



Plan de estudios: 1995

Núcleo Temático: Naturaleza de las señales

Temas: Señales analógicas y de pulsos. Señales periódicas y no periódicas.

Descomposición de una señal por serie y transformada de Fourier, armónicas.

Espectro de un tren de pulsos. Ancho de banda de un tren de pulsos.

Profesores: Ingenieros Guillermo Mariano Chaile y Ricardo José Corbella

Jefe de T.P.: Ing. José Emilio Monachesi

Año: 2003

### Naturaleza de las señales

En la naturaleza existen diversas formas de energía que impresionan a nuestros sentidos bajo la forma de señales y que actúan de diferentes maneras. Por ejemplo llegan al oído bajo la forma de señales acústicas o a nuestros ojos bajo la forma de señales luminosas. En física se dice que estas señales se presentan como formas o frentes de ondas que tienen una determinada intensidad o potencia y también una composición de frecuencias de repetición y que al variar en el tiempo cualquiera de estas magnitudes de manera impredecible constituyen señales de información.

Cuando se diseñan los circuitos electrónicos para ser utilizados en los sistemas de comunicación, frecuentemente es necesario analizar y predecir el funcionamiento del mismo mediante el “análisis de señales”, utilizando poderosas herramientas matemáticas como el “análisis de Fourier” para determinar por ejemplo su distribución de potencia y la composición de frecuencias de las señales que transportan información. Estas señales pueden estar representadas por funciones senoidales o cosenoidales de frecuencia sencilla o de forma de onda compleja que se pueden representar por una sumatoria de funciones seno o coseno.

### Señales senoidales

El análisis de señales es en esencia el análisis matemático de la frecuencia, el ancho de banda ocupado por la señal y el nivel o amplitud de la misma representada por ejemplo por una tensión o una corriente eléctrica. Las señales eléctricas son variaciones de tensión o de corriente con respecto al tiempo que pueden expresarse por una función seno o coseno o por una sumatoria de todas ellas. Matemáticamente, la forma de onda más sencilla y de una determinada frecuencia de una tensión o una corriente eléctrica es:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi); \quad v(t) = V_m \sin(2\pi f t + \varphi) \quad \text{o} \quad i(t) = I_m \sin(2\pi f t + \varphi)$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi); \quad v(t) = V_m \cos(2\pi f t + \varphi) \quad \text{o} \quad i(t) = I_m \cos(2\pi f t + \varphi)$$

En donde:

$v(t)$  = onda de voltaje que varía en forma senoidal o cosenoidal con el tiempo

$i(t)$  = onda de corriente que varía en forma senoidal o cosenoidal con el tiempo

$V_m$  = valor máximo o de pico (Volts)

$I_m$  = valor máximo o de pico (Amperes)

$f$  = frecuencia (Hertz)

$\varphi = \omega t$  = fase inicial de la señal (radianes)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \text{velocidad angular (radianes/segundo)}$$

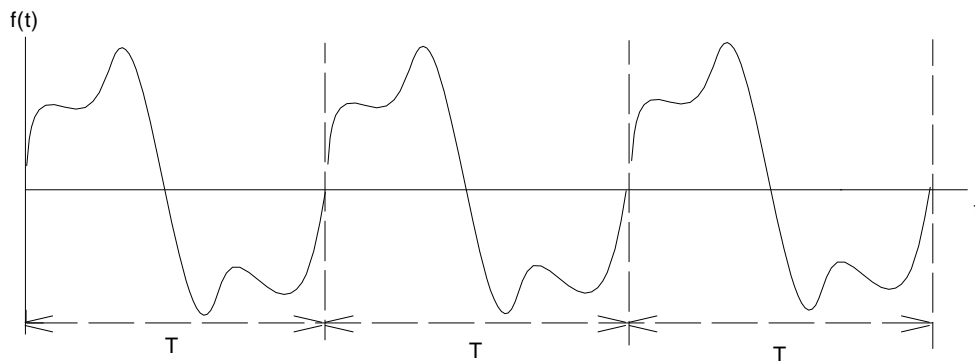


### Características de las señales periódicas

Para conocer las características de las señales que se transmiten por los medios de comunicación es imprescindible el estudio de las señales periódicas. Se dice que una señal es periódica, de período T, cuando resulta:

$$f(t) = f(t+T) \text{ y } \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} = \frac{\partial^n f(t+T)}{\partial t^n} \text{ para todo valor de } n$$

En efecto, la siguiente figura nos muestra una señal de estas características, donde T es el período que debe satisfacer la ecuación anterior.



### La función senoidal de armónica simple

Una de las formas mas comunes de las señales analógicas es la función senoidal de armónica simple. Esta señal es la que se genera cuando una espira de alambre gira a una velocidad angular constante en el interior de un campo magnético generado por los polos de un imán. Este equipo se denomina alternador de una espira, y la fuerza electromotriz que se induce en la espira está dada por la siguiente expresión:

$$e(t) = E_m \text{sen}(\omega t + \phi)$$

donde:

$E_m$  = amplitud \_ máxima \_ de \_ la \_ señal \_ medida \_ en \_ voltios

$\omega$  = pulsación \_ angular \_ en \_ radianes/ segundo

$$\omega = 2\pi f$$

$f = \frac{1}{T}$ ; es \_ la \_ frecuencia \_ de \_ repetición \_ medida \_ en \_ Hertz

$T = \frac{1}{f}$ ; es \_ el \_ período \_ medido \_ en \_ segundos

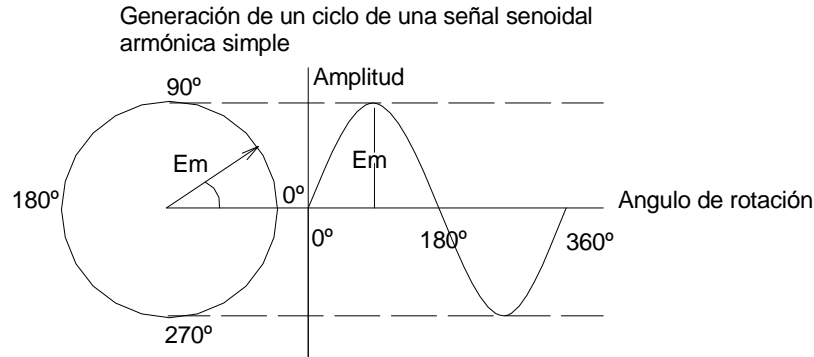
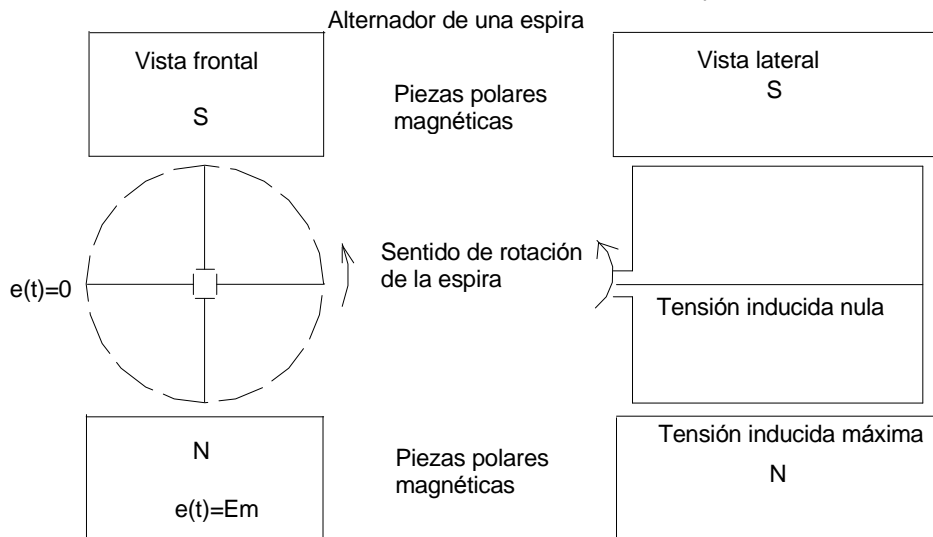
$\phi$  = ángulo \_ de \_ fase \_ inicial \_ en \_ radianes

Como se verá a continuación, cada uno de estos parámetros tiene un significado preciso en la forma de onda generada.

La siguiente figura representa gráficamente un ciclo completo de revolución de la espira.



