en la esfera de Hubble emitido radialmente hacia nosotros es cero. Si la esfera de Hubble fuese estática siempre se quedaría allí. En los modelos desacelerados (q>0) la constante de Hubble disminuye y la longitud de Hubble aumenta de modo que el fotón quedará en la región sublumínica y nos alcanzará. Demuestre que la aceleración del fotón en la esfera de Hubble es $\dot{V}\big|_{L_H} = -cH(1+q)$ de modo que si q > 0 siempre caerá en la región V < c.

8. Demuestre que el número de galaxias encerradas en el horizonte de partículas no puede decrecer.

CAPITULO 2

1. Suponga en la deducción de la ecuación de Friedmann que la energía total no es nula. Demuestre que en ese caso la ecuación de Friedmann es $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$ Usando la ecuación de balance $\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)$ derive la segunda ecuación de Friedmann para la aceleración del factor de escala y obtenga el importante resultado: $\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a(t)$

2. Demuestre que en un universo de Einstein- de Sitter la densidad de materia tiende a infinito cuando t tiende a cero y tiende a cero cuando t tiende a infinito

3. La ecuación de balance de energía y la ecuación de Friemann establecen una vinculación entre el factor de escala y la ecuación de estado: dado una dependencia $a(t)$, podemos calcular el parámetro de Hubble; la ecuación de Friedmann determina la densidad, y finalmente la ecuación de balance permite obtener $p = p(\rho)$. Aplique este método para obtener las tres ecuaciones de estado correspondientes a factores de escala que dependan del tiempo así: $a(t) \sim t^{2/3} \quad a(t) \sim \sqrt{t} \quad a(t) \sim e^{\alpha t}$.

4. Si $\rho_{m,0}$ es la densidad actual de materia estimada en $3\times 10^{-30}\, g.cm^{-3}$, cuánto valía cuando el universo tenía 1 seg. de existencia de acuerdo con el modelo de Einstein-de Sitter.

5. En el universo de Einstein-de Sitter calcule en qué tiempo fue emitida la luz de una galaxia con un corrimiento al rojo z = 3. Calcule en que lapso después del bigbang la longitud de Hubble era de un kilómetro en el universo de E –de-Sitter

6. Demuestre que para un universo de materia las constantes de Hubble hoy y en una época etiquetada por z, es $H(z) = H_0(1+z)^{3/2}$

7. Obtenga una expresión para la longitud de Hubble en una época z, en función de la longitud de Hubble actual en Einstein de Sitter

8. Integre la ecuación de balance de energía $\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)$ para la ecuación de estado de radiación isótropa, para hallar la dependencia de la densidad con el factor de escala. Integre la ecuación de Friedmann para el caso de un universo sólo lleno de radiación para hallar la dependencia del factor de escala con el tiempo. Demuestre que la densidad y la presión de este modelo tienden a infinito para t igual a cero y tienden a cero para t igual a infinito.

9. Obtenga el parámetro de Hubble y el parámetro de desaceleración para el universo de radiación. Calcule el horizonte para el universo de radiación y demuestre que no tiene horizonte de eventos.

10. Obtenga expresiones para el parámetro de Hubble y de desaceleración en el universo de de Sitter. Obtenga el horizonte de los eventos del universo de de Sitter y demuestre que no tiene horizonte de partículas.

CAPITULO 3

1. Obtenga expresiones para las distancias actuales y de emisión para el modelo de radicación. Obtenga el z correspondiente a la máxima distancia de emisión. Obtenga la distancia y demuestre que corresponde con el radio de Hubble de ese momento.

2. Calcule para qué valor de t la distancia de emisión es máxima para el modelo de radiación. Demuestre que la distancia máxima de emisión es la distancia de Hubble de la época que emitió una galaxia, en función del tiempo t.

3. Calcule la velocidad de una galaxia usando el modelo de Einstein – de Sitter, en el instante en que su distancia de emisión es máxima.

4. Demuestre que $L_{\max}(t_{\max})$ era la distancia de Hubble de la época de emisión.

5. Calcule en el modelo Einstein-de Sitter la distancia actual de una galaxia cuya luz tiene z = 3. Demuestre que esta galaxia cuando emitió, estaba a 2 veces la distancia de Hubble de la época.

