

Sorbonne Université
Année Académique 2022-2023
Master 1 – Mécanique des Solides: Matériaux et des Structures

MU4MES03 – Structures élancées. Partie I

Notes de cours
(version préliminaire, January 24, 2023)

Author: Corrado Maurini

Contents

1	Approche variationnelle à l'équilibre	3
1.1	Principe de minimum de l'énergie potentielle	4
1.2	Exemple à 1 ddl	4
1.3	Le problème modèle de la barre en traction	6
1.4	Modèle linéaire de poutre droite de Navier-Bernoulli dans un plan	8
1.5	Modèle linéaire de poutre droite de Timoshenko dans un plan	9
1.6	Modèle linéaire d'une poutre dans l'espace à trois dimensions	10
1.7	Approche variationnelle et principe des puissances virtuelles	12
1.8	Approximations variationnelles et discrétisation	12

Chapter 1

Approche variationnelle à l'équilibre

Ici on présente brièvement l'approche énergétique à l'équilibre et la stabilité des structures conservatives.

Contents

1.1	Principe de minimum de l'énergie potentielle	4
1.2	Exemple à 1 ddl	4
1.3	Le problème modèle de la barre en traction	6
1.3.1	Variante avec force imposée	8
1.4	Modèle linéaire de poutre droite de Navier-Bernoulli dans un plan	8
1.5	Modèle linéaire de poutre droite de Timoshenko dans un plan	9
1.6	Modèle linéaire d'une poutre dans l'espace à trois dimensions	10
1.7	Approche variationnelle et principe des puissances virtuelles	12
1.8	Approximations variationnelles et discrétisation	12

1.1 Principe de minimum de l'énergie potentielle

Soit \mathcal{S} une structure élastique soumise à des charges conservatives, \mathcal{U} l'espace des configurations admissibles pour \mathcal{S} et $\mathcal{E} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}$ l'énergie potentielle totale de la structure (somme de l'énergie de déformation élastique et de l'énergie potentielle des forces externes). Dans l'approche énergétique on définit les configurations d'équilibre comme les points de stationnarité (stat) de l'énergie parmi toutes les configurations admissibles et les configurations d'équilibre stables comme le minima locaux de l'énergie potentielle.

1.2 Exemple à 1 ddl

On considère le système à 1 degré de liberté constitué d'une barre rigide de longueur L , soumise à une force de compression F , articulée avec un ressort en torsion de rigidité k , au repos pour $\theta = 0$, voir Figure 1.2.

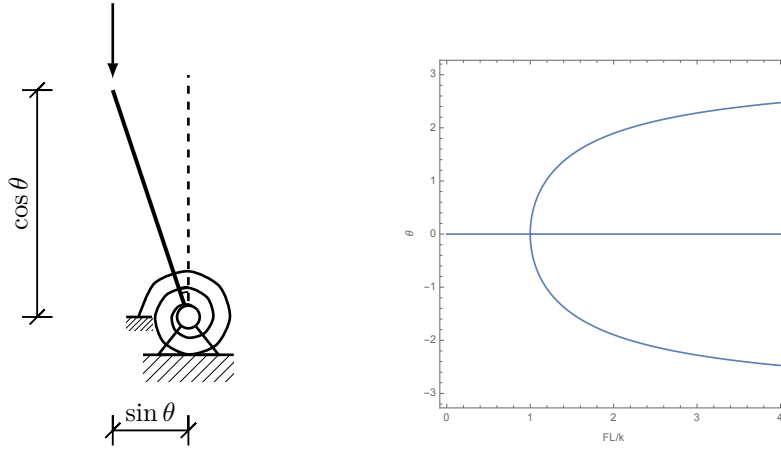


Figure 1.1: Barre rigide avec ressort en torsion et force en compression. Gauche: configuration du système. Droite: diagramme de bifurcation.

On décrit la *configuration* du système par l'angle $\theta \in \mathcal{R}$. On appellera $\mathcal{U} \equiv \{\theta \in \mathcal{R}\}$ espace des configurations admissibles. L'*énergie potentielle* du système est une fonction scalaire d'une variable scalaire

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2 - FL(1 - \cos \theta)$$

Dans l'approche énergétique, on caractérise les équilibres comme les points de stationnarité de l'énergie dans l'espace des configurations admissibles et les équilibres stables comme les minima locaux de cette fonction. Par définition un minimum local doit vérifier

$$\text{Trouver } \theta \in \mathcal{U} : \exists \bar{h} > 0, \quad \mathcal{E}(\theta + \hat{\theta}) - \mathcal{E}(\theta) \geq 0, \quad \forall \hat{\theta} \in \mathcal{U}, \quad |\hat{\theta}| < \bar{h}.$$