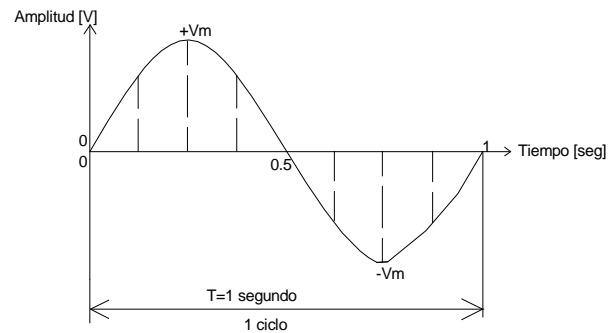
Las expresiones anteriores representan una forma de onda repetitiva sencilla y de una sola frecuencia. Una forma de onda así representada se llama “onda periódica” porque se repite en un rango uniforme (es decir, cada ciclo sucesivo de la señal tiene exactamente la misma duración de tiempo y exactamente las mismas variaciones de amplitud que cualquier otro ciclo y cada ciclo tiene exactamente la misma forma).



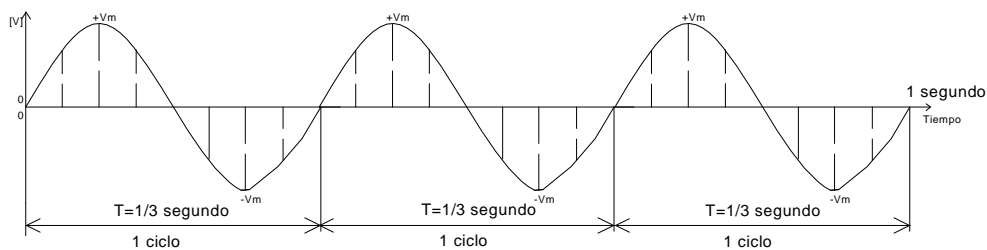
Esta figura representa gráficamente un ciclo completo de revolución de la espira y la tensión que se ha generado en la misma en función del ángulo de giro respecto a las piezas polares del imán permanente, hasta completar un ciclo. La rotación continua de la espira genera una señal periódica. Cuando ha girado  $360^\circ$ , decimos que la señal ha completado un ciclo y que en radianes será igual a  $2\pi$ .

Período: es el tiempo que tarda la señal en completar un ciclo. Se representa con la letra T y se mide en segundos.

Frecuencia: es el número de ciclos completos que tiene lugar la función en un segundo y se mide en ciclos por segundo o Hertz. Por ejemplo una frecuencia de 1 Hertz corresponde a 1 ciclo por segundo y una frecuencia de 3 Hertz corresponde a 3 ciclos por segundo.



Representación de una forma de onda senoidal de 1 Hertz



Representación de una onda senoidal de 3 Hertz

La frecuencia y el período están relacionados por la siguiente expresión:

$$f[\text{Hertz}] = \frac{1}{T[s]} \text{ y } T[s] = \frac{1}{f}$$

A su vez la frecuencia y la pulsación están relacionadas por la siguiente expresión:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \frac{\text{radianes}}{s}$$

Una serie de formas de ondas seno, coseno o cuadradas son ejemplos de ondas periódicas. Las ondas periódicas pueden analizarse ya sea en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia.

#### *Dominio del tiempo*

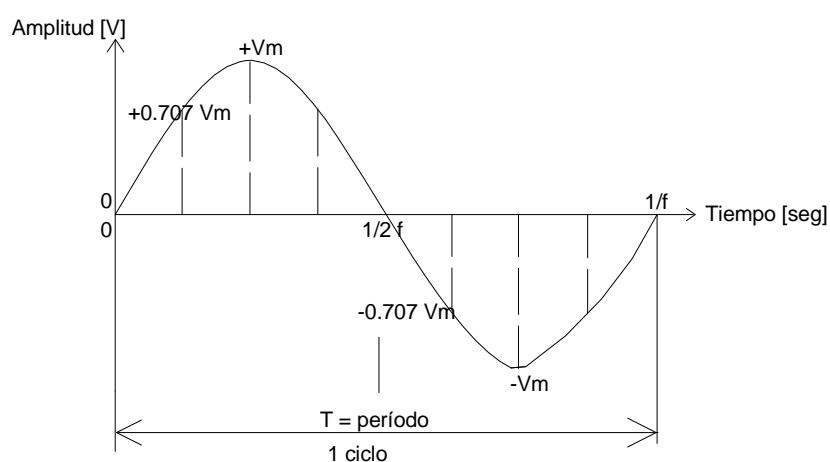
Una forma de onda de una señal muestra la forma y magnitud instantánea de la señal, con respecto a tiempo, pero no necesariamente indica su contenido de frecuencia. Un instrumento que se usa en laboratorios llamado osciloscopio de



rayos catódicos nos permite ver formas de onda que varían el tiempo en una pantalla, donde el eje horizontal representa el tiempo y el vertical la amplitud de la señal en ese instante de tiempo.

La siguiente figura nos muestra una forma de onda senoidal de una determinada frecuencia, con su amplitud máxima o de pico de  $v$  voltios, una frecuencia de  $f$  hertz y una fase inicial para  $t = 0$  de cero radianes. Es decir que para cada instante de tiempo se puede obtener un valor instantáneo de la amplitud de la onda en cuestión cuya envolvente responde a una función senoidal. Obsérvese que durante el período  $T$  la función adopta los valores matemáticos comprendidos entre  $0$  y  $2\pi$  radianes.

$$v(t) = V_m \sin(2\pi ft + \varphi)$$



Representación en el dominio del tiempo de una forma de onda senoidal de frecuencia simple.

### Valor eficaz de una señal alterna

Para una señal alterna de tipo senoidal, el valor eficaz o efectivo es:

$$v_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 V_{\max}$$

$$i_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{\max}$$

Físicamente, el valor eficaz de una señal alterna puede interpretarse como el valor que debería tener una señal de valor constante en el tiempo y que ocasione el mismo efecto sobre una carga que la señal alterna.

Matemáticamente, para cualquier forma de onda, el valor efectivo o valor cuadrático medio de una función (r.m.s.) está definido como:

$$r.m.s. = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt}$$

### Valor medio de una señal

Se define como el valor medio de la señal dentro de un intervalo de tiempo.

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$



### Factor de forma de una señal

Se denomina a la relación entre el valor eficaz de la señal respecto a su valor medio.

$$F.F. = \frac{\text{valor}_{\text{efectivo}}}{V}$$

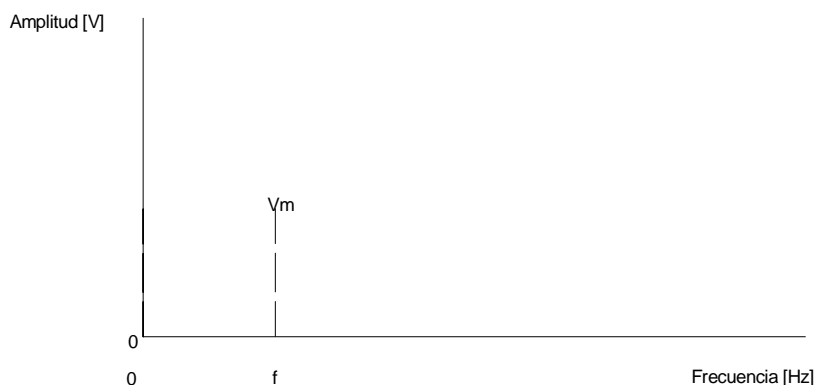
Por ejemplo el factor de forma de una onda cuadrada es igual a 1, mientras que para otras formas de onda puede ser mayor y por lo tanto mayor su deformación respecto a la onda cuadrada.

### Dominio de la frecuencia

Un instrumento de laboratorio denominado analizador de espectros nos permite analizar formas de onda en el dominio de la frecuencia y presentarlas en una pantalla. El eje horizontal representa las frecuencias en forma discreta de la señal y el vertical las amplitudes respectivas de cada una de las señales que intervienen en su composición.

Una representación en el dominio de la frecuencia de una onda muestra el contenido de frecuencias, pero no necesariamente indica la forma de onda o la amplitud combinada de todas las componentes de entrada de información en un tiempo específico.

La siguiente figura muestra el espectro de frecuencias para una señal senoidal de una sola frecuencia, con una máxima amplitud de V volts y una frecuencia de f hertz. Recordemos que  $f = 1/T$ , siendo T el período o intervalo de repetición de la onda.



Representación en el dominio de la frecuencia (espectro) para una onda senoidal de una sola frecuencia.

### Señales complejas periódicas no senoidales

Esencialmente, cualquier forma de onda repetitiva u onda periódica compleja no es mas que una sucesión de ondas de tipo seno o coseno. Para analizar una forma de onda periódica compleja, es necesario utilizar una herramienta matemática llamada “series de Fourier”, desarrolladas en 1826 por el físico y matemático francés Jean B. Fourier.

