Tratamiento Digital de Señal.
Series de Fourier

Preámbulo

El análisis de Fourier fue introducido en 1822 en la "Théorie analyitique de la chaleur" para tratar la solución de problemas de valores en la frontera en la conducción del calor.

Más de siglo y medio después las aplicaciones de esta teoría son varios: Sistemas Lineales, Comunicaciones, Física moderna, Electrónica, Óptica, Redes Eléctricas.

Esto es un metodo matematico y en nuestro caso la onda se trata como un gran numero de fuentes puntuale.

Funciones Periódicas

Una ***Función Periódica*** f(t) cumple la siguiente propiedad para todo valor de t.

$$f(t)=f(t+T)$$

A la constante mínima para la cual se cumple lo anterior se le llama el ***periodo*** de la función

Repitiendo la propiedad se puede obtener:

$$f(t)=f(t+nT), \text{ donde } n=0,\pm 1, \pm 2, \pm 3,...$$

Funciones Periódicas

Ejemplo: ¿Cuál es el período de la función

$$f(t) = \cos(\tfrac{t}{3}) + \cos(\tfrac{t}{4})?$$

Funciones Periódicas

Ejemplo: ¿Cuál es el período de la función $f(t)=\cos(\frac{t}{3})+\cos(\frac{t}{4})$?

Solución.- Si f(t) es periódica se debe cumplir:

$$f(t+T)=\cos(\tfrac{t+T}{3})+\cos(\tfrac{t+T}{4}) = f(t)=\cos(\tfrac{t}{3})+\cos(\tfrac{t}{4})$$

Pero como se sabe $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ para cualquier entero k, entonces para que se cumpla la igualdad se requiere que

$$T/3=2k_1\pi,\ \ T/4=2k_2\pi$$

Es decir,

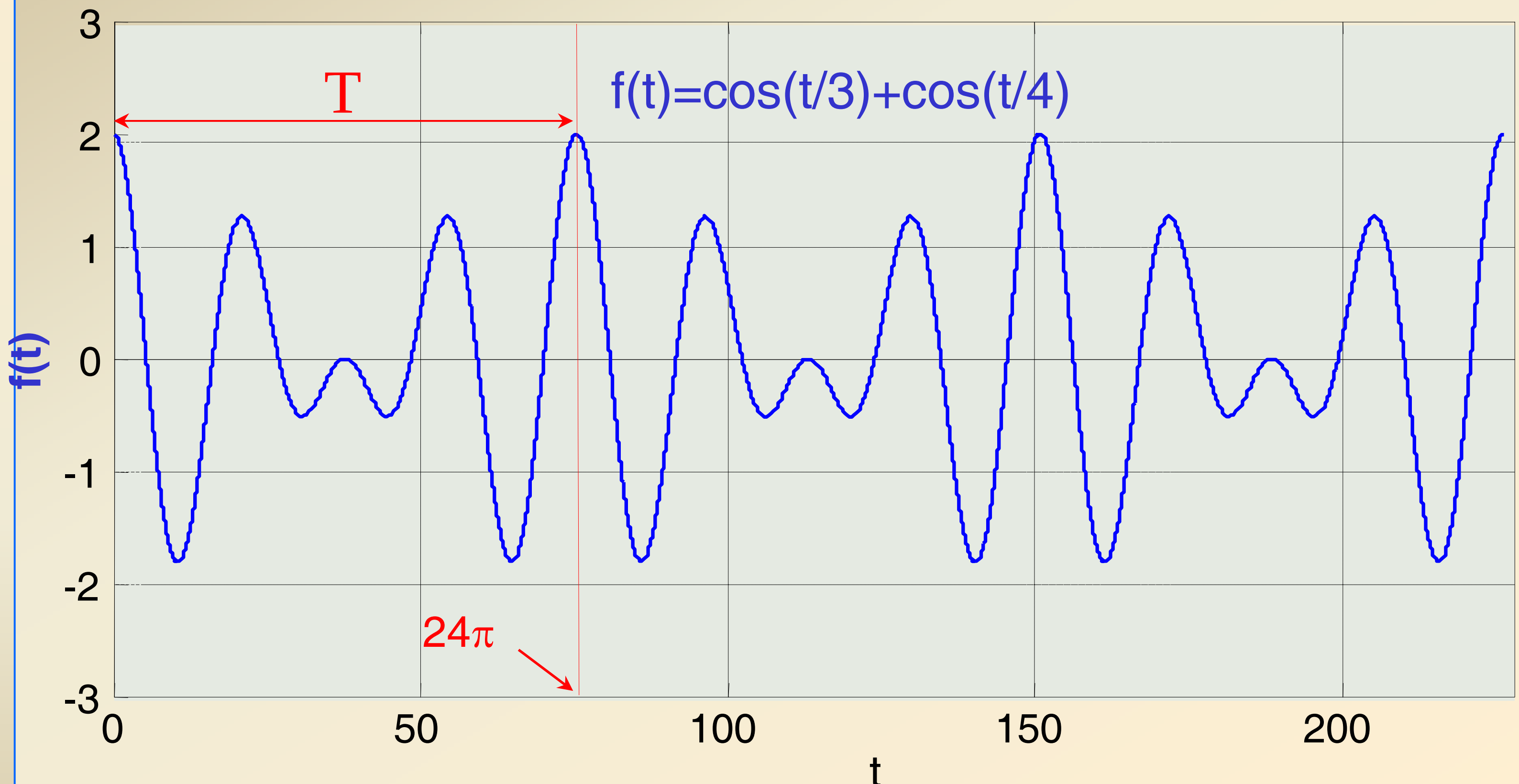
$$T = 6k_1\pi = 8k_2\pi$$

Donde k_1 y k_2 son enteros,

El valor mínimo de T se obtiene con $k_1=4$, $k_2=3$, es decir, $T=24\pi$

Funciones Periódicas

Gráfica de la función $$f(t) = \cos(\tfrac{t}{3}) + \cos(\tfrac{t}{4})$$



Funciones Periódicas

Podríamos pensar que cualquier suma de funciones seno y coseno produce una función periódica.

Esto no es así, por ejemplo, consideremos la función

$$f(t) = \cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t).$$

Para que sea periódica se requiere encontrar dos enteros m, n tales que

$$\omega_1 T= 2\pi m,\ \omega_2 T=2\pi n$$

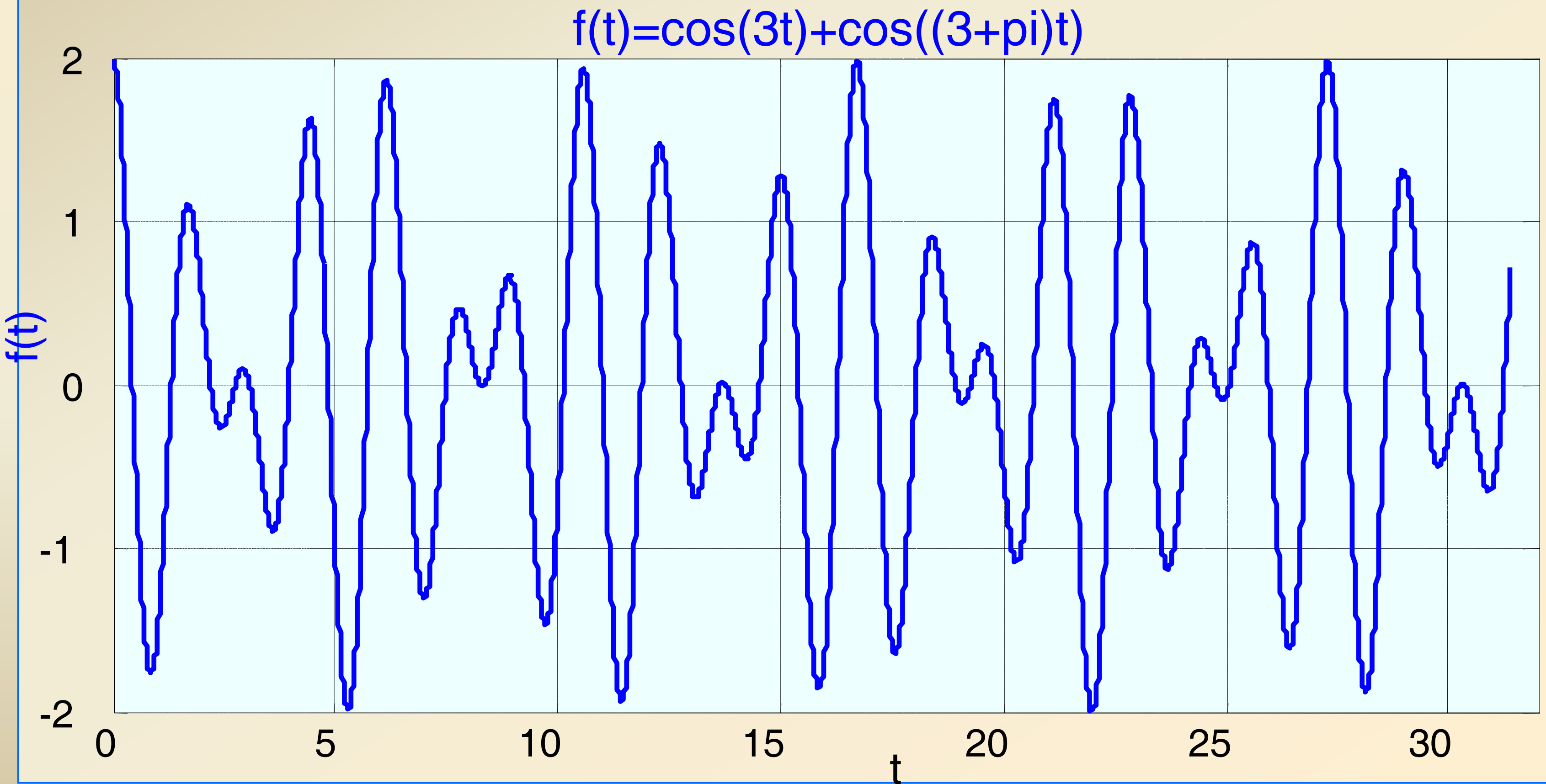
De donde

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

Es decir, la relación ω_1 / ω_2 debe ser un <u>número racional</u>.

Funciones Periódicas

Ejemplo: la función cos(3t)+cos(π+3)t no es periódica, ya que $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{3+\pi}$ no es un número racional.



Serie Trigonométrica de Fourier

Algunas funciones periódicas f(t) de periodo T pueden expresarse por la siguiente serie, llamada *Serie Trigonométrica de Fourier*

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1\cos(\omega_0 t)+a_2\cos(2\omega_0 t)+\ldots$$
$$+ b_1\operatorname{sen}(\omega_0 t)+b_2\operatorname{sen}(2\omega_0 t)+\ldots$$

Donde $\omega_0=2\pi/T$.

Es decir,

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\operatorname{sen}(n\omega_0 t)]$$

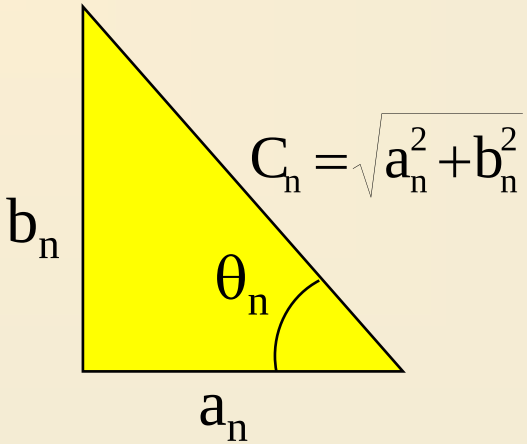
Serie Trigonométrica de Fourier

Es posible escribir de una manera ligeramente diferente la Serie de Fourier, si observamos que el término $a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\text{sen}(n\omega_0 t)$ se puede escribir como

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos(n\omega_0 t)+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\text{sen}(n\omega_0 t)\right)$$

Podemos encontrar una manera más compacta para expresar estos coeficientes pensando en un triángulo rectángulo:

Serie Trigonométrica de Fourier



$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos\theta_n$$

$$\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \mathrm{sen}\theta_n$$

Con lo cual la expresión queda

$$C_n\left[\cos\theta_n \cos(n\omega_0 t) + \mathrm{sen}\theta_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

$$= C_n\left[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]$$

Serie Trigonométrica de Fourier

Si además definimos $C_0=a_0/2$, la serie de Fourier se puede escribir como

$$\boxed{f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]}$$

Así, $$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

y $$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Componentes y armónicas

Así, una función periódica f(t) se puede escribir como la suma de ***componentes sinusoidales*** de diferentes frecuencias $\omega_n=n\omega_0$.

A la componente sinusoidal de frecuencia $n\omega_0$: $C_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$ se le llama la ***enésima armónica*** de f(t).

A la primera armónica (n=1) se le llama la ***componente fundamental*** y su periodo es el mismo que el de f(t)

A la frecuencia $\omega_0=2\pi f_0=2\pi/T$ se le llama ***frecuencia angular fundamental***.

Componentes y armónicas

A la componente de frecuencia cero C_0, se le llama ***componente de corriente directa*** (cd) y corresponde al valor promedio de f(t) en cada periodo.

Los coeficientes C_n y los ángulos θ_n son respectivamente las ***amplitudes*** y los ***ángulos de fase*** de las armónicas.

Componentes y armónicas

Ejemplo: La función $f(t) = \cos(\frac{t}{3}) + \cos(\frac{t}{4})$

Como ya se mostró tiene un periodo $T=24\pi$, por lo tanto su frecuencia fundamental es $\omega_0=1/12$ rad/seg.

Componente fundamental es de la forma:

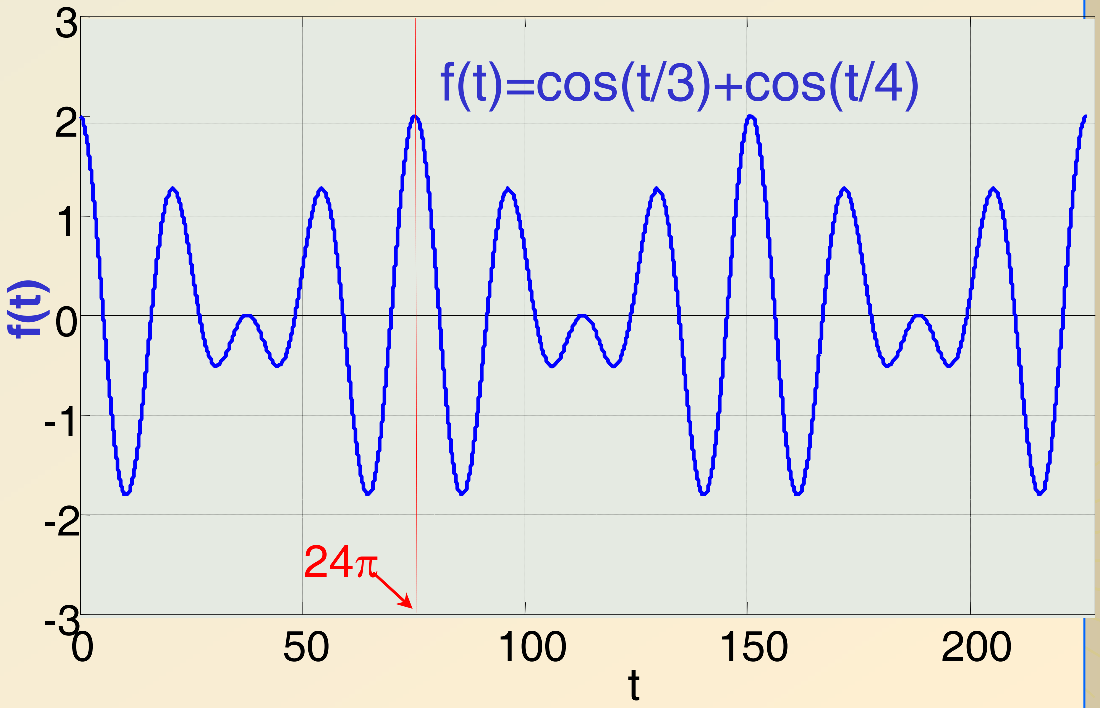
0*cos(t/12).

Tercer armónico:

cos(3t/12)=cos(t/4)

Cuarto armónico:

Cos(4t/12)=cos(t/3)

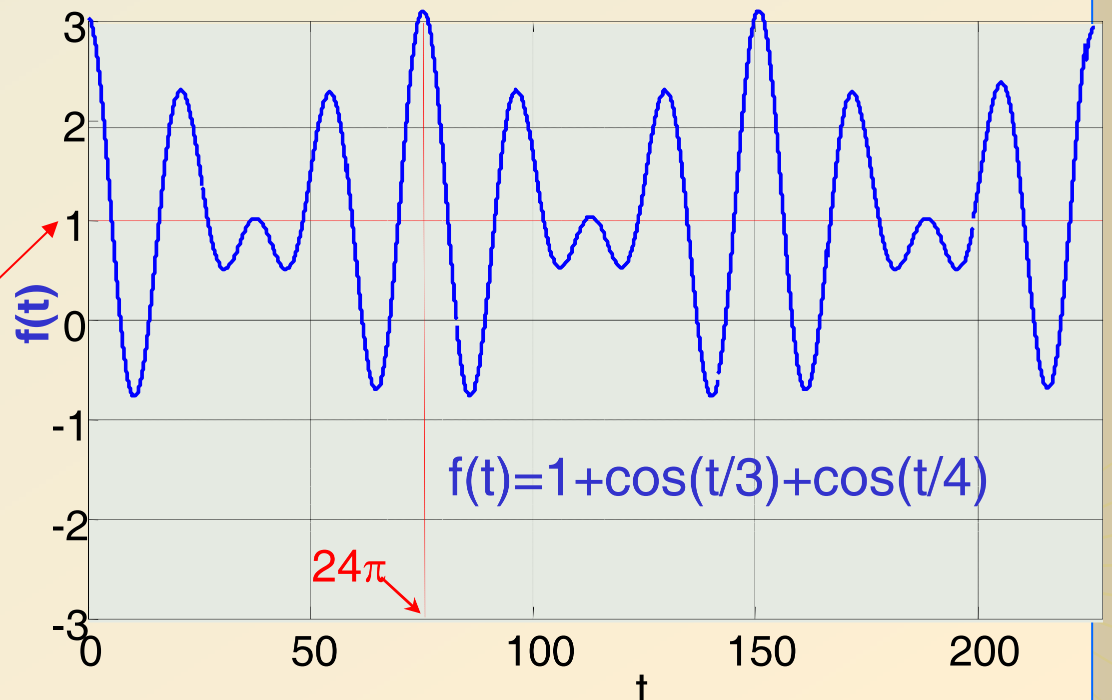


Componentes y armónicas

Ejemplo: Como puede verse, la función anterior tiene tantas partes positivas como negativas, por lo tanto su componente de cd es cero, en cambio

$$f(t) = 1 + \cos(\tfrac{t}{3}) + \cos(\tfrac{t}{4})$$

Tiene tantas partes arriba como abajo de 1 por lo tanto, su componente de cd es 1.