On appellera dans la suite $\hat{\theta}$ *variation*. On utilise cette variation pour tester si un point est un équilibre. Un développement limité à l'ordre 1 en θ nous donne

$$\mathcal{E}(\theta + \hat{\theta}) - \mathcal{E}(\theta) = \mathcal{E}'(\theta) \hat{\theta} + o(\hat{\theta}) \geq 0, \quad \forall \hat{\theta} \in \mathcal{U}, \quad |\hat{\theta}| < \bar{h}.$$

Pour tout $\hat{\theta}$ admissible, $-\hat{\theta}$ est admissible, donc à l'ordre 1 la condition de minimalité implique la stationnarité, qui est une condition nécessaire pour avoir un minimum:

$$\mathcal{E}'(\theta) = 0 \tag{1.1}$$

Cette condition est l'équation d'équilibre de la structure. Pour un θ vérifiant (1.1), un développement à l'ordre 2 de l'énergie potentielle nous donne

$$\mathcal{E}(\theta + \hat{\theta}) - \mathcal{E}(\theta) = \frac{1}{2}\mathcal{E}''(\theta)\hat{\theta} + o(\hat{\theta}^2) \geq 0, \quad \forall \hat{\theta} \in \mathcal{U}, \quad |\hat{\theta}| < \bar{h}.$$

On deduit que

- **Condition suffisante** Si $E'(\theta) = 0$ et $E''(\theta) > 0$, θ est un minimum local de l'énergie potentielle et donc un équilibre stable du système.
- **Condition nécessaire** Si $E'(\theta) = 0$ et $E''(\theta) < 0$, θ n'est pas un minimum local de l'énergie potentielle et donc il est équilibre instable du système.

Pour notre cas on trouve donc les résultats suivants:

- Les configurations d'équilibre sont les solutions de

$$\mathcal{E}'(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \left(\theta - \frac{FL}{k} \sin \theta \right) = 0. \quad (1.2)$$

Une solution possible est $\theta = 0$.

- Les équilibres stables sont les solutions de

$$\mathcal{E}'(\theta) = 0, \quad \mathcal{E}''(\theta) = k \left(1 - \frac{FL}{k} \cos \theta \right) > 0.$$

Si θ^* est une solution de l'équation d'équilibre, si $\mathcal{E}''(\theta^*) > 0$, alors l'équilibre est stable. Si $\mathcal{E}''(\theta^*) < 0$, l'équilibre est instable. On peut conclure dans notre exemple que $\theta^* = 0$ est un équilibre stable pour $F < k/L$ et instable pour $F > k/L$.

Une étude du système donne le diagramme de bifurcation en figure 1.2.

Remarques:

- **Existence et unicité.** L'équation d'équilibre (1.2) peut admettre plusieurs solutions pour une valeur des paramètres. La possible *non-unicité* des solutions est une caractéristique des systèmes non-linéaires. L'existence non plus est garantie en général.
- **Origine des non-linéarités.** Dans l'exemple en question les non-linéarités sont purement d'origine *géométrique*, la loi du comportement du ressort étant linéaire.
- **Linéarisation.** Un modèle linéarisé de la structure autour d'une position θ^* est obtenu par un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle autour de θ^* :

$$\mathcal{E}_2(\theta^*)(\theta) = \mathcal{E}(\theta^*) + \mathcal{E}'(\theta^*)(\theta - \theta^*) + \frac{1}{2}\mathcal{E}''(\theta^*)(\theta - \theta^*)^2$$

L'équation d'équilibre est donnée par la dérivée par rapport à θ de $\mathcal{E}_2(\theta^*)(\theta - \theta^*)$, qui donne une équation linéaire. Évidemment le terme constant du développement $\mathcal{E}(\theta^*)$ n'intervient pas dans l'équation d'équilibre et peut être omis. Dans notre exemple

$$\mathcal{E}_2(\theta^*)(\theta) = \mathcal{E}(\theta^*) + k \left(\theta^* - \frac{FL}{k} \sin \theta^* \right) (\theta - \theta^*) + \frac{k}{2} \left(1 - \frac{FL}{k} \cos \theta^* \right) (\theta - \theta^*)^2$$

La linéarisation autour de la configuration droite $\theta^* = 0$ donne:

$$\mathcal{E}_2(0)(\theta) = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{FL}{k} \right) \theta^2$$

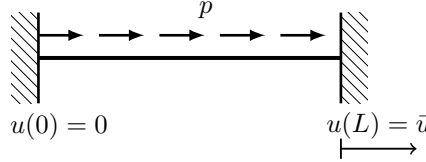
L'équation d'équilibre pour ce système est donné par $\mathcal{E}_2(0)'(\theta) = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{FL}{k} \right) \theta = 0$ La seule solution est donnée par $\theta = 0$. La solution est unique pour le système linéarisé. On retrouve avec l'étude du signe de $\mathcal{E}_2(0)''(0) = k - FL$ la stabilité de la solution droite.