Toda función periódica que cumpla con las condiciones de Dirichlet, un matemático alemán nacido 1805, admite ser desarrollada en “Serie de Fourier”.



Esto significa que funciones tales como la onda cuadrada, diente de sierra, triangular, etc. Admiten no solo una definición por medio de proposiciones, sino también una representación en serie de términos senos o de cosenos.

Las series de Fourier resultan uniformemente convergentes y por lo tanto, tienen un conjunto de propiedades muy importantes como por ejemplo, que pueden ser derivadas o integradas término a término, etc.

#### Condiciones de Dirichlet

Estas condiciones son necesarias y suficientes para que una función  $f(t)$  pueda ser desarrollada en serie de Fourier.

- La función  $f(t)$  debe ser periódica, de período  $T$ .
- La función  $f(t)$  debe ser definida y univalente, salvo un número finito de puntos, en el intervalo de integración.
- La función  $f(t)$  y su derivada  $f'(t)$  deben ser seccionalmente continuas en el intervalo de integración (o continua por secciones).

Toda función que cumpla con las condiciones de Dirichlet admite ser representada por una serie de funciones trigonométricas de la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1) \text{ donde:}$$

$T$  = Período de la señal  $f(t)$  y  $f_1 = 1/T$  es la frecuencia fundamental para  $n = 1$ .

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  pulsación de la señal  $f(t)$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt \rightarrow \text{para } n=0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \rightarrow \text{para } n=1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \rightarrow \text{para } n=1,2,3,\dots$$

Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  representan las amplitudes de cada una de las señales para  $n = 1,2,3,\dots$  y los términos entre paréntesis de las funciones seno o coseno representan las señales armónicas de la función para  $n = 1,2,3,\dots$  que son múltiplos enteros de la señal fundamental de período  $T$  y de frecuencia  $f_1 = 1/T$ .

El coeficiente  $a_0/2$  es un término independiente que representa el “valor medio de la función” respecto al período  $T$  y físicamente se lo conoce “componente de corriente continua de la señal o de valor constante”.

La expresión de  $f(t)$  corresponde a la forma o envolvente de la onda y puede ser definida de manera simple para formas geométricas sencillas o si se trata de formas complejas, se requiere una aproximación por ejemplo de tipo polinomial.

La determinación de estos coeficientes es un tema matemático que consiste en multiplicar miembro a miembro la expresión (1) por una función auxiliar  $\sin(k2\pi ft)$  e integrar m. a m. entre  $-T/2$  y  $+T/2$  y diferenciar respecto a  $dt$  para despejar finalmente  $a_n$ .



$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin(k2\pi ft) \cdot \sin(n2\pi ft) \cdot dt \text{ da un valor } 0 \text{ para } k \neq n \text{ y } T/2 \text{ para } k = n.$$

El término  $b_n \sin(n2\pi ft)$  se anula y finalmente podemos obtener  $a_n$ .

De igual manera, multiplicando m. a m. la expresión (1) por  $\cos(k2\pi ft)$  e integrando m. a m. entre  $-T/2$  y  $+T/2$  respecto a  $dt$  obtenemos:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos(k2\pi ft) \cdot \sin(n2\pi ft) \cdot dt \text{ que nos da un valor } 0 \text{ para } k \neq n \text{ y } T/2 \text{ para } k = n.$$

El término  $a_n \cos(n2\pi ft)$  se anula y finalmente podemos despejar  $b_n$ .

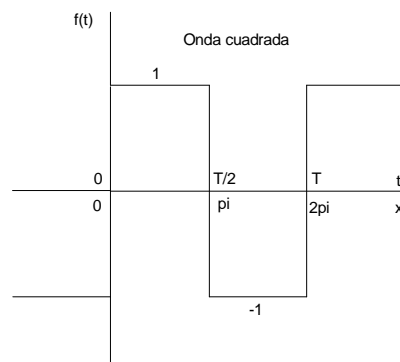
El término  $a_0$  se obtiene fácilmente para  $n = 0$ , integrando m. a m. la expresión (1) entre  $-T/2$  y  $+T/2$  respecto a  $dt$  para obtener el valor medio de la función.

*Ejemplo 1: onda cuadrada.*

La onda cuadrada puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera, haciendo  $x = \omega t$  para facilitar el cálculo:

$$f(x) = +1, \text{ cuando } 0 < x < \pi$$

$$f(x) = -1, \text{ cuando } \pi < x < 2\pi$$



Cálculo de  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} +1 \cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} -1 \cdot dx \right) = \frac{1}{\pi} (x|_0^{\pi} - x|_{\pi}^{2\pi}) = \frac{1}{\pi} (\pi - 0 - 2\pi + \pi) = 0$$

Obsérvese que se requieren dos integrales para el cálculo de  $f(x)$  para el intervalo entre 0 y  $T$ , una entre 0 y  $\pi$  y la otra entre  $\pi$  y  $2\pi$ . El mismo resultado se hubiera obtenido integrando entre  $-T/2$  y  $+T/2$ , es decir entre  $-\pi$  y 0, y 0 y  $\pi$ . Como es de esperar, el resultado de  $a_0$  vale cero ya que ambas áreas son iguales y opuestas respecto al eje  $x$  en el período de integración.





Cálculo de  $a_n$ :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} (+1) \cos(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cos(nx) dx \right) = \frac{1}{n\pi} \left\{ \left[ \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \left[ \sin(nx) \right]_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi} (2 \sin(n\pi) - \sin(n2\pi))$$

Nos da un valor de  $a_n = 0$  para cualquier valor entero de  $n$ .

Cálculo de  $b_n$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} (+1) \sin(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin(nx) dx \right) = \frac{1}{n\pi} \left\{ -\left[ \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \left[ \cos(nx) \right]_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi} (1 - 2 \cos(n\pi) + \cos(n2\pi))$$

Para  $n$  par:  $b_n = \frac{1}{n\pi} (1 - 2 + 1) = 0$

Para  $n$  impar:  $b_n = \frac{1}{n\pi} (1 + 2 + 1) = \frac{4}{n\pi}$

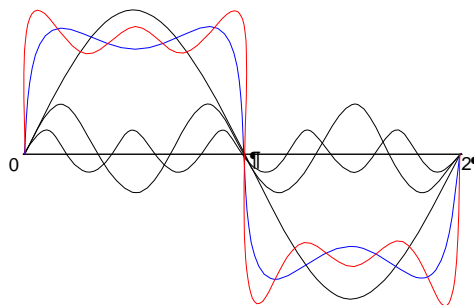
Específicamente,  $b_1 = \frac{4}{\pi}$ ,  $b_3 = \frac{4}{3\pi}$ ,  $b_5 = \frac{4}{5\pi}$ , y así sucesivamente.

El resultado final del desarrollo de la onda cuadrada en una serie de Fourier, es:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \dots + \frac{1}{n} \sin(n\omega t) \right]$$

Este resultado demuestra que la señal de una onda cuadrada se puede expresar mediante una suma de infinitas funciones sinusoidales, de diferentes frecuencias y respectivas amplitudes, compuesta por armónicas impares.

Formación de la onda cuadrada con la suma de la fundamental + la 3a. armónica y de esta última + la 5ta. armónica



La figura muestra una suma de señales senoidales de armónica impar con sus amplitudes decrecientes lo que nos permite ver una aproximación de una onda cuadrada.

Si se toman solamente algunos términos de la serie, se tendrá una aproximación de la función, que será más precisa, cuando se consideren más

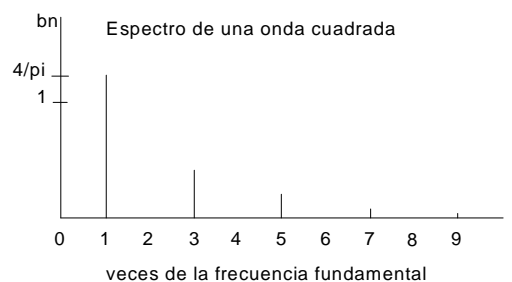


términos. Cuando se tomen infinitos términos, la serie representará fielmente a la función onda cuadrada original.

Los canales de comunicaciones, al poseer un ancho de banda acotado o finito, no permiten el pasaje de las infinitas armónicas necesarias para representar fielmente la señal original a la salida de dicho canal.

El canal no deja pasar nada mas que hasta una cierta armónica, con lo cual la señal a salida del mismo se presenta distorsionada o deformada y da lugar a errores en la determinación de los unos y ceros transmitidos.