Ortogonalidad de senos y cosenos

Se dice que un conjunto de funciones $f_k(t)$ son ***ortogonales*** en el intervalo $a<t<b$ si dos funciones cualesquiera $f_m(t)$, $f_n(t)$ de dicho conjunto cumplen

$$\int_a^b f_m(t) f_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases}$$

Ortogonalidad de senos y cosenos

Ejemplo: las funciones t y t^2 son ortogonales en el intervalo –1< t <1, ya que

$$\int_{-1}^{1} tt^2 dt = \int_{-1}^{1} t^3 dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0$$

Ejemplo: Las funciones sen t y cos t son ortogonales en el intervalo $-\pi/_2 < t < \pi/_2$, ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t \cos t \, dt = \left.\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Ortogonalidad de senos y cosenos

Aunque los ejemplos anteriores se limitaron a un par de funciones, el siguiente es un conjunto de una infinidad de funciones ortogonales en el intervalo $-^{T}/_{2}<t<\,^{T}/_{2}$.

$1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \ldots, \mathrm{sen}\,\omega_0 t, \mathrm{sen}\,2\omega_0 t, \mathrm{sen}\,3\omega_0 t, \ldots$

(para cualquier valor de $\omega_0 = {}^{2\pi}/_{T}$).

Para verificar lo anterior podemos probar por pares:

1.- $f(t)=1$ Vs. $\cos(m\omega_0 t)$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)dt = \left.\frac{\mathrm{sen}(m\omega_0 t)}{m\omega_0}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2\mathrm{sen}(m\omega_0 T/2)}{m\omega_0} = \frac{2\mathrm{sen}(m\pi)}{m\omega_0} = 0$$

Ya que m es un entero.

Ortogonalidad de senos y cosenos

2.- $f(t)=1$ Vs. $\text{sen}(m\omega_0 t)$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t)dt = \left.\frac{-\cos(m\omega_0 t)}{m\omega_0}\right|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{-1}{m\omega_0}[\cos(m\omega_0 T/2) - \cos(m\omega_0 T/2)] = 0$$

3.- $\cos(m\omega_0 t)$ Vs. $\cos(n\omega_0 t)$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

Ortogonalidad de senos y cosenos

4.- sen($m\omega_0 t$) Vs. sen($n\omega_0 t$):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}(m\omega_0 t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

5.- sen($m\omega_0 t$) Vs. cos($n\omega_0 t$):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = 0 \quad \text{para cualquier } m, n$$

Ortogonalidad de senos y cosenos

Para calcular las integrales de los casos 3, 4 y 5, son útiles las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos A \cos B = ½[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = ½[-\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\operatorname{sen} A \cos B = ½[\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)]$$

Además:

$$\operatorname{sen}^2\theta = ½\,(1-\cos 2\theta)$$

$$\cos^2\theta = ½\,(1+\cos 2\theta)$$

Cálculo de los coeficientes de la Serie

Dada una función periódica f(t) ¿cómo se obtiene su serie de Fourier?

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)]$$

Obviamente, el problema se resuelve si sabemos como calcular los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$

Esto se puede resolver considerando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno comentada anteriormente.

Cálculo de los coeficientes de la Serie

Multiplicando ambos miembros por $\cos(n\omega_0 t)$ e integrando de $-T/2$ a $T/2$, obtenemos:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \qquad n = 0,1,2,3,...$$

Similarmente, multiplicando por $\operatorname{sen}(n\omega_0 t)$ e integrando de $-T/2$ a $T/2$, obtenemos:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt \qquad n = 1,2,3,...$$

Similarmente, integrando de $-T/2$ a $T/2$, obtenemos:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

Cálculo de los coeficientes de la Serie

El intervalo de integración no necesita ser simétrico respecto al origen.

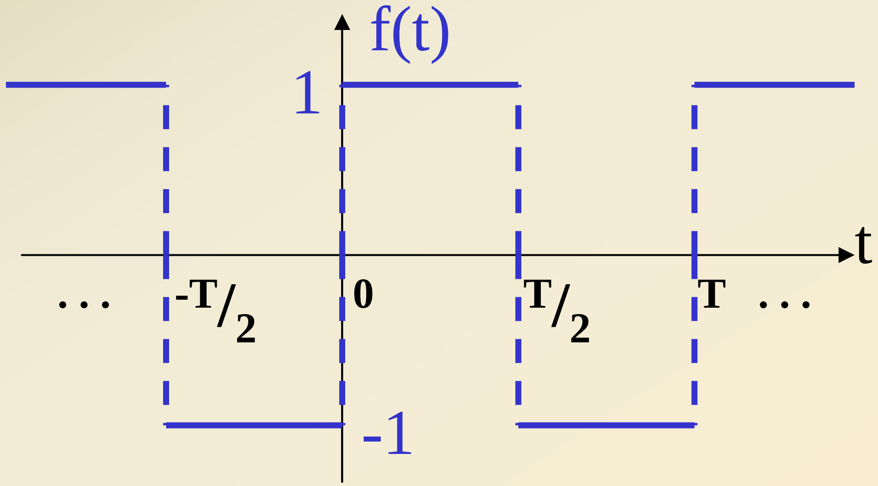
Como la ortogonalidad de las funciones seno y coseno no sólo se da en el intervalo de –T/2 a T/2, sino en cualquier intervalo que cubra un periodo completo:

(de t_0 a t_0+T, con t_0 arbitrario)

las fórmulas anteriores pueden calcularse en cualquier intervalo que cumpla este requisito.

Cálculo de los coeficientes de la Serie

Ejemplo: Encontrar la Serie de Fourier para la siguiente función de periodo T:



Solución: La expresión para f(t) en ${}^{-T}/_{2}<t<{}^{T}/_{2}$ es

$$f(t)=\begin{cases}-1 & \text{para } -\frac{T}{2}<t<0\\ 1 & \text{para } 0<t<\frac{T}{2}\end{cases}$$

Cálculo de los coeficientes de la Serie

Coeficientes a_n:
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -\cos(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\frac{1}{n\omega_0}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} + \frac{1}{n\omega_0}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{T/2}\right]$$

$$= 0 \quad \text{para } n \neq 0$$

Cálculo de los coeficientes de la Serie

Coeficiente a_0:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -dt + \int_{0}^{T/2} dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[-t\Big|_{-T/2}^{0} + t\Big|_{0}^{T/2}\right]$$

$$= 0$$

Cálculo de los coeficientes de la Serie

Coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T/2}\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} - \frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{0}^{T/2}\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[(1-\cos(n\pi)) - (\cos(n\pi)-1)\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \quad \text{para } n \neq 0$$

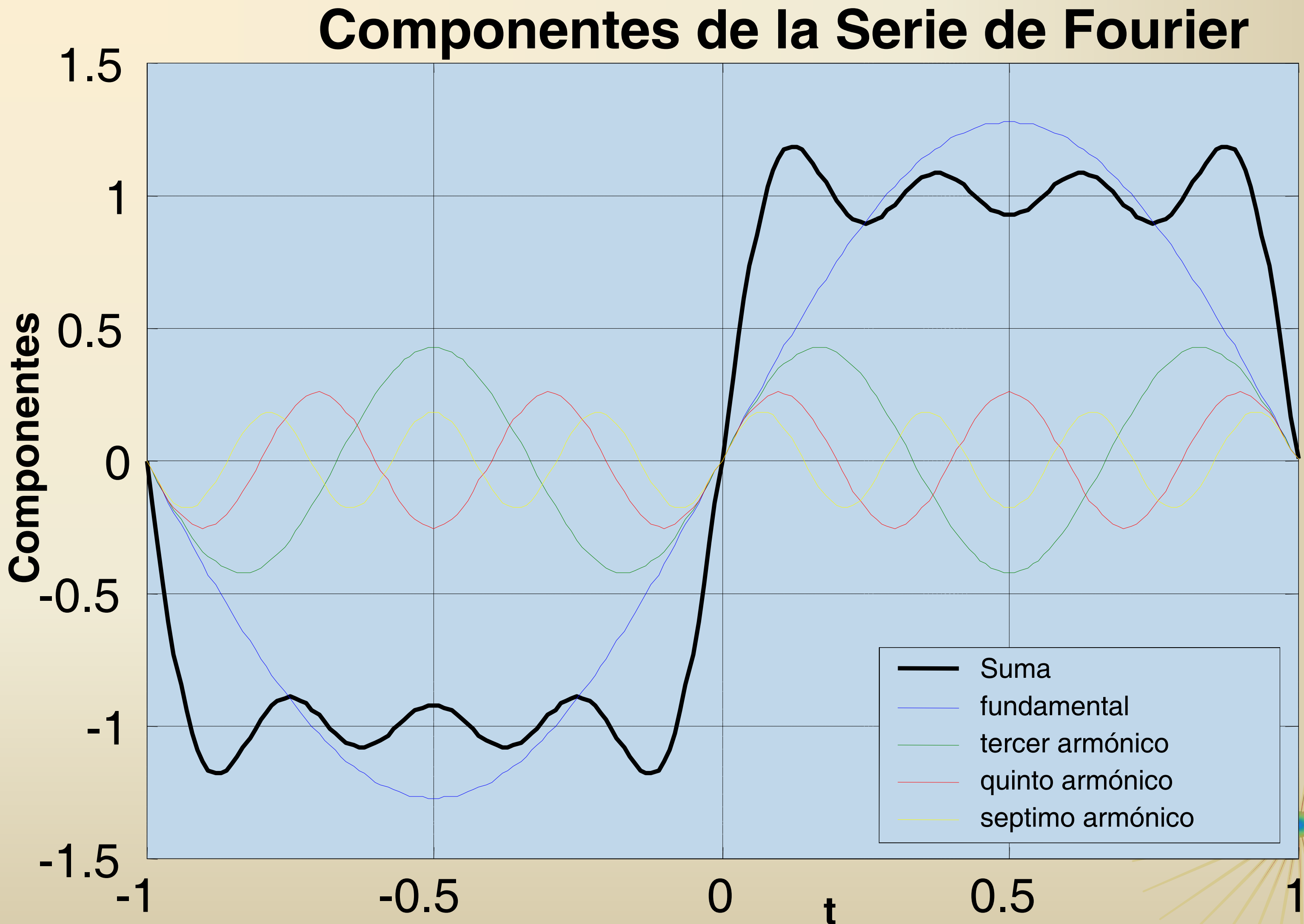
Cálculo de los coeficientes de la Serie

Serie de Fourier: Finalmente la Serie de Fourier queda como

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \tfrac{1}{3}\mathrm{sen}(3\omega_0 t) + \tfrac{1}{5}\mathrm{sen}(5\omega_0 t) + \ldots\right]$$

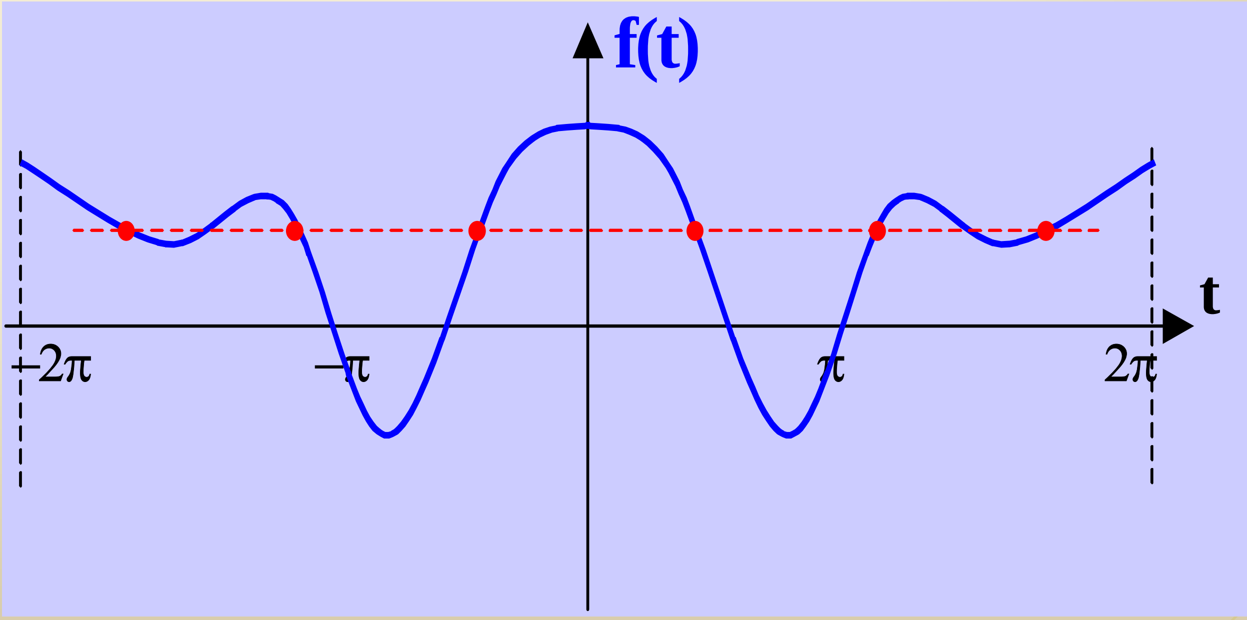
En la siguiente figura se muestran: la componente fundamental y los armónicos 3, 5 y 7 así como la suma parcial de estos primeros cuatro términos de la serie para $\omega_0=\pi$, es decir, T=2:

Cálculo de los coeficientes de la Serie



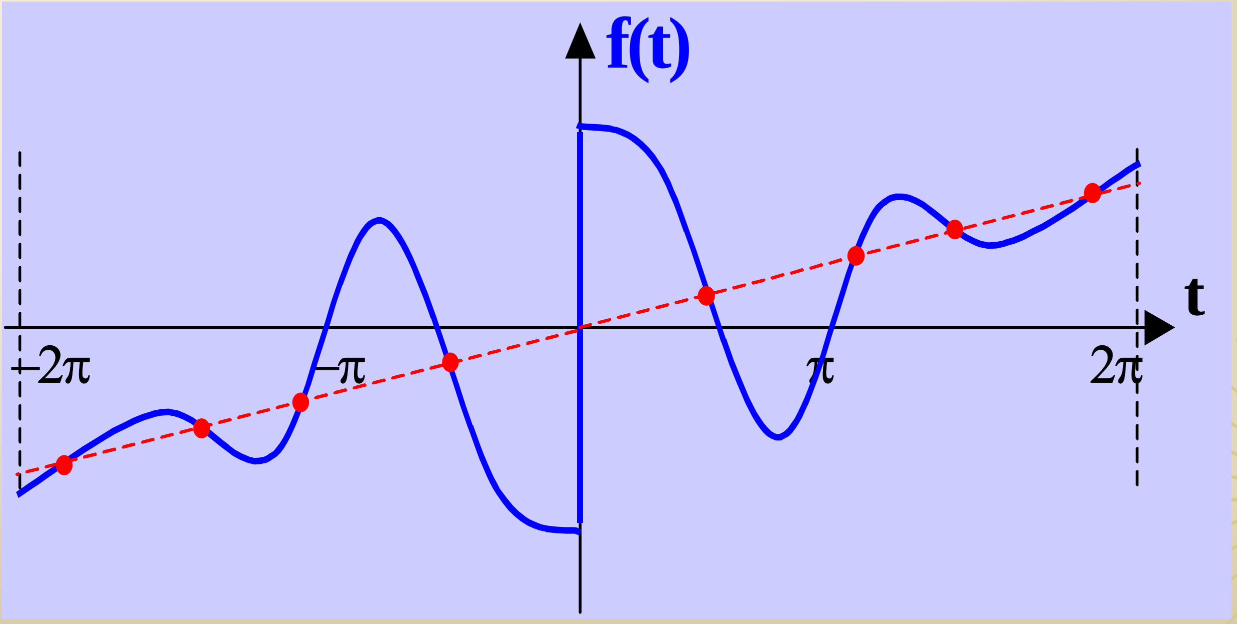
Funciones Pares e Impares

Una función (periódica o no) se dice ***función par*** (o con simetría par) si su gráfica es simétrica respecto al eje vertical, es decir, la función f(t) es par si $f(t) = f(-t)$



Funciones Pares e Impares

En forma similar, una función f(t) se dice ***función impar*** o con simetría impar, si su gráfica es simétrica respecto al origen, es decir, si cumple lo siguiente: $-f(t) = f(-t)$



Funciones Pares e Impares

Ejemplo: ¿Las siguientes funciones son pares o impares?

$f(t) = t+1/t$

$g(t) = 1/(t^2+1)$,

Solución:

Como $f(-t) = -t-1/t = -f(t)$, por lo tanto $f(t)$ es función impar.