Exercice 1.2-1: Déterminer et résoudre le système linéarisé autour de $\theta^* = \pi/2$. Re-écrire les équations d'équilibre en terme des composantes du déplacement de l'extrémité de la barre.

1.3 Le problème modèle de la barre en traction

La configuration d'une structure continue est définie par une (ou plusieurs) fonction(s) de l'espace. L'énergie potentielle est alors une fonction à valeurs scalaires d'une fonction, qu'on appelle *fonctionnelle*. L'espace des *fonctions admissibles* est un espace fonctionnel constitué par toutes les configurations respectant les conditions aux bords "cinématiques" et étant suffisamment régulières pour avoir une énergie potentielle finie.

Problème avec déplacements imposés On considère ici le problème modèle de la barre en traction en figure (homogène, de longueur L , de rigidité $A = ES$). On décrit la configuration de la barre par le déplacement axial $u : x \in (0, L) \rightarrow \mathcal{R}$, en supposant le déplacement transversal nul. La barre est encastree aux deux extrémités $x = 0$ et $x = L$, où l'on impose les déplacements $u(0) = 0$ et $u(L) = \bar{u}$, et elle est soumise à une force axiale distribuée p , supposée uniforme.



Pour une barre en traction, la densité d'énergie élastique pour unité de ligne est

$$\varphi(e) = \frac{1}{2}ES e^2$$

où $e = u'(x)$ est la déformation axiale. Pour la barre en figure l'énergie potentielle totale (somme de l'énergie de déformation élastique et de l'énergie potentielle des chargements extérieurs) est donnée par la fonctionnelle suivante

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^L \left(\frac{ES}{2} u'(x)^2 - p u(x) \right) dx. \quad (1.3)$$

L'espace des configurations admissibles est constitué par toutes les configurations qui (i) ont une énergie finie et (ii) respectent les conditions aux bords *essentiels* (ou *cinématiques*).¹ Pour avoir $\mathcal{E}(u) < +\infty$ il faut et suffit que la fonction soit dérivable une fois (car la dérivée première apparaît dans la fonctionnelle) et que l'intégrale du carré de la dérivée première soit fini. L'espace des fonctions à dérivées à carré intégrable est un espace vectoriel, dit de Hilbert, et il est noté $H^1((0, L))$.

$$\mathcal{C} \equiv \{u : x \in (0, L) \rightarrow \mathcal{R}, \quad u \in H^1((0, L)), \quad u(0) = 0, \quad u(L) = \bar{u}\}.$$

On définit aussi l'espace des *variations admissibles* \mathcal{C}_0 , formé par les fonctions v pour lesquelles, si $u \in \mathcal{C}$, alors $u + v \in \mathcal{C}$. Notons que $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}$ à cause des conditions aux limites non-homogènes. En effet, dans notre cas, s'on prend deux fonctions u et v , leur somme $w = u + v$ ne respecte pas la condition en L : $w(L) = u(L) + v(L) = 2\bar{u} \neq \bar{u}$. L'espace de variations admissibles doit imposer la *version homogène* des conditions aux limites cinématiques. Pour notre exemple :

$$\mathcal{C}_0 \equiv \{v : x \in (0, L) \rightarrow \mathcal{R}, v \in H^1((0, L)), \quad v(0) = 0, v(L) = 0\}.$$

¹En général, si la densité d'énergie est une fonction des dérivées jusqu'à l'ordre n de u , les conditions aux limites *essentiels* (ou *cinématiques*) sont celles sur la fonction u et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$. Dans le cas de la barre en traction $n = 1$ est les conditions essentielles sont sur u seulement.

