

# Señales y Sistemas I

## Filtros

Asunción Moreno

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones  
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)  
[<asuncion.moreno@upc.edu>](mailto:asuncion.moreno@upc.edu)

con la colaboración de Antonio Bonafonte  
Junio 2009  
v. 2.3

# ÍNDICE

<b>TEMA 3 FILTROS .....</b>	<b>3</b>
<b>3.1 Introducción.....</b>	<b>3</b>
<b>3.2 Distorsión .....</b>	<b>4</b>
Distorsión lineal de amplitud: .....	4
Distorsión lineal de fase: .....	4
Distorsión no lineal: .....	4
<b>3.3 Definición de filtros ideales.....</b>	<b>5</b>
<b>3.4 Atenuación <math>\alpha(f)</math> (dB).....</b>	<b>8</b>
<b>3.5 La plantilla de especificaciones .....</b>	<b>8</b>
3.5.1 Selectividad .....	9
3.5.2 Discriminación .....	9
<b>3.6 Diseño de filtros. Transformada de Laplace. ....</b>	<b>10</b>
<b>3.7 Filtro de Butterworth .....</b>	<b>12</b>
3.7.1 Filtro de Butterworth y plantilla de especificaciones.....	16
<b>3.8 Filtro de Chebychev: .....</b>	<b>18</b>
3.8.1 Filtro de Chebychev y plantilla de especificaciones.....	21
<b>3.9 Comparación de un filtro de Butterworth y un filtro de Chebychev.....</b>	<b>21</b>
<b>3.10 Otros filtros.....</b>	<b>22</b>
<b>3.11 Transformación de frecuencias.....</b>	<b>22</b>
3.11.1 Transformación paso-bajo paso-alto.....	23
3.11.2 Transformación paso bajo paso-banda .....	26
<b>3.12 Problemas.....</b>	<b>28</b>

# TEMA 3 Filtros<sup>1</sup>

## 3.1 Introducción

En ocasiones, las señales de interés están mezcladas con otras señales y no es posible distinguirlas o separarlas por medio de análisis basados en técnicas temporales. La separación de señales atendiendo a su distribución frecuencial es una técnica muy común en procesado de señal. La técnica consiste en cancelar o atenuar unas zonas frecuenciales determinadas donde la señal deseada no existe y dejar pasar aquellas frecuencias en que la señal deseada tiene su contenido frecuencial. Esta técnica es utilizada en aplicaciones tan diversas como:

Mejora de calidad de señales ruidosas: El análisis frecuencial de señales contaminadas con ruido permite disminuir el ruido que esté fuera de la banda de interés.

Multiplexado en frecuencia: En sistemas de comunicación (radio, TV) es habitual transmitir distintos canales por el mismo medio de comunicación y cada canal ocupa una banda de frecuencias distinta a las demás. Los desmultiplexadores seleccionan el canal deseado por medio de un filtro sintonizado a la frecuencia de la banda de interés, separándolo del resto de canales. Posteriormente se procede a su demodulación.

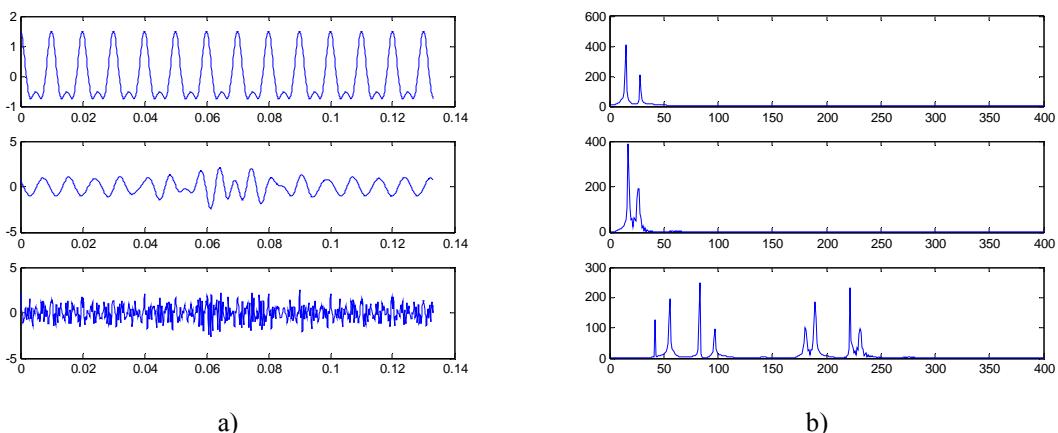


Figura 3-1 Ejemplos de señales en el dominio a) temporal y b) frecuencial. La fila superior y media son dos señales de igual ancho de banda. La fila inferior muestra las señales después de pasar por un multiplexador frecuencial

Figura 3-1 muestra distintas formas de onda (izquierda) y sus transformadas de Fourier (derecha) de un proceso de multiplexación. Las filas superior y media contienen las señales a multiplexar, ambas de banda limitada a 50Hz. Cada señal se traslada a la frecuencia de su portadora, que en este caso es de 70 Hz para la primera señal y de 210 Hz para la segunda señal. La fila inferior muestra la forma de onda de la señal resultante y su transformada de Fourier. La primera etapa del desmultiplexador consiste en seleccionar y

<sup>1</sup> Agradezco a los profesores de la asignatura y a Eduard Benasques sus correcciones y comentarios.

separar una de las dos señales mediante un filtro centrado a la frecuencia de su portadora. Posteriormente se procederá a su demodulación, es decir a recuperar la señal original.

La teoría clásica de diseño de filtros en el dominio de la frecuencia tiene como objetivo diseñar filtros cuya transformada de Laplace pueda expresarse por medio de una función racional polinómica de forma que se asegure la realizabilidad de los mismos: filtros reales, causales y estables. Tradicionalmente, hay cuatro tipos de filtros que se utilizan en el diseño: Butterworth, Chebychev, Inverso de Chebychev y Elíptico. Cumplen las propiedades de realizabilidad y son técnicamente implementables con cierta facilidad.

En este capítulo nos centraremos en el diseño de filtros a partir de especificaciones en el dominio de la frecuencia. No entraremos en el diseño completo, esto es, a partir de unas especificaciones en el dominio de la frecuencia, diseñar completamente la transformada de Laplace del filtro y posibles implementaciones, sino que nos centraremos en el diseño de los filtros antes mencionados basándonos en su respuesta frecuencial. El tema incluye el estudio y discusión de la respuesta frecuencial de los filtros antes mencionados y su comparación. Para un curso básico de señales y sistemas, este contenido es suficiente como introducción al diseño de filtros y se deja al lector que profundice en los temas que sean más relevantes con la abundante bibliografía que existe sobre el tema y los programas de diseño disponibles.

En este capítulo definiremos el concepto de *distorsión*, aprenderemos a *especificar* un filtro en el dominio de la frecuencia, estudiaremos varios tipos de filtros realizable que pueden ser *diseñados* de forma que cumplan una plantilla de especificaciones en el dominio frecuencial y finalmente estudiaremos el efecto del filtro diseñado sobre la señal deseada.

### 3.2 Distorsión

Supongamos dos señales,  $x(t)$  e  $y(t)$ . Diremos que la señal  $y(t)$  no tiene distorsión respecto a  $x(t)$  si

$$y(t) = A x(t-t_0) \quad (3.1)$$

Es decir, si la amplitud de la señal está amplificada o atenuada, y/o ha sufrido un retardo, la señal  $y(t)$  no está distorsionada respecto a  $x(t)$ . La respuesta frecuencial de un sistema sin distorsión será por tanto:

$$H(f) = A \exp(-j2\pi f t_0) \quad (3.2)$$

Y esta ecuación se debe cumplir en todo el **ancho de banda** de la señal  $x(t)$ . En otras palabras, un sistema lineal e invariante no distorsiona si su módulo es constante y su fase lineal en el ancho de banda de interés.

#### Distorsión lineal de amplitud:

Un sistema Lineal e Invariante presenta distorsión lineal de amplitud si, dentro de la banda de la señal  $x(t)$ ,

$$|H(f)| \neq \text{cte} \quad (3.3)$$

#### Distorsión lineal de fase:

Un sistema Lineal e Invariante presenta distorsión lineal de fase si, dentro de la banda de la señal  $x(t)$ ,

$$\text{Arg}[H(f)] \neq -2\pi f t_0 \quad (3.4)$$

#### Distorsión no lineal:

Un sistema presenta distorsión no lineal cuando no es lineal e invariante, por ejemplo, sistema en saturación, sistema con relación entrada-salida cuadrático etc.

### EJEMPLO 3-1

Suponga que la señal

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi f_2 t) + a_3 \cos(2\pi f_3 t)$$

pasa a través de un sistema LI con módulo constante  $|H(f)| = 1$  y fase

- a)  $\Phi(f) = -2\pi f t_0$
- b)  $\Phi(f) = -\pi/2 \operatorname{sgn}(f)$

Halle la salida  $y(t)$  en cada caso

Según vimos en el capítulo anterior, la salida será:

$$y(t) = |H(f_1)| a_1 \cos(2\pi f_1 t + \Phi(f_1)) + |H(f_2)| a_2 \cos(2\pi f_2 t + \Phi(f_2)) + |H(f_3)| a_3 \cos(2\pi f_3 t + \Phi(f_3))$$

Sustituyendo los valores del filtro:

a)

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 \cos(2\pi f_1 t + 2\pi f_1 t_0) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + 2\pi f_2 t_0) + a_3 \cos(2\pi f_3 t + 2\pi f_3 t_0) = \\ &= a_1 \cos(2\pi f_1(t-t_0)) + a_2 \cos(2\pi f_2(t-t_0)) + a_3 \cos(2\pi f_3(t-t_0)) = \\ &= x(t-t_0) \end{aligned}$$

Vemos que cada sinusoida sufre el mismo retraso.

b)

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 \cos(2\pi f_1 t - \pi/2) + a_2 \cos(2\pi f_2 t - \pi/2) + a_3 \cos(2\pi f_3 t - \pi/2) = \\ &= a_1 \sin(2\pi f_1 t) + a_2 \sin(2\pi f_2 t) + a_3 \sin(2\pi f_3 t) \end{aligned}$$

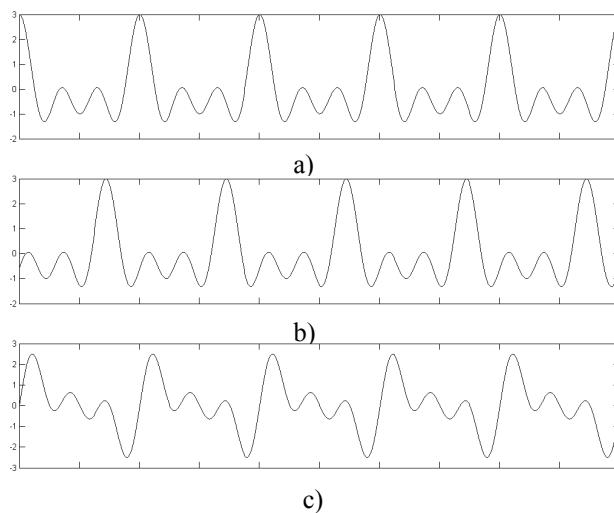


Figura 3-2 Efecto de la fase sobre una señal de entrada a un filtro. a) original, b) salida de un filtro con fase lineal, c) salida de un filtro con fase constante

### 3.3 Definición de filtros ideales

Un filtro con  $h(t)$  real es ideal si:

$$|H(f)|=1 \text{ en la } \underline{\text{banda de paso}}$$

$$|H(f)|=0 \text{ en la } \underline{\text{banda atenuada}}$$

$$\Phi_H(f) = -2\pi\alpha f \text{ en la banda de paso}$$

Los filtros típicos con los que trabajaremos son:

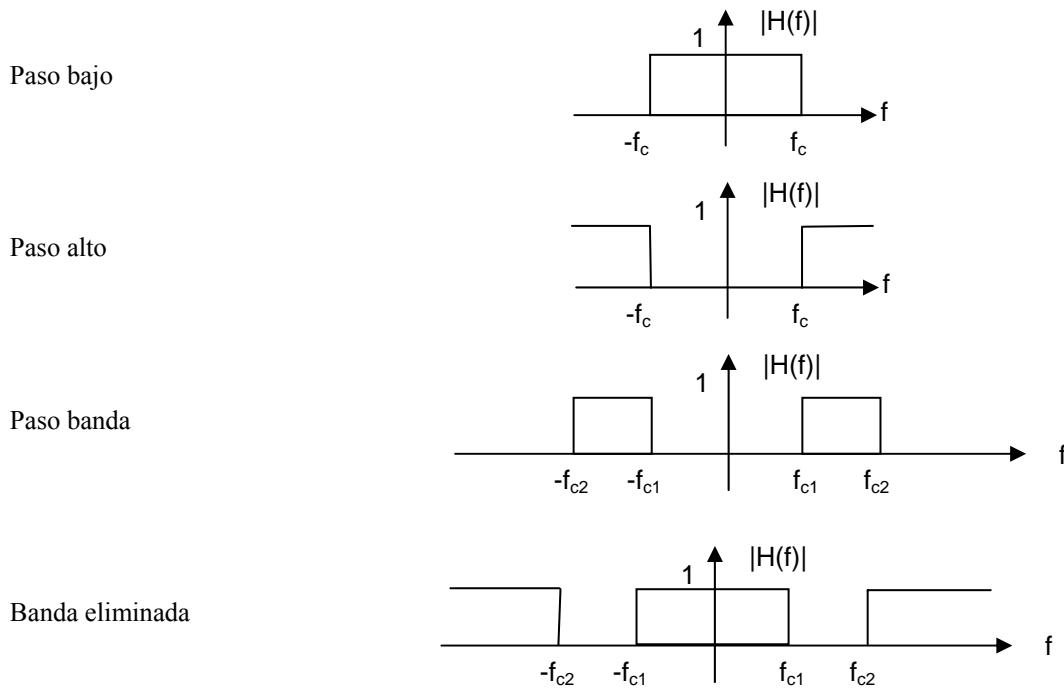


Figura 3-3 Filtros ideales

Un filtro muy especial es el filtro pasa todo. Su módulo es constante y la fase se calcula para corregir distorsiones de fase producidas por otros filtros o elementos.



Figura 3-4 Filtro pasa todo. Módulo de la respuesta frecuencial.

### EJEMPLO 3-2

Hallar la respuesta impulsional de un filtro paso bajo ideal.