*Representación de la señal de una onda cuadrada en el dominio de la frecuencia*

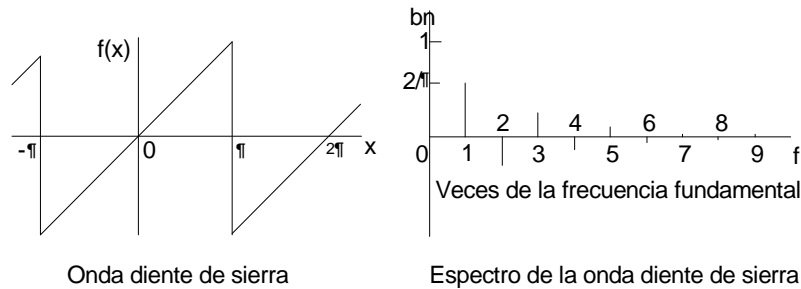


*Ejemplo 2: onda diente de sierra.*

La figura muestra otra onda periódica de características simple. Haciendo  $x = \varpi_1 t = 2\pi f_1 t = \frac{2\pi}{T} t$ , donde  $f_1 = 1/T$  es la frecuencia de repetición de la onda fundamental, podemos expresar convenientemente esta función entre  $-\pi$  a  $+\pi$  como:

$$f(x) = \frac{x}{\pi} \text{ cuando } -\pi < x < +\pi$$

No es conveniente expresar esta onda de 0 a  $2\pi$  porque esto nos requeriría el planteo de dos ecuaciones y la segunda no sería enteramente simple. Esto aporta un punto importante del análisis de Fourier. Estos no son, por ningún motivo, los únicos límites posibles. Si derivamos esta función podemos observar que los límites pueden ser cualquier valor de  $x$  que estén apartados 1 ciclo. Por lo tanto, los límites podrían ser perfectamente entre  $-\pi$  y  $+\pi$  que utilizaremos para el cálculo.



Cálculo de  $a_n$ :

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{1}{n^2} \cos(nx) + \frac{x}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{1}{n^2} (\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)) + \frac{\pi}{n} (\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)) \right) = 0 \quad \text{para cualquier valor entero de } n.$$

Cálculo de  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi^2} (\pi^2 - \pi^2) = 0$$

La serie no contiene términos coseno ni término constante.

Cálculo de  $b_n$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} (\sin(n\pi) - n\pi \cos(n\pi))$$

Si  $n$  es un número entero par,  $\sin(n\pi) = 0$  y  $\cos(n\pi) = 1$ , y  $b_n = -\frac{2}{n\pi}$ .

Si  $n$  es un número entero impar,  $\sin(n\pi) = 0$  y  $\cos(n\pi) = -1$  y  $b_n = +\frac{2}{n\pi}$ .

Por lo tanto:

$b_1 = \frac{2}{\pi}; b_2 = -\frac{2}{2\pi}; b_3 = \frac{2}{3\pi}; b_4 = -\frac{2}{4\pi} \dots$  y el resultado final de la onda diente de sierra en una serie de Fourier, es:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left( \sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t - \frac{1}{4} \sin 4\omega_1 t + \dots \right)$$

Donde observamos que están presentes todos los términos senos, tanto para las armónicas pares, como impares, siendo la amplitud inversamente proporcional al orden de la armónica pero con signo cambiado en términos alternos como se puede ver en el espectro de frecuencias.



### Simetría de la onda

Describe su simetría en el dominio del tiempo de una onda, es decir su posición relativa con respecto a los ejes horizontal (tiempo) y vertical (amplitud). Básicamente existen tres clases de simetría: impar, par y de media onda. Hemos visto, evaluando los coeficientes de la serie, que algunas ondas no tienen armónicas pares. Algunas ondas no tienen términos coseno, otras no tienen términos seno, y otras no tienen término constante. Si pudiéramos predecir, sin efectuar el cálculo de la serie que ciertas ondas no tendrían con seguridad términos en una u otra forma de estas categorías, estaremos simplificando bastante el trabajo. Se puede demostrar que las ondas de ciertos tipos de simetría carecen de ciertas armónicas:

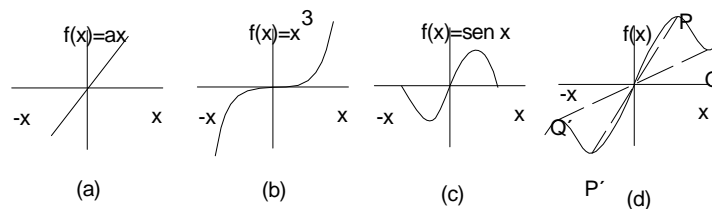
1. Las funciones impares tienen solamente términos seno.
2. Las funciones pares no tienen términos seno.
3. Si hay simetría de media onda, sólo estarán presentes armónicas impares.

### Simetría impar

Haciendo  $x = \omega t$ , podemos definir funciones matemáticas tales como  $f(x) = x, x^3, x^5, \dots \text{etc.}$ , donde para una función impar, se verifica que:

$$f(x) = -f(-x) \quad (1)$$

El nombre de “función impar” viene del número en el exponente. Por ejemplo la función  $f(x) = x^3$  adopta para  $x = 2$ ,  $f(x) = 8$  y para  $x = -2$ ,  $f(x) = -8$ , por lo tanto satisface la condición (1) y por consiguiente  $f(x) = x^3$  es una función impar como lo es también  $\sin(x)$ , etc.



Ejemplos de funciones impares

Podemos generalizar que la suma de funciones impares es siempre impar. Así, la función  $f(x) = x + x^3$  es impar.

### Simetría par

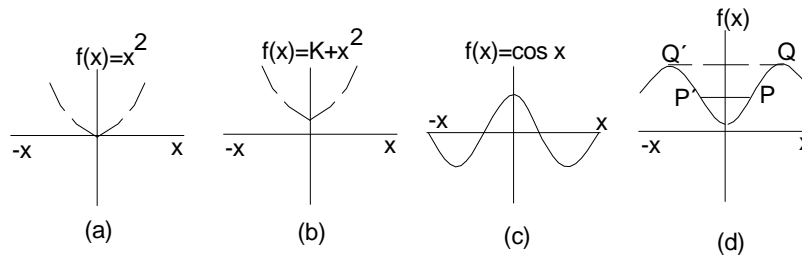
Una función es par cuando:

$$f(x) = f(-x)$$

Las funciones  $f(x) = x^2, x^4, x^6, \dots \text{etc.}$  son pares. Por ejemplo si  $f(x) = x^2$ , para  $x = 2$ ,  $f(x) = 4$  y para  $x = -2$ ,  $f(x) = 4$ .



Podemos generalizar también que la suma de las funciones pares es siempre par. Así,  $f(x) = K + x^2 + x^4$  es una función par. La constante  $K$  está clasificada con las funciones pares, porque tiene el mismo valor si  $x$  es positiva o negativa.



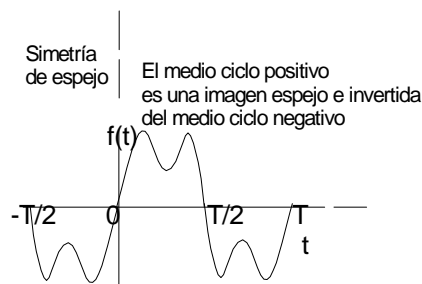
Ejemplos de funciones pares

Debe notarse particularmente y hacer énfasis que las funciones pares no tienen nada que ver con las armónicas pares, ni las funciones impares con las armónicas impares, a pesar del uso confuso de las palabras. Una función par tiene potencias pares de  $x$ , mientras que una armónica par tiene múltiplos pares de la frecuencia fundamental, y no existe relación entre ellas.

#### Simetría de media onda

Si una forma de onda periódica es tal que la forma de onda para la primera mitad del ciclo ( $t = 0$  a  $t = T/2$ ) se repite a sí misma, con excepción del signo opuesto para la segunda mitad del ciclo ( $T = T/2$  a  $t = T$ ), se dice que tiene simetría de media onda. Por lo tanto se satisface la condición:

$$f(t) = -f(t+T/2)$$



Simetría de media onda

Todas las formas de onda con este tipo de simetría tienen “armónicas pares” igual a cero para los términos seno y coseno de la serie.



### Ejemplo 3:

Se tiene una onda cuadrada que tiene una amplitud máxima de + 4 voltios entre 0 y T/2 segundos, y – 4 voltios entre T/2 y T segundos. Si el período de repetición de la onda es de 1 micro segundo, se pide determinar:

- Las amplitudes máximas o de pico y las frecuencias de las primeras cinco armónicas impares.
- El espectro de frecuencia de la señal.
- El voltaje instantáneo total de la señal para diversos tiempos entre 0 y T y la forma de la onda en el dominio del tiempo.