Une configuration admissible u est un équilibre s'il est un point de stationnarité de l'énergie, c'est-à-dire si la variation de l'énergie $\mathcal{E}(u + hv) - \mathcal{E}(u)$ tends vers 0 $h \rightarrow 0$ et cela pour toutes les variations (ou *directions*) v admissibles. Nous pouvons tester cette condition en introduisant la *dérivée directionnelle* de la fonctionnelle \mathcal{E} en u dans la direction v :

$$\mathcal{E}'(u)(v) = \frac{d}{dh} \mathcal{E}(u + hv)|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(u + hv) - \mathcal{E}(u)}{h}$$

La condition d'équilibre est alors donnée par la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : \quad \mathcal{E}'(u)(v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0.$$

Pour notre exemple

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(u)(v) &= \frac{d}{dh} \int_0^L \left(\frac{ES}{2} (u'(x) + hv'(x))^2 - p(u(x) + hv(x)) \right) dx \Big|_{h=0} = \int_0^L (ES(u'(x) + hv'(x))v'(x) - pv(x)) dx \Big|_{h=0} \\ &= \int_0^L (ESu'(x)v'(x) - pv(x)) dx \end{aligned}$$

et la formulation variationnelle du problème de recherche des configurations d'équilibre est

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : \quad \int_0^L ESu'(x)v'(x) dx = \int_0^L pv(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0.$$

En intégrant par parties et en utilisant les conditions $v(0) = v(L) = 0$, on peut réécrire le premier terme sous la forme suivante :

$$\int_0^L ESu'(x)v'(x) dx = \int_0^L -N'(x)v(x) dx + N(L)v(L) - N(0)v(0) = \int_0^L -N'(x)v(x) dx$$

où on a introduit la notation $N(x) = ESu'(x)$. Alors la condition d'équilibre devient :

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : \quad \int_0^L (N'(x) + p)v(x) dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0$$

En utilisant le Lemme Fondamentale du Calcul de Variations² on peut en déduire qu'une fonction admissible u , telle que $u(0) = 0$ et $u(L) = \bar{u}$ est une configuration d'équilibre si et seulement si

$$N'(x) + p = 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

Nous avons donc retrouvé en utilisant la méthode énergétique la condition d'équilibre en version "locale" classique pour une barre en traction. En intégrant l'équation d'équilibre et utilisant les conditions aux limites "cinématiques" $u(0) = 0$ et $u(L) = \bar{u}$, on trouve

$$u(x) = \frac{p}{ES} \frac{x(L-x)}{2} + \bar{u} \frac{x}{L}$$

²Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathcal{R}$ une fonction continue. Si, pour toute fonction test $g : (a, b) \rightarrow \mathcal{R}$:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0,$$

alors f est nulle https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_fondamental_du_calcul_des_variations

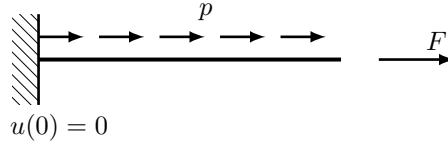
1.3.1 Variante avec force imposée

Pour la barre avec force imposée en $x = L$ (voir Figure) l'énergie potentielle totale est

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^L \left(\frac{ES}{2} u'(x)^2 - p u(x) \right) dx - F u(L)$$

et l'espace des fonctions admissibles est

$$\mathcal{C} \equiv \{u : x \in [0, L] \rightarrow \mathcal{R}, \quad u \in H^1([0, L]), \quad u(0) = 0\} \equiv \mathcal{C}_0$$



La formulation variationnelle de la condition d'équilibre est :

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : \int_0^L \left(\frac{ES}{2} u'(x)v'(x) - p(x)v(x) \right) dx - Fv(L) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0$$

et après intégration par parties

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : - \int_0^L (N'(x) + p)v(x) dx + (N(L) - F)v(L) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0$$

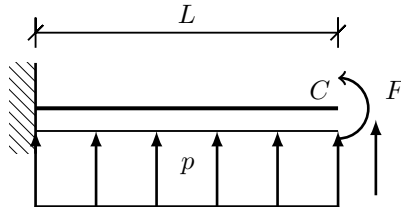
où $N(x) = ESu'(x)$. En appliquant le Lemme Fondamental du Calcul des Variations on trouve finalement

$$N'(x) + p = 0, \quad \forall x \in [0, L], \quad N(L) = F$$

On remarque que l'absence de conditions *essentiels* en $x = L$, donne la possibilité de “jouer” sur la variation arbitraire de $v(L)$ et d'obtenir en conséquence la condition *naturelle* $N(L) = F$. Cette *dualité* entre conditions *essentiels* et *naturelles* est générique et clairement mise en évidence par l'approche variationnelle.

1.4 Modèle linéaire de poutre droite de Navier-Bernoulli dans un plan

On considère le problème de flexion d'une poutre inextensible de Navier-Bernoulli homogène de rigidité en flexion EI et longueur L , encastée en $x = 0$ et avec une force F et une couple C appliqués en $x = L$ (voir figure).