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq f_c \\ 0 & \text{si } |f| > f_c \end{cases}$$

$$\Phi_K(f) = 0$$

Tomando transformada inversa:

$$h(t) = 2f_c \operatorname{sinc}(2f_c t)$$

---

La función  $h(t)$  no corresponde a un filtro causal ya que  $h(t) \neq 0$  para  $t < 0$ , por tanto el filtro paso bajo ideal no es realizable.

---

### EJEMPLO 3-3

Una posible forma de realizar un filtro causal a partir de un filtro ideal, es enventanando su respuesta impulsional en la zona de mayor contenido energético y retardándola. Compruebe que en el dominio transformado la respuesta frecuencial del filtro resultante presentará rizado.

Si la respuesta impulsional del filtro del ejemplo 3-2 la enventanamos por un pulso rectangular de duración  $T$  segundos, y la desplazamos para que sea causal

$$h_T(t) = h(t - T/2) \prod \left( \frac{t - T/2}{T} \right)$$

La respuesta frecuencial será

$$H_T(f) = [H(f) * T \operatorname{sinc}(fT)] e^{-j2\pi fT/2}$$

Dado que el filtro  $H(f)$  es:

$$H(f) = \prod \left( \frac{f}{2f_c} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq f_c \\ 0 & \text{si } |f| > f_c \end{cases}$$

---

Al convolucionar con la  $\operatorname{sinc}(fT)$  aparecerá rizado, tanto en la zona en la que el filtro  $H(f)$  es cero como en la zona en la que el filtro vale 1.

---

En el ejemplo 3.2. hemos comprobado que un filtro paso bajo ideal no es causal. El mismo razonamiento puede aplicarse a los demás filtros ideales. Para que los filtros sean realizable, debemos asegurarnos de que los filtros diseñados son reales, causales y estables. Por esta razón, las especificaciones de diseño de los filtros no pueden corresponder a filtros ideales y se deben permitir tolerancias.

En concreto, para un filtro paso bajo, definimos las distintas bandas del filtro:

$$\underline{\text{Banda de paso}} \quad 1 - \delta_p < |H(f)| \leq 1 + \delta_p \quad 0 \leq |f| \leq |f_p|$$

$$\underline{\text{Banda atenuada}} \quad 0 \leq |H(f)| \leq \delta_a \quad |f| \geq f_a$$

$$\underline{\text{Banda de transición}} \quad f_p < |f| < f_a$$

Las definiciones son análogas para los demás tipos de filtros representados en la Figura 3-3

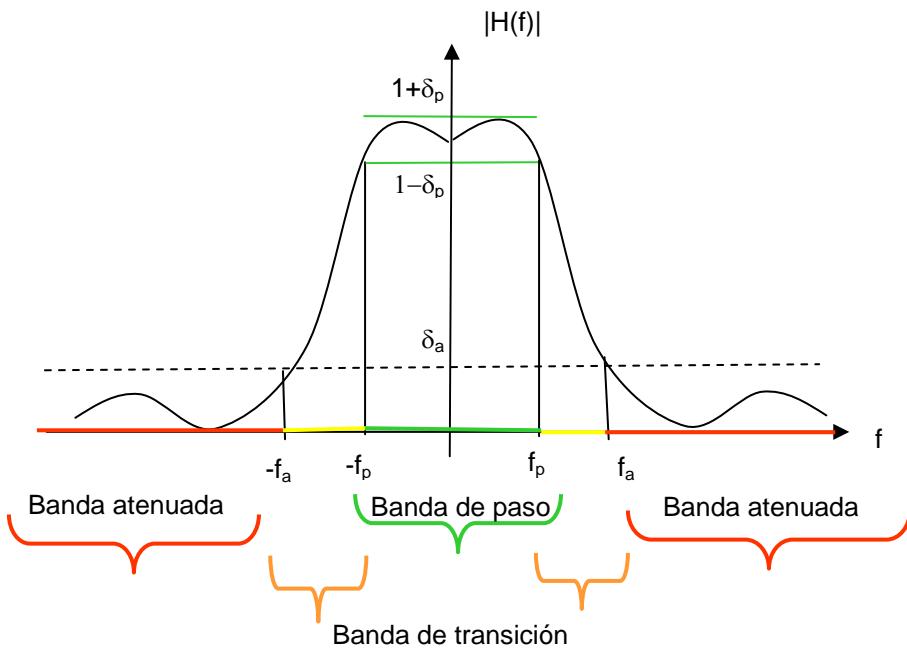


Figura 3-5 Tolerancias.

### 3.4 Atenuación $\alpha(f)$ (dB).

Se define la atenuación como:

$$\alpha(f) = 10 \log \frac{H_{\max}^2}{|H(f)|^2} \quad (3.5)$$

Está relacionada con el módulo del filtro que queremos diseñar. La escala logarítmica es más apropiada para especificar filtros y permite una mejor visualización de la banda atenuada.

Definiciones:

Ceros de atenuación: Frecuencias  $f_{0i}$  a las que  $\alpha(f_{0i}) = 0$  o de forma equivalente  $|H(f_{0i})| = H_{\max}$

Ceros de transmisión: Frecuencias  $f_{\infty i}$  las que  $\alpha(f_{\infty i}) = \infty$  o de forma equivalente  $|H(f_{\infty i})| = 0$

Orden del filtro= número de ceros de atenuación = número de ceros de transmisión.

### 3.5 La plantilla de especificaciones

El primer paso a realizar en el diseño de un filtro es especificar las bandas de paso, las bandas de transición y las bandas atenuadas así como las tolerancias en cada banda que debe tener el filtro a diseñar. Habitualmente estas tolerancias se especifican decibelios por medio de la función de atenuación. La relación entre las tolerancias del apartado 3.3 y la atenuación  $\alpha(f)$  para un filtro paso bajo es la siguiente:

$$\text{Banda de paso} \quad \alpha(f) \leq \alpha_p = 20 \log \frac{1+\delta_p}{1-\delta_p} \quad |f| \leq f_p$$

$$\text{Banda atenuada} \quad \alpha(f) \geq \alpha_a = 20 \log \frac{1+\delta_p}{\delta_a} \quad |f| \geq f_a$$

Banda de transición

$$f_p < |f| < f_a$$

La representación de estos datos en un plano se denomina “La plantilla de especificaciones”. La plantilla muestra gráficamente las bandas de paso, bandas de transición y bandas atenuadas y los valores máximos de atenuación en las bandas de paso y los valores mínimos de atenuación en las bandas atenuadas. En la Figura 3-6 se muestra la plantilla de especificaciones de un filtro paso bajo. En este caso hay una única banda de paso ( $|f| \leq f_p$ ) en donde la atenuación máxima permitida es  $\alpha_p$  y una banda atenuada ( $|f| \geq f_a$ ) donde la atenuación mínima es  $\alpha_a$ . Se representa únicamente el margen de frecuencias positivas ya que, por ser filtros reales, el módulo de la respuesta frecuencial tiene simetría par. En trazo continuo se muestra la función de atenuación de un filtro que cumple la plantilla.

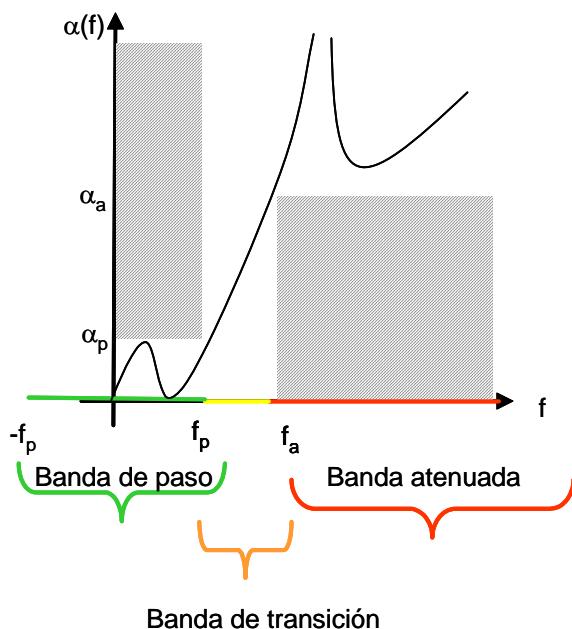


Figura 3-6 Plantilla de especificaciones de un filtro paso bajo. Se representa únicamente la zona de frecuencias positivas.

### 3.5.1 Selectividad

Se define la selectividad de un filtro

$$K_s = \frac{f_p}{f_a} \quad (3.6)$$

Siempre es inferior a 1 para un paso bajo

Nótese que es cociente entre frecuencias y no su diferencia. Una normalización del eje frecuencial no afecta al parámetro de selectividad

$K_s$  próximo a 1 indica un filtro MUY selectivo  
 $K_s$  próximo a 0 indica un filtro POCO selectivo

### 3.5.2 Discriminación

Se define la discriminación de un filtro

$$K_d = \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_a/10} - 1}} \quad (3.7)$$

Siempre es inferior a uno.

$K_d$  próximo a 1 indica un filtro POCO discriminante,  $\alpha_p \sim \alpha_a$   
 $K_d$  próximo a 0 indica un filtro MUY discriminante,  $\alpha_a \gg \alpha_p$

Un factor de ganancia en el filtro no afecta a  $K_d$  ya que  $\alpha(f)$  no varía por estar el cociente  $\frac{H_{\max}^2}{|H(f)|^2}$  en su definición.

Veremos la influencia directa de  $k_s$  y  $k_d$  en el diseño de los filtros

### 3.6 Diseño de filtros. Transformada de Laplace.

Como hemos mencionado en la introducción del tema, el objetivo de este capítulo es el diseño de filtros reales, causales y estables por medio de especificaciones en el dominio de la frecuencia. Vamos a diseñar filtros clásicos y estudiaremos su comportamiento frecuencial. No entraremos en cuestiones tecnológicas de implementación.

Los filtros que vamos a ver en este capítulo tienen todos una transformada de Laplace  $H(s)$  racional. A partir de la respuesta frecuencial, la transformada de Laplace puede hallarse mediante el siguiente procedimiento.

Por ser  $h(t)$  real,  $H(f)$  es hermítica con lo que

$$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f) = H(f)H(-f) \quad (3.8)$$

y la transformada de Laplace cumplirá la relación

$$H(s)H(-s) = H(f)H(-f) \Big|_{f=s/j2\pi} = |H(f)|^2 \Big|_{f^2=-s^2/2\pi} \quad (3.9)$$

Una vez obtenido  $H(s) H(-s)$ , hay que identificar los ceros y polos de  $H(s)$  y los de  $H(-s)$ . Para ello, se descompone el numerador y el denominador de  $H(s)H(-s)$  en función de sus raíces.

$$H(s)H(-s) = k \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_i (s - p_i)} \quad (3.10)$$

Para que el filtro sea real, los ceros y los polos de  $H(s)$  serán reales o estarán en pares complejos conjugados; para que sea estable, los polos de  $H(s)$  estarán en el semiplano izquierdo.  $H(s)$  estará formada por todos los polos  $p_i$  del semiplano izquierdo, la mitad de los ceros reales y la mitad de los ceros complejos, siempre tomados en pares complejos conjugados.

El ejemplo 3-4 muestra un ejemplo concreto para obtener  $H(f)$  y  $h(t)$  de  $H(s)$  y el ejemplo 3-5 muestra un procedimiento para obtener  $H(s)$  a partir del módulo de su respuesta frecuencial. Ambos métodos muestran la metodología que se aplicará en el resto del capítulo sin pretender ser ejemplos totalmente generales.

### EJEMPLO 3-4

Sea la transformada de Laplace  $H(s) = \frac{H_{\max} |p|^2}{(s - p)(s - p^*)}$ . Hallar el módulo y la fase de la respuesta frecuencial y la respuesta impulsional con  $p = w_c e^{j3\pi/4}$

Para obtener la respuesta frecuencial, desarrollamos el producto del denominador

$$H(s) = \frac{H_{\max} |p|^2}{s^2 - 2 \operatorname{Re}[p]s + |p|^2}$$

Sustituyendo los valores para  $p = w_c e^{j3\pi/4} = w_c \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + j)$  tenemos

$$H(s) = \frac{H_{\max} w_c^2}{s^2 + \sqrt{2} w_c s + w_c^2}$$

La respuesta frecuencial se obtiene sustituyendo  $s = j2\pi f$

$$H(f) = H(s) \Big|_{s=j2\pi f} = \frac{H_{\max} f_c^2}{-f^2 + j\sqrt{2} f_c f + f_c^2} = \frac{H_{\max}}{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + j\sqrt{2} \frac{f}{f_c}}$$

De donde obtenemos

$$|H(f)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^4} \quad \operatorname{Arg}[H(f)] = -\operatorname{arc tg} \frac{\sqrt{2} f / f_c}{1 - (f / f_c)^2}$$

La respuesta impulsional se obtiene a partir de la descomposición en fracciones simples de  $H(s)$

$$H(s) = \frac{A}{s - p} + \frac{A^*}{s - p^*} \quad \text{con} \quad A = H(s)(s - p) \Big|_{s=p}$$

y sustituyendo los valores de  $p$  y  $p^*$

$$A = \frac{H_{\max} w_c}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/2}$$

De donde

$$H(s) = \frac{-jH_{\max} w_c / \sqrt{2}}{s - p} + \frac{jH_{\max} w_c / \sqrt{2}}{s - p^*}$$

Tomando transformada inversa de Laplace

$$h(t) = [Ae^{pt} + A^* e^{p^* t}]u(t) = \sqrt{2} H_{\max} w_c e^{-\pi\sqrt{2}f_c t} \cos(\pi\sqrt{2}f_c t - \pi/2)u(t)$$

### EJEMPLO 3-5

Hallar la transformada de Laplace de un filtro real y estable cuyo módulo de su respuesta frecuencial es

$$|H(f)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^4}$$

Sustituyendo en (3.9) obtenemos  $H(s) H(-s)$

$$H(s)H(-s) = |H(f)|^2 \Big|_{f^2 = -s^2/2\pi} = \frac{H_{\max}^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^4} \Big|_{f^2 = -s^2/2\pi} = \frac{H_{\max}^2 w_c^4}{w_c^4 + s^4}$$

Las raíces del denominador de  $H(s)H(-s)$  son

$$s_i = w_c \sqrt[4]{-1} = w_c e^{j\pi/4} e^{j2\pi i/4}$$

y las correspondientes a  $H(s)$  serán las del semiplano izquierdo  $p_{1,2} = w_c e^{\pm j3\pi/4}$

$$H(s) = \frac{H_{\max} w_c^2}{(s - p)(s - p^*)}$$

### 3.7 Filtro de Butterworth .

El filtro de Butterworth tiene como respuesta frecuencial:

$$|H(f)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}} \quad (3.11)$$

Y la atenuación es

$$\alpha(f) = 10 \log \frac{H_{\max}^2}{|H(f)|^2} = 10 \log \left( 1 + \left( \frac{f}{f_c} \right)^{2n} \right) \quad (3.12)$$

#### Análisis de la respuesta frecuencial

**Comportamiento:** Debido a la variación con  $f^{2n}$  en el denominador, la función es monótona decreciente.

**Origen:**  $|H(0)| = H_{\max}$  Además, el filtro es maximalmente plano en el origen, es decir, el módulo de la respuesta frecuencial tiene n derivadas nulas en el origen

**Ancho de banda a 3dB  $B_{3dB}$ :** El ancho de banda a 3dB es la frecuencia a la que la atenuación vale 3 dB

$$\alpha(B_{3dB}) = 10 \log(1 + (B_{3dB}/f_c)^{2n}) = 3dB$$

$$B_{3dB} = \frac{f_c}{(10^{3/10} - 1)^{1/2n}} = f_c \quad (3.13)$$

Una atenuación de 3dB implica que el módulo al cuadrado de la respuesta frecuencial se ha reducido a la mitad

$$|H(B_{3dB})|^2 = \frac{1}{2} H_{\max}^2$$

**Orden:** Está relacionado con la complejidad en la implementación del filtro. En (3.11) el orden de  $|H(f)|^2$  es el grado del polinomio del denominador,  $2n$ . Por consiguiente, el orden del filtro  $H(f)$  es  $n$ .

