

Laboratorio # 2 – Computación Científica 1

Octavio Enrique Valenzuela Beltrán
<ovalenzu@labmc.inf.utfsm.cl>

22 de junio de 2009

1. Primera Parte.

Una imagen de $m \times n$ píxeles en escala de grises puede ser representada como una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ cuyos elemento $a_{ij} \in [0, 1]$ representa la intensidad del píxel (i, j) . Este enfoque permite aplicar toda la potencia del Álgebra Lineal numérica al tratamiento de imágenes bidimensionales.

En particular, una imagen contiene mucha información redundante, es decir, que puede ser eliminada sin que el efecto visual sea notable. En particular, podríamos sustituir A por otra matriz B de rango prefijado más pequeño. En este sentido nos ayuda el siguiente resultado:

Teorema : Sean $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ valores singulares no nulos de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces para cada $k \leq r$, la distancia desde A al conjunto de matrices de rango k en la norma $\|\cdot\|_2$

$$\sigma_{k+1} = \min_{\text{rank}(B)=k} \|A - B\|_2$$

Por lo tanto, si $A = U \Sigma V^*$ es la descomposición en valores singulares de A , la matriz de rango k de mejor aproximación a A es

$$B = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*, S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$$

Más aun, si U_k y V_k son las matrices compuestas por las primeras k columnas de U y V , respectivamente, entonces

$$B = U_k S V_k^*$$

Con esto podemos lograr codificar una imagen aproximada por medio de matrices de menor tamaño.

- Aplique lo planteado para imágenes en color o blanco y negro.

- Para el calculo de la *SVD* utilice el algoritmo desarrollado en el laboratorio 1.
- Muestre los resultados obtenidos en su informe para distintos valores de k .
- Utilizando otra factorización, proponga otro método para realizar el ejercicio, y concluya sobre sus resultados.

2. Segunda Parte.

Detengase unos minutos, preparese un café y examine el siguiente algoritmo :

Require: $A_0 \in \mathbb{C}^{m \times n}, N$
for $i = 1$ **to** N **do**
 $[Q, R] = QR(A_{i-1})$
 $A_i = RQ$
end for

- Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aplique el algoritmo propuesto para $N \in [1, 2, \dots, N]$. hasta un n razonable, ¿Como determino este n ?
- Examine los valores de $diag(A_N)$, ¿a que corresponden?
- El algoritmo planteado es conocido, investigue brevemente al respecto.

Indicaciones

- El laboratorio se debe desarrollar en grupos de cuatro personas, en cualquier otro caso deben solicitar una autorización al ayudante.
- Existe una bonificación de 10 pts por escribir el informe en latex.
- El laboratorio debe ser enviado a <ovalenzu@labmc.inf.utfsm.cl> con el subject [CC1-Lab2] apellido1-apellido2-apellido3-apellido4.
- La fecha de entrega del informe es el miércoles 1 de julio del 2009.
- Se descontaran 10 puntos por día de atraso.