On appelle $v : x \in [0, L] \rightarrow \mathcal{R}$ le champ de déplacement transversal de la poutre. Dans l'hypothèse des petites perturbations pour le modèle d'Navier-Bernoulli $\theta(x) \simeq v'(x)$ et la courbure est approchée par $k(x) = \theta'(x) \simeq$

$v''(x)$. Pour la barre avec force F et couple C imposés en $x = L$ (voir Figure) et une force distribuée pour unité de ligne $p(x)$, l'énergie potentielle totale est

$$\mathcal{E}(v) = \int_0^L \frac{EI}{2} v''(x)^2 dx - \int_0^L p(x) v(x) dx - F v(L) - C v'(L).$$

La condition d'énergie finie, implique que les fonctions admissibles doivent être continues, à dérivées premières continues, et à dérivées secondes à carré intégrable (espace fonctionnel H^2). La présence de dérivées d'ordre 2 dans l'expression de l'énergie implique que les conditions aux bords essentielles (ou cinématiques) dans ce cas seront celles sur v et v' . Donc nous pouvons conclure que l'espace de fonctions cinématiques admissibles pour la poutre en figure est:

$$\mathcal{C} \equiv \{v : x \in [0, L] \rightarrow \mathcal{R}, \quad v \in H^2([0, L]), \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0\} \equiv \mathcal{C}_0$$

Les conditions aux bords essentielles étant homogènes, \mathcal{C} coïncide aussi avec l'espace des variations admissibles \mathcal{C}_0 . La condition $v'(0) = 0$ traduit le fait que la rotation est bloquée à l'encastrement. La formulation variationnelle de l'équilibre est donnée par la condition de stationnarité de \mathcal{E} :

$$\text{Trouver } v \in \mathcal{C} : \mathcal{E}'(v)(\hat{v}) = \int_0^L (EI v''(x) \hat{v}''(x) - p(x) \hat{v}(x)) dx - F \hat{v}(L) - C \hat{v}'(L) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}_0.$$

Après deux intégrations par parties, en notant $M(x) = EI v''(x)$ et en tenant en compte que $v(0) = v'(0) = 0$, on trouve :

$$\mathcal{E}'(v)(\hat{v}) = \int_0^L (M''(x) - p(x)) \hat{v}(x) dx - (M'(L) + F) \hat{v}(L) + (M(L) - C) \hat{v}'(L).$$

Finalement, par application du Lemme Fondamentale du Calcul des Variations, on trouve l'équation d'équilibre

$$M''(x) - p(x) = 0, \quad \forall x \in (0, L)$$

et les conditions aux bords naturelles :

$$M(L) = C, \quad -M'(L) = F$$

ou $M'(x) = EI v'''(x)$. Cela donne, avec les conditions essentielles $v(0) = v'(0) = 0$, une équation différentielle ordinaire linéaire du quatrième ordre à résoudre pour v , avec 4 conditions aux bords.

1.5 Modèle linéaire de poutre droite de Timoshenko dans un plan

On considère ici le cas où la fonctionnelle à minimiser dépend de plusieurs fonctions inconnues, qui décrivent la configuration du système. On considère l'exemple d'un modèle linéaire d'une poutre dans le plan considéré au chapitre précédent. En considérant un modèle de Timoshenko, la configuration du système est décrite par

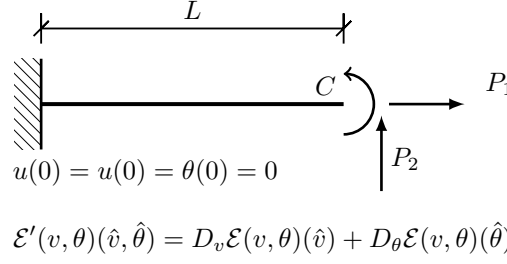
- Le déplacement axial $u : x \in (0, L) \rightarrow u(x) \in \mathcal{R}$
- Le déplacement transversal $v : x \in (0, L) \rightarrow v(x) \in \mathcal{R}$
- La rotation des sections droites $\theta : x \in (0, L) \rightarrow \theta(x) \in \mathcal{R}$