#### Atenuación asintótica:

La función de atenuación del filtro es

$$\alpha(f) = 10 \log \frac{H_{\max}^2}{|H(f)|^2} = 10 \log \left( 1 + \left( \frac{f}{f_c} \right)^{2n} \right)$$

Para  $f \rightarrow \infty$

$$\alpha(f) = 20n \log(f)$$

Al doblar la frecuencia (una octava), la atenuación aumenta

$$\alpha(2f) - \alpha(f) = 20n \log(2f) - 20n \log(f) = 20n \log(2) = 6n \text{ dB}$$

$$\text{Atenuación asintótica: } 6n \text{ db/octava} \quad (3.14)$$

#### Transformada de Laplace

De forma análoga a lo descrito en el Ejemplo 3-5 podemos obtener  $H(s)$  a partir de la expresión (3.9)

$$|H(f)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1 + \left( \frac{f}{f_c} \right)^{2n}} \quad (3.11)$$

$$H(s)H(-s) = |H(f)|^2 \Big|_{f^2 = -s^2/2\pi} = \frac{H_{\max}^2}{1 + \left( \frac{f}{f_c} \right)^{2n}} \Bigg|_{f^2 = -s^2/2\pi} = \frac{H_{\max}^2 w_c^{2n}}{w_c^{2n} + (-1)^n s^{2n}}$$

Con  $w_c = 2\pi f_c$

Las raíces del denominador se hallan igualando el denominador a cero

$$w_c^{2n} + (-1)^n s^{2n} = 0$$

Para  $n$  impar

$$w_c^{2n} - s^{2n} = 0$$

$$s_i = \sqrt[2n]{w_c} e^{j2\pi i/2n} \quad i = 0, \dots, 2n-1$$

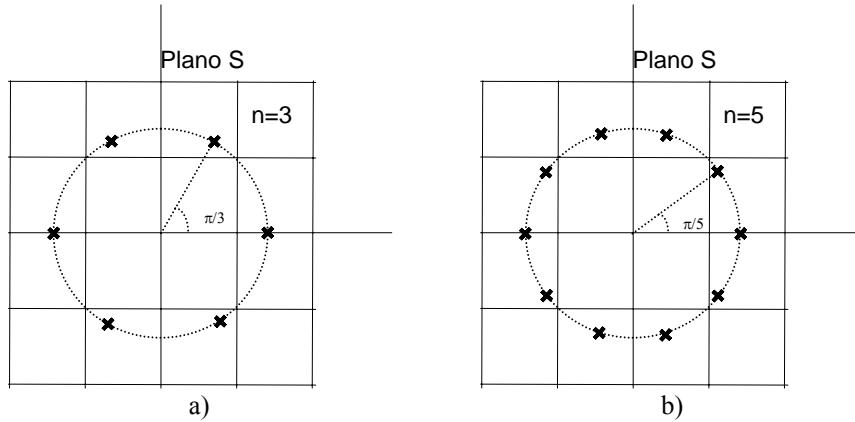


Figura 3-7 Lugar geométrico de las raíces de  $H(s)H(-s)$  de un filtro de Butterworth de orden impar.  
a)  $n=3$ , b)  $n=5$

Para  $n$  par

$$w_c^{2n} + s^{2n} = 0$$

$$s_i = \sqrt[2n]{-1} w_c = w_c e^{j\pi/2n} e^{j2\pi i/2n} \quad i = 0, \dots, 2n-1$$

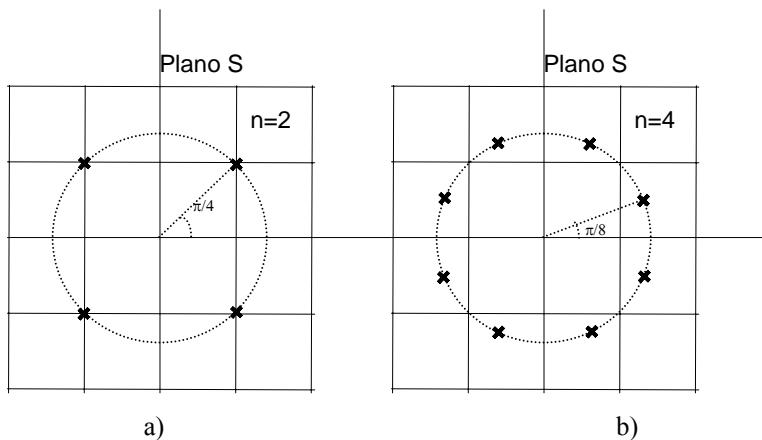


Figura 3-8 Lugar geométrico de las raíces de  $H(s)H(-s)$  de un filtro de Butterworth de orden par.  
a)  $n=2$ , b)  $n=4$

Las raíces están situadas en una circunferencia de radio  $w_c$ . Las correspondientes a  $H(s)$  son las  $n$  raíces del semiplano izquierdo. Nótese que si  $n$  es impar, una de las raíces es real

### EJEMPLO 3-6

Hallar la  $H(s)$  de los filtros de Butterworth de orden  $n=1, 2$  y  $3$

Como se ha visto anteriormente la expresión analítica de las raíces es

$$s_i = \begin{cases} w_c \sqrt[2n]{-1} = w_c e^{j\pi/2n} e^{j2\pi i/2n} & \text{para } n \text{ par} \\ w_c \sqrt[2n]{1} = w_c e^{j2\pi i/2n} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

n=1

H(s) tiene una única raíz en el semiplano izquierdo:  $s_1 = -w_c$ 

$$H(s) = \frac{H_{\max} w_c}{s + w_c}$$

n=2

Las raíces del semiplano izquierdo son  $s_2 = w_c e^{j3\pi/4}$  y  $s_2^*$ 

$$H(s) = \frac{H_{\max} w_c^2}{(s - s_2)(s - s_2^*)} = \frac{H_{\max} w_c^2}{s^2 - 2 \operatorname{Re}[s_2]s + |s_2|^2} = \frac{H_{\max} w_c^2}{s^2 + \sqrt{2}w_c s + w_c^2}$$

n=3

Las raíces del semiplano izquierdo son  $s_2 = w_c e^{j2\pi/3}$ ,  $s_2^*$  y  $s_3 = -w_c$ 

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{H_{\max} w_c^3}{(s - s_2)(s - s_2^*)(s - s_3)} = \frac{H_{\max} w_c^3}{(s + w_c)(s^2 - 2 \operatorname{Re}[s_2]s + |s_2|^2)} = \\ &= \frac{H_{\max} w_c^3}{(s + w_c)(s^2 + w_c s + w_c^2)} = \frac{H_{\max} w_c^3}{(s^3 + 2w_c s^2 + 2w_c^2 s + w_c^3)} \end{aligned}$$

### Representación del filtro de Butterworth en módulo, fase y respuesta impulsional

La Figura 3-9 compara el módulo de la respuesta frecuencial (en dB) con  $B_{3dB}=30Hz$  y la fase de filtros de Butterworth de órdenes  $n = 2, 4, 6$  y  $8$

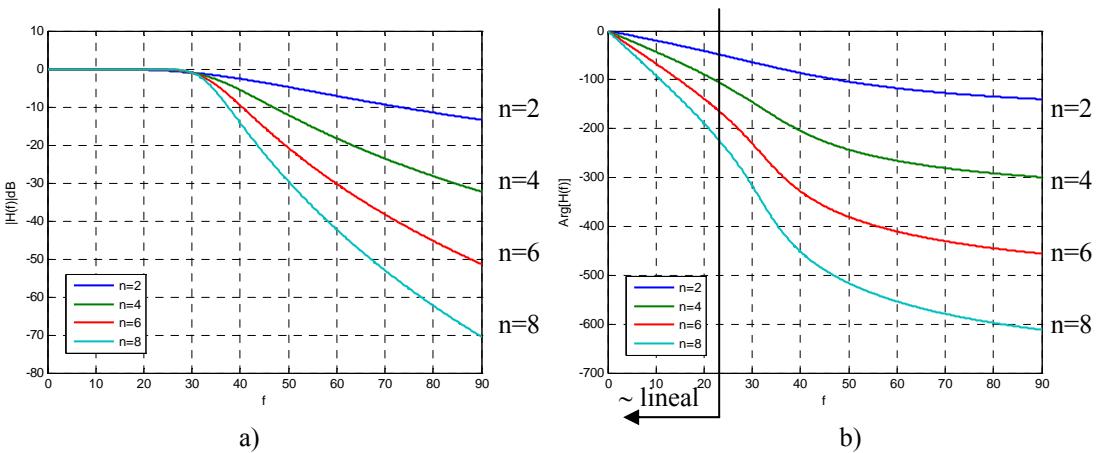


Figura 3-9 a) Módulo y b) fase de la respuesta frecuencial en dB de filtros de Butterworth. Todos los filtros tienen  $B_{3dB} = 30$  Hz y los órdenes son  $n = 2, 4, 6$  y  $8$ .

La fase del filtro de Butterworth es aproximadamente lineal en la banda de paso del filtro. La Figura 3-10 muestra la respuesta impulsional del filtro de Butterworth de orden 4 cuyos módulo y fase están representados en la Figura 3-9.

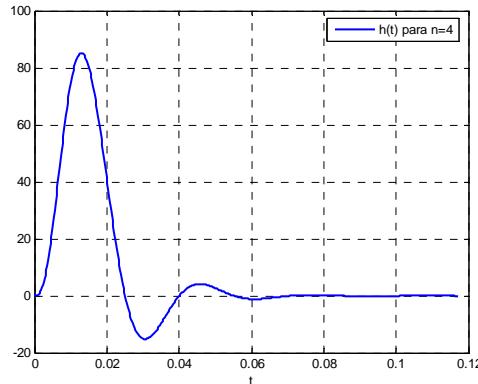


Figura 3-10 Respuesta impulsional de un filtro de Butterworth de orden 4. El módulo y la fase están representados en la Figura 3-9.

### EJEMPLO 3-7

Relacione la fase de la respuesta impulsional de un filtro de Butterworth de orden 4 con la posición del máximo absoluto de su respuesta impulsional.

Se puede demostrar que un filtro de módulo constante y fase lineal  $\phi(f) = -2\pi ft_0$  tiene una respuesta impulsional con simetría par respecto a un eje de simetría situado en  $t_0$  y presenta su valor máximo en  $t_0$ . Por debajo de la frecuencia  $B_{3dB}$ , el filtro de Butterworth es aproximadamente lineal. Para calcular la pendiente, medimos, en la Figura 3-9 b) el valor de la fase en  $f=20$  Hz Sea  $\phi(20) = -90^\circ$  ( $-\pi/2$ radianes)

Sustituyendo estos valores en la expresión de la fase y despejando

$$\begin{aligned}\phi(f) &= -2\pi ft_0 \\ -\pi/2 &= -2\pi 20 t_0 \\ t_0 &= 1/80 = 0.015 \text{ seg}\end{aligned}$$

Este valor coincide con el valor del pico absoluto de la respuesta impulsional mostrada en la Figura 3-10. Aproxima un eje de simetría de la respuesta impulsional que sería el que se obtendría con un filtro de fase lineal exacta

#### 3.7.1 Filtro de Butterworth y plantilla de especificaciones.

Para diseñar un filtro de Butterworth adecuado a un problema determinado, hace falta definir (3.11) los parámetros  $f_c$  y  $n$ . A continuación se muestran las dos formas más habituales de especificar el filtro.

##### a) Diseño a partir de $(\alpha_c=3dB, f_c, \text{atenuación asintótica})$

Una forma habitual de especificar una plantilla de especificaciones es mediante el ancho de banda a 3dBs, y la atenuación asintótica en dB/octava. Hemos demostrado que  $f_c$  coincide con el ancho de banda a 3dB (3.13) y el orden  $n$  será el entero menor que cumpla (3.15)

$$n \geq (\text{atenuación asintótica especificada}/6) \quad (3.15)$$

##### b) Diseño a partir de $(\alpha_p, f_p, \alpha_a, f_a)$

Otra forma de definir un filtro de Butterworth es a partir de la plantilla de especificaciones general ( $f_p, \alpha_p, f_a, \alpha_a$ ). En este caso el diseño se realiza según se explica a continuación.

