Investigación de Operaciones I

Tarea 1: Modelamiento, Resolución y Análisis de Problemas de Programación Lineal

Cristián Maureira
2673030-9
cmaureir@inf.utfsm.cl

Gabriel Zamora
2673070-8
gzamora@inf.utfsm.cl

28 de septiembre de 2009

1. Educación en Peras Buenas y Pelotillehue

1. Modelo de Programación Lineal.

   - **Variables:**
     - P_{ij}: Cantidad de estudiantes que pertenecen a la población i de Peras Buenas y que irían a la escuela j, i = {1,2,3}, j = {1,2}
     - Q_{ij}: Cantidad de estudiantes que pertenecen a la población i de Pelotillehue y que irían a la escuela j, i = {1,2}, j = {1,2}
   - **Constantes:**
     - S_{ij}: Distancia recorrida por los estudiantes que pertenecen a la población i de Peras Buenas y que irían a la escuela j, i = {1,2,3}, j = {1,2}
     - $S_{11} = 20$, $S_{21} = 12$, $S_{31} = 10$, $S_{12} = 15$, $S_{22} = 18$, $S_{32} = 8$
     - T_{ij}: Distancia recorrida por los estudiantes que pertenecen a la población i de Pelotillehue y que irían a la escuela j, i = {1,2}, j = {1,2}
     - $T_{11} = 4$, $T_{21} = 5$, $T_{12} = 6$, $T_{22} = 5$
     - E_1: Cantidad máxima de personas en la escuela 1, $E_1 = 1500$
     - E_2: Cantidad máxima de personas en la escuela 2, $E_2 = 2000$
     - U_i: Cantidad habitantes de la población i de Peras Buenas, i = {1,2,3}
     - $U_1 = 500, U_2 = 450, U_3 = 300$
     - V_i: Cantidad habitantes de la población i de Pelotillehue, i = {1,2}
     - $V_1 = V_2 = 1000$
   - **Función Objetivo:**

     $$Min\ Z \ = \ \sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{2} P_{ij} \cdot S_{ij}) \ + \ \sum_{i=1}^{2}(\sum_{j=1}^{2} Q_{ij} \cdot T_{ij}),$$

     siendo Z la suma de las distancias recorridas por todos los estudiantes.
   - **Restricciones**
     - Capacidad escuelas:
       - $\sum_{i=1}^{3} P_{i1} + \sum_{i=1}^{2} Q_{i1} \leq E_1 = 1500$

- $\sum_{i=1}^{3} P_{i2} + \sum_{i=1}^{2} Q_{i2} \leq E_2 = 2000$
- Habitantes por población:
  - $\sum_{j=1}^{2} P_{1j} = U_1 = 500$
  - $\sum_{j=1}^{2} P_{2j} = U_2 = 450$
  - $\sum_{j=1}^{2} P_{3j} = U_3 = 300$
  - $\sum_{j=1}^{2} Q_{1j} = V_1 = 1000$
  - $\sum_{j=1}^{2} Q_{2j} = V_2 = 1000$
- Naturaleza:
  - $0 \leq P11, P12, P21, P22, P31, P32, Q11, Q12, Q21, Q22 \in \Re$

2. Modelo LINDO. A continuación se presenta el modelamiento en el software LINDO.

```
! Función objetivo
MIN 20P11 + 15P12 + 12P21 + 18P22 + 10P31 + 8P32 + 4Q11 + 6Q12 + 5Q21 + 5Q22
ST
! Restricciones
! Capacidad escuelas:
P11 + P21 + P31 + Q11 + Q21 <= 1500
P12 + P22 + P32 + Q12 + Q22 <= 2000
! Habitantes:
P11 + P12 = 500
P21 + P22 = 450
P31 + P32 = 300
Q11 + Q12 = 1000
Q21 + Q22 = 1000
END
! Naturaleza
SLB P11 0
SLB P12 0
SLB P21 0
SLB P22 0
SLB P31 0
SLB P32 0
SLB Q11 0
SLB Q12 0
SLB Q21 0
SLB Q22 0
```

Claramente podemos notar que la forma en la cual podemos modelar cualquier problema de programación lineal en dicho software, es mucho más cómoda y ordenada con respecto a un modelamiento realizado manualmente.