Pour une poutre homogène et isotrope, la densité d'énergie élastique est donnée par

$$\varphi(\varepsilon_t, k_b, \varepsilon_n) = \frac{A}{2} \varepsilon_t^2 + \frac{D}{2} k_b^2 + \frac{F}{2} \varepsilon_n^2$$

et on note par $N = \partial\varphi/\partial\varepsilon_t = A\varepsilon_t$, $M = \partial\varphi/\partial k_b = Dk_b$, $T = \partial\varphi/\partial\varepsilon_n = F\varepsilon_n$ l'effort normal, le moment fléchissant et l'effort tranchant. On considère le problème modèle en figure, constitué par une poutre console de longueur L , encastree en $x = 0$ et soumise à une force $\underline{P} = P_1 \underline{e}_1 + P_2 \underline{e}_2$ et un couple $\underline{C} = C \underline{e}_3$ en $x = L$. L'énergie potentielle totale est donnée par:

$$\mathcal{E}(u, v, \theta) = \int_0^L \left(\frac{A}{2} u'(x)^2 + \frac{D}{2} \theta'(x)^2 + \frac{F}{2} (v'(x) - \theta(x))^2 \right) dx - P_1 u(L) - P_2 v(L) - C \theta(L) \quad (1.4)$$



L'espace des configurations admissibles est

$$\mathcal{U} \equiv \{(u, v, \theta) \in H_1((0, L)) \times H_1((0, L)) \times H_1((0, L)), \quad u(0) = 0, v(0) = 0, \theta(0) = 0\}$$

La condition de stationnarité est

$$\text{Trouver } (u, v, \theta) \in \mathcal{U} : \quad \mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}) = 0, \quad \forall (u, v, \theta) \in \mathcal{U}_0. \quad (1.5)$$

Par la linéarité de l'opération de dérivation, on a

$$\mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}) = \mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, 0, 0) + \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, \hat{v}, 0) + \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, 0, \hat{\theta})$$

Donc la condition de stationnarité (1.5) peut être réécrite sur la forme équivalente:

$$\text{Trouver } (u, v, \theta) \in \mathcal{U} : \quad \begin{cases} \mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, 0, 0) = 0, & \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, \hat{v}, 0) = 0, & \forall \hat{v} \in \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, 0, \hat{\theta}) = 0, & \forall \hat{\theta} \in \mathcal{U}_0 \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, 0, 0) &= \int_0^L N(x) \hat{u}'(x) dx - P_1 \hat{u}(L), \\ \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, \hat{v}, 0) &= \int_0^L T(x) \hat{v}'(x) dx - P_2 \hat{v}(L), \\ \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, 0, \hat{\theta}) &= \int_0^L M(x) \hat{\theta}'(x) dx - C \hat{\theta}(L). \end{aligned}$$

Après intégration par parties et application du lemme fondamental du calcul des variations on trouve que les conditions de stationnarité impliquent les conditions d'équilibre et conditions aux limites naturelles:

$$\begin{aligned} N'(x) &= 0 \text{ for } x \in (0, L), & N(L) &= P_1, \\ T'(x) &= 0 \text{ for } x \in (0, L), & T(L) &= P_2, \\ M'(x) + T &= 0 \text{ for } x \in (0, L), & M(L) &= C. \end{aligned}$$

En conclusion, avec cet exemple on a illustré comment dans le cas à plusieurs variables on peut imposer la stationnarité sur chacune des variables indépendamment et obtenir les équations d'équilibre correspondantes.

1.6 Modèle linéaire d'une poutre dans l'espace à trois dimensions

On considère le cas d'un modèle 1d de poutre, possiblement courbe, immergée dans l'espace Euclidien à 3 dimensions. Soit $\underline{x}_R : s \in (0, L) \rightarrow \underline{x}_R(s) \in \mathcal{R}^3$ la configuration de référence de la structure, s étant l'abscisse curviligne, *i.e.* une paramétrisation pour laquelle $\|\underline{x}'_R(s)\| = 1$. On note par $\underline{t}_R(s) = \underline{x}'_R(s) / \|\underline{x}'_R(s)\| = \underline{x}'_R(s)$ le vecteur tangent, $\underline{n}_R(s) = \underline{t}'_R(s) / \|\underline{t}'_R(s)\|$ le vecteur normal et $\underline{b}_R(s) = \underline{t}_R(s) \times \underline{n}_R(s)$ le vecteur binormal. Ces vecteurs définissent un trièdre orthonormal lié à l'axe de la poutre. On considère un modèle où la configuration

actuelle de la poutre est déterminée par un champ de déplacement \underline{u} et un champ de rotation $\underline{\theta}$, qui représentent les déplacements d'un point de l'axe et les rotations des sections droites.

$$\underline{u} : s \in (0, L) \rightarrow \underline{u}(s) = u(s)\underline{t}_R(s) + v(s)\underline{n}_R(s) + w(s)\underline{b}_R(s) \in \mathcal{R}^3, \quad (1.6)$$

$$\underline{\theta} : s \in (0, L) \rightarrow \underline{\theta}(s) \in \mathcal{R}^3. \quad (1.7)$$