En toda la banda de paso la atenuación debe ser menor que  $\alpha_p$

$$10 \log \left( 1 + \left( \frac{f}{f_c} \right)^{2n} \right) \leq \alpha_p \quad f \leq f_p \quad (3.16)$$

En toda la banda atenuada, la atenuación debe ser mayor que  $\alpha_a$

$$10 \log \left( 1 + \left( \frac{f}{f_c} \right)^{2n} \right) \geq \alpha_a \quad f \geq f_a \quad (3.17)$$

Por ser la función monótona decreciente, si la ecuación (3.16) se cumple en un extremo de la banda de paso, se cumple para todas las frecuencias de la banda de paso, por tanto (3.16) es equivalente a

$$10 \log \left( 1 + \left( \frac{f_p}{f_c} \right)^{2n} \right) \leq \alpha_p \quad (3.18)$$

y despejando

$$f_p^{2n} \leq f_c^{2n} (10^{\alpha_p/10} - 1) \quad (3.19)$$

Por ser la función monótona decreciente, si la ecuación (3.17) se cumple en un extremo de la banda atenuada, se cumple para todas las frecuencias de la banda atenuada, por tanto (3.17) es equivalente a

$$10 \log \left( 1 + \left( \frac{f_a}{f_c} \right)^{2n} \right) \geq \alpha_a \quad (3.20)$$

Y despejando

$$f_a^{2n} \geq f_c^{2n} (10^{\alpha_a/10} - 1) \quad (3.21)$$

Dividiendo (3.19) y (3.21)

$$\left( \frac{f_p}{f_a} \right)^{2n} \leq \frac{(10^{\alpha_p/10} - 1)}{(10^{\alpha_a/10} - 1)} \quad (3.22)$$

Identificando las constantes de discriminación y selectividad, la ecuación queda:

$$k_s^{2n} \leq k_d^2$$

Y despejando  $n$

$$n \geq \left( \frac{\log k_d}{\log k_s} \right) \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.23)$$

El cambio en el signo de la desigualdad es debido al hecho de que al tomar logaritmos, por ser  $k_s < 1$  y  $k_d < 1$ , los logaritmos son números negativos.

Una vez determinado  $n$ , el parámetro  $f_c$  puede hallarse especificando un punto concreto de la curva de atenuación. Si decidimos, por ejemplo, que el filtro cumpla (3.16) con signo de igualdad en  $f = f_p$

$$f_c = \left( \frac{f_p^{2n}}{10^{\alpha_p/10} - 1} \right)^{1/2n} \quad (3.24)$$

### EJEMPLO 3-8

Diseñar un filtro de Butterworth que cumpla la siguiente plantilla de especificaciones:  $\alpha_p=1\text{dB}$ ,  $f_p=20\text{KHz}$ ,  $\alpha_a=20\text{dB}$ ,  $f_a=60\text{KHz}$

Buscamos en primer lugar las constantes de selectividad y discriminación:

$$k_s = \frac{f_p}{f_a} = \frac{20 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^3} = 0.333$$

$$k_d = \left( \frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_a/10} - 1} \right)^{1/2} = 0.051$$

El orden del filtro será

$$n \geq \frac{\log(k_d)}{\log(k_s)} = 2,70$$

Y para que el orden sea el menor posible elegimos el entero inmediato superior  $n= 3$

Una vez obtenido el orden, podemos encontrar  $f_c$  ajustando un punto concreto de la curva a la plantilla. Elegimos que la curva pase por el punto  $(f_p, \alpha_p)$  y obtenemos, sustituyendo en (3.24)

$$f_c = \left( \frac{f_p^{2n}}{10^{\alpha_p/10} - 1} \right)^{1/2n} = 25,051 \text{ KHz}$$

### 3.8 Filtro de Chebychev:

El filtro de Chebychev tiene una respuesta frecuencial

$$|H(f)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left( \frac{f}{f_p} \right)} \quad (3.25)$$

Donde  $C_n(x)$  son los polinomios de Chebychev de orden n.

Los polinomios de Chebychev se definen:

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos(x)) & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh}(x)) & |x| > 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

Los polinomios de Chebychev cumplen la recursión

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = x$$

$$C_n(x) = 2x C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$$

Entre las características de  $C_n(x)$  cabe mencionar que son

- Polinomios de orden n
- Si n es par, se desarrolla en términos de potencias pares
- Si n es impar, se desarrolla en términos de potencias impares
- Todas sus raíces se encuentran en el intervalo  $|x| < 1$

- Presentan rizado de amplitud constante para  $|x| \leq 1$
- Son monótono (creciente o decreciente) para  $|x| > 1$ .

- En el origen,  $C_n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ (-1)^{n/2} & n \text{ par} \end{cases}$

- $C_n^1(1) = 1$

- $C_n^1(-1) = (-1)^n$

La figura representa  $C_n^2(x)$  para distintos valores de n. Por estar elevado al cuadrado, los polinomios son pares y por tanto presenta simetría par.

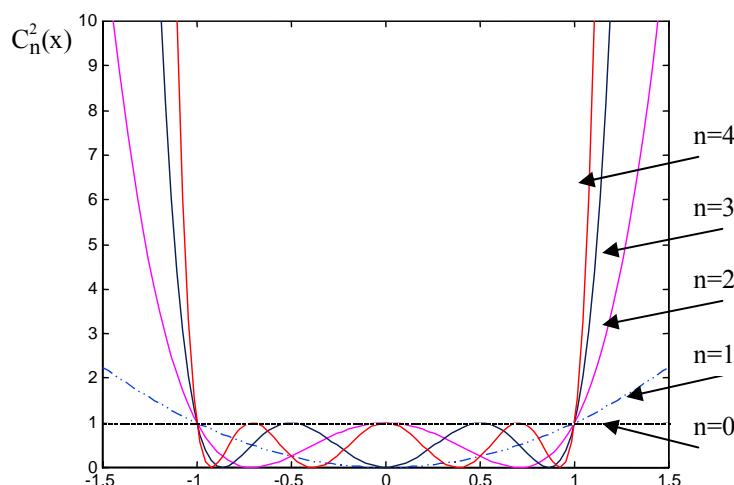


Figura 3-11 Polinomios de Chebychev. Se representa el valor de los polinomios al cuadrado para órdenes  $n = 0, 1, 2, 3$  y  $4$

La función de atenuación del filtro es

$$\alpha(f) = 10 \log \frac{H_{\max}^2}{|H(f)|^2} = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left( \frac{f}{f_p} \right) \right) \quad (3.27)$$

### Análisis

**Comportamiento:** Debido a las propiedades de los polinomios de Chebychev, la respuesta frecuencial de los filtros de Chebychev  $|H(f)|^2$  presenta rizado constante en la banda de paso ( $|f| \leq f_p$ ) y es monótona decreciente para  $|f| > f_p$

**Origen:**  $|H(0)| = H_{\max}^2$  si n es impar y  $|H(0)|^2 \left( \frac{H_{\max}^2}{1 + \varepsilon^3} \right)$  si n es par

**Orden:** Es n, el grado del polinomio de Chebychev en (3.25).

### Atenuación asintótica:

Por ser  $C_n$  un polinomio de Chebychev de orden n, para  $f \rightarrow \infty$

$$\alpha(f) = 20n \log(f)$$

Al doblar la frecuencia (una octava), la atenuación aumenta

$$\alpha(2f_0) - \alpha(f_0) = 20n \log(2f_0) - 20n \log(f_0) = 20n \log(2) = 6n \text{ dB / octava} \quad (3.28)$$

### Transformada de Laplace

De forma análoga a lo descrito en el Ejemplo 3-5 podemos obtener  $H(s)$  a partir de la expresión (3.9)

$$H(s)H(-s) = H(f)H(-f) \Big|_{f=s/\sqrt{2\pi}} = |H(f)|^2 \Big|_{f^2=-s^2/2\pi}$$

$$= \frac{H_{\max}^2}{1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left( \frac{f}{f_p} \right)} \Bigg|_{f^2=-s^2/2\pi}$$

Las raíces del polinomio del denominador tienen la expresión general

$$s_i = \frac{\omega_p}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cos \theta_i + j \frac{\omega_p}{2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) \sin \theta_i$$

con

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$r = \left( \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right)^{1/n}$$

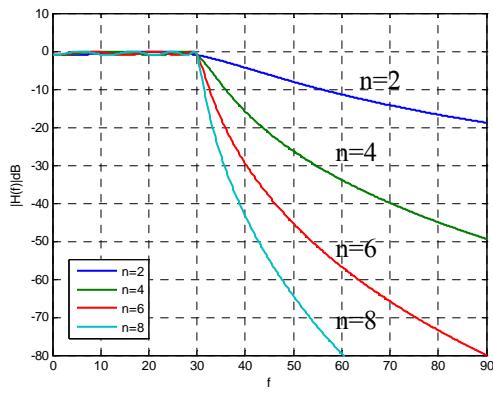
Las raíces están situadas en una elipse de radio mayor  $e_M$  y radio menor  $e_m$ .

$$e_m = \omega_p \left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

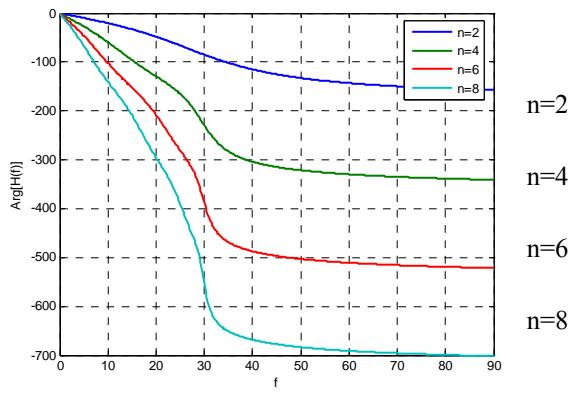
$$e_M = \omega_p \left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

Las correspondientes a  $H(s)$  son las  $n$  raíces del semiplano izquierdo. Nótese que si  $n$  es impar, una de las raíces es real

### Representación del filtro de Chebychev en módulo, fase y respuesta impulsional



a)



b)

Figura 3-12 a) Módulo y b) fase de la respuesta frecuencial en dB de filtros de Chebychev. Todos los filtros tienen los mismos parámetros  $\epsilon$  y  $f_p$  y los órdenes son  $n=2, 4, 6$  y  $8$ .

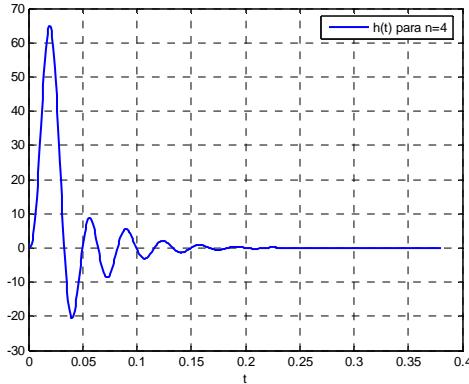


Figura 3-13. Respuesta impulsional de un filtro de Chebychev de orden 4. El módulo y la fase están representados en la Figura 3-12.

La Figura 3-12 muestra a) el módulo y b) la fase de la respuesta frecuencial de los filtros de Chebychev de órdenes  $n = 2, 4, 6$  y  $8$ . Se representan en las mismas escalas que los filtros de Butterworth de la Figura 3-9 para facilitar la comparación.

### 3.8.1 Filtro de Chebychev y plantilla de especificaciones.

*Diseño a partir de  $(\alpha_p, f_p, \text{atenuación asintótica})$*

El diseño de un filtro de Chebychev a partir de una plantilla de especificaciones puede realizarse de forma inmediata a partir de la atenuación  $\alpha_p$  y la frecuencia  $f_p$  en la banda de paso, y la atenuación asintótica.

El orden se determina a partir de (3.28)

$$n \geq (\text{atenuación asintótica especificada}/6) \quad (3.29)$$

La constante  $\epsilon^2$  puede determinarse sustituyendo  $\alpha_p$  y  $f_p$  en (3.27) y despejando. Tomando  $H_{\max}=1$

$$\begin{aligned} \alpha(f_p) &= \alpha_p = 10 \log(1 + \epsilon^2) \\ \epsilon^2 &= 10^{\alpha_p/10} - 1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

*Diseño a partir de  $(\alpha_p, f_p, \alpha_a, f_a)$*

El diseño del filtro a partir de las especificaciones  $(\alpha_p, f_p, \alpha_a, f_a)$  requiere un procedimiento análogo al del apartado 3.6.2 aplicando las propiedades de los polinomios de Chebychev. El orden del filtro debe cumplir

$$n \geq \frac{\text{arc cosh}(1/k_d)}{\text{arc cosh}(1/k_s)}$$

El valor de  $\epsilon^2$  se obtiene ajustando la curva de atenuación a un punto concreto. eligiendo  $\alpha(f_p) = \alpha_p$  se obtiene (3.30) independiente del orden  $n$ . Se deja como ejercicio encontrar el valor de  $\epsilon^2$  ajustando la curva de atenuación a  $\alpha(f_a) = \alpha_a$

### 3.9 Comparación de un filtro de Butterworth y un filtro de Chebychev.

La Figura 3-14 muestra la comparación del módulo de la respuesta frecuencial de un filtro de Butterworth y uno de Chebychev para las mismas especificaciones ( $\alpha_p = 1 \text{ dB}$ ,  $f_p = 30 \text{ Hz}$ ,  $n = 4$ ). El orden de ambos filtros es  $n=4$ . En este ejemplo, la escala del eje de ordenadas es lineal por lo que queda de manifiesto el distinto comportamiento en la banda de paso. Para una plantilla del tipo  $(\alpha_p, f_p, \alpha_a, f_a)$ , la banda de

transición del filtro de Chebychev es más estrecha que la de Butterworth y este hecho es general. El filtro de Chebychev cumple una plantilla de especificaciones con un orden menor o igual que el de Butterworth.

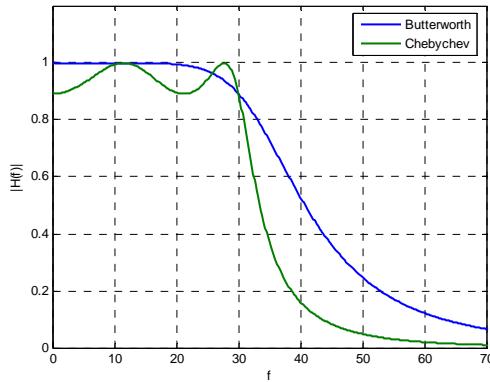


Figura 3-14 Comparación del módulo de la respuesta frecuencial de un filtro de Butterworth y un filtro de Chebychev ambos de orden 4 y especificaciones en la banda de paso  $\alpha_p = 1\text{dB}$ ,  $f_p=30\text{ Hz}$ .