Solución:

- Por inspección de la forma de la onda ya vista, puede verse que el valor promedio de corriente continua es de 0 voltios para el término independiente  $a_0$  ya que la onda tiene simetría impar y de media onda.

Por lo tanto, puede escribirse que la serie de Fourier para esta onda es:

$$f(t) = \frac{4v}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \frac{1}{9} \sin(9\omega t) + \dots \right] \text{ para}$$

los 5 primeros términos impares y  $v = 4$  voltios.

$$a_1 = \frac{4 \cdot 4}{\pi} = \frac{16}{\pi} = \frac{16}{3.1416} = 5.09[V]$$

$$a_3 = \frac{4 \cdot 4}{3\pi} = \frac{16}{3\pi} = \frac{16}{3 \cdot 3.1416} = 1.69[V]$$

$$a_5 = \frac{4 \cdot 4}{5\pi} = \frac{16}{5\pi} = \frac{16}{5 \cdot 3.1416} = 1.02[V]$$

$$a_7 = \frac{4 \cdot 4}{7\pi} = \frac{16}{7\pi} = \frac{16}{7 \cdot 3.1416} = 0.73[V]$$

$$a_9 = \frac{4 \cdot 4}{9\pi} = \frac{16}{9\pi} = \frac{16}{9 \cdot 3.1416} = 0.57[V]$$

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6} [s]} = 1 \cdot 10^6 [Hz] = 1 [MHz]$$

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{radianes}}{s} \right]$$

$$3\omega_1 = 3 \cdot 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 3 f_1$$

$$3 f_1 = f_3$$

$$3\omega_1 = 2\pi f_3 \rightarrow f_3 = \frac{3\omega_1}{2\pi} = \frac{3 \cdot 2\pi \cdot 10^6}{2\pi} = 3 \cdot 10^6 [Hz] = 3 [MHz]$$

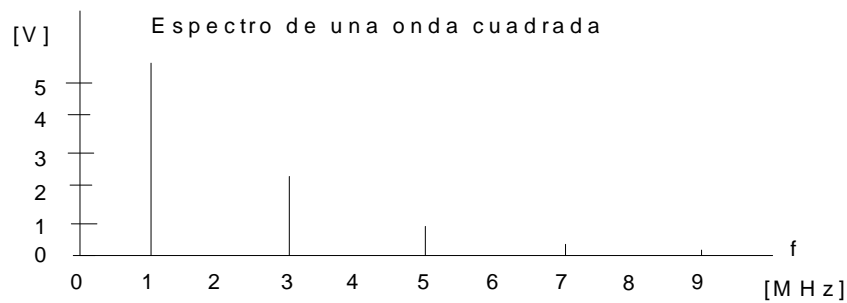
$$f_5 = \frac{5 \cdot 2\pi \cdot 10^6}{2\pi} = 5 \cdot 10^6 [Hz] = 5 [MHz]$$

$$f_7 = \frac{7 \cdot 2\pi \cdot 10^6}{2\pi} = 7 \cdot 10^6 [Hz] = 7 [MHz]$$

$$f_9 = \frac{9 \cdot 2\pi \cdot 10^6}{2\pi} = 9 \cdot 10^6 [Hz] = 9 [MHz]$$



b)



$$c) \ v(t) = \left[ 5.09 \sin(2\pi * 10^6 * t) + 1.69 \sin(3 * 2\pi * 10^6 * t) + 1.02 \sin(5 * 2\pi * 10^6 * t) + 0.73 \sin(7 * 2\pi * 10^6 * t) + 0.57 \sin(9 * 2\pi * 10^6 * t) + \dots \right]$$

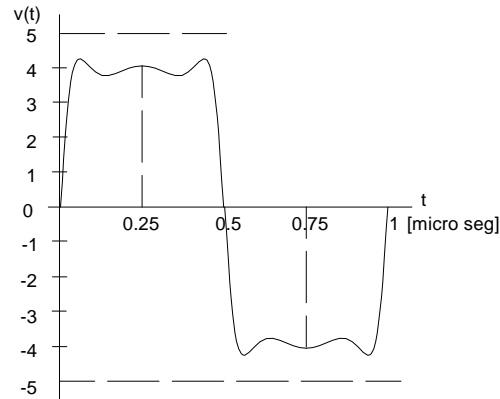
Resolviendo  $v(t)$  para varios valores de tiempo  $t$  independientes, tenemos la siguiente tabla:

| Tiempo [μseg] | V(t)  |
|---------------|-------|
| 0             | 0     |
| 0.062         | 4.51  |
| 0.125         | 3.96  |
| 0.25          | 4.26  |
| 0.375         | 3.96  |
| 0.437         | 4.51  |
| 0.5           | 0     |
| 0.562         | -4.51 |
| 0.625         | -3.96 |
| 0.75          | -4.26 |
| 0.875         | -3.96 |
| 0.937         | -4.51 |
| 1             | 0     |

La gráfica muestra los tiempos y los voltajes instantáneos de la onda calculados que nos da una forma con bastante aproximación de la onda cuadrada. Si se quiere tener una forma mas exacta, es necesario tomar una mayor cantidad de puntos para  $v(t)$  con los valores de tiempo.



Señal en el dominio del tiempo para  $v(t)$



### Otras formas trigonométricas de la serie de Fourier

Se puede convertir en otras formas la serie en las que solamente hay términos coseno, o solamente términos senos o bien términos seno y coseno. Refiriéndonos a los dos términos de frecuencia fundamental, uno función coseno y el otro función seno, pueden sumarse utilizando la siguiente relación trigonométrica:

$$...a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(x - \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$$

Aplicando esta relación a cada uno de los términos de la serie ya vista, esta se convertirá en:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + c_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + c_2 \cos(2\omega_1 t - \theta_2) + c_3 \cos(3\omega_1 t - \theta_3) + \dots + c_n \cos(n\omega_1 t - \theta_n) + \dots$$

donde:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

En estas fórmulas,  $n$  es el orden de la armónica, un entero positivo en cada término trigonométrico, y  $\omega_1$  es la pulsación de la armónica fundamental. Usando los símbolos matemáticos para la suma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t - \theta_n)$$

También es posible una forma similar de la serie que contenga sólo términos seno:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

donde:





$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n}$$

Donde los coeficientes  $c_n$  se calculan encontrando los valores de  $a_n$   $b_n$  y la fase  $\varphi_n$  de manera similar.

### La serie de Fourier en forma exponencial

Si la serie de Fourier en forma trigonométrica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(2\omega_1 t) + a_3 \cos(3\omega_1 t) + \dots \quad (1)$$

$$+ b_1 \sen(\omega_1 t) + b_2 \sen(2\omega_1 t) + b_3 \sen(3\omega_1 t) + \dots$$

La escribimos en forma exponencial:

$$f(t) = \dots + A_{-2} e^{-j2\omega_1 t} + A_{-1} e^{-j\omega_1 t} + A_0 + A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j2\omega_1 t} + \dots \quad (2)$$

Teniendo en cuenta las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \quad (3)$$

$$\sen(x) = -j \frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx})$$

Donde  $j$  es la parte imaginaria de la forma exponencial compleja de la expresión.

Los coeficientes de la expresión (2) están relacionados como:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}; A_1 = \frac{1}{2}(a_1 - jb_1); A_{-1} = \frac{1}{2}(a_1 + jb_1); y\_en\_general: \quad (4)$$

$$A_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n); y: A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

Estas últimas ecuaciones muestran que las  $A$  son funciones complejas que tienen una parte real y una parte imaginaria, y que aparecen en pares conjugados  $A_{-n} = A_n^*$ .

La ecuación (2) puede entonces escribirse de manera compacta como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\pm jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\pm jnx} \quad (5)$$

siendo  $n$  un número entero cualquiera, incluso cero, y  $x = \omega_1 t$ .

Los coeficientes  $C_n$  de la serie exponencial se encuentran convenientemente mediante la integral:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega_1 t} d(\omega_1 t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jnx} dx \quad (6)$$

donde  $n$  es cualquier entero positivo o cero y  $f(t)$  es la función periódica tomando como variable independiente el tiempo. La segunda igualdad de la expresión (6) es equivalente a la primera, excepto que la función  $f(x)$  se evalúa tomando como variable independiente a  $x$  expresada en radianes.

La expresión (6) también puede expresarse como:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega_1 t} d(\omega_1 t) = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$



Los cambios de límites de la integral de la segunda igualdad se hacen teniendo en cuenta que matemáticamente, la función también está definida para la parte negativa del tiempo.