Como $g(-t)=1/((-t)^2+1) = 1/(t^2+1)=g(t)$, por lo tanto $g(t)$ es función par.

Funciones Pares e Impares

Ejemplo: ¿La función $h(t)=f(1+t^2)$ es par o impar?, donde f es una función arbitraria.

Solución:

Sea $g(t)= 1+t^2$, Entonces $h(t)=f(g(t))$

Por lo tanto $h(-t) = f(g(-t))$,

Pero $g(-t)=1+(-t)^2 = 1+t^2=g(t)$,

finalmente $h(-t)=f(g(t))=h(t)$, por lo tanto $h(t)$ es función par, sin importar como sea $f(t)$.

Funciones Pares e Impares

Ejemplo: De acuerdo al ejemplo anterior, todas las siguientes funciones son pares:

$h(t) = \text{sen}\,(1+t^2)$

$h(t) = \exp(1+t^2)+5/\,(1+t^2)$

$h(t) = \cos\,(2+t^2)+1$

$h(t) = (10+t^2)-(1+t^2)1/2$

etc...

Ya que todas tienen la forma $f(1+t^2)$

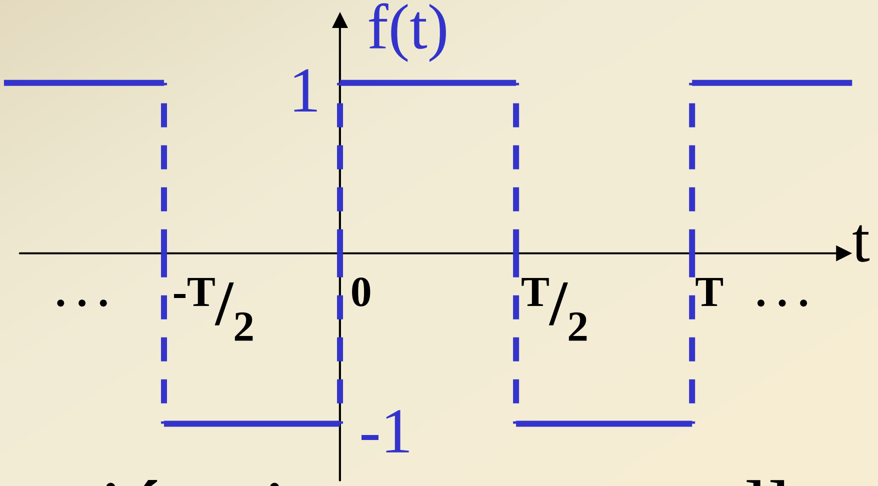
Funciones Pares e Impares

Como la función sen($n\omega_0 t$) es una función impar para todo $n \neq 0$ y la función cos($n\omega_0 t$) es una función par para todo n, es de esperar que:

- Si f(t) es par, su serie de Fourier no contendrá términos seno, por lo tanto $b_n = 0$ para todo n
- Si f(t) es impar, su serie de Fourier no contendrá términos coseno, por lo tanto $a_n = 0$ para todo n

Funciones Pares e Impares

Por **ejemplo**, la señal cuadrada, ya analizada en un ejemplo previo:



Es una función impar, por ello su serie de Fourier no contiene términos coseno:

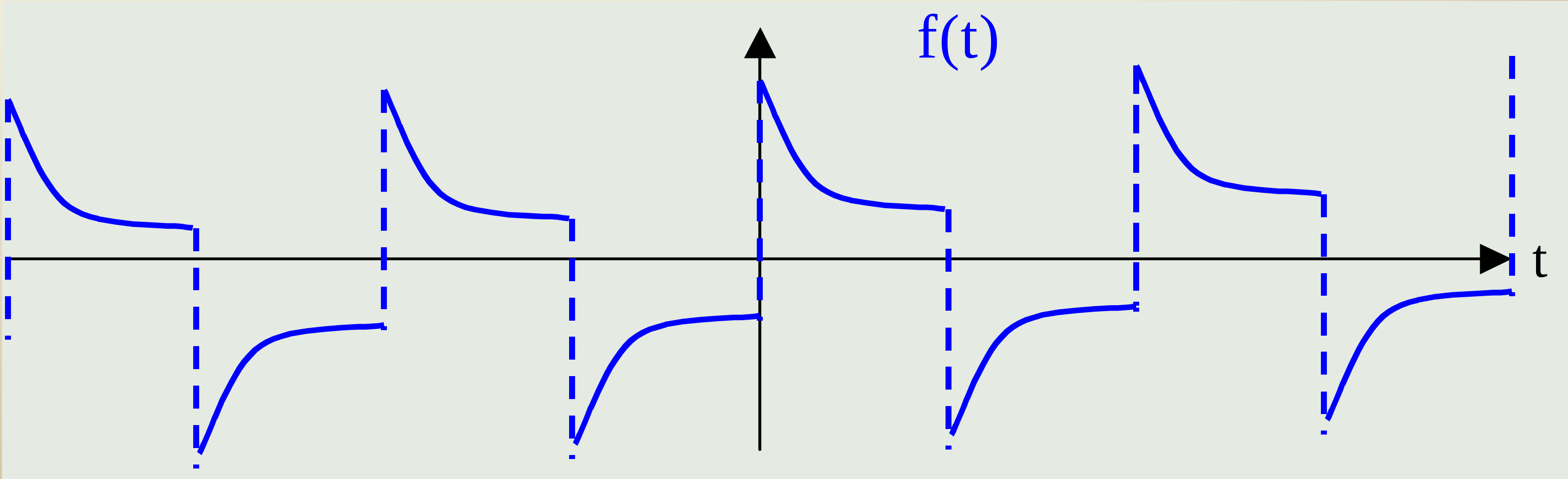
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen}(\omega_0 t) + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3\omega_0 t) + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}(5\omega_0 t) + \ldots\right]$$

Simetría de Media Onda

Una función periodica de periodo T se dice ***simétrica de media onda***, si cumple la propiedad

$$f(t+\tfrac{1}{2}T) = -f(t)$$

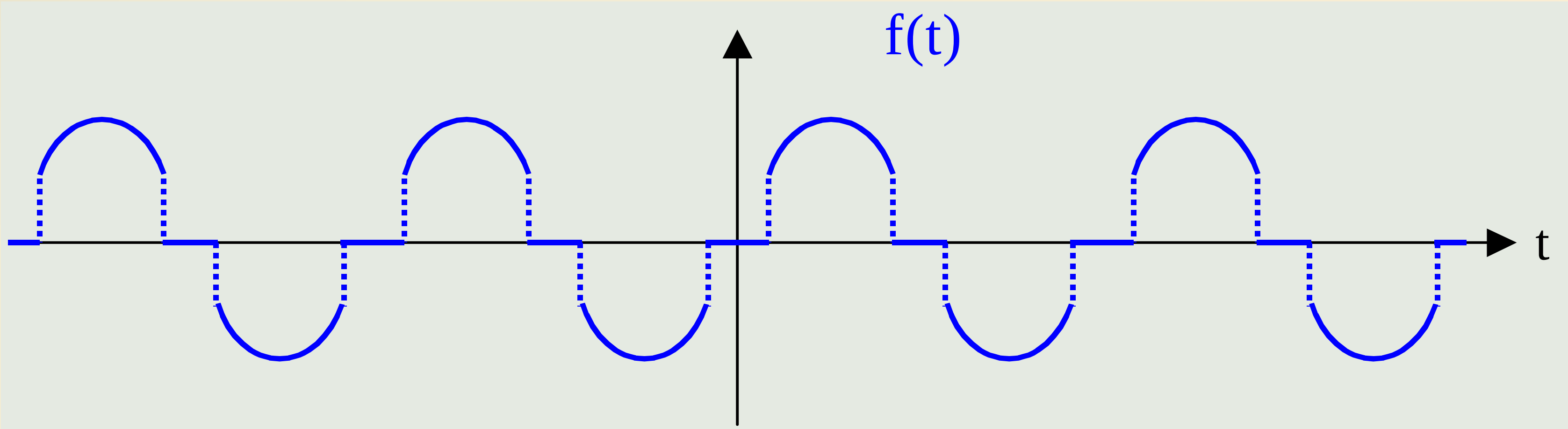
Es decir, si en su gráfica las partes negativas son un reflejo de las positivas pero desplazadas medio periodo:



Simetría de Cuarto de Onda

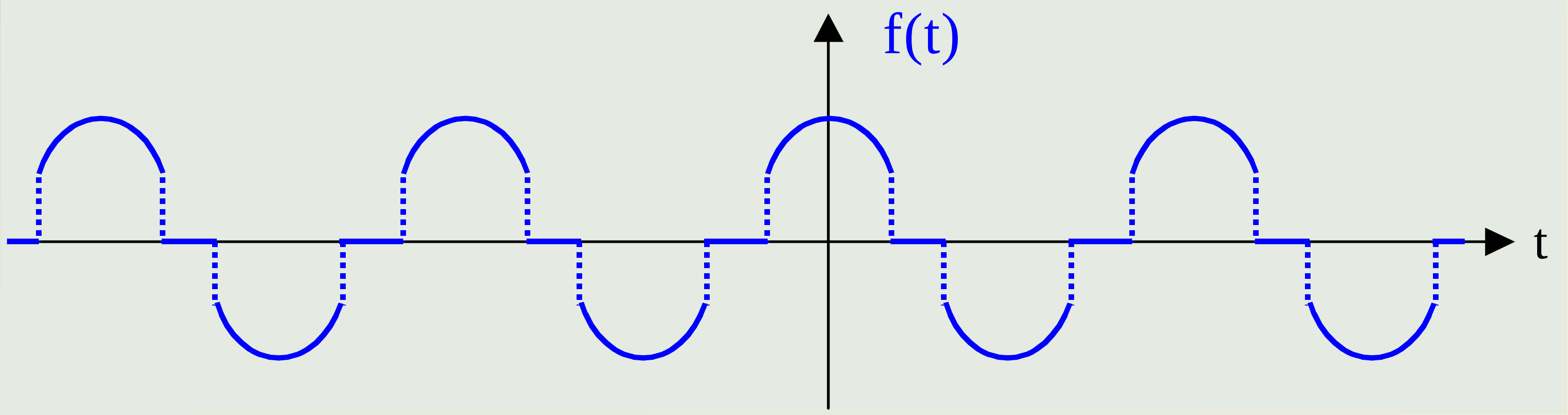
Si una función tiene simetría de media onda y además es función par o impar, se dice que tiene simetría de cuarto de onda par o impar

Ejemplo: Función con simetría impar de cuarto de onda:



Simetría de Cuarto de Onda

Ejemplo: Función con simetría par de cuarto de onda:



Simetrías y Coeficientes de Fourier

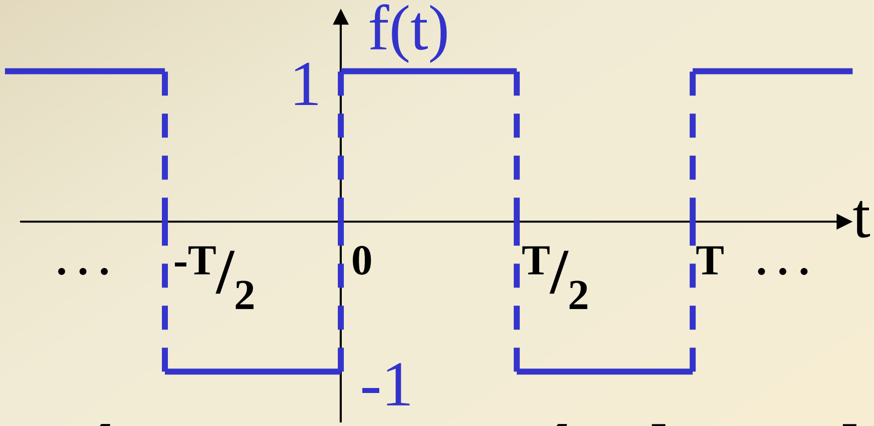
Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt$	Senos y cosenos
Par	$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n=0$	únicamente cosenos
Impar	$a_n=0$	$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt$	únicamente senos
media onda	$a_n = \begin{cases} 0 & n\ \text{par} \\ \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt & n\ \text{impar} \end{cases}$	$b_n = \begin{cases} 0 & n\ \text{par} \\ \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt & n\ \text{impar} \end{cases}$	Senos y cosenos impares

Simetrías y Coeficientes de Fourier

Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt$	Senos y cosenos
¼ de onda par	a_n=0 (n par) $a_n = \frac{8}{T}\int_{0}^{T/4} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ $(n\ \text{impar})$	b_n=0	Sólo cosenos impares
¼ de onda impar	a_n=0	b_n=0 (n par) $b_n = \frac{8}{T}\int_{0}^{T/4} f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt$ $(n\ \text{impar})$	Sólo senos impares

Simetrías y Coeficientes de Fourier

Por **ejemplo**, la señal cuadrada, ya analizada en un ejemplo previo:



Es una función con simetría de ¼ de onda impar, por ello su serie de Fourier sólo contiene términos seno de frecuencia impar:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen}(\omega_0 t) + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3\omega_0 t) + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}(5\omega_0 t) + \ldots\right]$$

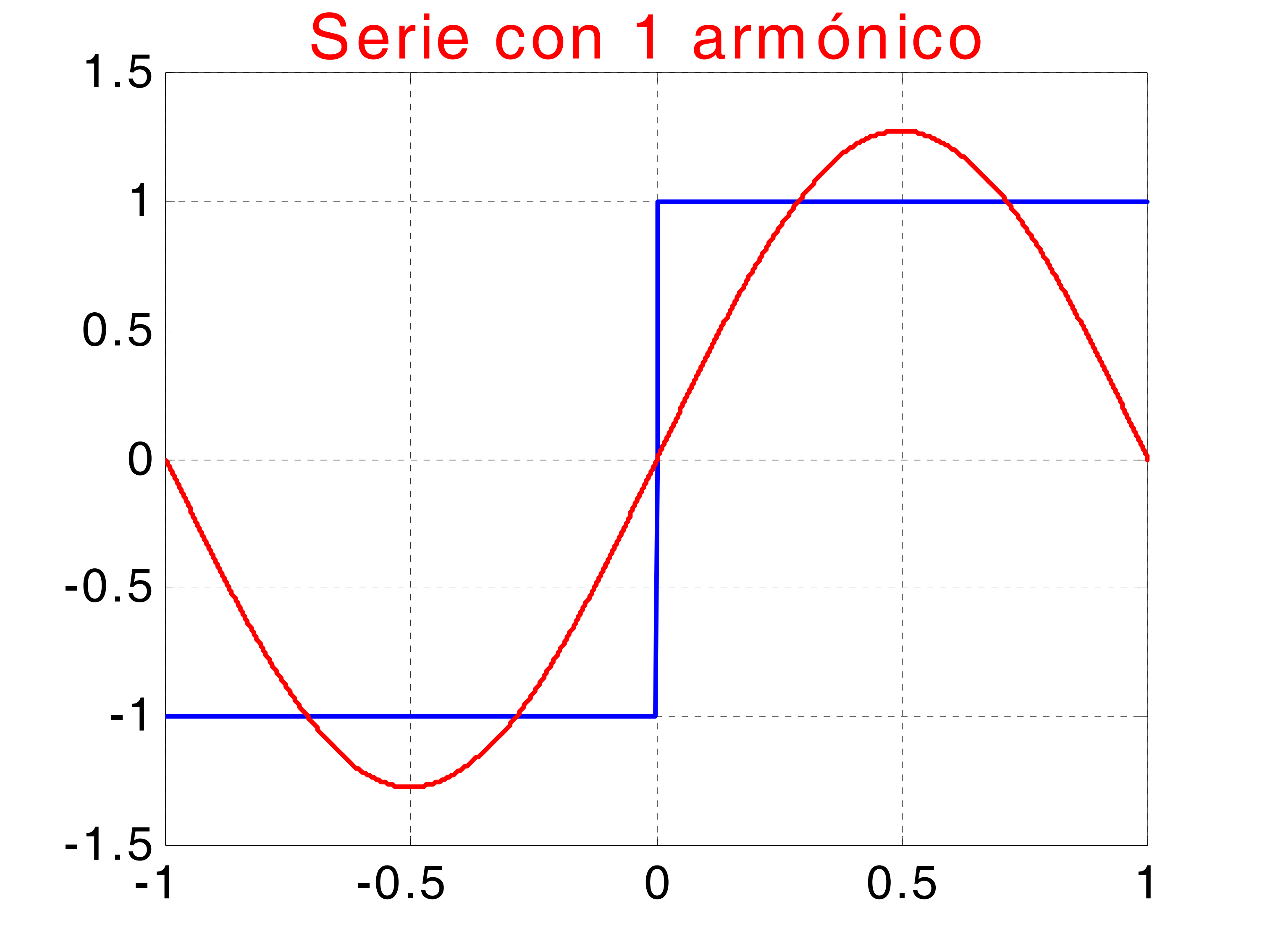
Fenómeno de Gibbs

Si la serie de Fourier para una función f(t) se trunca para lograr una *aproximación en suma finita de senos y cosenos*, es natural pensar que a medida que agreguemos más armónicos, la sumatoria se aproximará más a f(t).