Además, para realizar éste tipo de modelamiento no es necesario la declaración de distintas constantes, como en el primer modelamiento.

Finalmente, resulta primordial la existencia de software que faciliten la ardua tarea para resolver estos tipos de problemas, ya que nos podemos dar cuenta que en cosas de segundos podemos obtener un resultados que nos puede costar obtener, un par de minutos.

3. Resultados Modelo.

   - **Objetivos**

Z = 24300	$P_{32} = 300$
$P_{11} = 0$	$Q_{11} = 1000$
$P_{12} = 500$	$Q_{12} = 0$
$P_{21} = 450$	$Q_{21} = 50$
$P_{22} = 0$	$Q_{22} = 950$
$P_{31} = 0$	

- **Constantes relacionadas a restricciones:**

E_1	1500
E_2	1750
U_1	500
U_2	450
U_3	300
V_1	1000
V_2	1000

4. Preguntas:

$Variables$	$from$	$till$	$from\_value$	$till\_value$
objective	24300	24300	24300	24300
P11	15	+inf	50	+inf
P12	-inf	20	-inf	20
P21	-inf	18	-inf	18
P22	12	+inf	450	+inf
P31	8	+inf	50	+inf
P32	-inf	10	-inf	10
Q11	-inf	6	-inf	6
Q12	4	+inf	950	+inf
Q21	3	5	-inf	5
Q22	5	7	-inf	7

Cuadro 1: Tabla acerca de la información del análisis de sensibilidad (*lpsolve*)

a) ¿En cuánto puede variar las capacidades máximas de las escuelas de tal manera de mantener el óptimo? Realizando un análisis de sensibilidad por cada coeficiente que representa a las capacidades de las escuelas:

- Capacidad escuela 1 (E_1)
  Tomando en cuenta el enunciado de nuestro problema, sabemos que la capacidad de la escuela uno, posee un valor inicial de $E_1 = 1500$. Luego de obtener los resultados de nuestro modelo, nos damos cuenta que dicho valor **no** ha variado en nada, los cual nos dice que esta constante es un factor primordial al momento de realizar nuestro análisis.
- Capacidad escuela 2 (E_2)
  Tomando en cuenta el enunciado de nuestro problema, sabemos que la capacidad de la escuela uno, posee un valor inicial de $E_2 = 2000$. Luego de obtener los resultados de nuestro modelo, nos damos cuenta que dicho valor ha cambiado a $E_2 = 1750$, lo cual nos da un rango de variación entre $1750 < E_2 < 2000$ los cual nos dice que esta constante posee cierta holgura al momento de realizar nuestro análisis.

b) *¿Cuánto se puede variar el coeficiente de las variables no básicas de tal manera que el objetivo se mantenga?*

   Las variables "no básicas" tienen la característica que en el resultado final, poseen un coeficiente igual a 0, por lo tanto algún cambio en dicho coeficiente no afectará en lo absoluto a nuestro objetivo.

   Claramente podemos ver que la variables "no básicas" en la tabla anterior 1 poseen un $+inf$ en el campo *till_value* (P11, P22, P31, Q12), lo cual nos indica que pueden variar hasta un valor extremadamente grande, sin afectar nuestro objetivo.

c) ¿Cuánto se puede variar el coeficiente de las variables básicas de tal manera que el objetivo se mantenga?

   Las variables "básicas" tienen la característica que en el resultado final, poseen un coeficiente distinto a 0, por lo tanto algún cambio en dicho coeficiente afectará a nuestro objetivo.

   Claramente podemos ver que las variables "básicas" en la tabla anterior 1 poseen un valor distinto de $+inf$ en el campo *till_value* (P12, P21, P32, Q11, Q21, Q22), lo cual nos indica que dichos coeficientes pueden variar hasta un valor menor que el que aparece en dicha columna. Por ejemplo P12 puede variar hasta algún valor < 20