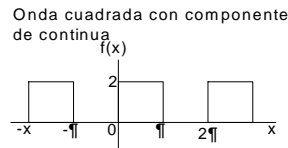
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_1 t} dt \quad (7)$$

#### Ejemplo 4

Dada la siguiente onda cuadrada donde  $f(x) = 2$  para  $0 < x < \pi$  y  $f(x) = 0$  para  $\pi < x < 2\pi$ , encontrar la expresión exponencial de la serie de Fourier para esta función.

Desarrollo:

Para la determinación de  $A_n$  utilizamos la expresión (6) y evaluamos la integral entre 0 y  $\pi$ , ya que la función vale cero entre  $\pi$  y  $2\pi$ .



$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2e^{-jnx} dx = \frac{1}{2\pi} (2\pi - 0) = 1; \text{ para } n = 0$$

$$A_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi e^{-jnx} dx = \frac{1}{-jn\pi} \left[ e^{-jnx} \right]_0^\pi = \frac{1}{-jn\pi} (e^{-jn\pi} - 1); \text{ para } n \neq 0$$

$$A_n = \frac{1}{-jn\pi} (1 - 1) = 0; \text{ para } n \text{ par}$$

$$A_n = \frac{1}{-jn\pi} (-1 - 1) = \frac{2}{jn\pi}; \text{ para } n \text{ impar}$$

Haciendo  $x = \omega_1 t$  y sustituyendo valores en la expresión (2) obtenemos la función exponencial para una onda cuadrada con componente de continua para  $n = 0$ .

$$f(t) = 1 + \frac{2}{j\pi} \left( \dots - \frac{1}{3} e^{-j3\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t} + e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{3} e^{j3\omega_1 t} + \dots \right) \quad (8)$$

La expresión (8) es equivalente a la siguiente, teniendo en cuenta las identidades trigonométricas y se puede también para  $n$  impar expresar como:

$$f(t) = 1 + \frac{4}{j2\pi} \left( \dots - \frac{1}{3} e^{-j3\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t} + e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{3} e^{j3\omega_1 t} + \dots \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \text{sen}(n\omega_1 t) \quad (9)$$



En el caso de una onda cuadrada centrada, sin componente de continua, es decir  $C_0 = 0$ , se obtiene la expresión de  $f(t)$  restándole 1 a la expresión anterior, es decir:

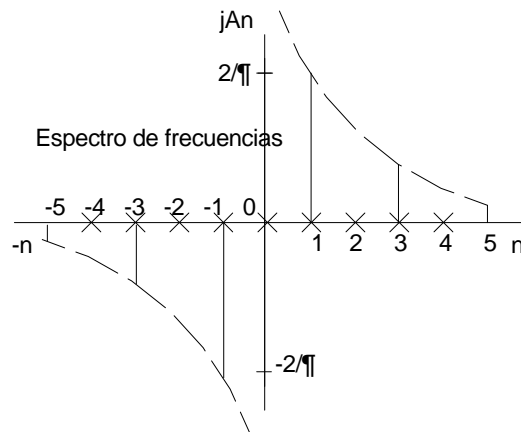
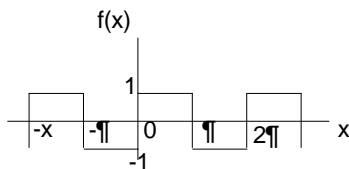
$$f(t) = \frac{2}{j\pi} \left( \dots - \frac{1}{3} e^{-j3\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t} + e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{3} e^{j3\omega_1 t} + \dots \right) \quad (10)$$

$$f(t) = \frac{4}{j2\pi} \left( \dots - \frac{1}{3} e^{-j3\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t} + e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{3} e^{j3\omega_1 t} + \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \text{sen}(n\omega_1 t) \quad (11)$$

Para  $n$  impar.

Asimismo se puede representar el espectro de frecuencias de las señales, es decir las amplitudes de cada componente en función de la frecuencia. En este caso, intervienen matemáticamente las armónicas positivas y negativas para conformar la expresión  $f(t)$ .

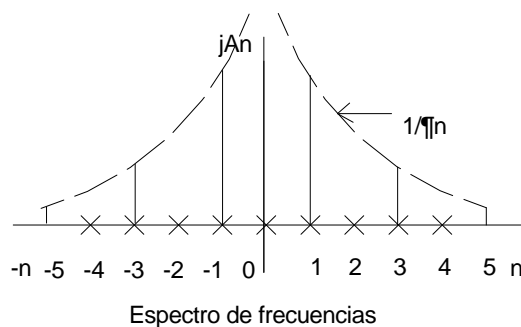
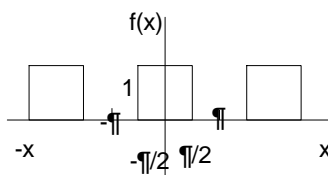
Onda cuadrada sin componente de continua



### Serie de Fourier para un tren de pulsos rectangulares

El siguiente análisis de la serie de Fourier para una onda cuadrada como función par y su espectro, nos servirá posteriormente para el análisis y desarrollo de un tren de pulsos periódicos rectangulares de ancho variable.

Onda cuadrada como función par





La serie de Fourier en forma exponencial para una onda cuadrada como función par, se puede verificar como ejercicio que vale:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \pm \frac{1}{\pi n} e^{jn\omega_1 t} \right) \quad (12)$$

Donde  $x = \omega_1 t$  y  $n$  puede adoptar cualquier valor entero positivo o negativo e incluso cero que se desprenden de las gráficas de la función variable en el tiempo y de las amplitudes de cada una de las armónicas en función de la frecuencia.

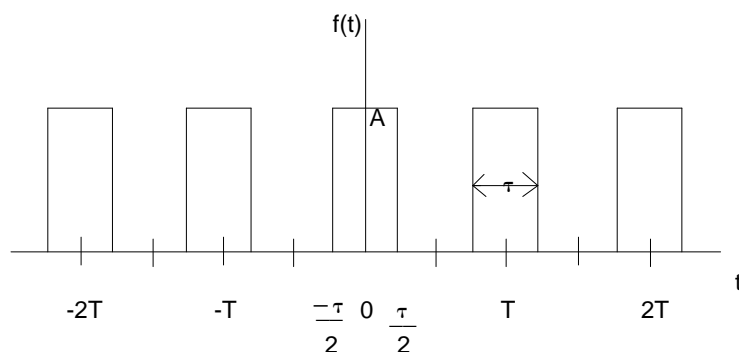
Los trenes de pulsos periódicos rectangulares se utilizan con mucha frecuencia en circuitos electrónicos para televisión, radar, computadoras, sistemas de comunicación codificada y para representar ceros y unos en una transmisión digital. Para determinar qué tan fielmente se transmitirán estos pulsos, a través de un canal de comunicación en respuesta a su ancho de banda, es necesario conocer sus componentes de Fourier de frecuencia para observar su comportamiento a la salida del mismo y ver si la señal es recuperable o no. Un tren de pulsos periódicos rectangulares está caracterizado por:

- a) Amplitud: es el valor máximo de la señal y se representa por la letra A.
- b) Período: es el tiempo de repetición de los pulsos, se representa por la letra T y se mide en segundos. Está relacionado con la inversa de la

frecuencia fundamental:  $T[s] = \frac{1}{f_1\left[\frac{1}{s}\right]}$ .

- c) Duración: es el tiempo de permanencia del pulso medido por su ancho en segundos y que se representa por la letra griega  $\tau$  (tau).
- d) Frecuencia de repetición: es el número de veces que se repiten los pulsos en un segundo, se representa por la letra f y se mide en Hertz. Está relacionada con la inversa del período de repetición de la señal

fundamental:  $f[Hz] = \frac{1}{T[s]}$ .



Tren de pulsos periódicos rectangulares



Desarrollando la función  $f(t)$  mediante la serie de Fourier en forma compleja:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \quad (13)$$

Donde  $C_n$  será igual a:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} A e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{A}{T} \left[ \frac{e^{-jn\omega_1 t}}{-jn\omega_1} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{A}{Tjn\omega_1} (e^{-jn\omega_1 \tau/2} - e^{jn\omega_1 \tau/2}) = \\ &= -\frac{2A}{j2Tn\omega_1} (e^{jn\omega_1 \tau/2} - e^{-jn\omega_1 \tau/2}) = \frac{2A}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_1 \tau/2)}{n\omega_1} = \frac{2A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_1 \tau/2)}{n\omega_1 \tau} = \\ C_n &= \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_1 \tau/2)}{(n\omega_1 \tau/2)} = \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\pi \frac{\tau}{T})}{(n\pi \frac{\tau}{T})} \quad (14) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\omega_1 = 2\pi/T$  y de la identidad entre una función exponencial y una trigonométrica como la (3) ya indicada.

