

Investigación de Operaciones I

Tarea 2: Programación y Control de Proyectos

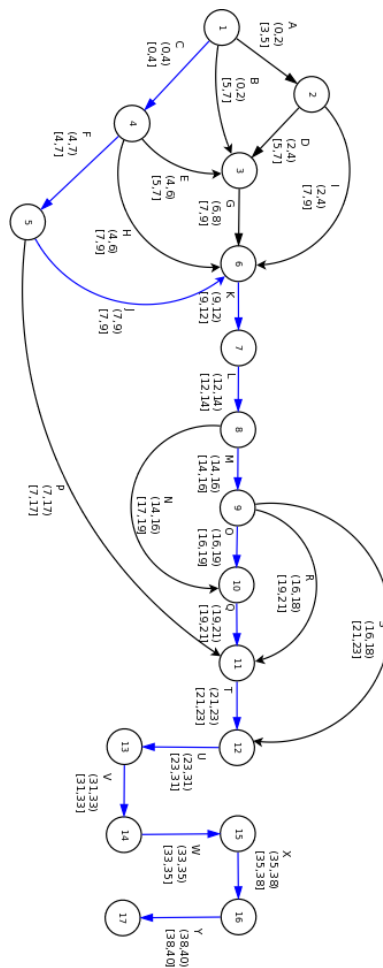
Cristian Maureira
2673030-9
cmaureir@inf.utfsm.cl

Gabriel Zamora
2673070-8
gzamora@inf.utfsm.cl

9 de octubre de 2009

1. Desarrollo

1. Malla del proyecto



2. Resolución gráfica:

- Duración mínima del proyecto: 40 Semanas
- Tiempo más temprano y más tarde de los sucesos

| Actividad | Tiempo más temprano | Tiempo más tarde |
|-----------|---------------------|------------------|
| A | (0,2) | [3,5] |
| B | (0,2) | [5,7] |
| C | (0,4) | [0,4] |
| D | (2,4) | [5,7] |
| E | (4,6) | [5,7] |
| F | (4,7) | [4,7] |
| G | (6,8) | [7,9] |
| H | (4,6) | [7,9] |
| I | (2,4) | [7,9] |
| J | (7,9) | [7,9] |
| K | (9,12) | [9,12] |
| L | (12,14) | [12,14] |
| M | (14,16) | [14,16] |
| N | (14,16) | [17,19] |
| O | (16,19) | [16,19] |
| P | (7,17) | [11,21] |
| Q | (19,21) | [19,21] |
| R | (16,18) | [19,21] |
| S | (16,18) | [21,23] |
| T | (21,23) | [21,23] |
| U | (23,31) | [23,31] |
| V | (31,33) | [31,33] |
| W | (33,35) | [33,35] |
| X | (35,38) | [35,38] |
| Y | (38,40) | [38,40] |

- Ruta(s) crítica(s):
C-F-J-K-L-M-O-Q-T-U-V-W-X-Y

3. Resolución con Programación Lineal

■ Modelo LP

- Variables:

X_i : Tiempo acumulado hasta el nodo i , $i = 1, \dots, 17$

t_{i-j} : Tiempo que demoran en realizarse la actividad entre el nodo i hasta el nodo j

- Función Objetivo:

Mínimo $Z = X_{17} - X_1$

- Restricciones:

- Tiempos:

$$X_2 \geq X_1 + t_{1,2} = X_1 + 2$$

$$X_3 \geq X_1 + t_{1,3} = X_1 + 2$$

$$X_4 \geq X_1 + t_{1,4} = X_1 + 4$$

$$X_3 \geq X_2 + t_{2,3} = X_2 + 2$$

$$X_3 \geq X_4 + t_{4,3} = X_4 + 2$$

$$X_5 \geq X_4 + t_{4,5} = X_4 + 3$$

$$X_6 \geq X_2 + t_{2,6} = X_2 + 2$$

$$X_6 \geq X_3 + t_{3,6} = X_3 + 2$$

$$X_6 \geq X_4 + t_{4,6} = X_4 + 2$$

$$X_6 \geq X_5 + t_{5,6} = X_5 + 2$$

$$X_7 \geq X_6 + t_{6,7} = X_6 + 3$$

$$X_8 \geq X_7 + t_{7,8} = X_7 + 2$$

$$X_9 \geq X_8 + t_{8,9} = X_8 + 2$$

$$X_{10} \geq X_8 + t_{8,10} = X_8 + 2$$

$$X_{10} \geq X_9 + t_{9,10} = X_9 + 3$$

$$X_{11} \geq X_5 + t_{5,11} = X_5 + 10$$

$$X_{11} \geq X_9 + t_{9,11} = X_9 + 2$$

$$X_{11} \geq X_{10} + t_{10,11} = X_{10} + 2$$

$$X_{12} \geq X_9 + t_{9,12} = X_9 + 2$$

$$X_{12} \geq X_{11} + t_{11,12} = X_{11} + 2$$

$$X_{13} \geq X_{12} + t_{12,13} = X_{12} + 8$$

$$X_{14} \geq X_{13} + t_{13,14} = X_{13} + 2$$

$$X_{15} \geq X_{14} + t_{14,15} = X_{14} + 2$$

$$X_{16} \geq X_{15} + t_{15,16} = X_{15} + 3$$

$$X_{17} \geq X_{16} + t_{16,17} = X_{16} + 2$$

- Naturaleza:

$$0 \leq X_i, i = \{1, \dots, 17\}$$

■ Resolución con LINDO. Comentarios

- Código

! Funcion objetivo

MIN X17 - X1

ST

! Restricciones

! Tiempos

$$X2 - X1 > 2$$

$$X3 - X1 > 2$$

$$X4 - X1 > 4$$

$$X3 - X2 > 2$$

```

X3 - X4    > 2
X5 - X4    > 3
X6 - X2    > 2
X6 - X3    > 2
X6 - X4    > 2
X6 - X5    > 2
X7 - X6    > 3
X8 - X7    > 2
X9 - X8    > 2
X10 - X8   > 2
X10 - X9   > 3
X11 - X5   > 10
X11 - X9   > 2
X11 - X10  > 2
X12 - X9   > 2
X12 - X11  > 2
X13 - X12  > 8
X14 - X13  > 2
X15 - X14  > 2
X16 - X15  > 3
X17 - X16  > 2
END

```

! Naturaleza

```

SLB X1 0
SLB X2 0
SLB X3 0
SLB X4 0
SLB X5 0
SLB X6 0
SLB X7 0
SLB X8 0
SLB X9 0
SLB X10 0
SLB X11 0
SLB X12 0
SLB X13 0
SLB X14 0
SLB X15 0
SLB X16 0
SLB X17 0

```

- Resultados

| | |
|-----|----|
| X1 | 0 |
| X2 | 2 |
| X3 | 6 |
| X4 | 4 |
| X5 | 7 |
| X6 | 9 |
| X7 | 12 |
| X8 | 14 |
| X9 | 16 |
| X10 | 19 |
| X11 | 21 |
| X12 | 23 |
| X13 | 31 |
| X14 | 33 |
| X15 | 35 |
| X16 | 38 |
| X17 | 40 |

4. Probabilidad de que el proyecto termine antes de 29 semanas y después de 48 semanas
Primero que todo debemos tener claro el valor de la *varianza* en cada actividad. Por lo tanto mediante la siguiente fórmula, procederemos a calcular cada una.

$$V[T_{ij}] = \frac{(b - a)^2}{36}$$

Y la esperanza también es posible calcularla de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$E[T_{ij}] = \frac{(a + 4m + b)}{6}$$

Con T_{ij} como la variable aleatoria asociada a la duración de la actividad (i, j) .

| Actividad | a | m | b | Varianza | Esperanza |
|-----------|---|----|----|----------|-----------|
| A | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| B | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| C | 2 | 4 | 6 | 0.4 | 4 |
| D | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| E | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| F | 2 | 3 | 5 | 0.25 | 3 |
| G | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| H | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| I | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| J | 1 | 2 | 4 | 0.25 | 2 |
| K | 2 | 3 | 5 | 0.25 | 3 |
| L | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| M | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| N | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| O | 2 | 3 | 4 | 0.1 | 3 |
| P | 8 | 10 | 11 | 0.25 | 9 |
| Q | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| R | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| S | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| T | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| U | 6 | 8 | 9 | 0.25 | 7 |
| V | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |
| W | 1 | 2 | 4 | 0.25 | 2 |
| X | 2 | 3 | 4 | 0.1 | 3 |
| Y | 1 | 2 | 3 | 0.1 | 2 |

Tenemos que tomar el camino critico, sumar todas las varianzas asociadas a las actividades del mismo camino y con eso obtenemos la varianza del proyecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in ruta} V[T_{ij}] &= V_C + V_F + V_J + V_K + V_L + V_M + V_O + V_Q + V_T + V_U + V_V + V_W + V_X + V_Y \\
&= 0,4 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,25 + 0,1 + 0,25 + 0,1 + 0,1 \\
&= 2,45 \text{ (semanas)} \\
&= \sigma_T^2 \text{ (desviacion estandar)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma_T = \sqrt{2,45} = 1,565$ De la misma forma, obtenemos la esperanza del camino:

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in ruta} E[T_{ij}] &= E_C + E_F + E_J + E_K + E_L + E_M + E_O + E_Q + E_T + E_U + E_V + E_W + E_X + E_Y \\
&= 4 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 2 + 2 + 7 + 2 + 2 + 3 + 2 \\
&= 39 \text{ (semanas)}
\end{aligned}$$

Para cada caso:

- Antes de 29 semanas:

$$P(T \leq 29) = P\left(\frac{T - ET}{\sigma_T} \leq z = \frac{29 - E(T)}{\sigma_T}\right) \quad (1)$$

$$= P\left(\frac{T - 39}{1,565} \leq \frac{29 - 39}{1,565}\right) \quad (2)$$

$$= P(z \leq -6,389) \quad (3)$$

$$= 0\% \text{ (Viendo una tabla normal)} \quad (4)$$

$$(5)$$

- Después de 48 semanas:

$$P(T \geq 48) = 1 - P(T \leq 48) \quad (6)$$

$$= 1 - P\left(\frac{T - ET}{\sigma_T} \leq z = \frac{48 - E(T)}{\sigma_T}\right) \quad (7)$$

$$= 1 - P\left(\frac{T - 39}{1,565} \leq \frac{48 - 39}{1,565}\right) \quad (8)$$

$$= 1 - P(z \leq 5,750) \quad (9)$$

$$= 0\% \text{ (Viendo una tabla normal, el valor es muy chico)} \quad (10)$$

$$(11)$$

■ Modelo LP Acelerado

• Variables:

X_i : Tiempo acumulado hasta el nodo i , $i = 1, \dots, 17$

t_{i-j} : Tiempo que demoran en realizarse la actividad entre el nodo i hasta el nodo j

a_{i-j} : Tiempo máximo en que es posible acelerar la actividad entre el nodo i hasta el nodo j

• Función Objetivo:

Mínimo $Z = 100a_{1,2} + 50a_{1,3} + 300a_{1,4} + 100a_{2,3} + 500a_{4,3} + 50a_{4,5} + 150a_{2,6} + 70a_{3,6} + 60a_{4,6} + 350a_{5,6} + 20a_{6,7} + 80a_{7,8} + 40a_{8,9} + 230a_{8,10} + 10a_{9,10} + 30a_{5,11} + 500a_{9,11} + 100a_{10,11} + 20a_{9,12} + 140a_{11,12} + 200a_{12,13} + 45a_{13,14} + 100a_{14,15} + 150a_{15,16} + 200a_{16,17}$

• Restricciones:

◦ Tiempos:

$$X_2 \geq X_1 + t_{1,2} - a_{1,2} = X_1 + 2 - a_{1,2}$$

$$X_3 \geq X_1 + t_{1,3} - a_{1,3} = X_1 + 2 - a_{1,3}$$

$$X_4 \geq X_1 + t_{1,4} - a_{1,4} = X_1 + 4 - a_{1,4}$$

$$X_3 \geq X_2 + t_{2,3} - a_{2,3} = X_2 + 2 - a_{2,3}$$

$$X_3 \geq X_4 + t_{4,3} - a_{4,3} = X_4 + 2 - a_{4,3}$$

$$X_5 \geq X_4 + t_{4,5} - a_{4,5} = X_4 + 3 - a_{4,5}$$

$$X_6 \geq X_2 + t_{2,6} - a_{2,6} = X_2 + 2 - a_{2,6}$$

$$X_6 \geq X_3 + t_{3,6} - a_{3,6} = X_3 + 2 - a_{3,6}$$

$$X_6 \geq X_4 + t_{4,6} - a_{4,6} = X_4 + 2 - a_{4,6}$$

$$X_6 \geq X_5 + t_{5,6} - a_{5,6} = X_5 + 2 - a_{5,6}$$

$$X_7 \geq X_6 + t_{6,7} - a_{6,7} = X_6 + 3 - a_{6,7}$$

$$X_8 \geq X_7 + t_{7,8} - a_{7,8} = X_7 + 2 - a_{7,8}$$

$$X_9 \geq X_8 + t_{8,9} - a_{8,9} = X_8 + 2 - a_{8,9}$$

$$X_{10} \geq X_8 + t_{8,10} - a_{8,10} = X_8 + 2 - a_{8,10}$$

$$X_{10} \geq X_9 + t_{9,10} - a_{9,10} = X_9 + 3 - a_{9,10}$$

$$X_{11} \geq X_5 + t_{5,11} - a_{5,11} = X_5 + 10 - a_{5,11}$$

$$X_{11} \geq X_9 + t_{9,11} - a_{9,11} = X_9 + 2 - a_{9,11}$$

$$X_{11} \geq X_{10} + t_{10,11} - a_{10,11} = X_{10} + 2 - a_{10,11}$$

$$X_{12} \geq X_9 + t_{9,12} - a_{9,12} = X_9 + 2 - a_{9,12}$$

$$X_{12} \geq X_{11} + t_{11,12} - a_{11,12} = X_{11} + 2 - a_{11,12}$$

$$X_{13} \geq X_{12} + t_{12,13} - a_{12,13} = X_{12} + 8 - a_{12,13}$$

$$X_{14} \geq X_{13} + t_{13,14} - a_{13,14} = X_{13} + 2 - a_{13,14}$$

$$X_{15} \geq X_{14} + t_{14,15} - a_{14,15} = X_{14} + 2 - a_{14,15}$$

$$X_{16} \geq X_{15} + t_{15,16} - a_{15,16} = X_{15} + 3 - a_{15,16}$$

$$X_{17} \geq X_{16} + t_{16,17} - a_{16,17} = X_{16} + 2 - a_{16,17}$$

◦ Aceleraciones máximas:

$$a_{1,2} \leq 1$$

$$a_{1,3} \leq 1$$

$$a_{1,4} \leq 2$$

$$a_{2,3} \leq 1$$

$$a_{4,3} \leq 1$$

$$a_{4,5} \leq 2$$

$$a_{2,6} \leq 1$$

$$a_{3,6} \leq 1$$

$$a_{4,6} \leq 1$$

$$a_{5,6} \leq 1$$

$$\begin{aligned}
a_{6.7} &\leq 2 \\
a_{7.8} &\leq 1 \\
a_{8.9} &\leq 1 \\
a_{8.10} &\leq 1 \\
a_{9.10} &\leq 2 \\
a_{5.11} &\leq 2 \\
a_{9.11} &\leq 1 \\
a_{10.11} &\leq 1 \\
a_{9.12} &\leq 1 \\
a_{11.12} &\leq 1 \\
a_{12.13} &\leq 2 \\
a_{13.14} &\leq 1 \\
a_{14.15} &\leq 1 \\
a_{15.16} &\leq 2 \\
a_{16.17} &\leq 1
\end{aligned}$$

◦ Antes de 30 días:

$$X_{17} - X_1 < 30$$

◦ Naturaleza:

$$0 \leq X_i, i = \{1, \dots, 17\}$$

$$0 \leq a_{i-j}, i = \{1, \dots, 17\}, j = \{1, \dots, 17\}$$

■ Resolución con LINDO. Comentarios

• Código

! Funcion objetivo

```

MIN 100 A1_2 + 50 A1_3 + 300 A1_4 + 100 A2_3 + 500 A4_3 + 50 A4_5 + 150 A2_6 +
70 A3_6 + 60 A4_6 + 350 A5_6 + 20 A6_7 + 80 A7_8 + 40 A8_9 + 230 A8_10 +
10 A9_10 + 30 A5_11 + 500 A9_11 +100 A10_11 + 20 A9_12 + 140 A11_12 + 200 A12_13 +
45 A13_14 + 100 A14_15 + 150 A15_16 + 200 A16_17

```

ST

! Restricciones

```

X2 - X1 + A1_2 > 2
X3 - X1 + A1_3 > 2
X4 - X1 + A1_4 > 4
X3 - X2 + A2_3 > 2
X3 - X4 + A4_3 > 2
X5 - X4 + A4_5 > 3
X6 - X2 + A2_6 > 2
X6 - X3 + A3_6 > 2
X6 - X4 + A4_6 > 2
X6 - X5 + A5_6 > 2
X7 - X6 + A6_7 > 3
X8 - X7 + A7_8 > 2
X9 - X8 + A8_9 > 2
X10 - X8 + A8_10 > 2
X10 - X9 + A9_10 > 3
X11 - X5 + A5_11 > 10
X11 - X9 + A9_11 > 2
X11 - X10 + A10_11 > 2
X12 - X9 + A9_12 > 2
X12 - X11 + A11_12 > 2

```

```

X13 - X12 + A12_13 > 8
X14 - X13 + A13_14 > 2
X15 - X14 + A14_15 > 2
X16 - X15 + A15_16 > 3
X17 - X16 + A16_17 > 2