### 3.10 Otros filtros

Otros filtros cuyo diseño puede sistematizarse son el filtro Inverso de Chebychev y el filtro elíptico (o de Cauer). El filtro inverso de Chebychev es maximalmente plano en la banda de paso y presenta rizado de amplitud constante en la banda atenuada. El filtro elíptico presenta rizado en la banda de paso y en la banda atenuada. Es el que precisa menor orden para cumplir una determinada plantilla de especificaciones y en cuanto a su comportamiento de fase, es el que presenta mayor distorsión. En la Figura 3-15 se compara el módulo de la respuesta frecuencial de un filtro inverso de Chebychev de orden 6 y un filtro elíptico de orden 4. La representación en escala lineal permite ver el rizado. Si la plantilla de especificaciones precisa filtros muy selectivos y/o muy discriminantes, el filtro de Butterworth siempre requiere el orden mayor y el elíptico el orden menor. Por ejemplo para ( $\alpha_p=1\text{dB}$ ,  $f_p = 4000\text{Hz}$ ,  $\alpha_a = 40\text{ dB}$ ,  $f_a = 4600\text{ Hz}$ ) se precisa un filtro de Butterworth de orden  $n=38$ , un filtro de Chebychev o Inverso de Chebychev precisaría un orden  $n = 12$  y un filtro elíptico un orden  $n = 6$ . Recuérdese que el orden está directamente relacionado con la complejidad en la realización del filtro.

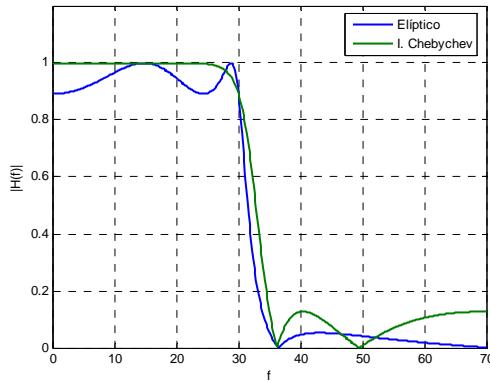


Figura 3-15 Comparación del módulo de la respuesta frecuencial de un filtro de Elíptico de orden 5 y un filtro Inverso de Chebychev orden 6.

Todos los filtros mencionados se pueden diseñar mediante Matlab. Los de la Figura 3-15 han sido calculados por Matlab con las siguientes especificaciones:  $\alpha_p = 1\text{dB}$ ,  $f_p = 30\text{ Hz}$ ,  $\alpha_a = 15\text{ dB}$ ,  $f_a = 35\text{ Hz}$

### 3.11 Transformación de frecuencias.

En muchas aplicaciones es posible diseñar filtros paso banda, paso alto, banda eliminada a partir de diseños paso bajo. Se realiza por medio de una transformación de frecuencias. Concretamente, lo que se hace es trasladar la banda de paso y la banda atenuada a otras zonas frecuenciales. Las bandas de paso y atenuadas resultantes tendrán rizados o tolerancias en las bandas de paso y atenuadas iguales a las del filtro paso bajo antes de ser transformado.

Supongamos que hemos diseñado un filtro *prototipo* paso bajo cuya respuesta frecuencial denominaremos  $H_p(\phi)$  (usamos  $\phi$  en lugar de  $f$  para distinguirlo de la frecuencia,  $f$ , después de la transformación).

La función de transformación será

$$\phi = g(f)$$

y tenemos un nuevo filtro cuya respuesta frecuencial es

$$H(f) = H_p(\phi)|_{\phi=g(f)} = H_p(g(f))$$

Las transformaciones de frecuencias pueden verse como una transformación de la variable independiente del prototipo paso bajo. Las funciones de transformación que vamos a ver en este capítulo se derivan de transformaciones más generales (en el plano  $s$ ), aseguran que los filtros transformados son reales, causales y estables si el prototipo paso bajo también lo es. En este capítulo únicamente estudiaremos la transformación frecuencial sin entrar en los efectos de la transformación del plano  $s$ .

### 3.11.1 Transformación paso-bajo paso-alto.

Dado el filtro paso bajo  $H_p(\phi)$ , la transformación de frecuencias

$$\phi = -\frac{1}{f} \quad (3.31)$$

Permite transformar el prototipo paso bajo en un filtro paso alto. La banda de paso del prototipo paso bajo  $|\phi| \leq \phi_p$  se transforma en la banda de paso del paso alto  $|f| > f_p$  con  $|f_p| = \frac{1}{|\phi_p|}$ .

Análogamente, la banda atenuada del prototipo  $|\phi| > \phi_a$  se transforma en la banda atenuada del prototipo paso alto  $|f| \leq f_a$  con  $|f_a| = \frac{1}{|\phi_a|}$

#### EJEMPLO 3-8

Sea el filtro de Butterworth de orden 4

$$|H_p(\phi)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\phi}{\phi_c}\right)^8}$$

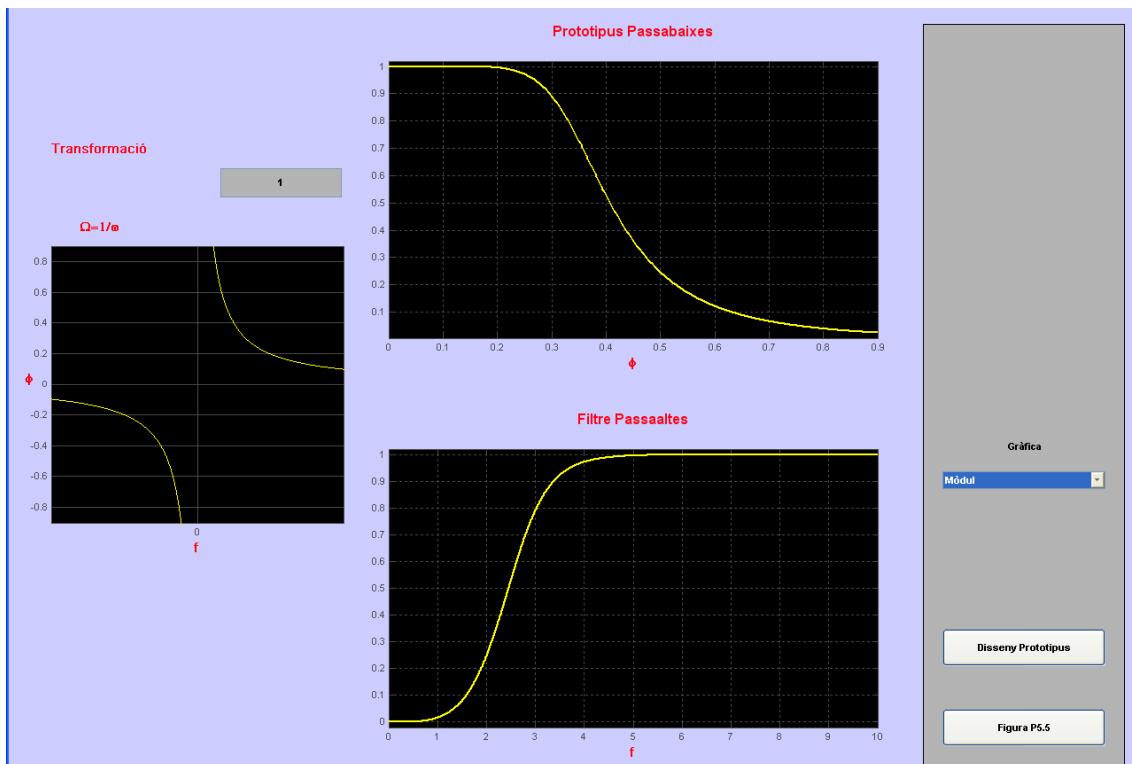


Figura 3-16. Módulo de la respuesta frecuencial de un prototípico paso bajo  $|H_p(\phi)|$  y de un filtro paso-alto  $|H(f)|$  obtenido por transformación de frecuencias. El prototípico paso bajo es un filtro de Butterworth de orden  $n = 4$  con frecuencia de corte a 3 dB  $B_{3dB} = 0,33$  Hz. El filtro paso alto tiene una frecuencia de corte a 3 dB  $B_{3dB} = 1/0,33$  Hz = 3 Hz.

Aplicando la transformación  $\phi = -\frac{1}{f}$

$$|H(f)|^2 = |H_p(\phi)|^2 \Big|_{\phi=-1/f} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{f \phi_c}\right)^8}$$

Definiendo  $f_c = 1/\phi_c$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^8} = \frac{f^8}{f^8 + f_c^8}$$

La representación de este filtro se muestra en la Figura 3-16. Buscando unos valores del filtro encontramos: 1) en el origen  $H(0) = 0$ ; 2) comportamiento asintótico: para  $f \rightarrow \infty$   $|H(f)| = 1$  y 3) en  $f = f_c$   $|H(f_c)|^2 = 1/2$ , ( $|H(f_c)| \approx 0.7$ ) o también  $\alpha_c = 3$  dB, es decir,  $f_c = 1/\phi_c$  es la frecuencia de corte a 3 dB.

### EJEMPLO 3-9

Diseñar un filtro paso alto, mediante transformación de frecuencias, con las siguientes especificaciones:  $\alpha_p = 2$  dB,  $f_p = 4$  KHz,  $\alpha_a = 40$  dB,  $f_a = 1$  KHz.

- a) Encuentre la plantilla de atenuación del prototípico paso bajo.
- b) Diseñe el filtro mediante la aproximación de Butterworth. y ajuste de la curva en el extremo de la banda de paso.

c) Diseñe el filtro mediante la aproximación de Chebychev y ajuste de la curva en el extremo de la banda de paso.

d) Halle la atenuación de los filtros resultantes a la frecuencia  $f_a$

a) Transformación de la plantilla para hacer el prototipo paso bajo

Usando la transformación  $\phi = -1/f$ , y dado que por la simetría de la curva podemos trabajar directamente con los valores positivos, obtenemos:

$$\phi_a = 1/f_a = 1 \text{ mHz}$$

$$\phi_p = 1/f_p = 0,25 \text{ mHz}$$

De forma que la plantilla que debe cumplir el prototipo paso bajo es

$$\alpha_p = 2 \text{ dB}, \phi_p = 0,25 \text{ mHz}, \alpha_a = 40 \text{ dB}, \phi_a = 1 \text{ mHz}.$$

Las constantes de selectividad y atenuación son:

$$k_s = \phi_p / \phi_a = 1/4$$

$$K_d = \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_a/10} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{2/10} - 1}{10^{40/10} - 1}} = 0,0076$$

b) Realización del prototipo paso bajo con la aproximación de Butterworth:

$$|H_{PB}(\phi)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\phi}{\phi_c}\right)^{2n}}$$

$$n \geq \left( \frac{\log k_d}{\log k_s} \right) = 3,5 \rightarrow n=4$$

El ajuste a la banda de paso se realiza mediante (3.24)

$$\phi_c = \left( \frac{\phi_p^{2n}}{10^{\alpha_p/10} - 1} \right)^{1/2n} = \frac{1}{3.74 \cdot 10^3}$$

Transformación del prototipo paso bajo al filtro paso banda

$$|H_B(f)|^2 = |H_{PB}(\phi)|^2 \Big|_{\phi=-1/f} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\phi}{\phi_c}\right)^{2n}} \Bigg|_{\phi=-1/f} = \frac{1}{1 + \left(\frac{-1/f}{\phi_c}\right)^8}$$

$$|H_B(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{1/f}{1/3,74 \cdot 10^3}\right)^8} = \frac{1}{1 + \left(\frac{3,74 \cdot 10^3}{f}\right)^8}$$

c) Para el filtro de Chebychev la respuesta frecuencial del prototipo paso bajo es

$$|H_{PC}(\phi)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left( \frac{\phi}{\phi_p} \right)^2}$$

y se obtiene, como se vio en la sección 3.8.1

$$n \geq \frac{\operatorname{arc cosh}(1/k_d)}{\operatorname{arc cosh}(1/k_s)} = \frac{5.5727}{2.06} = 2,7 \rightarrow n=3$$

$$\varepsilon^2 = 10^{\alpha_p/10} - 1 = 0,5849$$

La transformación paso alto es

$$|H_C(f)|^2 = |H_{PC}(\phi)|^2 \Big|_{\phi=-1/f} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left( \frac{\phi}{\phi_p} \right)} \Bigg|_{\phi=-1/f} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left( \frac{-1}{f\phi_p} \right)}$$

y como  $f_p = 1/\phi_p$  y los polinomios son pares por estar al cuadrado, se tiene

$$|H_C(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left( \frac{f_p}{f} \right)} = \frac{1}{1 + 0.5849 C_3^2 \left( \frac{4 \cdot 10^3}{f} \right)}$$

d) La atenuación de cada filtro en  $f_a$  es:

$$\text{Butterworth: } \alpha(f_a) = \alpha(10^3) = 10 \log \left( 1 + \left( \frac{3.74 \cdot 10^3}{10^3} \right)^8 \right) \cong 10 \log 3.74^8 = 45,82 \text{ dB}$$

$$\text{Chebychev: } \alpha(f_a) = \alpha(10^3) = 10 \log \left( 1 + 0,5849 C_3^2 \left( \frac{4 \cdot 10^3}{10^3} \right) \right) \cong 10 \log(1 + 34822.60) = 45,41 \text{ dB}$$

### 3.11.2 Transformación paso bajo-paso banda

Se consigue mediante la transformación

$$\phi = \frac{f^2 - f_0^2}{f} \quad (3.32)$$

La frecuencia  $\phi_i=0$  del paso bajo se transforma en las frecuencias  $f_1 = -f_0$  y  $f_2 = f_0$ . En general, cada frecuencia  $\phi_i$  del prototipo paso bajo se transforma según (3.32) en otras dos frecuencias  $f_{i1}, f_{i2}$  que se encuentran hallando las raíces de la ecuación:

$$f^2 - \phi_i f - f_0^2 = 0 \quad (3.33)$$

$$f_{i1,i2} = \begin{cases} \frac{\phi_i}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\phi_i^2 + 4f_0^2} & f_{i1} < 0 \text{ si } \phi_i > 0 \\ \frac{\phi_i}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\phi_i^2 + 4f_0^2} & f_{i2} > 0 \text{ si } \phi_i > 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

y por simetría, la frecuencia  $-\phi_i$  del prototipo se transforma en  $-f_{i1}, -f_{i2}$ . En resumen, las frecuencias  $\pm\phi_i$  se transforman en las frecuencias  $(\pm f_{i1}, \pm f_{i2})$  y de forma consistente con lo anterior:

La banda de paso  $|\phi| \leq \phi_p$  del filtro paso bajo se transforma en la banda de paso del filtro paso banda  $|f_{p1}| < |f| < |f_{p2}|$  ( $i=p$ )

La banda atenuada  $|\phi| < \phi_p$  del filtro paso bajo se transforma en las bandas atenuadas del filtro paso banda  $|f| \leq |f_{a1}|$  y  $|f| \geq |f_{a2}|$  ( $i=a$ )



Figura 3-17 Transformación paso bajo-paso banda

Nótese que por ser soluciones de una ecuación de segundo grado, las raíces de la ecuación cumplen:

$$|f_{i2}| - |f_{i1}| = \phi_i \quad (3.35)$$

$$|f_{i2}f_{i1}| = f_0^2 \quad (3.36)$$

Las frecuencias  $|f_{i1}|$  y  $|f_{i2}|$  resultado de la transformación de una frecuencia  $\phi_i$  tienen simetría geométrica respecto a la frecuencia ‘central’  $f_0$  y su diferencia coincide con la frecuencia paso bajo a transformar. Se han utilizado valores absolutos para dejar manifiesto que nos referimos a las frecuencias positivas, independientemente de cuál sea su numeración (1, 2).