6. Grafique la distancia L(z) de emisión de la luz desde el big bang hasta hoy.

7. Obtenga las velocidades actuales y en el momento de la emisión para el universo de radiación. Analice los casos límites.

8. En el modelo de Einstein – de Sitter calcule el tiempo que viajaron los fotones que nos están llegando actualmente y que fueron emitidos cuando la distancia de emisión era máxima. Tome $t_0 = 15 \times 10^9 \, años$.

9. Suponga que el factor de escala varía linealmente con el tiempo. Calcule el parámetro de Hubble y el parámetro de desaceleración. Obtenga la ecuación de estado $p = p(\rho)$. Obtenga las distancias actuales y la de emisión (cono de luz) en función de z. Obtenga el z para el cual la distancia de emisión es máxima y demuestre que esta distancia máxima corresponde con el radio de Hubble de la época.

10. Halle la condición en el modelo $R \sim t^n$ para que el modelo tenga un horizonte de los eventos.

11. Para el modelo $R \sim t^n$ obtenga una expresión para el tiempo de vuelo de fotones emitidos en una época z.

12. Para el modelo $R \sim t^n$ haga el cálculo explícito del valor del z para el cual la distancia de emisión es máxima. Luego demuestre que el valor de la distancia en ese z es $L_{\max}(z_{\max}) = L_{H_0}[1+q]^{-1-1/q}$ y que esta cantidad es la longitud de Hubble de la época.

13. Obtenga expresiones para las velocidades actuales y de emisión en el caso general $R \sim t^n$. Analice los diversos casos límite tanto de z como de q.

14. Una galaxia se encuentra actualmente a un radio de Hubble de nosotros. Usando el modelo de Einstein- de Sitter, dentro de cuánto tiempo recibiremos su luz y con qué corrimiento al rojo?

CAPITULO 4

1. Calcule el tiempo de la igualdad entre la densidad de radiación y de materia calculando la constante de Hubble de la época y luego halle el lapso desde el big Bang hasta ese instante suponiendo que está gobernado por la radiación.

2. Suponiendo el modelo de Einstein – de Sitter, calcule que lapso transcurrió desde z = 6000 cuando la equivalencia entre la densidad de radiación y la de materia, y cuando z =1000, cuando se formaron átomos y se emitió la radiación de fondo.

3. Realice con detalle la deducción de cuál es el z cuando comenzó la aceleración del universo usando la segunda ecuación de Friedmann y que $\Omega_v = 0{,}73 \;\; y \;\; \Omega_m = 0{,}27$. Suponiendo la aproximación de Einstein – de Sitter, hace cuántos años comenzó la aceleración?

4. Usando la expresión del factor de escala para el universo real, $a(t) = A \sinh^{2/3}(t / t_v)$, calcule la edad actual del universo recortando que el factor de escala vale 1 hoy.

5. Demuestre que asintóticamente la distancia de Hubble en el universo real tendrá el valor $L_H = c / H_0 \sqrt{\Omega_v}$. Evalúe numéricamente esta cantidad.

6. En la expresión para el "diccionario" entre el tiempo t y el corrimiento z para el universo real, $t = t_v \operatorname{arcsin} h \left[\dfrac{\sinh(t_0 / t_v)}{(1+z)^{3/2}} \right]$, demuestre que para tiempos tempranos (z grandes, la expresión obtenida es similar a la del modelo de Einstein-de Sitter. Grafique la función t(z)

7. Demuestre que el corrimiento z para el cual el universo pasa de desacelerado a acelerado (q = 0) está dado por la expresión:
$z_v = \left(\dfrac{2\Omega_v}{1-\Omega_v} \right)^{1/3} - 1$ Estime numéricamente el valor de z.

8. Nuestro universo asintóticamente tenderá a un universo de de-Sitter para valores grandes del tiempo, (comparados con qué?). Use la expresión para la tasa de cambio del número de galaxias en la esfera de Hubble, $\dot{N}_H = 3N_H H(t) q(t)$ para estimar el tiempo en el cual la población de galaxias se reducirá a la tercera parte.

9. Haga gráficos para el modelo realista correpondientes al cono de luz, horizonte de partículas y eventos de manera numérica.