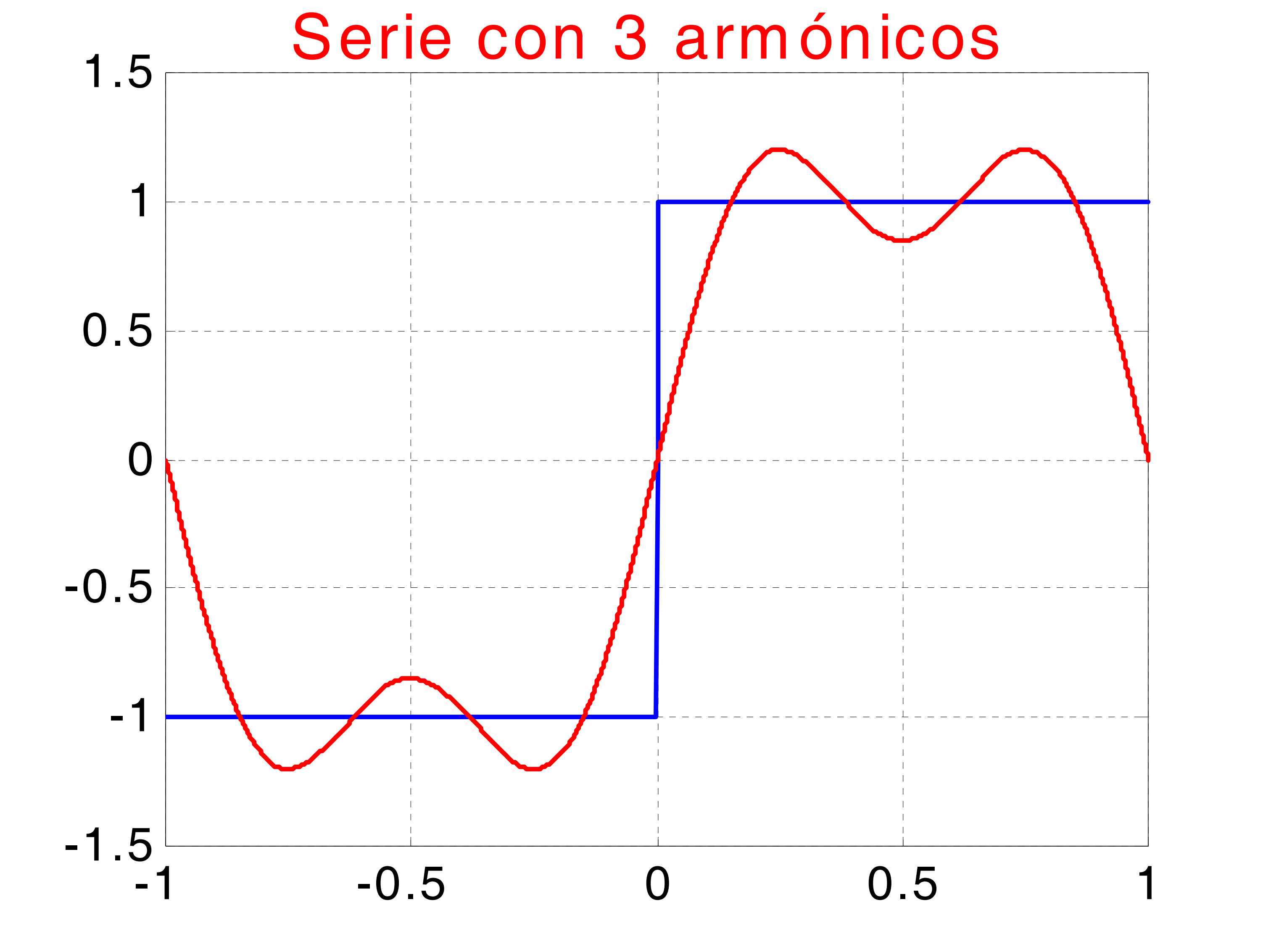
Esto se cumple excepto en las discontinuidades de f(t), en donde el error de la suma finita no tiende a cero a medida que agregamos armónicos.

Por ejemplo, consideremos el tren de pulsos anterior:

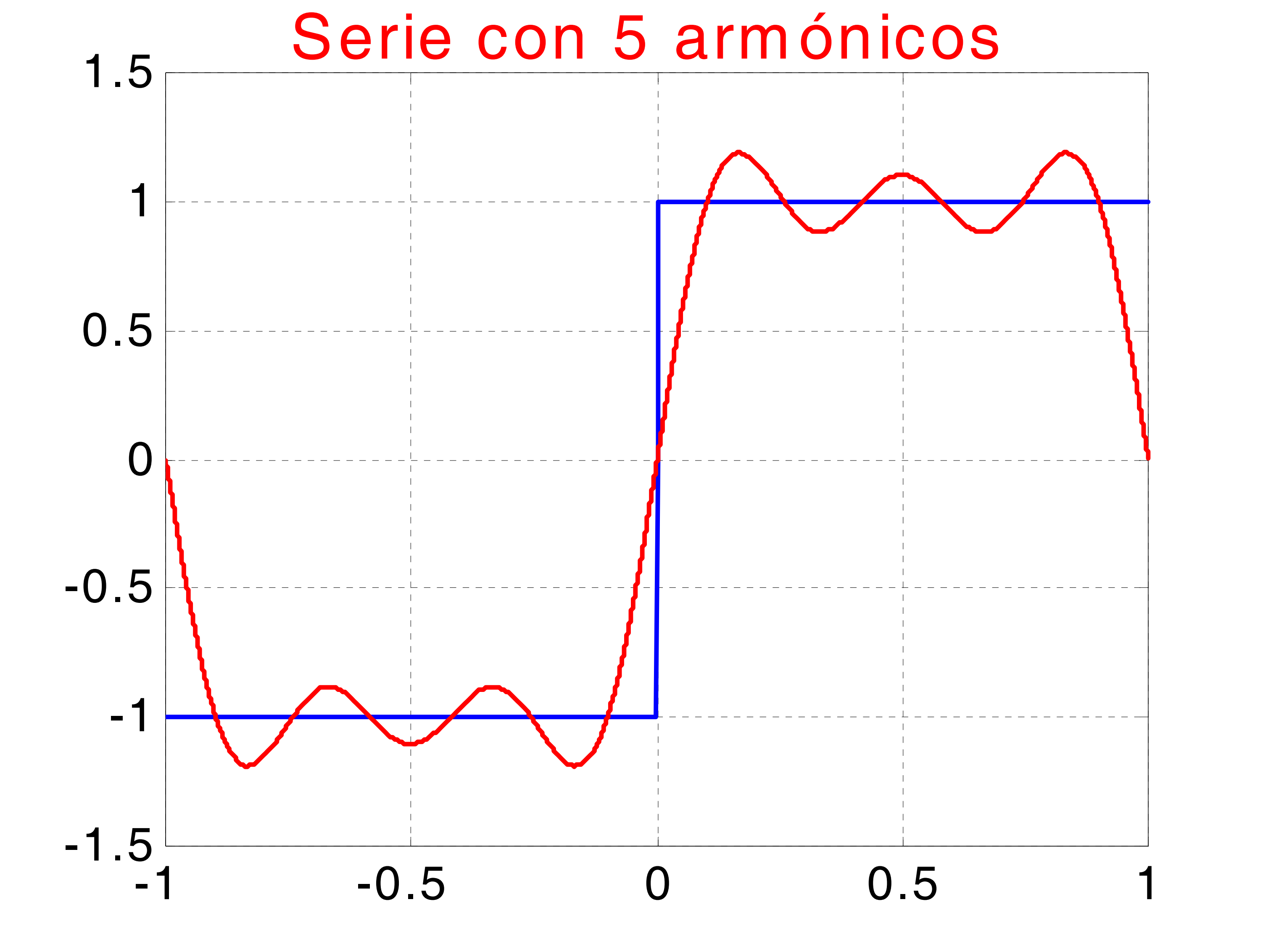
Fenómeno de Gibbs



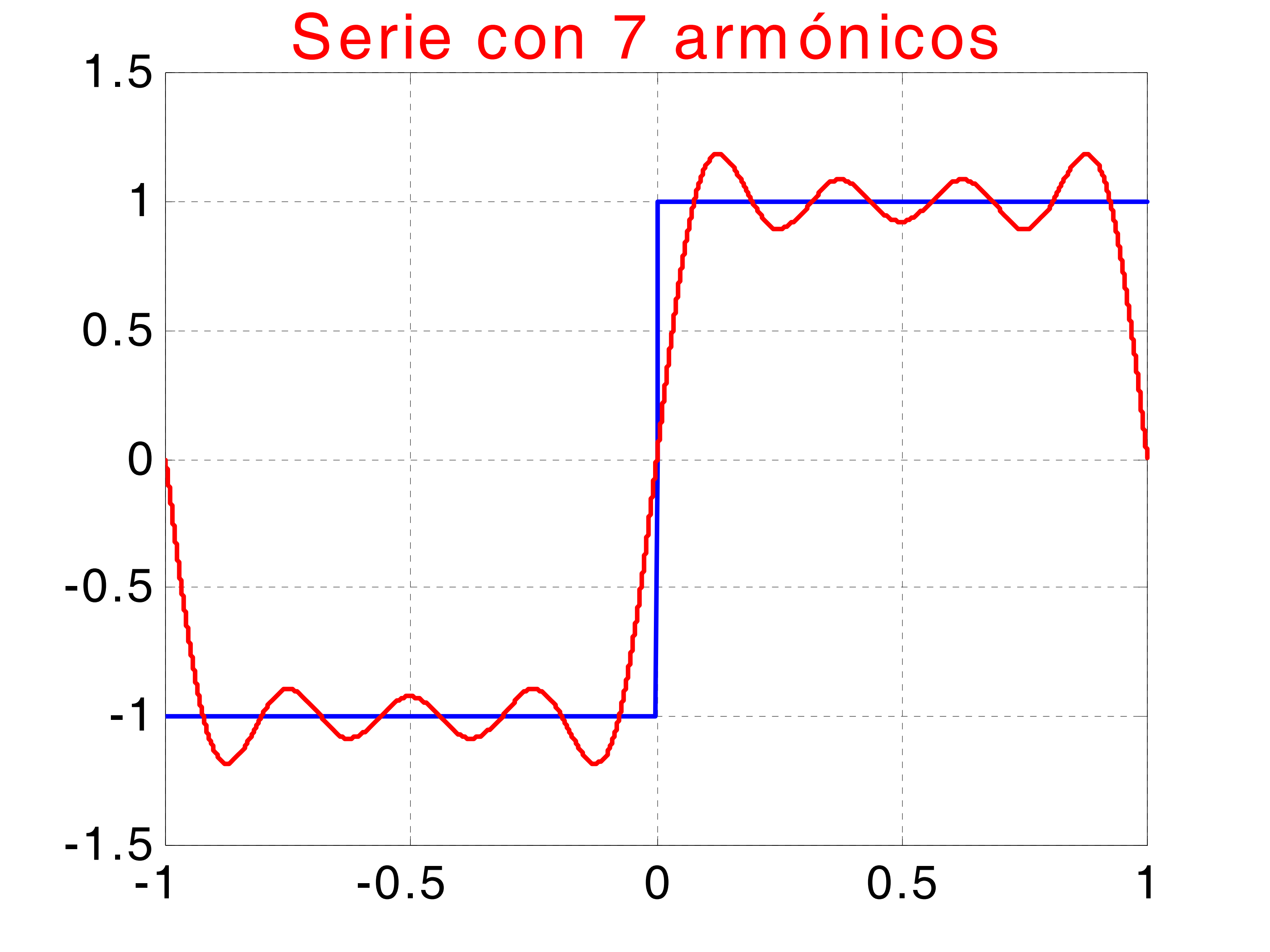
Fenómeno de Gibbs



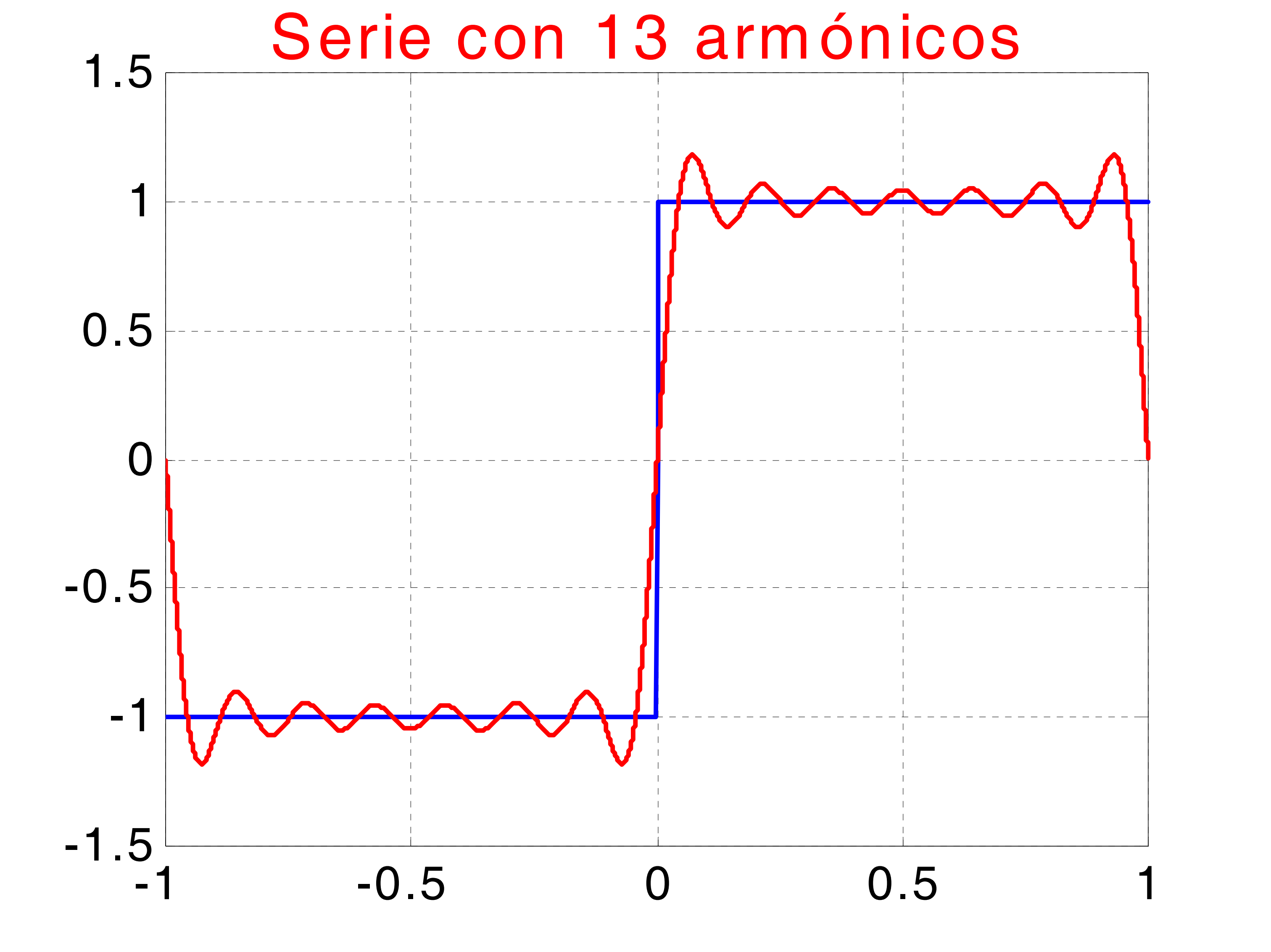
Fenómeno de Gibbs



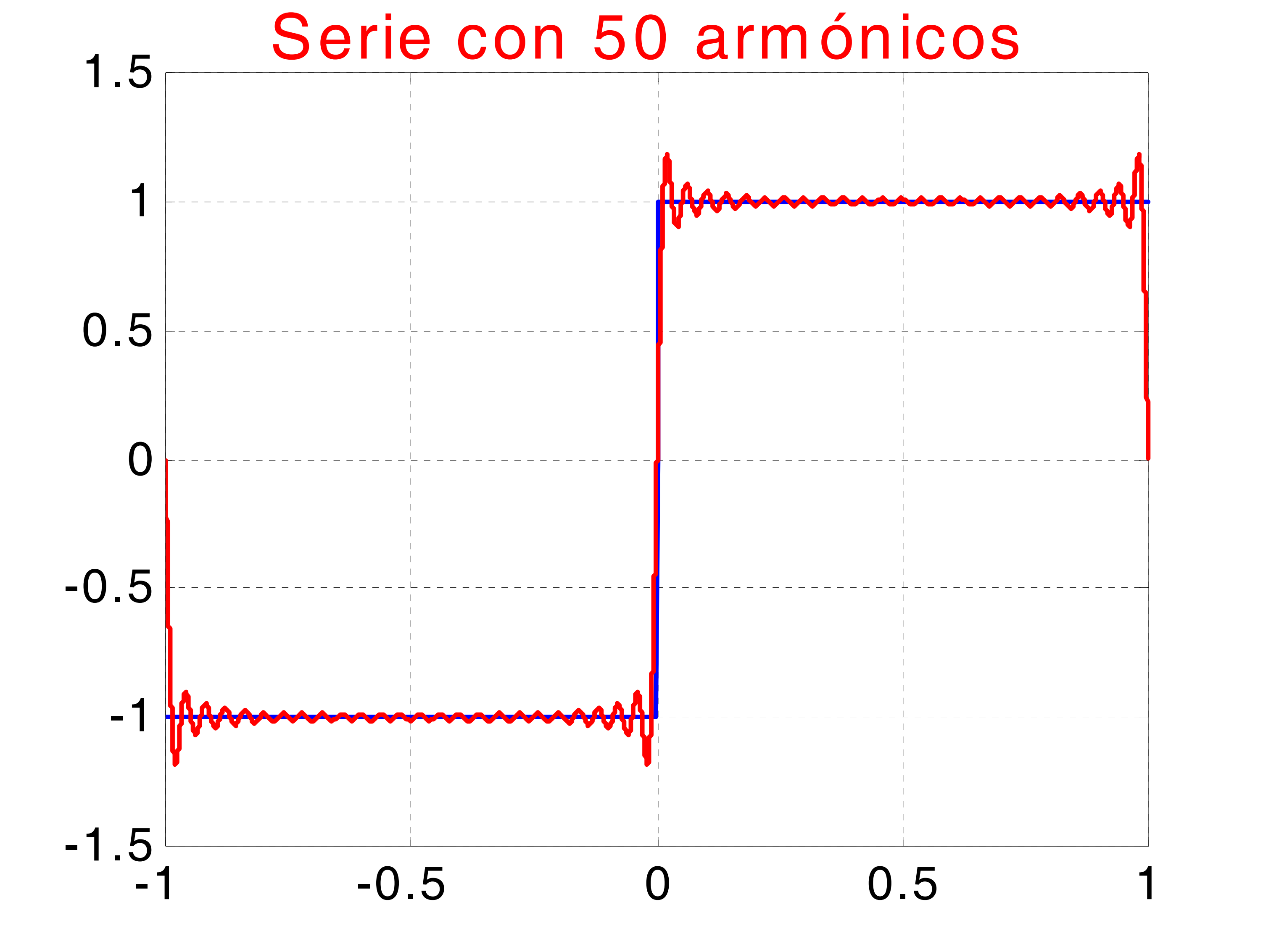
Fenómeno de Gibbs



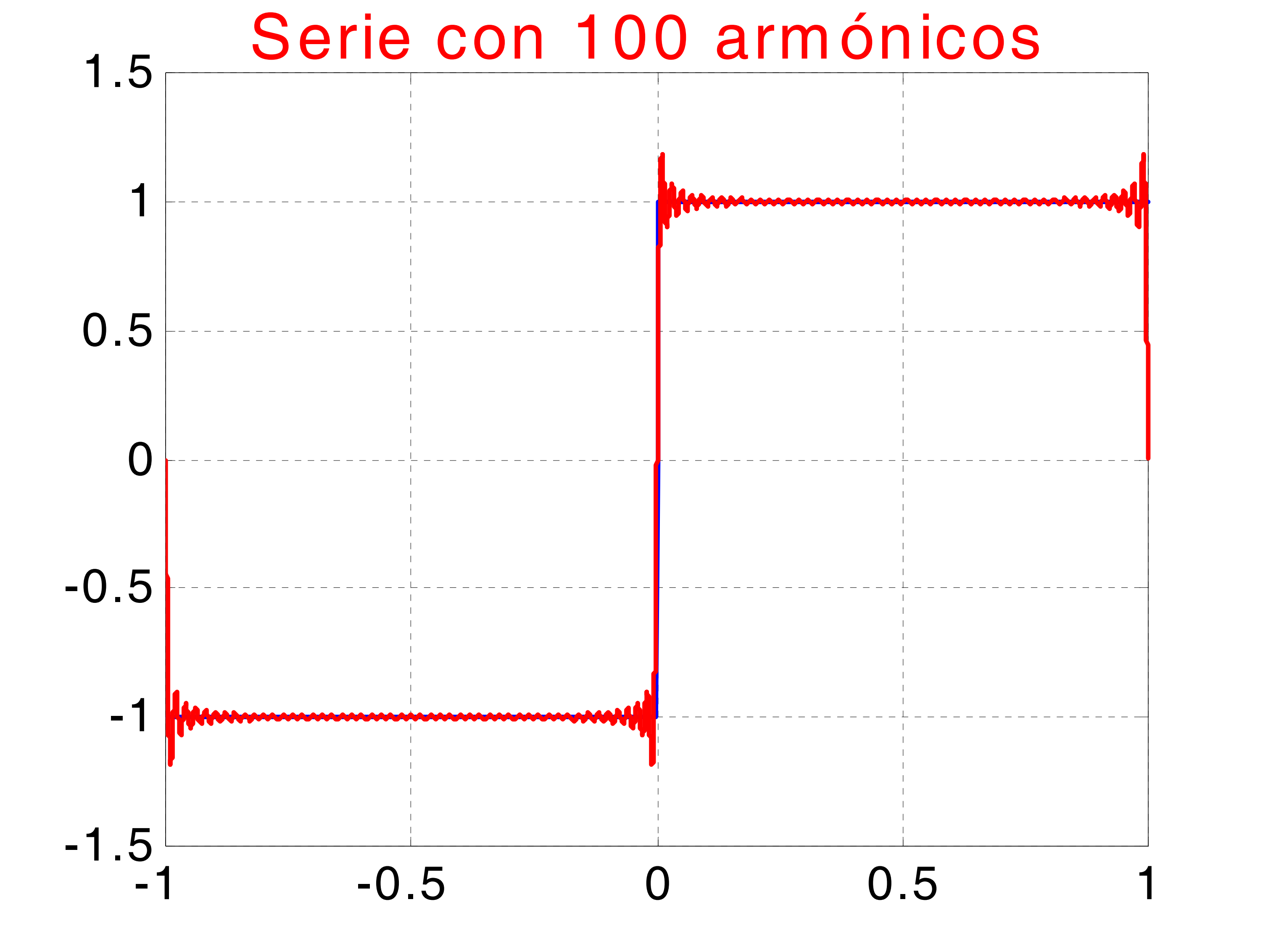
Fenómeno de Gibbs



Fenómeno de Gibbs



Fenómeno de Gibbs



Forma Compleja de la Serie de Fourier

Consideremos la serie de Fourier para una función periodica f(t), con periodo $T=2\pi/\omega_0$.

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)]$$

Es posible obtener una forma alternativa usando las fórmulas de Euler:

$$\cos(n\omega_0 t) = \tfrac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

$$\mathrm{sen}(n\omega_0 t) = \tfrac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

Donde $j = \sqrt{-1}$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Sustituyendo

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \tfrac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \tfrac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})]$$

Y usando el hecho de que 1/j=-j

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[\tfrac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}]$$

Y definiendo:

$$\boxed{c_0 = \tfrac{1}{2}a_0, \quad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n)}$$

Lo cual es congruente con la fórmula para b_n, ya que $b_{-n}=-b_n$, ya que la función seno es impar.

Forma Compleja de la Serie de Fourier

La serie se puede escribir como

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t})$$

O bien,

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Es decir,

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}}$$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

A la expresión obtenida

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Se le llama ***forma compleja de la serie de Fourier*** y sus coeficientes c_n pueden obtenerse a partir de los coeficientes a_n, b_n como ya se dijo, o bien:

$$c_n = \tfrac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Para n=0, ±1, ±2, ±3, ...

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Los coeficientes c_n son números complejos, y también se pueden escribir en forma polar:

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}$$

Obviamente, $c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\phi_n}$

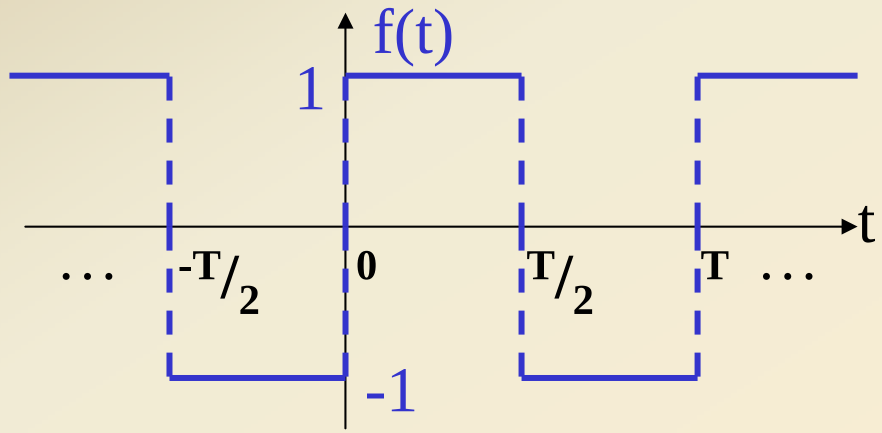
Donde $|c_n| = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\phi_n = \arctan\left(-\dfrac{b_n}{a_n}\right)$

Para todo $n \neq 0$,

Para $n=0$, c_0 es un número real: $c_0 = \tfrac{1}{2} a_0$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Ejemplo. Encontrar la forma compleja de la serie de Fourier para la función ya tratada:



Solución 1. Como ya se calcularon los coeficientes de la forma trigonométrica (a_n y b_n):

$a_n=0$ para todo n

y $$b_n = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] \quad \text{para todo n}$$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Podemos calcular los coeficientes c_n de:

$$c_n = \tfrac{1}{2}[a_n - jb_n] = \quad -j\tfrac{1}{2}\tfrac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$c_n = -j\tfrac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

Entonces la Serie Compleja de Fourier queda

$$f(t) = \tfrac{2}{\pi}\, j(\ldots + \tfrac{1}{5}e^{-j5\omega_0 t} + \tfrac{1}{3}e^{-j3\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}$$

$$- e^{j\omega_0 t} - \tfrac{1}{3}e^{j3\omega_0 t} - \tfrac{1}{5}e^{j5\omega_0 t} - \ldots)$$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Solución 2. También podemos calcular los coeficientes c_n mediante la integral

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} e^{-jn\omega_0 t}dt + \int_{T/2}^{T} -e^{-jn\omega_0 t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{1}{-jn\omega_o}e^{-jn\omega_0 t}\Big|_0^{T/2} - \frac{1}{-jn\omega_o}e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{T/2}^{T}\right)$$

$$= \frac{1}{-jn\omega_o T}[(e^{-jn\omega_0 T/2} - 1) - (e^{-jn\omega_0 T} - e^{-jn\omega_0 T/2})]$$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Como $\omega_0 T=2\pi$ y además $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\,\text{sen}\theta$

$$c_n = \frac{1}{-jn\omega_o T}[(-1)^n - 1) - (1 - (-1)^n)]$$

$$= -j\frac{2}{n\omega_o T}[1-(-1)^n]$$

$$= -j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

Lo cual coincide con el resultado ya obtenido.

Espectros de Frecuencia Discreta

A la gráfica de la magnitud de los coeficientes c_n contra la frecuencia angular ω de la componente correspondiente se le llama el ***espectro de amplitud*** de f(t).

A la gráfica del ángulo de fase ϕ_n de los coeficientes c_n contra ω, se le llama el ***espectro de fase*** de f(t).

Como n sólo toma valores enteros, la frecuencia angular $\omega=n\omega_0$ es una variable discreta y los espectros mencionados son *gráficas discretas*.

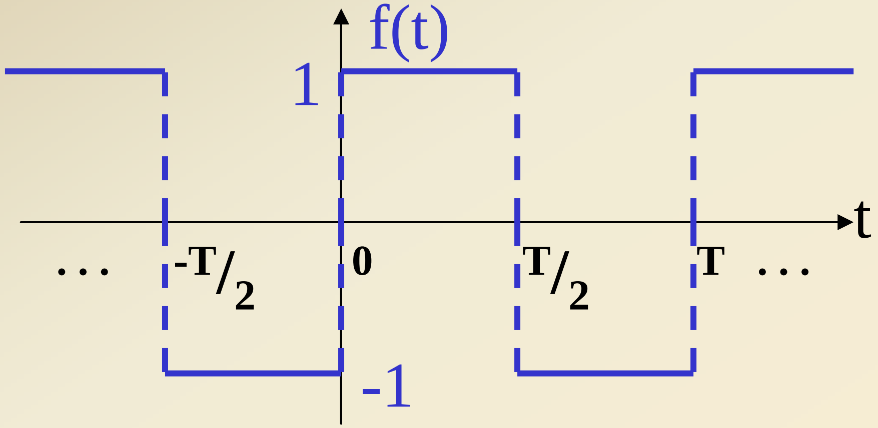
Espectros de Frecuencia Discreta

Dada una función periódica f(t), le corresponde una y sólo una serie de Fourier, es decir, le corresponde un conjunto único de coeficientes c_n.

Por ello, los coeficientes c_n especifican a f(t) en el ***dominio de la frecuencia*** de la misma manera que f(t) especifica la función en el ***dominio del tiempo***.

Espectros de Frecuencia Discreta

Ejemplo. Para la función ya analizada:

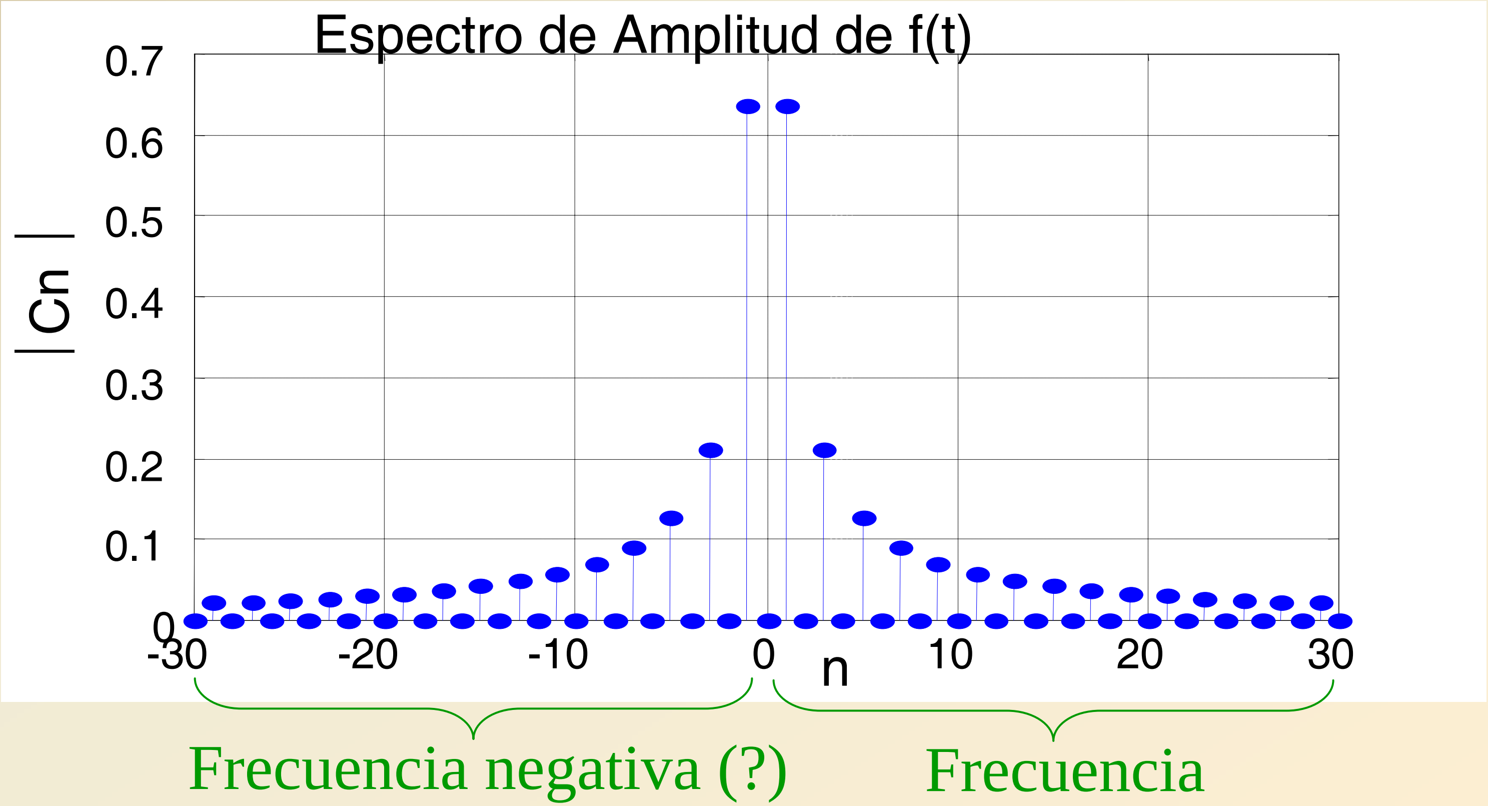


Se encontró que $c_n = -j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$

Por lo tanto, $|c_n| = \frac{1}{|n|\pi}[1-(-1)^n]$

Espectros de Frecuencia Discreta

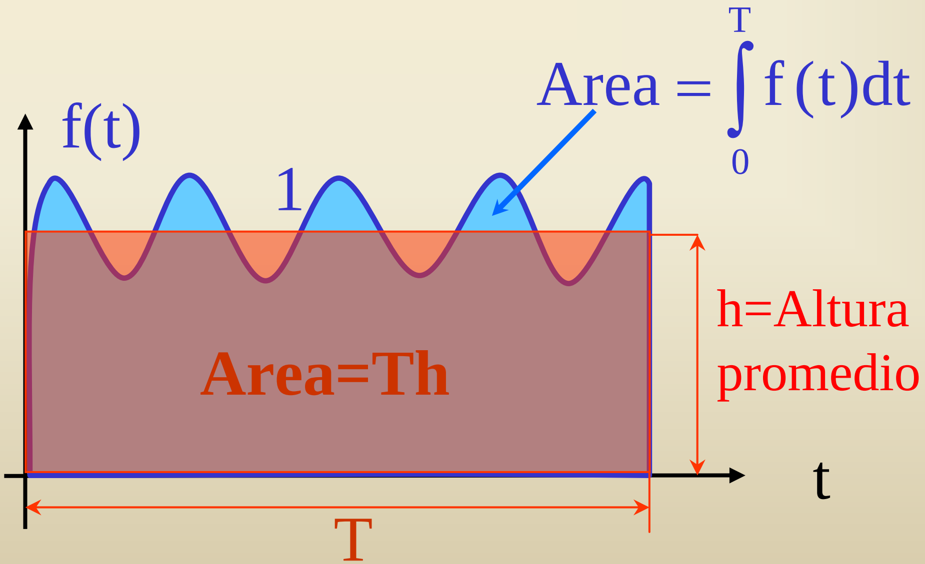
El espectro de amplitud se muestra a continuación



Observación: El eje horizontal es un eje de frecuencia, (n=número de armónico = múltiplo de ω_0).