La Figura 3-18 muestra la transformación de un filtro paso bajo de Chebychev de orden 4 en un filtro paso banda de orden 8. El filtro paso banda obtenido mediante esta transformación de frecuencias presenta simetría geométrica alrededor de  $f_0$ .  $|H(|f_{i1}|)| = |H(|f_{i2}|)|$ .

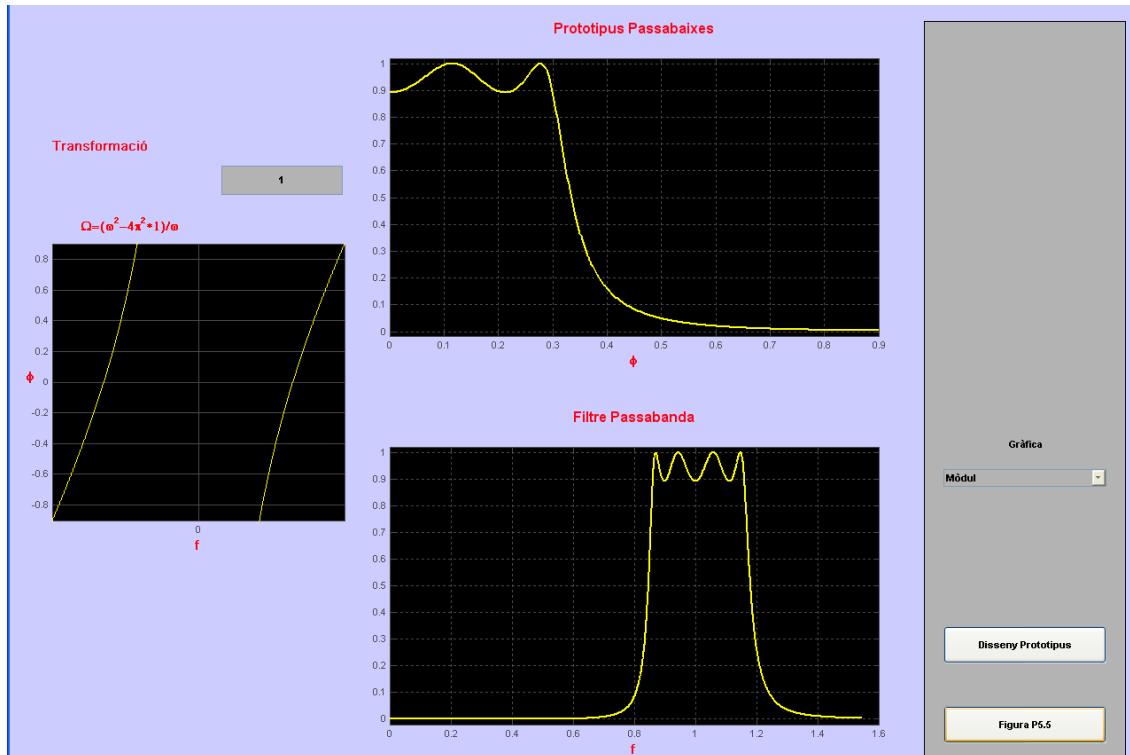


Figura 3-18 Módulo de la respuesta frecuencial de un prototipo paso bajo  $|H_p(\phi)|$  de orden 4 y de un filtro paso-banda  $|H(f)|$  de orden 8 obtenido por transformación de frecuencias. El filtro paso banda está centrado en  $f_0 = 1$

### EJEMPLO 3-10

Sea el filtro (prototipo paso bajo) de Butterworth de orden  $n= 4$  y frecuencia de corte a 3dB  $\phi_c=1/3$  Hz

$$|H_p(\phi)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\phi}{\phi_c}\right)^8}$$

Se desea transformarlo en un filtro paso banda centrado en la frecuencia  $f_0=1$  Hz. ¿Cuál es el ancho de banda a 3dB del filtro resultante?

Aplicando la transformación  $\phi = \frac{f^2 - f_0^2}{f}$

$$|H(f)|^2 = |H_p(\phi)|^2 \Big|_{\phi=\frac{f^2-f_0^2}{f}} = \frac{1}{1 + \left( \frac{f^2 - f_0^2}{\phi_c f} \right)^8} = \frac{(\phi_c f)^8}{(f^2 - f_0^2)^8 + (\phi_c f)^8}$$

Cada frecuencia  $\phi_i$  del prototipo se transforma en otras dos frecuencias (3.34) que se encuentran hallando las raíces de la ecuación (3.33). La frecuencia de corte a tres dB,  $\phi_c$ , del prototipo paso bajo se transforma en

$$f_{c1,c2} = \begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9} + 4} & = -0.847 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9} + 4} & = 1.169 \end{cases}$$

Y el ancho de banda a tres dBs será

$$B_{3dB} = f_{c2} - |f_{c1}| = 1.169 - 0.847 = 0.33 \text{ Hz}$$

verificándose (3.35). Obsérvese que los anchos de banda de las bandas de paso del prototipo paso bajo y del filtro paso banda coinciden. Esta transformación se muestra en la Figura 3-19

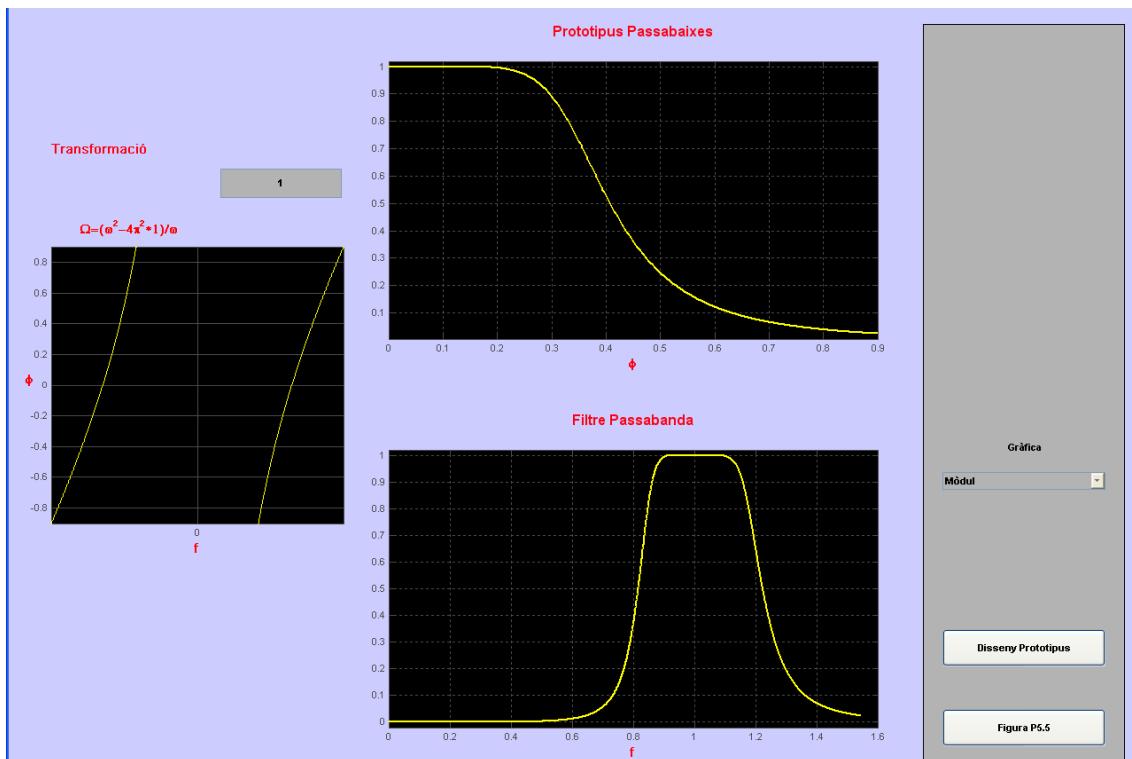


Figura 3-19. Módulo de la respuesta frecuencial de un prototipo paso bajo  $|H_p(\phi)|$  y de un filtro paso banda  $|H(f)|$  obtenido por transformación de frecuencias. El prototipo paso bajo es un filtro de Butterworth de orden  $n=4$  y  $B_{3dB}=0,33$  Hz. El filtro paso banda está centrado en  $f_0=1$  y tiene un ancho de banda a 3 dB de 0,33 Hz

### 3.12 Problemas

- 3.1 Represente la respuesta frecuencial en módulo y fase de un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte de 1 KHz y un retardo de 3 seg.

3.2 La siguiente figura representa el módulo y la fase de la respuesta frecuencial de un filtro. Calcule la salida si a la entrada se aplica la señal

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)$$

- a) con  $f_1 = 125$  Hz,,  $f_2= 130$  Hz y  $f_3 = 180$  Hz.
- b) con  $f_1 = 125$  Hz,,  $f_2= 300$  Hz y  $f_3 = 500$  Hz.
- c) con  $f_1 = 700$  Hz,,  $f_2= 800$  Hz y  $f_3 = 850$  Hz.

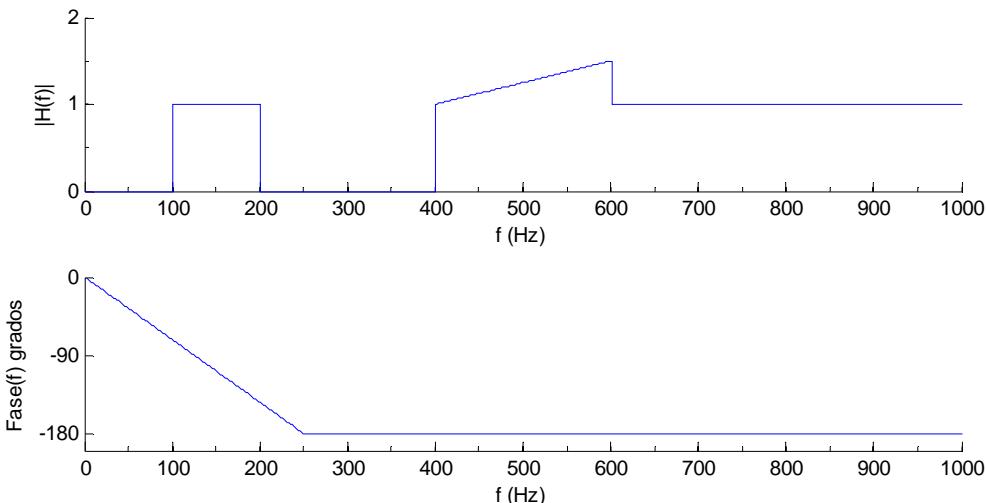


Figura 3-20 Módulo y fase de la respuesta frecuencial de  $H(f)$

3.3 Diseñe un filtro de Butterworth que cumpla las siguientes especificaciones: ancho de banda a 3dB  $B_{3dB}=10$ Hz y atenuación asintótica= 27 dB/octava. Dibuje la respuesta frecuencial.

3.4 Diseñe un filtro de Chebychev que cumpla las siguientes especificaciones: ancho de banda a 3dB  $B_{3dB}=10$ Hz y atenuación asintótica= 27 dB/octava. Dibuje la respuesta frecuencial.

3.5 Calcule el filtro de Butterworth que cumple la plantilla  $(\alpha_a, f_a, n)$  ajustando la curva al punto  $(\alpha_a, f_a)$

3.6 Calcule el filtro de Chebychev que cumple la plantilla  $(\alpha_a, f_a, n)$  ajustando la curva al punto  $(\alpha_a, f_a)$

3.7 Diseñe un filtro de Butterworth especificado por  $(\alpha_p=1$ dB,  $f_p= 0,33$  Hz,  $n = 4$ ). Dibuje la respuesta frecuencial ¿Qué atenuación tiene a las frecuencias  $f= 1$ Hz, 10 Hz, 100Hz? ¿A qué frecuencia atenúa 20dB?

3.8 Diseñe un filtro de Chebychev especificado por  $(\alpha_p=1$ dB,  $f_p= 0,33$  Hz,  $n = 4$ ). Dibuje la respuesta frecuencial ¿Qué atenuación tiene a las frecuencias  $f= 1$ Hz, 10 Hz, 100Hz? ¿A qué frecuencia atenúa 20dB?

3.9 Diseñe un filtro de Butterworth especificado por  $(\alpha_p=1$ dB,  $f_p= 0,33$  Hz,  $n = 4$ ). Dibuje la respuesta frecuencial ¿Qué atenuación tiene a las frecuencias  $f= 1$ Hz, 10 Hz, 100Hz? ¿A qué frecuencia atenúa 20dB?

3.10 Sea la señal *modulada*  $m(t) = x(t) \cos 2\pi f_0 t + y(t) \cos 2\pi f_1 t$  donde  $x(t)$  e  $y(t)$  son dos señales de voz de banda limitada a 7KHz,  $f_0 = 200$ KHz y  $f_1=220$ KHz. Para recuperar la señal  $x(t)$  a partir de  $m(t)$ , ésta se aplica a un demodulador que consta de un multiplicador por un coseno a la frecuencia  $f_0$  y un filtro paso bajo.

- a) Calcule la transformada de Fourier de  $m(t)$ . Dibuje  $M(f)$
- b) Demuestre que si el filtro es ideal, a la salida del demodulador se puede obtener exactamente  $x(t)$ . Determine la ganancia del filtro. Especifique el rango de valores (máximo y mínimo) que puede tener el ancho de banda del filtro.

Al ser  $x(t)$  una señal de voz, es posible distorsionarla hasta 3dBs en su ancho de banda sin que el efecto sea excesivamente molesto, y a partir de 40 dBs de atenuación, puede considerar que el efecto de la otra señal es despreciable.