On introduit les mesures de déformations suivantes:

$$\underline{e}(s) = \underline{u}'(s) - \underline{\theta}(s) \times \underline{t}(s) \quad (1.8)$$

$$\underline{k}(s) = \underline{\theta}'(s). \quad (1.9)$$

on peut interpréter leurs composantes comme suit :

$$\begin{aligned} e_t &:= \underline{e} \cdot \underline{t}_R && \text{extension} \\ e_n &:= \underline{e} \cdot \underline{n}_R && \text{glissement dans le plan } \underline{t}_R - \underline{n}_R \\ e_b &:= \underline{e} \cdot \underline{b}_R && \text{glissement dans le plan } \underline{t}_R - \underline{b}_R \\ k_t &:= \underline{k} \cdot \underline{t}_R && \text{torsion} \\ k_n &:= \underline{k} \cdot \underline{n}_R && \text{flexion dans le plan } \underline{t}_R - \underline{n}_R \\ k_b &:= \underline{k} \cdot \underline{b}_R && \text{flexion dans le plan } \underline{t}_R - \underline{b}_R \end{aligned}$$

Soit $\varphi(\underline{e}, \underline{k})$ la densité d'énergie élastique pour unité de ligne. Dans le cas élastique linéaire φ est sous la forme

$$\varphi(\underline{e}, \underline{k}) = \frac{1}{2} \left[\mathbb{K} \cdot \begin{bmatrix} \underline{e} - \bar{\underline{e}} \\ \underline{k} - \bar{\underline{k}} \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \underline{e} - \bar{\underline{e}} \\ \underline{k} - \bar{\underline{k}} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

où $\bar{\underline{e}}$ et $\bar{\underline{k}}$ modélise les effets de déformation inélastiques, par exemple d'origine thermique. Dans le cas d'une poutre simple, à section homogène, sans déformations inélastiques et avec section symétrique par rapport à ses axes principales, on a

$$\varphi(\underline{e}, \underline{k}) = \frac{1}{2} A_t e_t^2 + \frac{1}{2} A_n e_n^2 + \frac{1}{2} A_b e_b^2 + \frac{1}{2} D_t k_t^2 + \frac{1}{2} D_n k_n^2 + \frac{1}{2} D_b k_b^2$$

.

Exercice 1.6-1: (Revision) A partir de vos précédents cours sur la théorie des poutres, donner les expressions de A_t, A_n, A_b et D_t, D_n, D_b dans le cas d'une poutre homogène à section circulaire de diamètre d , constituée d'un matériau isotrope de module de Young E et coefficient de Poisson ν .

On introduit les notations $\underline{R} := \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{e}}, \underline{M} := \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\theta}}$. et on peut donner les interprétations suivantes :

$$\begin{aligned} N_t &:= \underline{R} \cdot \underline{t}_R && \text{effort normal} \\ T_n &:= \underline{R} \cdot \underline{n}_R && \text{effort tranchant dans le plan } \underline{t}_R - \underline{n}_R \\ T_b &:= \underline{R} \cdot \underline{b}_R && \text{effort tranchant dans le plan } \underline{t}_R - \underline{b}_R \\ M_t &:= \underline{M} \cdot \underline{t}_R && \text{moment de torsion} \\ M_n &:= \underline{M} \cdot \underline{n}_R && \text{moment fléchissant dans le plan } \underline{t}_R - \underline{n}_R \\ M_b &:= \underline{M} \cdot \underline{b}_R && \text{moment fléchissant dans le plan } \underline{t}_R - \underline{b}_R \end{aligned}$$

A partir de l'expression la densité d'énergie élastique (1.10), on a la lois de comportement linéaire

$$\begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \mathbb{K} \cdot \begin{bmatrix} \underline{e} - \bar{\underline{e}} \\ \underline{k} - \bar{\underline{k}} \end{bmatrix}$$

A titre d'exemple on considère le cas où la poutre est encastree en $s = 0$ et soumise à l'action d'une charge linéique $\underline{p}(s)$ et d'une charge ponctuelle \underline{P} en $s = 0$. L'énergie potentielle totale correspondante est

$$\mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\theta}) = \int_0^L \varphi(\underline{e}(s), \underline{k}(s)) ds - \int_0^L \underline{p}(s) \cdot \underline{u}(s) ds - \underline{P} \cdot \underline{u}(L) \quad (1.11)$$

et l'espace des fonctions et des variations admissibles :

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_0 \equiv \{(\underline{u}, \underline{\theta}) \in H^1([0, L], \mathcal{R}^3) \times H^1([0, L], \mathcal{R}^3) : \underline{u}(0) = \underline{0}, \quad \underline{\theta}(0) = \underline{0}\} \quad (1.12)$$