Potencia y Teorema de Parseval

El ***promedio*** o ***valor medio*** de una señal cualquiera f(t) en un periodo dado (T) se puede calcular como la altura de un rectángulo que tenga la misma área que el área bajo la curva de f(t)



Potencia y Teorema de Parseval

De acuerdo a lo anterior, si la función periódica f(t) representa una señal de voltaje o corriente, la ***potencia promedio*** entregada a una carga resistiva de 1 ohm en un periodo está dada por

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt$$

Si f(t) es periódica, también lo será $[f(t)]^2$ y el promedio en un periodo será el promedio en cualquier otro periodo.

Potencia y Teorema de Parseval

El teorema de Parseval nos permite calcular la integral de $[f(t)]^2$ mediante los coeficientes complejos c_n de Fourier de la función periódica f(t):

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2$$

O bien, en términos de los coeficientes a_n, b_n:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Potencia y Teorema de Parseval

Una consecuencia importante del teorema de Parseval es el siguiente resultado:

El valor cuadrático medio de una función periódica f(t) es igual a la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos, es decir,

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right|^2$$

Donde C_n es la amplitud del armónico n-ésimo y C_0 es la componente de directa.

Potencia y Teorema de Parseval

Para aclarar el resultado anterior es conveniente encontrar la relación entre los coeficientes complejos c_n de la serie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Y los coeficientes reales C_n de la serie

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]$$

Donde C_n es la amplitud del armónico n-ésimo y C_0 es la componente de directa.

Potencia y Teorema de Parseval

Por un lado $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

Mientras que $|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

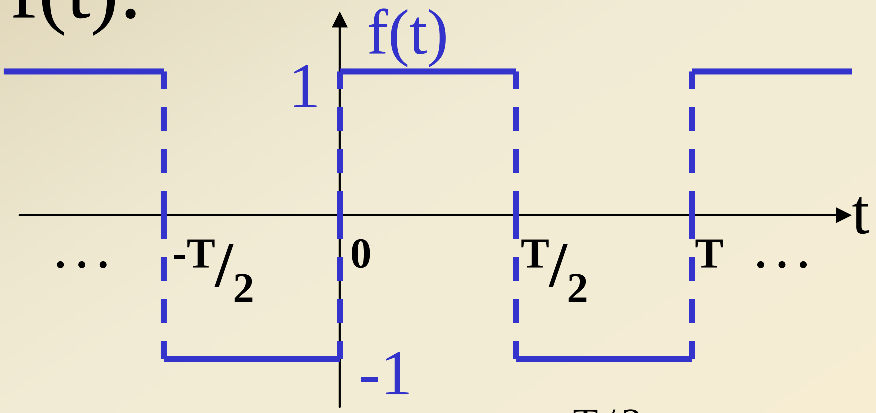
Entonces, $|c_n| = \frac{1}{2} C_n$ Por lo tanto, $|c_n|^2 = \frac{1}{4} C_n^2$

Además, para el armónico $f_n(t) = C_n\left[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]$
Su valor rms es $C_n/\sqrt{2}$, por lo tanto su valor cuadrático medio es $C_n^2/2$

Para la componente de directa C_0, su valor rms es $|C_0|$, por lo tanto su valor cuadrático medio será $|C_0|^2$.

Potencia y Teorema de Parseval

Ejemplo. Calcular el valor cuadrático medio de la función f(t):



Solución.

Del teorema de Parseval $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$

y del ejemplo anterior $|c_n| = \frac{1}{|n|\pi}[1-(-1)^n]$

sustituyendo $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{8}{\pi^2}\left[1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+...\right]$

Potencia y Teorema de Parseval

La serie numérica obtenida converge a

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots=1.2337$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2=\frac{8}{\pi^2}(1.2337)=1$$

Como era de esperarse.

De la Serie a la Transformada de Fourier

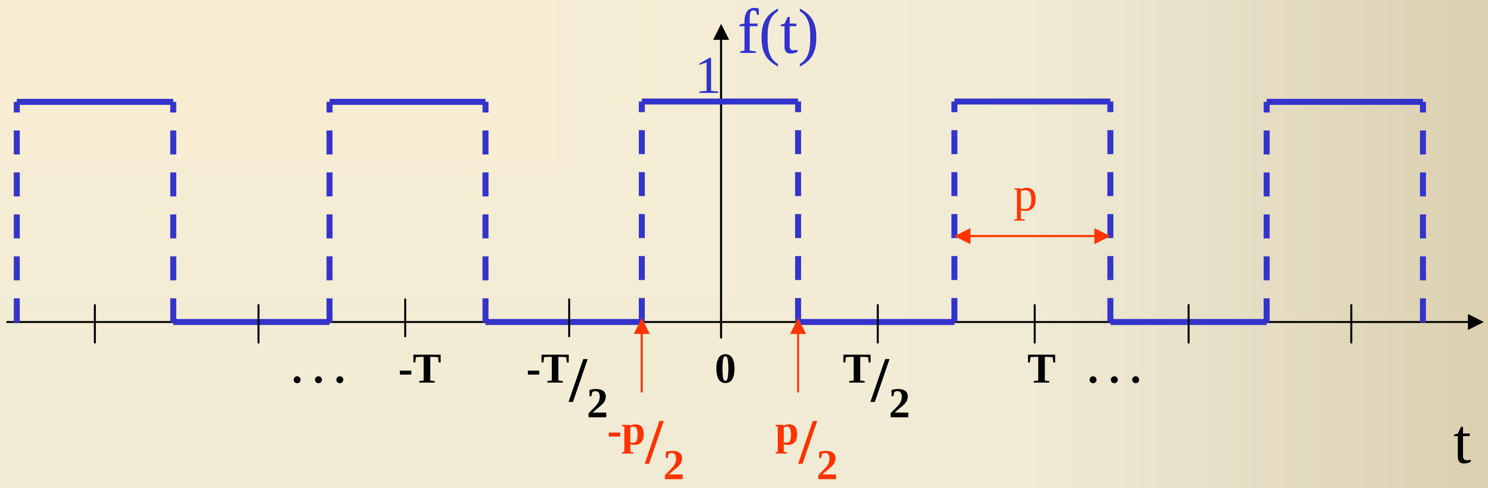
La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia para *funciones periódicas* f(t).

¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener el dominio de la frecuencia de ***funciones no periódicas***?

Consideremos la siguiente función periodica de periodo T

De la Serie a la Transformada de Fourier

Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T:



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \frac{-T}{2} < t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

De la Serie a la Transformada de Fourier

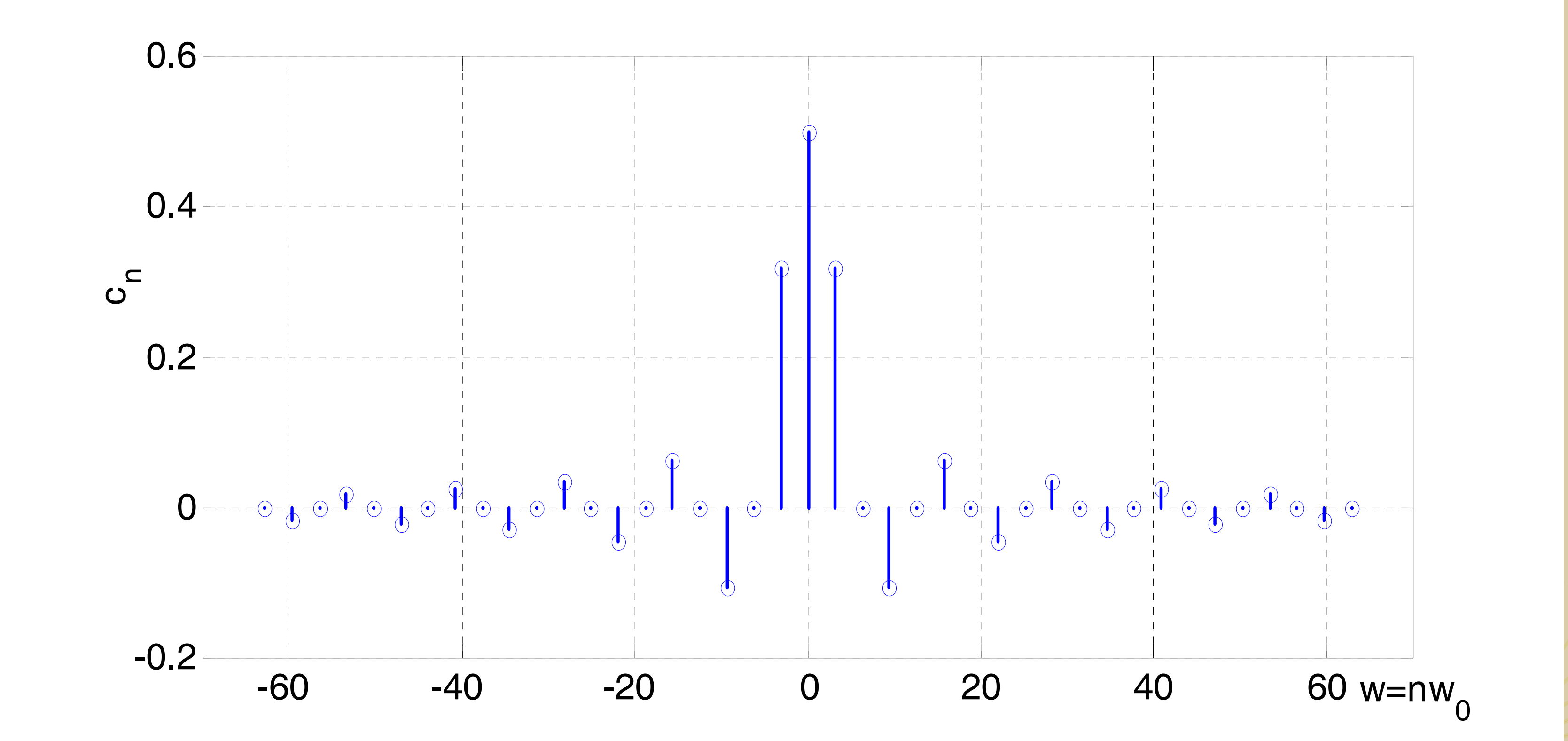
Los coeficientes de la Serie Compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right)\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra $\omega = n\omega_0$.

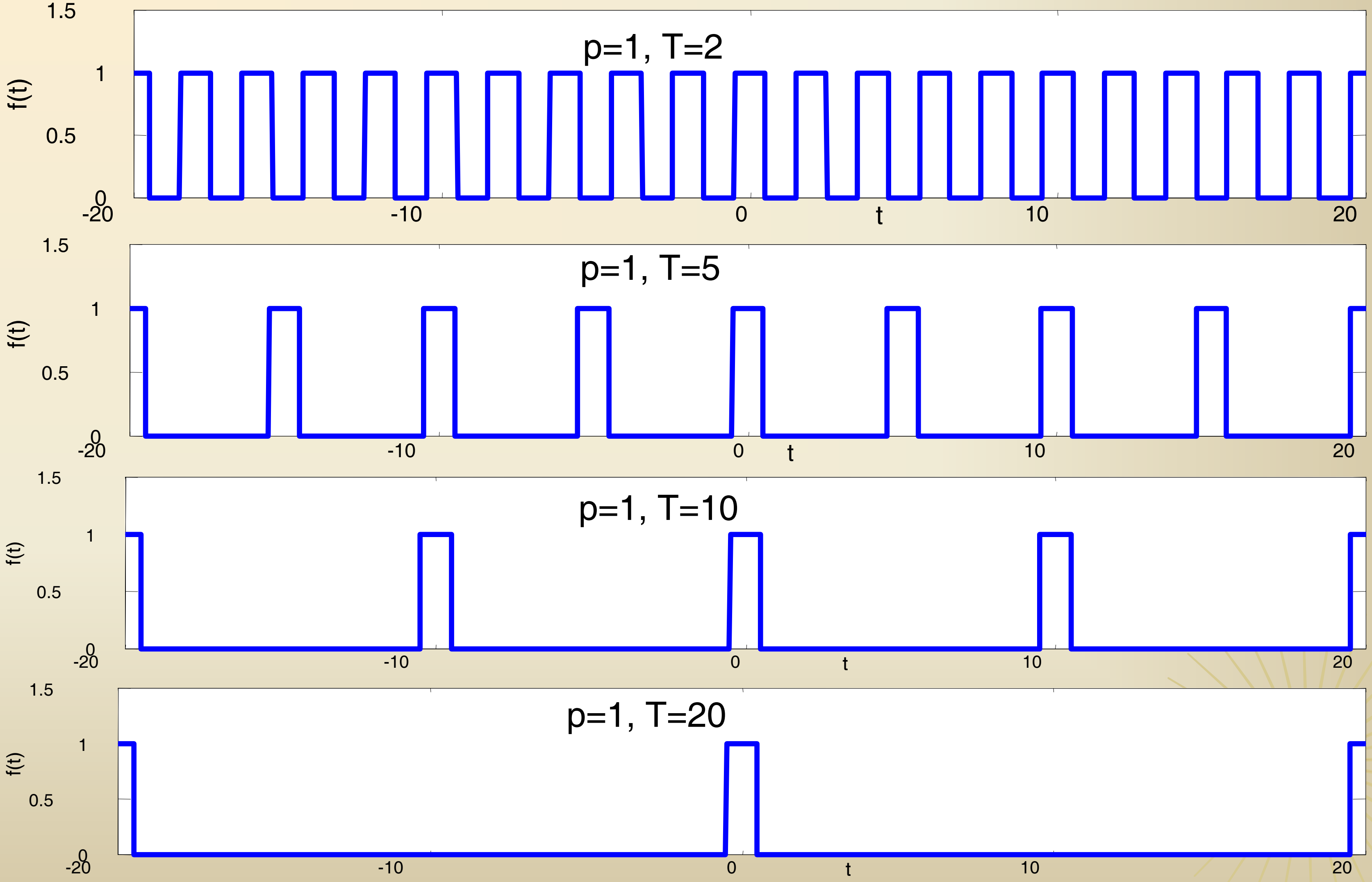
De la Serie a la Transformada de Fourier

Espectro del tren de pulsos para p=1, T=2



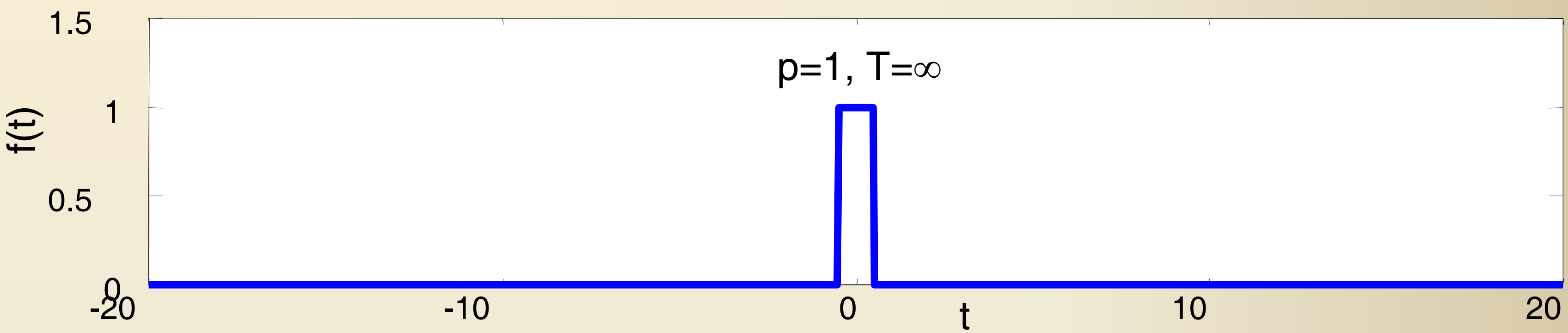
De la Serie a la Transformada de Fourier

Si el periodo del tren de pulsos aumenta:



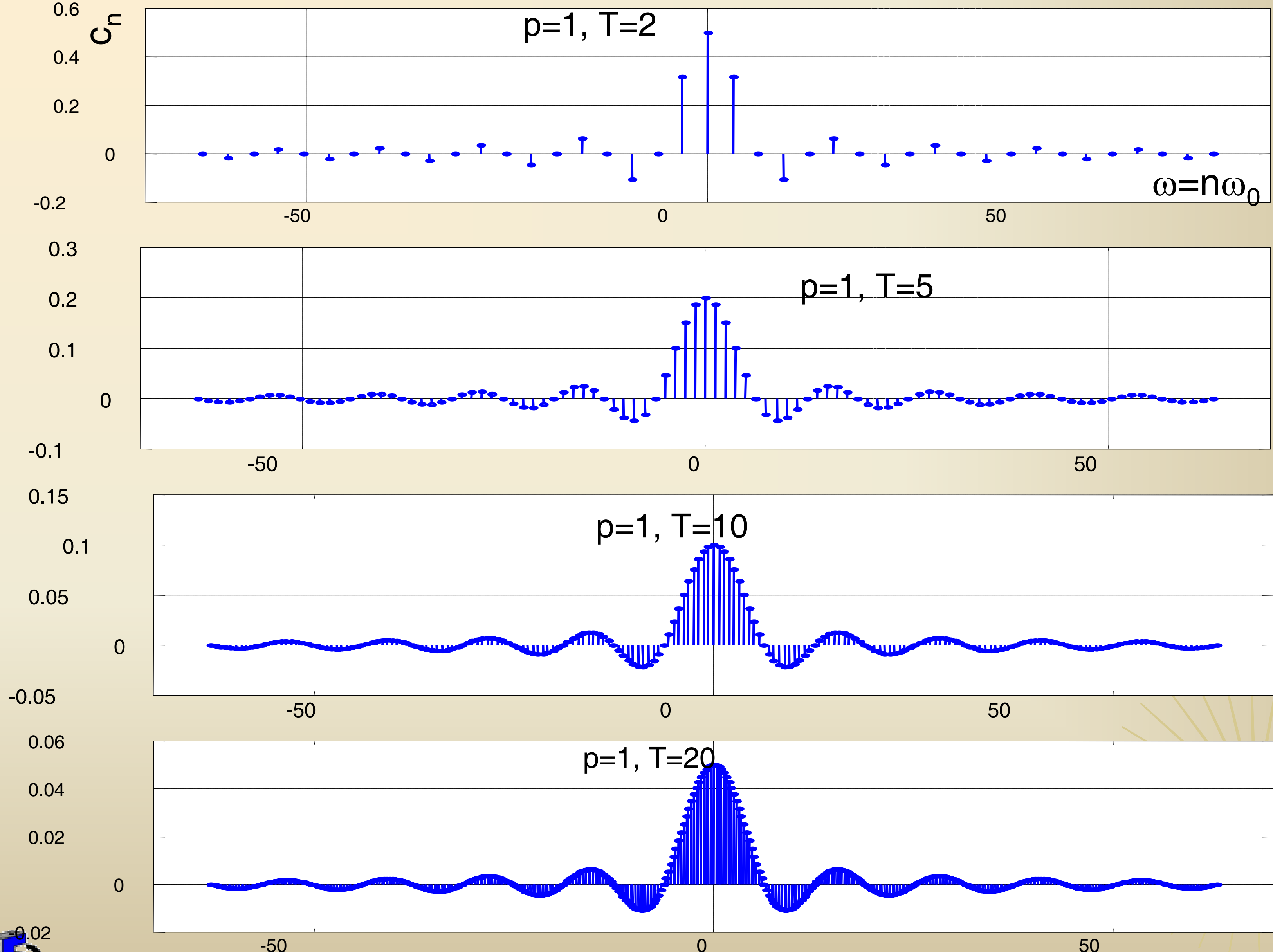
De la Serie a la Transformada de Fourier