La simetría adoptada para la función  $f(t)$  posibilita llegar a este resultado que simplifica el análisis para el desarrollo de la serie en forma exponencial.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\pi \frac{\tau}{T})}{(n\pi \frac{\tau}{T})} e^{jn\omega_1 t}$$

En consecuencia, podemos expresar la serie de Fourier para un tren de pulsos periódicos rectangulares en forma trigonométrica como:

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\pi \frac{\tau}{T})}{(n\pi \frac{\tau}{T})} \cos(n\omega_1 t) \quad (15)$$

El valor medio de la función  $f(t)$  corresponde al primer término de la igualdad, y el resto para la sumatoria de las funciones armónicas  $\cos(n\omega_1 t)$ , con sus respectivas amplitudes dentro de la envolvente de la función  $(\text{sen}(x))/x$ .

La envolvente que contiene las amplitudes de las  $n$ -ésimas armónicas es una función de la forma:

$$F(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}; \text{ donde: } x = \frac{n\pi\tau}{T}$$

La función  $F(x)$  recibe también el nombre de “función sincrónica de  $x$ ” y representa gráficamente una onda sinusoidal amortiguada cuyas amplitudes van decreciendo periódicamente.

Esta función tiene las siguientes propiedades analizaremos:

- Para  $x \rightarrow 0$ , tomando el límite obtendremos:



$$F(x) = \lim_{\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)} = 1$$

- Para  $x \rightarrow \infty$ :

$$F(x) = \lim_{\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)} = 0$$

- Para  $x = \pi$ ,  $\frac{n\omega_1\tau}{2} = \pi$ , de donde  $n\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}$ , o sea para cualquier valor entero de:  $n\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\tau}$ , la función  $F(x)$  valdrá cero si  $n = 1$  y  $\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}$ .

También para  $n = 2$ ;  $2\omega_1 = 2\frac{2\pi}{\tau} = \frac{4\pi}{\tau}$ . Igualmente para  $n = 3$  y  $3\omega_1 = 3\frac{2\pi}{\tau} = \frac{6\pi}{\tau}$ .

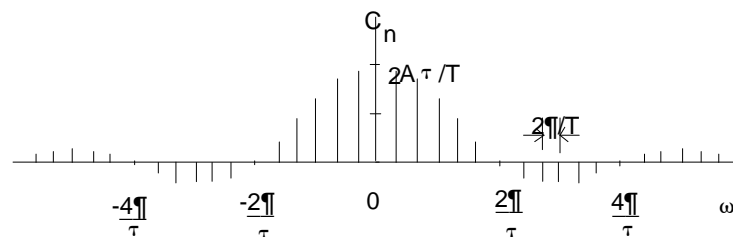
En general para,  $n\omega_1 = \frac{2n\pi}{\tau}$  aparecerán los mínimos de la función.

En consecuencia, podemos representar gráficamente el espectro de frecuencias para un tren de ondas periódicas rectangulares de la amplitud de cada una de la señales de la serie en función de la frecuencia. Las frecuencias negativas están representadas matemáticamente, y no tienen sentido físico.

La amplitud de cada una de las armónicas que conforman el pulso quedan confinadas dentro de la envolvente de  $F(x)$  y los mínimos se cumplen para

$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \frac{4\pi}{\tau}, \frac{6\pi}{\tau}, \text{etc.}$ , como  $\omega = 2\pi f$ , ocurrirá para la frecuencias:  $f = \frac{1}{\tau}, \frac{2}{\tau}, \frac{3}{\tau}, \text{etc.}$

Espectro de un tren de pulsos rectangulares



Se han representado 6 armónicas en cada uno de los intervalos para valores positivos y negativos de  $\omega$ .

El ancho de banda del tren de pulsos teóricamente es infinito, pero en la práctica para su transmisión, dependerá del ancho de banda que le ofrezca el canal de transmisión. Si observamos las amplitudes de las primeras armónicas hasta el primer mínimo vemos que la mayor parte de la energía del pulso se encuentra en



este sector y el resto se distribuye dentro de los otros mínimos. Es por ello que podemos definir el “ancho de banda práctico BW” de un tren de pulsos como:

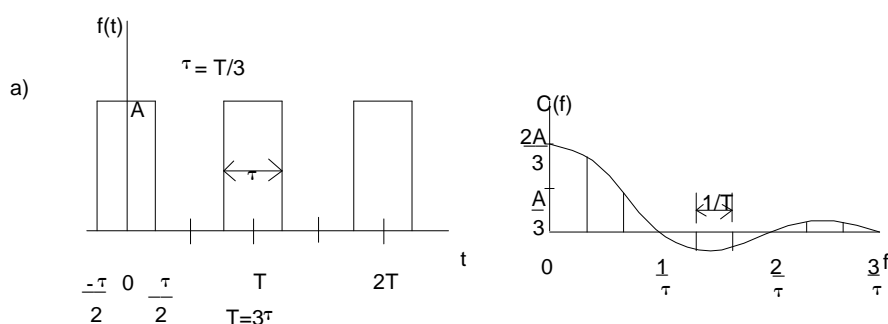
$BW = \frac{1}{\tau} [Hz]$  donde se concentra el 90% de la energía del pulso. La expresión  $\frac{1}{\tau}$  recibe también el nombre de Baudio. La separación de las diferentes armónicas con sus respectivas amplitudes, dependerá de la frecuencia de repetición del pulso, es decir:  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{T}$ , o sea que si el período es muy corto, la separación entre las rayas del espectro será mayor y si es muy largo estarán más juntas.

El ancho de banda práctico que ocupará el pulso dependerá de la inversa de su duración  $\tau$ , que será mayor cuanto más breve sea su duración. Tenga en cuenta que este análisis lo estamos realizando para valores positivos de frecuencia ya que los negativos solo tienen significado matemático y no físico.

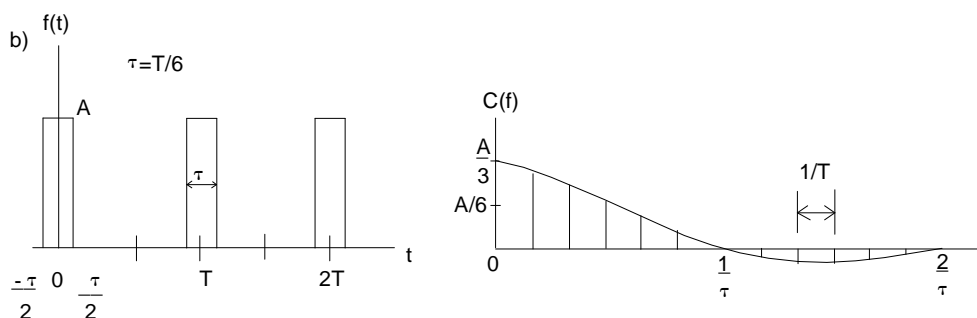
Como ejemplo práctico, podemos ver lo que ocurre ahora con un tren de pulsos periódicos rectangulares del esquema a) que se usa de partida, haciendo variar primero su duración luego su periodicidad  $T$ , manteniendo constante su amplitud  $A$ .

Obsérvese que en cada uno de los lóbulos se han distribuido de manera proporcional el número de armónicas con sus respectivas amplitudes y que esa cantidad responde a un valor  $k = \frac{T}{\tau}$ . En el ejemplo,  $k = 3$  y por lo tanto estarán presentes en el primer lóbulo 3 armónicas, donde la amplitud de la tercera vale cero para  $f = \frac{1}{\tau}$ .

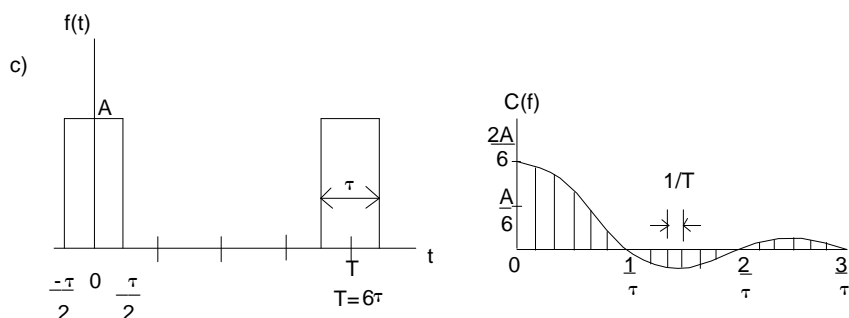
Aquí se encuentran las armónicas más significativas del pulso. El resto de las armónicas se distribuyen en los otros lóbulos positivos y negativos, cuyas amplitudes tienden a cancelarse para frecuencias superiores. En teoría, existen infinitas armónicas para el tren de pulsos periódico.