```

```

X17 - X1 < 30

```

```

! Tiempos

```

```

END

```

```

! Naturaleza

```

```

SLB X1 0

```

```

SLB X2 0

```

```

SLB X3 0

```

```

SLB X4 0

```

```

SLB X5 0

```

```

SLB X6 0

```

```

SLB X7 0

```

```

SLB X8 0

```

```

SLB X9 0

```

```

SLB X10 0

```

```

SLB X11 0

```

```

SLB X12 0

```

```

SLB X13 0

```

```

SLB X14 0

```

```

SLB X15 0

```

```

SLB X16 0

```

```

SLB X17 0

```

```

SLB A1_2 0

```

```

SLB A1_3 0

```

```

SLB A1_4 0

```

```

SLB A2_3 0

```

```

SLB A4_3 0

```

```

SLB A4_5 0

```

```

SLB A2_6 0

```

```

SLB A3_6 0

```

```

SLB A4_6 0

```

```

SLB A5_6 0

```

```

SLB A6_7 0

```

```

SLB A7_8 0

```

```

SLB A8_9 0

```

```

SLB A8_10 0

```

```

SLB A9_10 0

```

```

SLB A5_11 0

```

```

SLB A9_11 0

```

```

SLB A10_11 0

```

```

SLB A9_12 0

```

```

SLB A11_12 0

```

```

SLB A12_13 0

```

```

SLB A13_14 0

```

```

SLB A14_15 0

```

```

SLB A15_16 0

```

```

SLB A16_17 0

```

```

! Aceleraciones maximas
SUB A1_2  1
SUB A1_3  1
SUB A1_4  2
SUB A2_3  1
SUB A4_3  1
SUB A4_5  2
SUB A2_6  1
SUB A3_6  1
SUB A4_6  1
SUB A5_6  1
SUB A6_7  2
SUB A7_8  1
SUB A8_9  1
SUB A8_10 1
SUB A9_10 2
SUB A5_11 2
SUB A9_11 1
SUB A10_11 1
SUB A9_12 1
SUB A11_12 1
SUB A12_13 2
SUB A13_14 1
SUB A14_15 1
SUB A15_16 2
SUB A16_17 1

```

- Resultados

| Variables | result |
|-----------|-------------------|
| | 554.999999999999 |
| A1_2 | 0 |
| A1_3 | 0 |
| A1_4 | 0 |
| A2_3 | 0 |
| A4_3 | 0 |
| A4_5 | 1.99999999999999 |
| A2_6 | 0 |
| A3_6 | 1 |
| A4_6 | 0 |
| A5_6 | 0 |
| A6_7 | 2 |
| A7_8 | 0.999999999999989 |
| A8_9 | 0.999999999999997 |
| A8_10 | 0 |
| A9_10 | 2 |
| A5_11 | 2 |
| A10_11 | 0 |
| A9_12 | 0 |
| A11_12 | 0 |
| A12_13 | 0 |
| A13_14 | 1 |
| A14_15 | 1 |
| A15_16 | 0 |
| A16_17 | 0 |
| X2 | 2 |
| X3 | 6 |
| X4 | 4 |
| X5 | 5.000000000000001 |
| X6 | 7 |
| X7 | 8 |
| X8 | 9.000000000000001 |
| X9 | 10 |
| X10 | 11 |
| X11 | 13 |
| X12 | 15 |
| X13 | 23 |
| X14 | 24 |
| X15 | 25 |
| X16 | 28 |
| X17 | 30 |

5. Conclusiones:

- *Probabilidades:*

De acuerdo a los cálculos realizados en la sección de las probabilidades, podemos darnos cuenta que existe una probabilidad nula de que el proyecto se pueda realizar antes de 29 semanas, de la misma forma podemos notar que existe una probabilidad que tiende a cero, es decir, demasiado baja para poder alargar el proyecto y finalizar el proyecto después de 48 semanas.

- *Ruta crítica:*

De una u otra forma el poseer solo un camino crítico, favorece la forma de poder acelerar nuestro proceso, pues podemos enfocarnos solo en dichos procesos, dejando de lado la preocupación de no afectar otros caminos, o pensando en tener que acelerar otras rutas críticas por oblación.

- *Aceleración:*

Mediante el modelamiento acelerado de nuestro problema, nos pudimos dar cuenta que perfectamente podemos acelerar nuestro modelo, en 10 días, y así poder completar la tarea requerida en menor tiempo; el costo que ésto provoca no es tan significativo en comparación a las ganancias que podemos lograr.