En el límite cuando $T \to \infty$, la función deja de ser periódica:



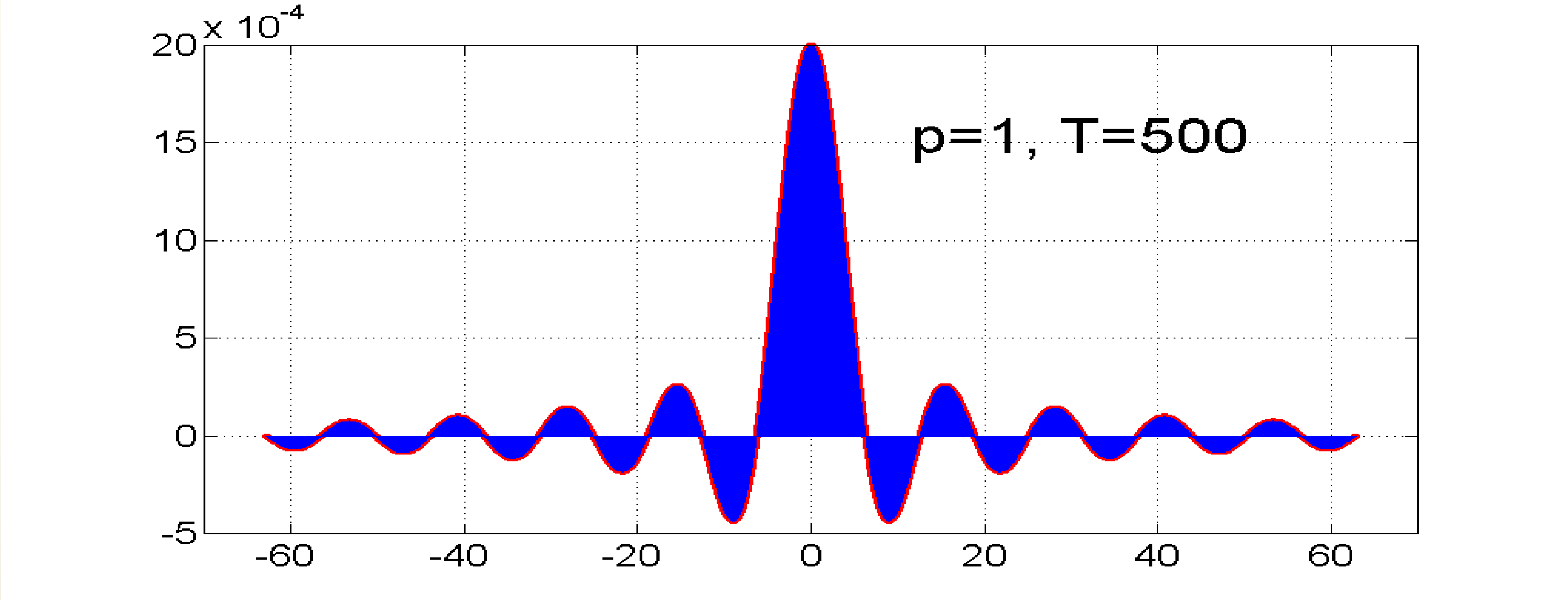
¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

De la Serie a la Transformada de Fourier



De la Serie a la Transformada de Fourier

Si hace T muy grande ($T \to \infty$): El espectro se vuelve ¡***continuo***!



De la Serie a la Transformada de Fourier

El razonamiento anterior nos lleva a reconsiderar la expresión de una función f(t) ***no periódica*** en el dominio de la frecuencia, **no** como una suma de armónicos de frecuencia $n\omega_0$, sino como una función continua de la frecuencia ω.

Así, la serie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Al cambiar la variable discreta $n\omega_0$ (cuando $T\to\infty$) por la variable continua ω, se transforma en una ***integral*** de la siguiente manera:

De la Serie a la Transformada de Fourier

Como $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

La serie queda $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]e^{jn\omega_0 t}$

O bien, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]\omega_0 e^{jn\omega_0 t}$

cuando $T\to\infty$, $n\omega_0\to\omega$ y $\omega_0\to d\omega$ y la sumatoria se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$$

De la Serie a la Transformada de Fourier

Es decir,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Identidad de Fourier

Donde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Transformada De Fourier

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión F(ω) (dominio de la frecuencia) a partir de f(t) (dominio del tiempo) y viceversa

De la Serie a la Transformada de Fourier

Notación: A la función F(ω) se le llama ***transformada de Fourier de f(t)*** y se denota por F, es decir

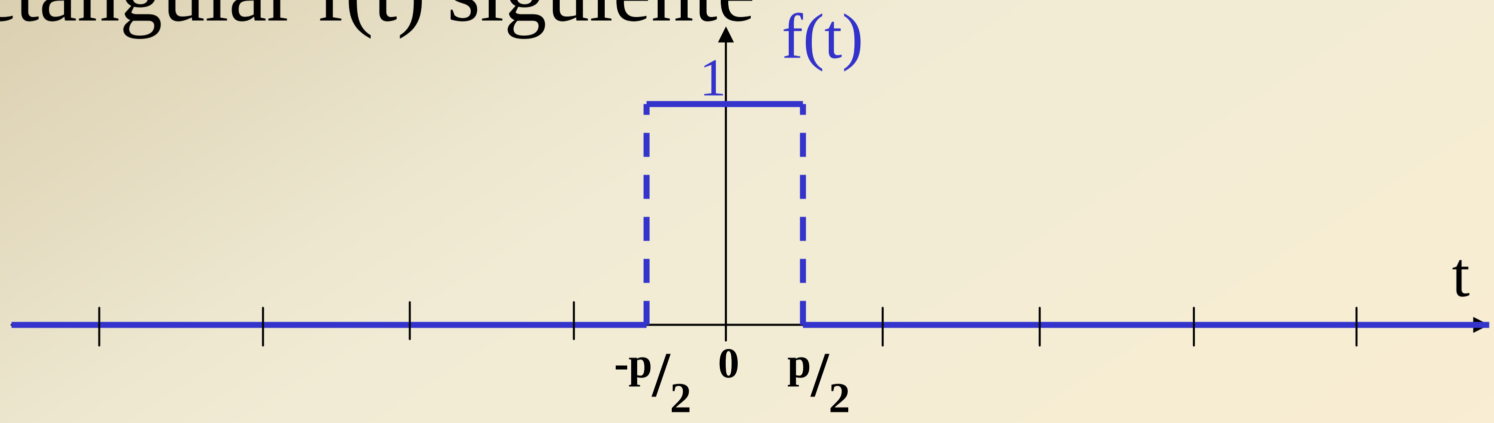
$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

En forma similar, a la expresión qu enos permite obtener f(t) a partir de F(w) se le llama ***transformada inversa de Fourier*** y se denota por $\mathcal{F}^{-1}$,es decir

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

De la Serie a la Transformada de Fourier

Ejemplo. Calcular F(w) para el pulso rectangular f(t) siguiente



Solución. La expresión en el dominio del tiempo de la función es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

De la Serie a la Transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-p/2}^{p/2} e^{-j\omega t} dt$$

Integrando

$$= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-p/2}^{p/2}$$

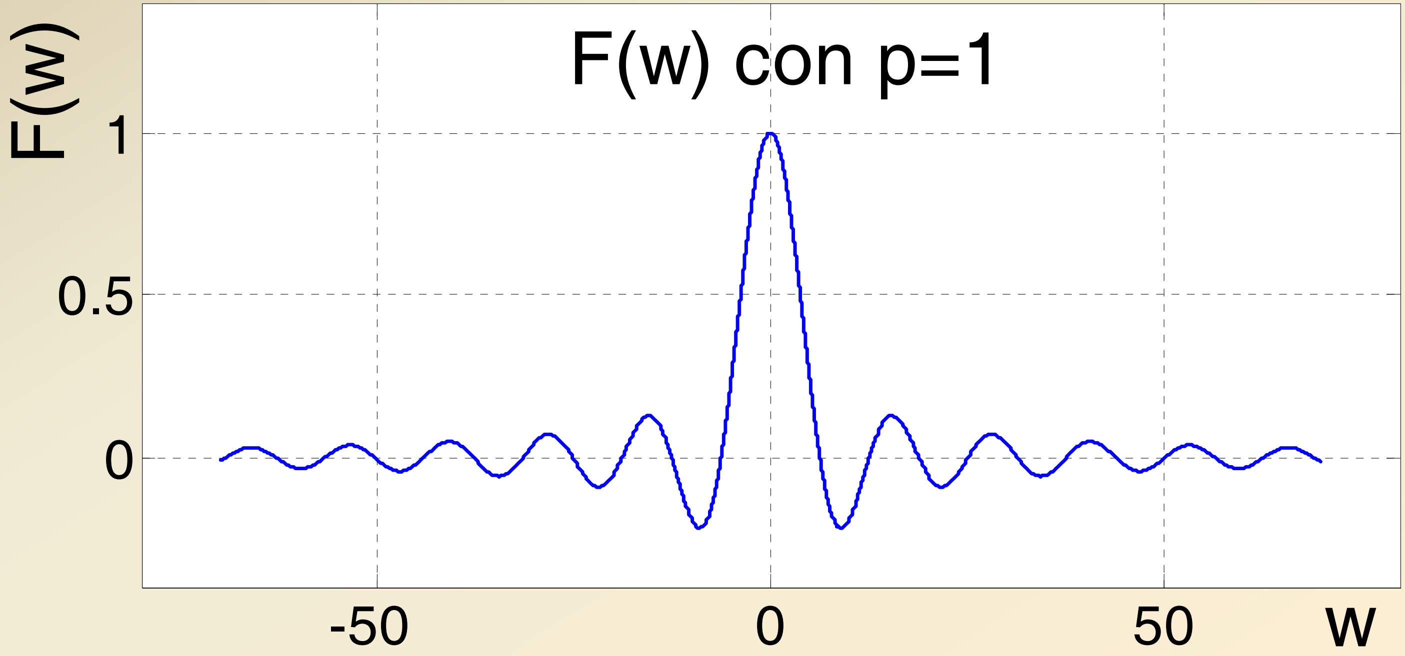
$$= \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega p/2} - e^{j\omega p/2})$$

Usando la fórmula de Euler $F(\omega) = p \dfrac{\mathrm{sen}(\omega p/2)}{\omega p/2}$

Obsérvese que el resultado es igual al obtenido para cn cuando $T \to \infty$, pero multiplicado por T.

De la Serie a la Transformada de Fourier

En forma Gráfica



La Transformada Rápida de Fourier

Cuando la función f(t) está dada por una lista de N valores $f(t_1)$, $f(t_2)$, ...$f(t_N)$ se dice que está ***discretizada o muestreada***, entonces la integral que define la Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Se convierte en la sumatoria

$$\boxed{F(n) = \sum_{k=1}^{N} f(t_k) e^{-j\frac{2\pi n}{N}(k-1)}, \quad \text{para } 1 \leq n \leq N}$$

(Donde k es la frecuencia discreta)

Llamada ***Transformada Discreta de Fourier***

La Transformada Rápida de Fourier

La Transformada Discreta de Fourier (DFT) requiere el cálculo de N funciones exponenciales para obtener F(n), lo cual resulta un esfuerzo de cálculo enorme para N grande.

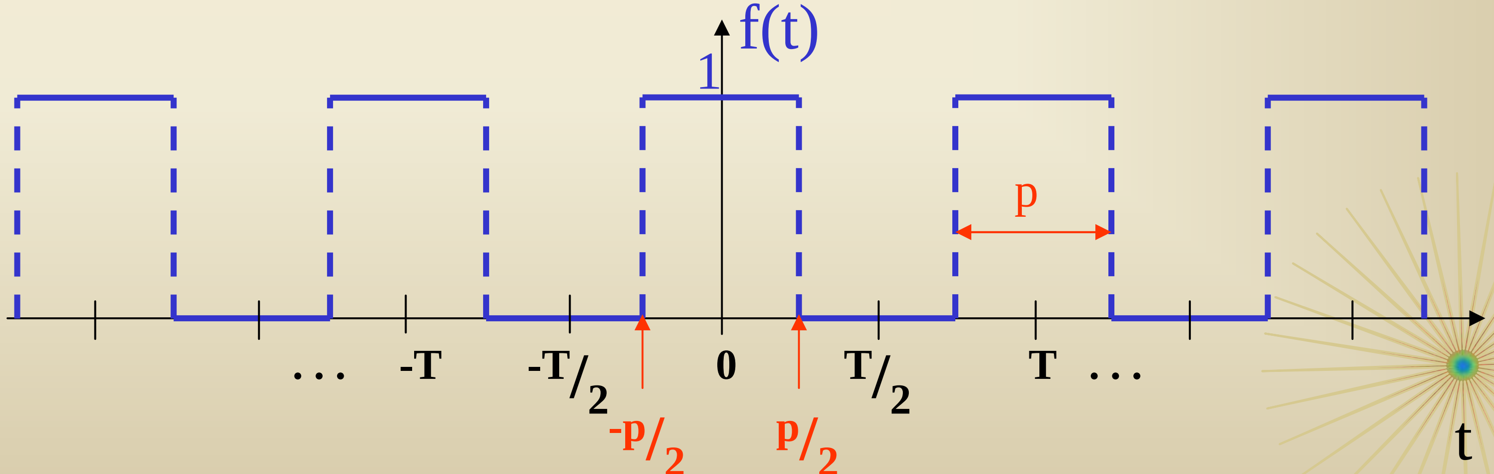
Se han desarrollado métodos que permiten ahorrar cálculos y evaluar de manera rápida la Transformada discreta, a estos métodos se les llama

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

La FFT y la Serie de Fourier

Podemos hacer uso de la FFT para calcular los coeficientes c_n y c_{-n} de la Serie compleja de Fourier como sigue:

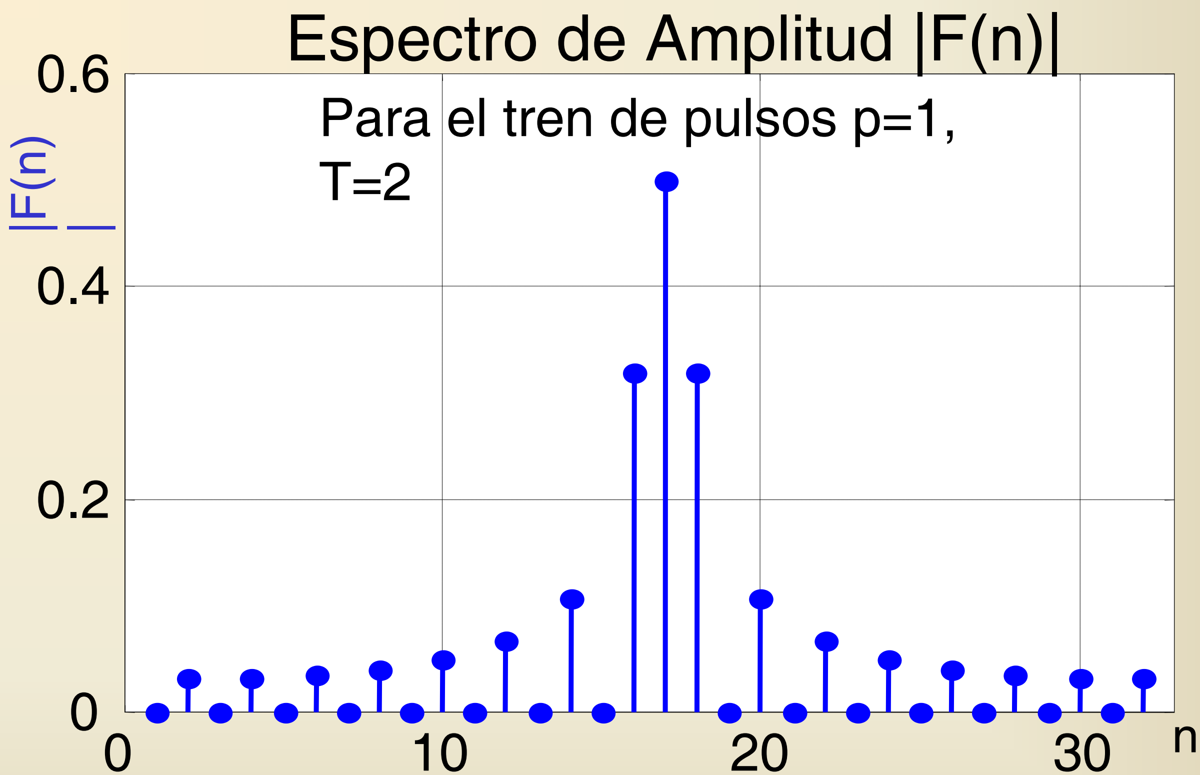
Ejemplo: Sea f(t) el tren de pulsos de ancho p y periodo T.