En el esquema b) mantenemos constante el período  $T$  original y reducimos el ancho del pulso a la mitad del original. Se observa un aumento del ancho de banda práctico, una disminución de las amplitudes de las armónicas y un aumento de la cantidad de señales armónicas (rayas del espectro) que se mantienen separadas y distribuidas en un valor constante  $1/T$ .



En el esquema c) duplicamos el período  $T$  original y mantenemos constante el ancho del pulso original. Observamos que el ancho de banda práctico se mantiene constante y las rayas del espectro más juntas por el aumento del período  $T = 6\tau$ . Las amplitudes de las armónicas también han disminuido su amplitud respecto a la figura a).



### Las señales aperiódicas y la Integral de Fourier

Existe una estrecha vinculación entre la respuesta de frecuencia y la respuesta de tiempo cuando las señales atraviesan un circuito eléctrico o un canal de transmisión. Del análisis efectuado de una señal variable y periódica en el tiempo mediante la serie de Fourier se ha podido determinar su comportamiento en el dominio de la frecuencia. Teóricamente es posible realizar el proceso para determinar la función  $f(t)$  a partir del análisis de las amplitudes de señales discretas en el dominio del tiempo y de esta manera determinar una serie de propiedades de la función  $f(t)$  en el dominio de la frecuencia.

La extensión de estas ideas se puede realizar mediante el análisis de señales aperiódicas en el tiempo con la introducción de la "integral de Fourier".

Esto se hace simplemente observando que cualquier función del tiempo (sujeta naturalmente a ciertas amplias restricciones y definiciones matemáticas) definida





solamente dentro de cierto intervalo de tiempo definido de  $T$  segundos de duración, puede ser desarrollada como una serie de Fourier de período fundamental  $T$ , para lo cual basta con suponer que la función del tiempo se repite a si misma fuera del intervalo de tiempo especificado. A medida que el intervalo de tiempo de interés se hace mayor, aumenta el período de la serie de Fourier. En el límite, cuando el intervalo de interés tiende a infinito, la resultante serie de Fourier se transforma en una integral de Fourier.

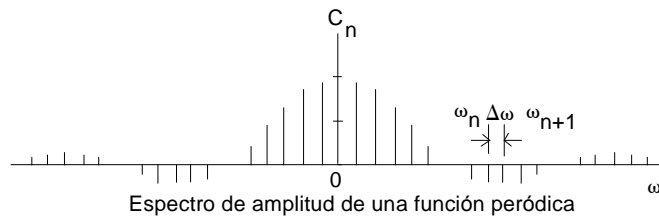
Considerando una función periódica  $f(t)$ , donde:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega_n t}; C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt; \text{ donde } \omega_n = \frac{n2\pi}{T} \quad (16)$$

La distancia entre armónicas sucesiva es:  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}$ .

La ecuación precedente para  $f(t)$  puede escribirse en la siguiente forma, multiplicando y dividiendo el segundo miembro por  $\Delta\omega$ ,  $T$  por  $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$  como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{\Delta\omega} e^{j\omega_n t} \Delta\omega \quad \frac{C_n}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (17)$$



Consideremos ahora el caso para límite en que  $T \rightarrow \infty$  para la función  $C_n$ . Entonces  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , y las líneas del espectro de la figura se superponen unas con otras, y obtenemos por lo tanto un espectro continuo. En el límite, para  $T \rightarrow \infty, \omega_n \rightarrow \omega$ , la función  $C_n$  se convierte en una función continua  $F(\omega)$ , donde:

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} C_n$$

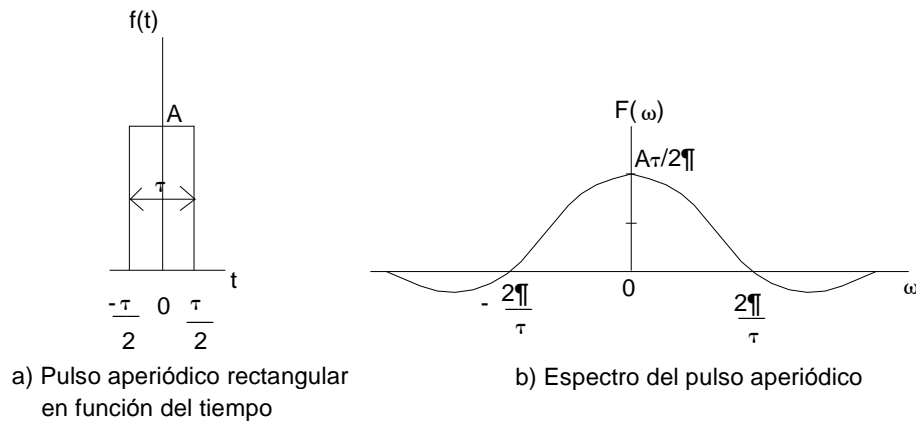
En lugar de la serie de Fourier para una función periódica, tenemos ahora una representación de la función aperiódica  $f(t)$  como una “integral de Fourier”, donde la sumatoria de las  $C_n$  respecto a  $\Delta\omega$  cuando  $n \rightarrow \infty$  se convierte en una integral de la función  $F(\omega)$  y en el límite para  $\Delta\omega \rightarrow 0$ ,  $\Delta\omega$  se convierte en  $d\omega$ , es decir:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \text{ donde } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (18)$$



Los pulsos periódicos rectangulares previamente considerados sirven como un buen ejemplo de la transición desde la serie de Fourier hasta la integral de Fourier para el análisis de un pulso rectangular aperiódico.

Cuando  $T \rightarrow \infty$ , todos los pulsos, excepto el que está centrado en  $t = 0$  se alejan del origen y nos queda una gráfica de tiempo con un solo pulso de amplitud  $A$  y ancho de  $\tau$  segundos.



En el gráfico de frecuencias,  $\omega_n \rightarrow \omega$  cuando  $T \rightarrow \infty$ , las líneas se juntan, y el espectro se hace continuo. De esta manera, el pulso aperiódico tiene un espectro continuo, definido para todas las frecuencias cuando:

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} C_n \quad (19)$$

La función precedente puede obtenerse a partir de la relación:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (17). \text{ Donde para un único pulso:}$$

$$f(t) = A, \text{ para } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$$

$$f(t) = 0, \text{ para } t > \frac{\tau}{2}$$

Sustituyendo los límites de integración de la ecuación (17) por  $-\tau/2$  y  $+\tau/2$ :

$$F(\omega) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j2\pi\omega} \left[ e^{-j\omega t} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{\pi\omega} \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} = \frac{A}{\pi\omega} \text{sen}(\omega\tau/2)$$

$$F(\omega) = \frac{A\tau}{\pi\tau} \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega} = \frac{A\tau}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{(\omega\tau)} = \frac{A\tau}{2\pi} \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

La función  $F(\omega)$  se llama a menudo “transformada de Fourier” de la función  $f(t)$  en algunos tratados matemáticos.

### Transformadas discretas y rápidas de Fourier

Muchas formas de onda encontradas en los sistemas de comunicaciones típicos no pueden definirse satisfactoriamente por expresiones matemáticas. De este modo, su



comportamiento en el dominio de la frecuencia es de mucho interés para estos sistemas para analizar su respuesta en el sistema.

A menudo existe una necesidad de obtener el comportamiento en el dominio de la frecuencia de las señales que se están coleccionando en el dominio del tiempo (es decir, en el tiempo real). Es por esta razón que fue desarrollada la “transformada discreta de Fourier”. Con esta transformada, una señal en el dominio del tiempo se muestrea en tiempos discretos. Las muestras se almacenan en una computadora en donde mediante un algoritmo matemático se calcula la transformada de Fourier.

El tiempo de cálculo es proporcional a  $n^2$ , donde  $n$  es el número de muestras. Para cualquier número razonable de muestras, el tiempo de cálculo es considerable, razón por la cual se han desarrollado algoritmos para el cálculo mediante computadoras denominados “transformadas rápidas de Fourier” que se pueden consultar por Internet y publicaciones del tema de diversos autores.

*Bibliografía recomendada:*

“Serie e integral de Fourier”. Manuales de la serie Schaum. Editorial Mac Graw Hill.

“Transmisión de la información, modulación y ruido”. Mischa Schwartz. Editorial Mac Graw Hill.

“Teleinformática”. Ricardo Castro Lechtaler y Rubén Jorge Fusario. Editorial Reverté.

“Sistemas de Comunicaciones Electrónicas”. Wayne Tomasi. Editorial Prentice Hall.

“Circuitos en Ingeniería Eléctrica”. Hugh H. Skilling. Editorial CECOSA