- c) Determine la plantilla de especificaciones del filtro. Justifique su elección.
  - d) Diseñe el filtro de Butterworth que cumple la plantilla. Compruebe que el orden del filtro es  $n=8$
  - e) Si el orden del filtro tiene que ser  $n=4$ , utilizando las herramientas de las prácticas Ud. encuentra estos posibles valores:
    - d.1  $f_p=7\text{KHz}$ ,  $\alpha_p=3\text{dBs}$ ,  $f_a=13\text{ KHz}$ ,  $\alpha_a = 20\text{dB}$  y filtro de Butterworth
    - d.2  $f_p=7\text{KHz}$ ,  $\alpha_p=3\text{dBs}$ ,  $f_a=22\text{ KHz}$ ,  $\alpha_a = 40\text{dB}$  y filtro de Butterworth
    - d.3  $f_p=7\text{KHz}$ ,  $\alpha_p=3\text{dBs}$ ,  $f_a=13\text{ KHz}$ ,  $\alpha_a = 35\text{dB}$  y filtro de Chebychev
    - d.4  $f_p=7\text{KHz}$ ,  $\alpha_p=3\text{dBs}$ ,  $f_a=14\text{ KHz}$ ,  $\alpha_a = 40\text{dB}$  y filtro de Chebychev
- Cómo afectan estas alternativas a la señal de salida? ¿Qué opción elegiría Ud?

3.11 Suponga un sistema de TV que realiza la transmisión en dos idiomas. Para ello se transmite el audio compuesto mediante una señal  $m(t) = x_1(t) \cos 2\pi f_1 t + x_2(t) \cos 2\pi f_2 t$  donde  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son dos señales de audio, cada una en un idioma distinto. Las señales son de banda limitada a 15 KHz,  $f_0 = 200\text{KHz}$  y  $f_i=245\text{KHz}$ . Para recuperar la señal  $x_i(t)$  a partir de  $m(t)$ , ésta se aplica a un demodulador que consta de un multiplicador por un coseno a la frecuencia  $f_i$  y un filtro paso bajo. El sistema de transmisión de señales bilingües precisa que la atenuación de la señal no deseada sea superior a 40dB. Por razones tecnológicas suponga que se pueden utilizar filtros de orden  $n=7$ , pero no mayores. Se pide:

- a) Plantilla de especificaciones. Justifique los valores.
- b) En el programa de prácticas Ud ha comprobado que con un orden 7 y manteniendo  $\alpha_a = 40\text{dB}$  y  $f_a = 30\text{KHz}$ , con un filtro de Butterworth puede obtener a la frecuencia de 15KHz una atenuación de  $\alpha_p = 3\text{dB}$ , y con un filtro de Chebychev una atenuación de 0.002 dB. El resultado se muestra en la Figura 3-21. ¿Qué diseño elegiría? Justifique la respuesta.

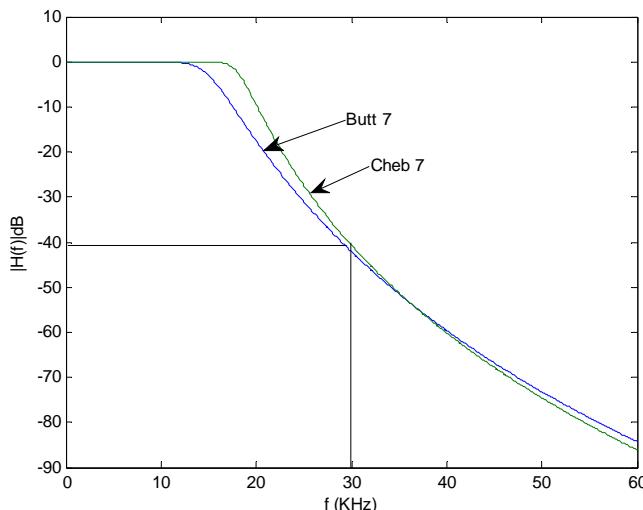


Figura 3-21 Comparación de Butterworth y Chebychev de orden 7 con las mismas especificaciones en la banda atenuada

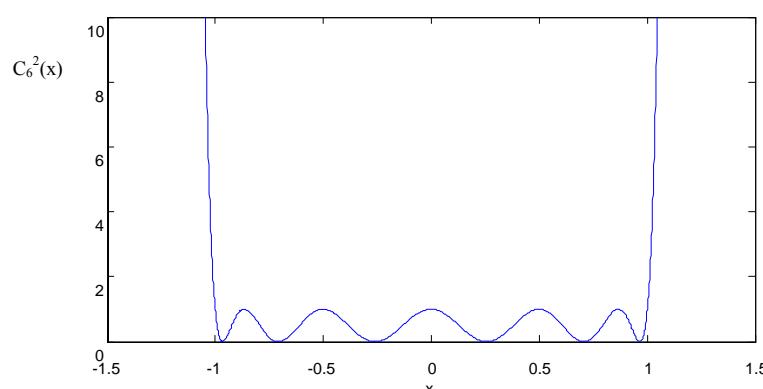


Figura 3-22 Gráfica de  $C_6^2(x)$ 

3.12 Dada la gráfica de  $C_6^2(x)$  mostrada en la Figura 3-22, dibuje el módulo de la respuesta frecuencial de un filtro de Chebychev de orden 6.

3.13 Un filtro inverso de Chebychev tiene el módulo de su respuesta frecuencial:

$$|H(f)|^2 = \frac{H_{\max}^2}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 C_n^2 \left(\frac{f_a}{f}\right)}}$$

Se pide: Valor en el origen  $H(0)$ , atenuación asintótica y orden.

Dibuje  $\alpha(f)$  para  $n=6$ . Puede ayudarse con la Figura 3-22

3.14 Dadas las especificaciones de un filtro paso bajo ( $\alpha_p=1\text{dB}$ ,  $f_p=0,33\text{ Hz}$ ,  $n=4$ )

- a) Calcule el filtro de Chebychev que cumple las especificaciones
- b) Calcule por transformación de frecuencias, el filtro paso banda resultante con  $f_0=1$ .
- c) Calcule la banda de paso y la atenuación asintótica en el origen y en infinito del filtro paso banda del apartado b)

3.15 El esquema de la figura representa un receptor de AM (modulación de Amplitud), que permite recuperar la señal de información  $\phi(t)$ , por medio de un rectificador de onda completa y un filtro paso bajo.

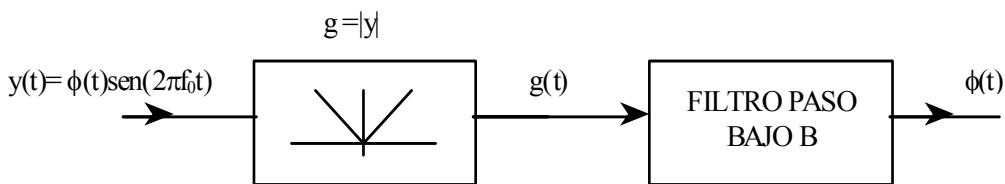


Figura 3-23

Sea  $\phi(t)$  una señal positiva y limitada en banda  $\Phi(f) = 0$ ,  $|f| > B = 15\text{ KHz}$ .

- a) Compruebe la validez de este esquema indicando la relación necesaria entre  $B$  y  $f_0$ . Suponga el filtro paso bajo ideal.

Se desea diseñar el filtro por medio de la aproximación de Butterworth: Suponga que en la banda de paso precisa  $\alpha_p=1\text{dB}$  y en la banda atenuada  $\alpha_a=40\text{dB}$ .

- b) Especifique la plantilla de atenuación  $f_p$  y  $f_a$
- c) Especifique el filtro:  $f_c$  y el orden  $n$
- d) Elija  $f_0$  para que pueda diseñar el filtro e.1) con orden  $n=3$  y e.2) con orden  $n=12$

3.16 La señal  $x(t)$  está caracterizada por el espectro de la Figura 3-20. Se quiere obtener  $x(t/4)$  y, por este motivo, se utiliza el esquema de la Figura 3-24 b

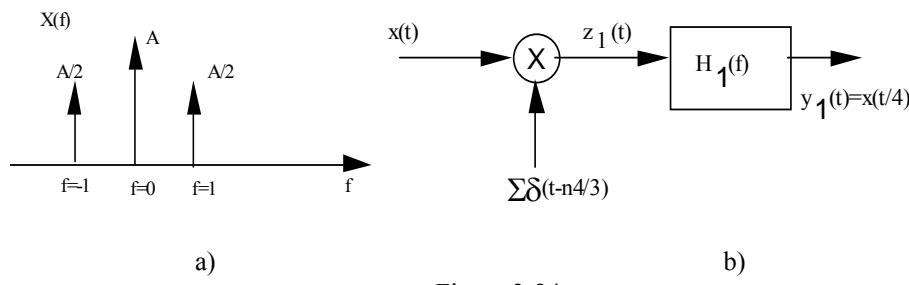


Figura 3-24

- a) Dibuje el espectro de  $z_1(t)$  entre  $f=-3$  y  $f=3$ . Encuentre el filtro  $H_1(f)$  ideal que permita obtener a la salida  $y_1(t) = x(t/4)$ .

Se desea realizar el filtro mediante la técnica de Chebychev.

- Dibuje la plantilla de especificaciones paso bajo. Suponga  $\alpha_p=1\text{dB}$  y  $\alpha_a=40\text{dB}$ ,
- Diseñe el filtro de Chebychev de ganancia  $H_{\max}=1$  y menor orden que cumple la plantilla de especificaciones.
- ¿Qué atenuación presenta el filtro al primer armónico de su entrada que se desea rechazar?

3.17 Transformar en un filtro paso alto el prototipo paso bajo de Chebychev que cumple la plantilla  $\alpha_p=1$ ,  $f_p=1$ ;  $n=3$ . Dibujar el prototipo paso bajo y el filtro paso alto

3.18 Una señal usada normalmente en sistemas de comunicaciones es el pulso coseno alzado. La siguiente figura muestra la señal periódica  $x(t)$  formada a partir de este pulso  $x_b(t)$ , definido por:

$$x_b(t) = [1+\cos 2\pi t] \prod(t)$$

Los tres primeros términos del desarrollo en serie de Fourier de  $x(t)$  son los siguientes:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi} \cos \pi t + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \dots$$

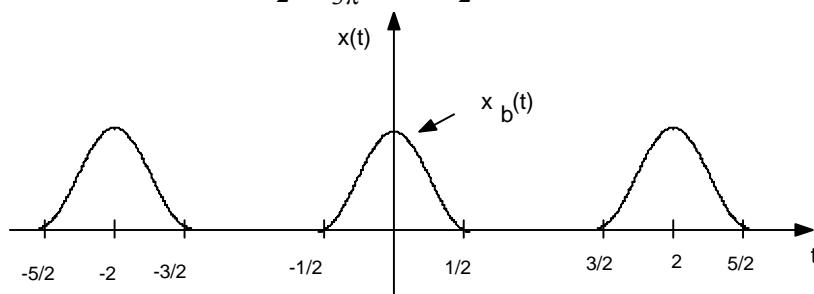


Figura 3-25

Se desea eliminar la componente continua de  $x(t)$ . Para ello se pasará por un filtro paso alto realizado por transformación de frecuencias de un prototipo paso bajo. En este ejercicio se propone que realice el diseño del filtro. Para ello:

- Dibuje aproximadamente la transformada de Fourier de  $X(f)$ . Sea exacto en el margen  $|f| \leq 1\text{Hz}$ . ¿Cuál es la primera frecuencia ( $f_0$ ) que debe dejar pasar el filtro?

Diseñe el filtro de Butterworth paso alto de orden 3 y ganancia  $H_{\max}=1$  que a la vez que elimina la continua, presenta una atenuación máxima en los armónicos de  $x(t)$  de 1dB. Se pide:

- Valor de  $f_c$ .
- Escriba la expresión de  $|H(f)|^2$  correspondiente al filtro diseñado.
- Expresión de la señal de salida.
- Obtenga los valores numéricos exactos de amplitud de los dos primeros términos del DSF (en cosenos) de la señal de salida.

Diseñe el filtro de Chebychev paso alto de orden 3 y ganancia  $H_{\max}=1$  que a la vez que elimina la continua, presenta una atenuación máxima en los armónicos de  $x(t)$  de 1dB. Se pide:

- Valor de  $\epsilon^2$ .
- Escriba la expresión de  $|H(f)|^2$  correspondiente al filtro diseñado. Dibuje  $|H(f)|^2$
- Calcule la atenuación del filtro en  $f=1\text{Hz}$

3.19 Suponga las especificaciones de un filtro paso banda mostradas en la siguiente figura con  $f_{p1}=1.5\text{ KHz}$ ,  $f_{p2}=6\text{ KHz}$ ,  $f_{a1}=1\text{ KHz}$ ,  $f_{a2}=10\text{ KHz}$ , y las atenuaciones  $\alpha_p=1\text{dB}$ ,  $\alpha_{a1}=20\text{ dB}$  y  $\alpha_{a2}=25\text{dB}$ . El filtro paso banda se realizará por transformación de frecuencias de un filtro paso bajo. Para diseñar el filtro paso bajo, primero es preciso transformar la plantilla paso banda a una plantilla paso bajo. Eligiendo como frecuencia central,  $f_0$ , de la transformación (3.32) la media geométrica de las frecuencias de paso del filtro paso banda, se pide:

- e) Halle las frecuencias  $\phi_{a1}$  y  $\phi_{a2}$  que resultaran de la transformación de la plantilla paso banda a plantilla paso bajo.
- f) A partir de los valores  $\phi_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $\phi_{a1}$  y  $\phi_{a2}$ ,  $\alpha_{a1}$  y  $\alpha_{a2}$ , seleccione la plantilla paso bajo sobre la que diseñará el prototipo paso bajo. Justifique su elección.
- g) Calcule el filtro de Butterworth que se ajusta a la plantilla paso bajo.
- h) Escriba la respuesta frecuencial del filtro paso banda resultado de la transformación

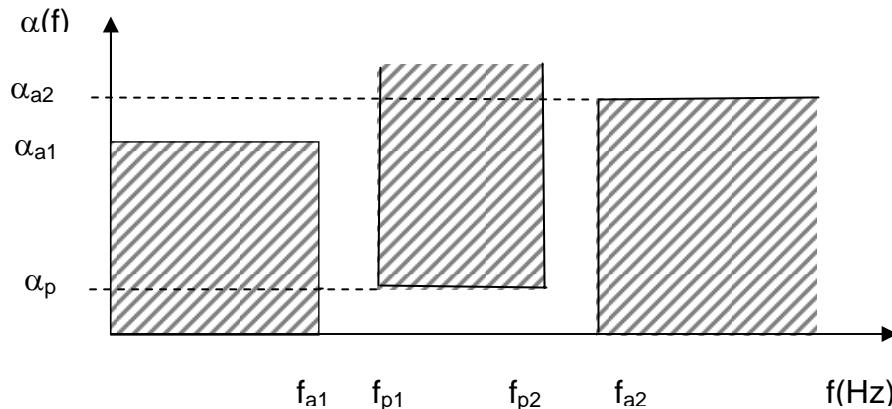


Figura 3-26 Plantilla paso banda

## 3.13 Sea la señal periódica

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \prod \left( \frac{t - T_0 / 8 - nT_0 / 2}{T_0 / 4} \right)$$

- a) Calcule y represente su transformada de Fourier.
- Si  $T_0 = 1$  seg, diseñe, por transformación de frecuencias, un filtro paso alto  $h(t)$  que elimine la continua de la señal  $x(t)$  y que produzca una atenuación máxima en la banda de paso de 3dB. Se pide:
- b) Especificaciones del filtro paso alto
  - c) Función de transformación
  - d) Especificaciones del prototipo paso bajo
  - e) Expresión del módulo de la respuesta frecuencial del prototipo paso bajo que cumpla la plantilla. Utilice un filtro de Butterworth. ¿Podría utilizar un filtro de orden 2 para eliminar la continua? Si su respuesta es afirmativa, diseñe el filtro.