La formulation faible de la condition d'équilibre est donnée par la suivante condition de stationnarité de l'énergie:

$$\mathcal{E}'(\underline{u}, \underline{\theta})(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\theta}}) = 0, \quad \forall (\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\theta}}) \in \mathcal{C}_0 \quad (1.13)$$

On peut démontrer aisément à partir de la définition de dérivée directionnelle que

$$\mathcal{E}'(\underline{u}, \underline{\theta})(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\theta}}) = - \int_0^L \left((\underline{R}'(s) + \underline{p}(s)) \cdot \hat{\underline{u}}(s) + (\underline{M}'(s) + (\underline{t}(s) \times \underline{R}(s)) \cdot \hat{\underline{\theta}}(s) \right) ds + \quad (1.14)$$

$$(\underline{R}(L) - \underline{P}) \cdot \hat{\underline{u}}(L) - \underline{R}(0) \cdot \hat{\underline{u}}(0) + \underline{M}(L) \cdot \hat{\underline{\theta}}(L) - \underline{M}(0) \cdot \hat{\underline{\theta}}(0) \quad (1.15)$$

Exercice 1.6-2: Démontrer la formule (1.15).

En utilisant les conditions aux limites $\hat{\underline{u}}(0) = \hat{\underline{\theta}}(0) = \underline{0}$, avec le raisonnement usuel basé sur l'utilisation du Lemme Fondamental du Calcul des Variations, on trouve:

$$\begin{aligned} \underline{R}'(s) + \underline{p}(s) &= \underline{0}, \quad \forall s \in (0, L) \\ \underline{M}'(s) + \underline{t}(s) \times \underline{R}(s) &= \underline{0}, \quad \forall s \in (0, L) \\ \underline{R}(L) &= \underline{P}, \\ \underline{M}(L) &= \underline{0} \end{aligned}$$

qui coïncide avec le système d'équation d'équilibre qu'on peut trouver en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à un tronçon élémentaire de poutre.

1.7 Approche variationnelle et principe des puissances virtuelles

On peut montrer que pour les systèmes conservatifs, la condition de stationnarité de l'énergie potentielle est équivalente au principe des puissances virtuelles. Les variations jouent le rôle des vitesses virtuelles. A différence de l'approche variationnelle, le principe de puissances virtuelles peut s'appliquer aussi aux systèmes non-conservatifs et il est donc d'une majeure généralité. En revanche, pour les systèmes conservatifs, la formulation du problème en termes de la minimisation de l'énergie potentielle permet de dégager des propriétés importantes du problème.

1.8 Approximations variationnelles et discrétisation

La méthode variationnelle est très utile aussi pour obtenir des solutions approchées et pour la discrétisation d'un problème continu. On peut en particulier rechercher la solution du problème de minimisation d'un sous-espace $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ de l'espace des fonctions admissibles obtenu comme combinaison linéaire de n fonctions de base connues $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n q_i f_i(x) \quad (1.16)$$

On peut alors définir à partir de l'énergie potentielle d'un système continu $\mathcal{E}(u)$ l'énergie potentielle d'un système discret :

$$\mathcal{E}_n(q_1, \dots, q_n) := \mathcal{E}(u_n)$$

Les conditions de stationnarité pour \mathcal{E}_n

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

donnent alors n équations (possiblement non-linéaires) pour les n inconnues (q_1, \dots, q_n) . On peut montrer que, parmi toutes les fonctions dans \mathcal{U}_n , les solutions de ces conditions de stationnarité représentent la meilleure approximation possible de la solution du problème continu dans la norme de l'énergie. Cette démarche est la même à la base de la méthode des éléments finis. L'approximation sous la forme (1.16) est dite *approximation à la Galérkin*.

Bibliography

- [1] B. Audoly. *Structures élancées (MEC 553)*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2010.
- [2] B. Audoly and Y. Pomeau. *Elasticity and Geometry*. Oxford University Press, 2010.
- [3] P. Ballard. *Structures élancées (MEC 553)*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2008.
- [4] J.-P. Basset et al. *Introduction à la résistance des matériaux*. Ecole d'ingénieurs. Nantes, 2007. URL: <https://hal-univ-tlse3.archives-ouvertes.fr/EC-NANTES/cel-00594957v1>.
- [5] J.J. Marigo. *Mécanique des Milieux Continus (MEC430)*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2018.
- [6] F. Valdoire and Y. Bamberger. *Mécanique des Structures*. Presses de l'ENPC, 2008.