La FFT y la Serie de Fourier

La versión muestreada f(k) de f(t) sólo puede tomar un número finito de puntos. Tomemos por ejemplo N=32 puntos cuidando que cubran el intervalo de 0 a T (con p=1, T=2):

La FFT y la Serie de Fourier



Si deseamos una escala horizontal en unidades de frecuencia (rad/seg):

La FFT y la Serie de Fourier

También podemos obtener los coeficientes de la forma trigonométrica, recordando que:

$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

Podemos obtener

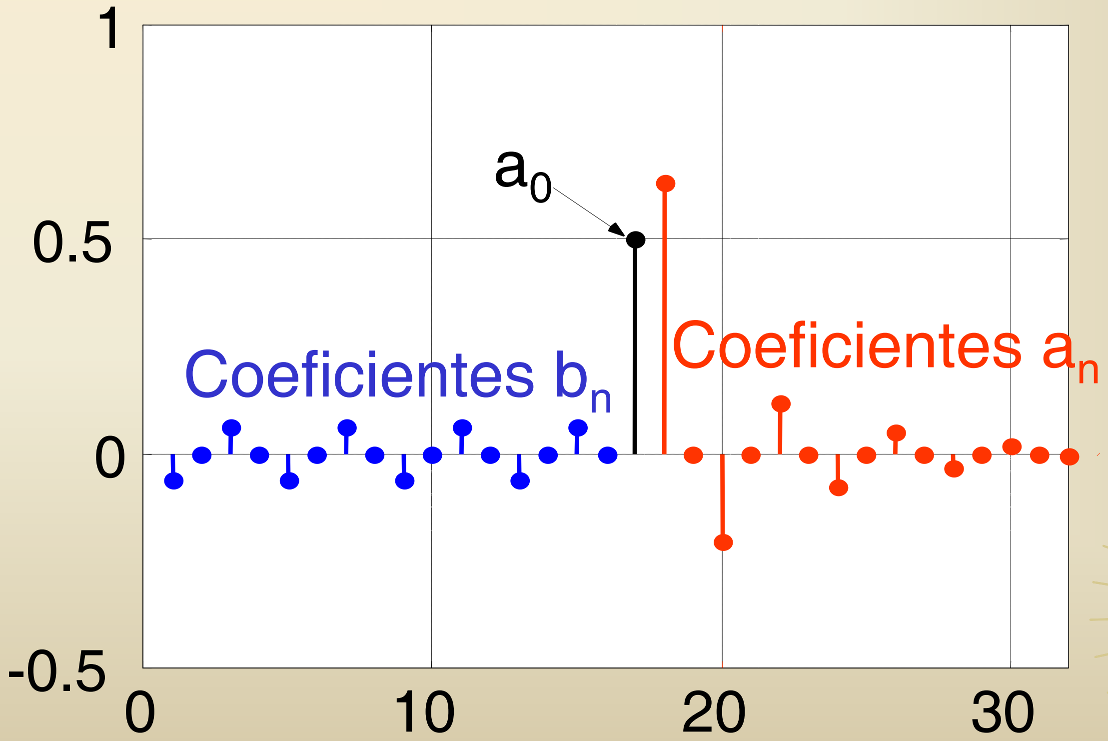
$$a_0 = c_0, \quad a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n), \quad b = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$$

Para el ejemplo se obtiene: a_0=0.5, a_n=b_n=0 (para n par), además para n impar:

n	1	3	5	7	9	11	13	15
$\mathbf{a_n}$	0.6346	-0.2060	0.1169	-0.0762	0.0513	-0.0334	0.0190	-0.0062
$\mathbf{b_n}$	-0.0625	0.0625	-0.0625	0.0625	-0.0625	0.0625	-0.0625	0.0625

La FFT y la Serie de Fourier

Como el tren de pulsos es una función par, se esperaba que $b_n=0$; (el resultado obtenido es erróneo para b_n, pero el error disminuye para N grande):



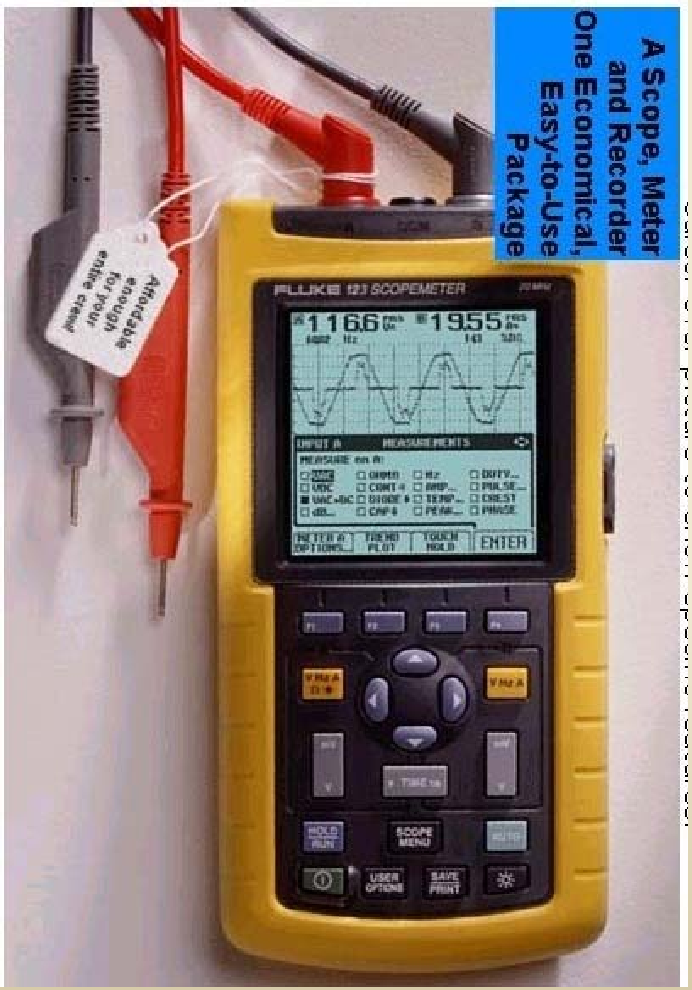
Medidores Digitales

La FFT ha hecho posible el desarrollo de equipo electrónico digital con la capacidad de cálculo de espectros de frecuencia para señales del mundo real, por ejemplo:

1) Osciloscopio digital Fuke 123 (**$ 18,600.00 M.N.**)
2) Osc. digital Tektronix THS720P (**$3,796 dls**)
3) Power Platform PP-4300

Medidores Digitales

El Fluke 123 scope meter



Medidores Digitales

Tektronix THS720P (osciloscopio digital)

Medidores Digitales

Analizador de potencia PP-4300

Es un equipo especializado en monitoreo de la calidad de la energía: permite medición de 4 señales simultáneas (para sistemas trifásicos)

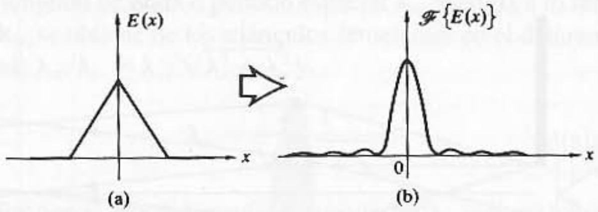


FIGURA 11.6 La transformada de la función del triángulo es la función sinc^2.

11.2.3 La función delta de Dirac

Puesto que muchos fenómenos físicos acontecen en períodos de tiempo muy breves y con gran intensidad, a menudo lo que interesa es la respuesta consecuente de algún sistema a este tipo de estímulos. Por ejemplo: ¿Cómo responderá un dispositivo mecánico, por ejemplo una bola de billar, al ser golpeado por un martillo? o ¿cuál será el comportamiento de un circuito si la corriente de entrada es una descarga corta? De la misma forma, puede imaginarse que algún estímulo sea un pulso repentino en el dominio del espacio, en lugar de en el dominio del tiempo. Una fuente pequeña brillante de luz sumergida en un fondo negro es, esencialmente, un pulso espacial bidimensional y altamente localizado —un pico de irradiancia. Una representación matemática oportunamente idealizada de este tipo de estímulo claramente puntiagudo es la **función delta de Dirac** $\delta(x)$. Se trata de una cantidad cuyo valor es cero en todas partes excepto en el origen donde tiende al infinito de manera que abarca un *área unidad*, es decir

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \tag{11.26}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1 \tag{11.27}$$

Ésta no es realmente una función en el sentido matemático tradicional. De hecho, como su naturaleza es tan singular, estuvo en el centro de una gran controversia después de que P.A.M. Dirac volviera a presentarla y destacara su importancia en 1930. Sin embargo, los físicos, que a veces dan prueba de gran pragmatismo, pensaron que era tan sumamente útil que pronto se admitió como herramienta a pesar de la supuesta falta de justificación rigurosa. La teoría matemática precisa de la función delta se desarrolló unos veinte años después, en los primeros

Tal vez la operación más básica de aplicación de la $\delta(x)$ sea la evaluación de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\,dx$$

Aquí la expresión $f(x)$ corresponde a cualquier función continua. En un intervalo diminuto que va de $x = -\gamma$ a $+\gamma$ centrado alrededor del origen, $f(x) \approx f(0) \approx$ constante puesto que la función es continua en $x = 0$. De $x = -\infty$ a $x = -\gamma$ y de $x = +\gamma$ a $x = +\infty$, la integral es cero sencillamente porque allí la función δ es cero. Por lo tanto la integral equivale a

$$f(0) \int_{-\gamma}^{+\gamma} \delta(x)\,dx$$

Como $\delta(x) = 0$ para toda x distinta de 0, el intervalo puede ser cada vez más pequeño, es decir, $\gamma \to 0$, y todavía

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} \delta(x)\,dx = 1$$

de la ecuación (11.27). Por lo tanto, el resultado exacto es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\,dx = f(0) \tag{11.28}$$

A menudo, esto se denomina **propiedad de localización** de la función δ porque sólo puede extraer el valor de $f(x)$ tomado en $x = 0$ de entre todos sus posibles valores. De manera parecida, desplazando el origen de una cantidad x_0

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases} \tag{11.29}$$

quedando el pico en $x = x_0$ en lugar de $x = 0$, como se muestra en la figura 11.7. La propiedad de localización correspondiente puede apreciarse dejando $x - x_0 = x'$, entonces con $f(x' + x_0) = g(x')$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x') g(x')\,dx' = g(0)$$

y puesto que $g(0) = f(x_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x)\,dx = f(x_0). \tag{11.30}$$

Formalmente, más que preocuparse por una definición precisa de $\delta(x)$ para cada valor de x, sería más productivo continuar a lo largo de las líneas definiendo el efecto de $\delta(x)$ en alguna otra

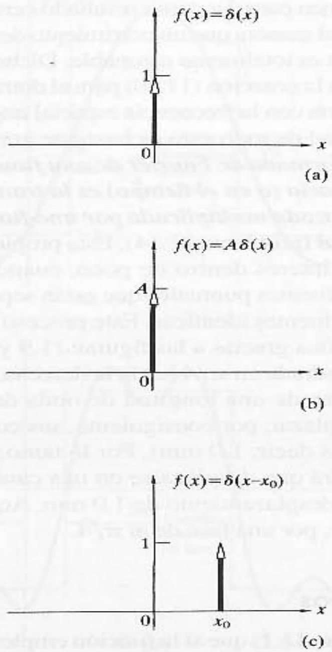


FIGURA 11.7 La altura de la flecha que representa a la función delta corresponde al área bajo la función.

te la definición de una operación completa la cual asigna un

[redacted]

bro de los cuales tenga un ancho que sea cada vez menor y la altura cada vez mayor, de manera que cualquier pulso abarque un área unidad. Una secuencia de pulsos cuadrados de altura a/L y ancho L/a para los cuales i = 1, 2, 3,... satisfaría el objetivo al igual que una secuencia gaussiana [ecuación (11.11)],

$$\delta_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-ax^2} \qquad (11.31)$$

como en la figura 11.8 o una secuencia de funciones sinc

$$\delta_a(x) = \frac{a}{\pi}\,\text{sinc}\,(ax) \qquad (11.32)$$

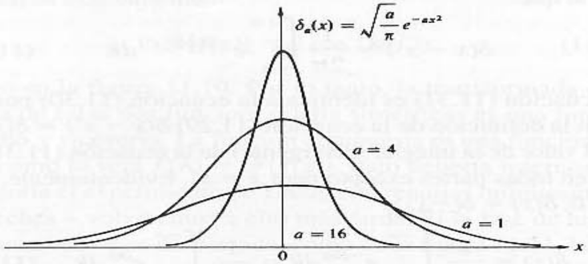


FIGURA 11.8 Una sucesión de gaussianas.

Tales funciones que son muy agudas y que se aproximan a la propiedad de localización, es decir, para las cuales

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) f(x)\, dx = f(0) \qquad (11.33)$$

se denominan *secuencias delta*. Frecuentemente es útil, aunque en realidad no sea rigurosamente correcto, imaginar $\delta(x)$ como límite de convergencia de tales secuencias cuando $a \to \infty$. La extensión de estas ideas a dos dimensiones está proporcionada por la definición

$$\delta(x,y) = \begin{cases} \infty & x = y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (11.34)$$

y

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,y)\, dx\, dy = 1 \qquad (11.35)$$

[redacted]

$$\int\int_{-\infty} f(x,y)\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\, dx\, dy = f(x_0,y_0) \qquad (11.36)$$

De la ecuación (11.3) se deduce otra representación de la función δ, la integral de Fourier que puede reescribirse como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x')}\, dk \right] f(x')\, dx'$$

y por lo tanto

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') f(x')\, dx' \qquad (11.37)$$

con tal que

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x')}dk \qquad (11.38)$$

La ecuación (11.37) es idéntica a la ecuación (11.30) porque según la definición de la ecuación (11.29) $\delta(x - x') = \delta(x' - x)$. El valor de la integral (divergente) de la ecuación (11.38) es cero en todas partes excepto para $x = x'$. Evidentemente, con $x' = 0$, $\delta(x) = \delta(-x)$ y

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk \qquad (11.39)$$

Esto quiere decir que, a través de la ecuación (11.4), la función delta puede considerarse como la transformada de Fourier inversa de la unidad, es decir, $\delta(x) = \mathscr{F}^{-1}\{1\}$ y por lo tanto $\mathscr{F}\{\delta(x)\} = 1$. Podemos imaginar un pulso cuadrado estrechándose y alargándose cada vez más mientras que su transformada, a su vez, se va ensanchando hasta que, finalmente, el ancho del pulso sea infinitesimal y la extensión de su transformada infinita, es decir, una constante.

Desplazamientos y corrimientos de fase

Si el pico δ es desplazado fuera de $x = 0$ hasta, digamos, $x = x_0$, su transformada cambiará de fase pero no de amplitud que permanecerá igual a uno. Para ver lo anterior, evaluemos

$$\mathscr{F}\{\delta(x - x_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)e^{ikx}\,dx$$

De la propiedad de localización (11.30) la expresión se convierte en

$$\mathscr{F}\{\delta(x - x_0)\} = e^{ikx_0} \qquad (11.40)$$

Resulta que solo la fase se ve afectada mientras que el valor de la amplitud es uno como cuando $x_0 = 0$. Todo este proceso puede apreciarse un poco más intuitivamente si pasamos al dominio del tiempo y pensamos en un pulso infinitesimalmente estrecho (como

frecuencia particular. Además, sabemos que todas estas componentes se superponen para dar como resultado cero en todas partes excepto en t_0, de tal manera que un corrimiento de fase dependiente de la frecuencia es totalmente razonable. Dicho corrimiento de fase es evidente en la ecuación (11.40) para el dominio del espacio. Obsérvese que varía con la frecuencia espacial angular k.

La aplicabilidad de todo esto es bastante general y observamos que ***la transformada de Fourier de una función que es desplazada en el espacio (o en el tiempo) es la transformada de la función no desplazada multiplicada por una función exponencial con fase lineal*** (problema 11.14). Esta propiedad de la transformada será de interés dentro de poco, cuando se analice la imagen de varias fuentes puntuales que están separadas pero que por lo demás son fuentes idénticas. Este proceso puede apreciarse de manera gráfica gracias a las figuras 11.9 y 7.19. Para desplazar la onda cuadrada en $\pi/4$ hacia la derecha, la fundamental deberá desplazarse de una longitud de onda de $\frac{1}{8}$ (o 1,0 mm), teniendo que desplazar, por consiguiente, sus componentes una distancia igual (es decir, 1,0 mm). Por lo tanto, la fase de cada componente tendrá que desplazarse en una cantidad específica que produzca un desplazamiento de 1,0 mm. Aquí, cada cual se desplaza, a su vez, por una fase de $m\,\pi/4$.

Senos y cosenos

Vimos antes (figura 11.1) que si la función empleada puede escribirse como suma de funciones individuales, su transformada es simplemente la suma de las transformadas de las funciones componentes. Supongamos que tenemos una cadena de funciones delta esparcidas de manera uniforme como los dientes de un peine,

$$f(x) = \sum_j \delta(x - x_j) \qquad (11.41)$$

Cuando el número de términos es infinito, la función periódica se denomina a menudo *peine(x)*. De cualquier manera, la transformada será simplemente la suma de los términos como los de la ecuación (11.40):