3.14 El sistema de la Figura 3-27 a) se utiliza para transmitir las señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  grabadas simultáneamente por dos sensores. Las señales tienen un ancho de banda de 4 KHz cada una. El sistema forma una señal compuesta,  $x_m(t)$ , formada por la suma de la señal del sensor 1, la del sensor 2 modulado a la frecuencia  $f_m=13$  KHz, y un tono a la frecuencia mitad ( $f_m/2$ ) que servirá en recepción para sincronizar en frecuencia y fase el oscilador del receptor.

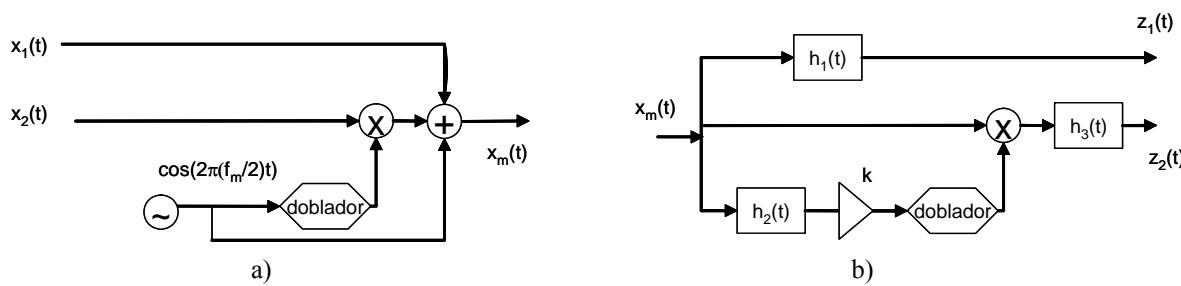


Figura 3-27 Modulador y demodulador

$$x_m(t) = x_1(t) + x_2(t) A \cos(2\pi f_m t + \phi) + \cos 2\pi f_m t / 2$$

En la Figura 3-27 b) se muestra el sistema que recuperará las señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ .

Se pide:

- Transformada de Fourier  $X_m(f)$  de la señal compuesta  $x_m(t)$ . Ancho de banda de  $x_m(t)$ . Dibuje  $X_m(f)$  (suponga un  $X_1(f)$  y un  $X_2(f)$  a su elección para hacer los dibujos).
- Tanto en el transmisor como en el receptor se va a generar el coseno a la frecuencia de  $f_m$  Hz a partir de un oscilador a la frecuencia de  $f_m/2$  Hz. En el esquema está marcado con el bloque rotulado con 'doblador'. Proponga un sistema que realice esta operación. Puede utilizar dispositivos no lineales (por ejemplo cuadráticos, limitadores, recortadores, etc), y los filtros ideales que necesite. Dibuje el diagrama de bloques y obtenga, para el sistema propuesto por Ud. los valores exactos de amplitud A y fase  $\phi$  de la sinusoides resultante.
- Suponga que a la salida del doblador se tiene exactamente  $A \cos(2\pi f_m t + \phi)$ . Deduzca analíticamente las especificaciones de los filtros ideales  $h_1(t)$  y  $h_3(t)$  para que se cumpla  $z_1(t) = x_1(t)$  y  $z_2(t) = x_2(t)$ .

En recepción se precisa aislar, mediante un filtro paso banda  $h_2(t)$ , el tono a la frecuencia  $f_m/2$  para aplicarlo al 'doblador' y poder recuperar  $x_2(t)$ . El filtro paso banda va a realizarse por transformación de frecuencias a partir de un prototipo paso bajo de Butterworth de ganancia unidad. La transformación se

realizará por medio de  $\varphi = \frac{f^2 - f_0^2}{f}$ . El filtro paso banda debe rechazar la información adyacente, correspondiente a la información de los dos sensores, con una atenuación de, al menos, 40dB y estará centrado a la frecuencia  $f_0 = \sqrt{f_{a1}f_{a2}}$ . Estos datos conforman las especificaciones y se muestran en la figura 2. El punto a la frecuencia  $f_0$  simboliza que la atenuación a  $f_0$  debe ser 0dB

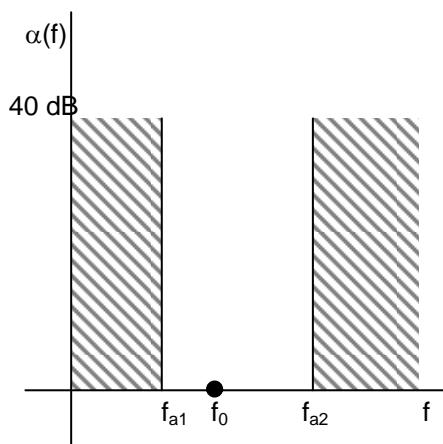


Figura 3-28 Especificaciones

Se pide:

- A partir del dibujo del apartado a), determine los valores  $f_{a1}$ ,  $f_{a2}$  y calcule el  $f_0$  resultante. (Note que es distinto que  $f_m/2$ )
- Especificaciones de atenuación del prototipo paso bajo
- Diseñe el prototipo paso bajo mediante un filtro de Butterworth (módulo de la respuesta frecuencial) que se ajuste a las especificaciones. Considere:
  - orden  $n=1$
  - orden  $n=2$

Determine exactamente el valor numérico de  $\phi_c$ , la frecuencia de corte a 3dB, para cada orden.

- Por medio de la transformación de frecuencias, obtenga la respuesta frecuencial del filtro paso banda resultante. Calcule la atenuación que producirá el filtro paso banda a la frecuencia  $f_m/2=6,5$  KHz, tanto si se parte de un filtro prototipo paso bajo de orden 1 como de un filtro de orden 2.
- Una solución alternativa sería forzar en el diseño del filtro que  $\alpha(f_m/2) = 0$  dB, por lo que  $f_0=f_m/2$ . Determine de nuevo los valores  $f_{a1}$  y  $f_{a2}$  de la plantilla de la Figura 3-28 y repita los apartados e) al g).

- 3.20 Obtenga la transformada de Fourier del tren periódico de pulsos de RF de la figura siguiente cuando  $f_c f_0 \gg 1$ , siendo  $f_0=1/T_0$

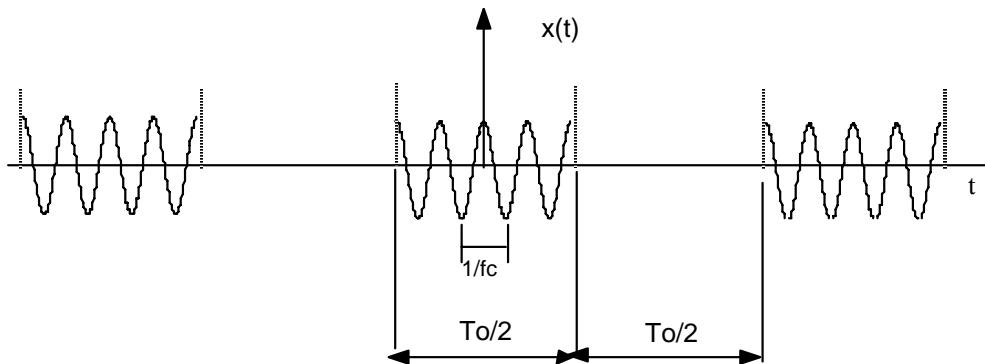


Figura 3-29

Se desea seleccionar la señal alrededor de  $f_c-f_0 < |f| < f_c+f_0$ . Para ello se pasará por un filtro paso banda realizado por transformación de frecuencias de un prototipo paso bajo. En este ejercicio se propone que realice el diseño del filtro. Para ello:

- Dibuje aproximadamente la transformada de Fourier de  $X(f)$ . Sea exacto en el margen  $f_c-4f_0 < |f| < f_c+4f_0$ . Identifique los armónicos que debe dejar pasar el filtro. Identifique los armónicos que el filtro debe atenuar considerablemente.
- Dibuje la plantilla de especificaciones paso banda. Suponga  $\alpha_p=1\text{dB}$  y  $\alpha_a=40\text{dB}$ ,  $f_c=1\text{MHz}$  y  $f_0=1\text{KHz}$
- Expresión de la transformación de frecuencias.
- Plantilla de especificaciones del prototipo paso bajo.
- Diseñe el filtro de Butterworth del prototipo paso bajo de ganancia  $H_{max}=1$  que cumple la plantilla de especificaciones.
- Expresión del filtro paso banda
- Si la señal de salida se aproxima por  
 $y(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi_1) + B \cos(2\pi(f_c+f_0)t + \phi_2) + C \cos(2\pi(f_c-f_0)t + \phi_3)$   
Determine A, B y C
- Diseñe el filtro de Chebychev del prototipo paso bajo de ganancia  $H_{max}=1$  que cumple la plantilla de especificaciones del apartado d).
- Expresión del filtro paso banda
- Si la señal de salida se aproxima por  
 $y(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi_1) + B \cos(2\pi(f_c+f_0)t + \phi_2) + C \cos(2\pi(f_c-f_0)t + \phi_3)$   
Determine A, B y C

- 3.21 Sea la señal  $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t-mT_0)$ . Con  $p(t) = \Delta\left(\frac{t}{T_0/2}\right) \cos 2\pi f_c t$ .

Se desea seleccionar la señal alrededor de  $f_c-f_0 < |f| < f_c+f_0$  (donde  $f_c \gg f_0 = 1/T_0$ ) Para ello se pasará por un filtro paso banda realizado por transformación de frecuencias de un prototipo paso bajo. En este ejercicio se propone que realice el diseño del filtro. Para ello:

- a) Determine y dibuje aproximadamente la transformada de Fourier de  $X(f)$ . Sea exacto en el margen  $f_c - 4f_0 < |f| < f_c + 4f_0$ . Identifique los armónicos que debe dejar pasar el filtro. Identifique los armónicos que el filtro debe atenuar considerablemente.
- b) Dibuje la plantilla de especificaciones paso banda. Suponga  $\alpha_p = 1\text{dB}$  y  $\alpha_a = 40\text{dB}$ ,  $f_c = 1\text{MHz}$  y  $f_0 = 1\text{KHz}$
- c) Expresión de la transformación de frecuencias.
- d) Plantilla de especificaciones del prototipo paso bajo.
- e) Diseñe el filtro de Butterworth del prototipo paso bajo de ganancia  $H_{max} = 1$  que cumple la plantilla de especificaciones.
- f) Expresión del filtro paso banda
- g) Si la señal de salida se aproxima por  
 $y(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi_1) + B \cos(2\pi(f_c + f_0)t + \phi_2) + C \cos(2\pi(f_c - f_0)t + \phi_3)$   
Determine A, B y C

- 3.22 Sea la señal periódica  $x(t) = A \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$ . Se pide:
- a) Calcule y dibuje la transformada de Fourier. Suponga  $\tau = 25\text{ ms}$ ;  $T = 50\text{ ms}$  y  $A = 1$ . Muestre con total claridad los datos que crea significativos en el dibujo.

La señal anterior es filtrada con un filtro paso-banda centrado en  $f_0 = 50\text{ Hz}$  y ancho de banda a 3 dB  $B_{3\text{dB}} = 30\text{ Hz}$ . El filtro paso banda se realizará por transformación de frecuencias de un prototipo paso bajo. En este ejercicio se propone que realice el diseño del filtro. Para ello:

- b) Dibuje la plantilla de especificaciones paso banda. Suponga  $\alpha_a = 40\text{dB}$
- c) Expresión de la transformación de frecuencias.
- d) Plantilla de especificaciones del prototipo paso bajo.
- e) Diseñe el filtro de Chebychev del prototipo paso bajo de ganancia  $H_{max} = 1$  que cumple la plantilla de especificaciones.
- f) Expresión del filtro paso banda
- g) Calcule la salida. Exprese la salida de la manera más simple posible, preferiblemente como suma de cosenos.

- 3.23 a) Encuentre y dibuje la TF de  $x(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \prod \left(\frac{t}{T_0/2}\right)$  con  $T_0 = 50\text{ ms}$
- b) Calcule dibuje la TF de la señal  $x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t - n2T_0)$
- c) Encuentre la expresión de la señal de salida  $y(t)$  cuando  $x_p(t)$  se filtra con un filtro paso banda ideal:  

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f-20}{4}\right) + \Pi\left(\frac{f+20}{4}\right)$$

Para obtener la salida aproximada a la del apartado anterior mediante un filtro de Butterworth realizado por transformación de frecuencias, supondremos  $\alpha_p=1\text{dB}$ ,  $\alpha_a=40\text{dB}$

- d) Dibuje la plantilla de especificaciones paso banda.
- e) Expresión de la transformación de frecuencias.
- f) Plantilla de especificaciones del prototipo paso bajo.
- g) Diseñe el filtro de Butterworth del prototipo paso bajo de ganancia  $H_{\max}=1$  que cumple la plantilla de especificaciones.
- h) Expresión del filtro paso banda