Modele Ierarhice Liniare

Principii și Implementare

Constantin Manuel Bosancianu

Școala Doctorală de Științe Politice, Politici Publice și Relații Internaționale
Central European University

Metode Aplicate de Cercetare Socială
Cluj-Napoca, România: 24 Iulie, 2014

Întrebări

- De ce e nevoie de modele ierarhice?
- Care sunt asumpțiile metodei?
- Cum reprezentăm un model ierarhic (notație)?
- Cum implementăm un model ierarhic în R?
- Cum interpretăm un model ierarhic?
- Cum prezentăm grafic rezultatele unui astfel de model?

Prezentatorul...

- Student (încă!) interesat de comportament electoral și de efectele politice ale inegalității de venit;
- Ocazional asistent de predare la școlile de metodologie ale ECPR;
- Experiență (încă prea puțină!) în metode cantitative de cercetare și vizualizarea datelor;
- Absolvent al FSPAC (2008).

Iar voi?

Exemplele practice

Codul R și baza de date: `https://manuelbosancianu.github.io/workshops/2014-07-Cluj`

R este disponibil pentru toate platformele și extrem de puternic pentru a rula modele ierarhice liniare

Voi analiza determinanții satisfacției privind democrația, cu date ESS 2012 (*European Social Survey*)

Recapitulare

Forma de bază

Orice regresie OLS poate fi scrisă sub următoarea notație

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \epsilon_i, \;\; \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \tag{1}$$

unde k este numărul de predictori din model, β_0 reprezintă constanta ecuației, iar $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sunt parametrii estimați.

Forma de bază

În formă matriceală, ecuația 1 poate fi rescrisă

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}_{n\times k} \times \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}_{(k+1)\times 1} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{2}
$$

Asumpții *Gauss-Markov*

Pe lângă cele de rutină (formă liniară a relațiilor, specificație completă a modelului, lipsa colinearității, lipsa erorilor de măsurare, media deviațiilor este 0, varianța deviațiilor este constantă)[1], următoarea este importantă aici:

$$COV(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, \ \forall \ i \neq j \tag{3}$$

[1] Nu sunt asumpții, dar trebuie verificate: lipsa cazurilor deviante, predictori distribuiți normal.

Autocorelație

Ecuația 3 se referă la asumpția (lipsei) de autocorelație.

În multe cazuri această asumpție este respectată: e. g. eșantionul WVS din România din 2012 (eșantionare stratificată în două stadii).

$$\Downarrow$$

Regresia OLS va produce coeficienți preciși (*unbiased*) cu erori standard corecte.

Autocorelație

În multe cazuri, însă, există suficiente motive să credem că asumpția nu mai este respectată:

- Factorii care influențează performanța școlară: elevi, grupați în clase, grupate în școli;
- Factorii care influențează productivitatea muncitorilor IT: muncitori, grupați în departamente, grupate în companii;
- Predictorii lungimii perioadei de recuperare după un accident: pacienți, grupați în spitale.

Autocorelație

Consecințe: erori standard imprecise (*biased*) care duc la risc crescut de producere a unei erori de tip I.

$t = \frac{\beta - \mu}{SE}$. De vreme ce erorile standard vor fi mai mici decât trebuie, valorile t vor fi mai mari, făcând mai probabilă găsirea unui efect semnificativ statistic.

Variabile discriminante (*dummy*)

Adăugăm $m-1$ variabile discriminante la ecuația 1, unde m este numărul de grupuri (clase, școli, firme, spitale, țări) din eșantion:

$$
\begin{aligned}
Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \\
+ \beta_{k+1} D_1 + \beta_{k+2} D_2 + \cdots + \beta_{k+m-1} D_{m-1} + \epsilon_i
\end{aligned}
\tag{4}
$$

De ce includem doar $m-1$ variabile discriminante?

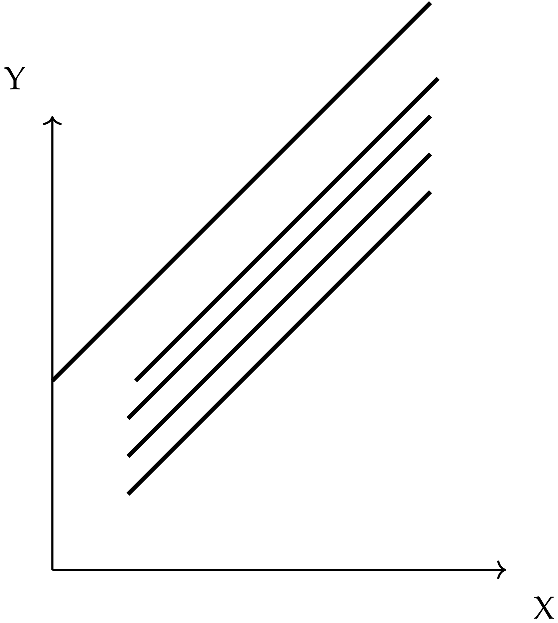
Beneficii ale variabilelor discriminante

1. Estimarea este foarte eficientă computațional, deoarece continuăm să folosim OLS;
2. Procedură intuitivă și simplu de explicat cititorilor.

Dezavantaje ale variabilelor discriminante

1. Nu putem adăuga variabile măsurate la nivel de grup;[2]
2. Pierdem grade de libertate (*degrees of freedom*);
3. Facem o asumpție puternică: relația dintre VI și VD este identică în fiecare context, cu excepția constantei.[3]

[2] Observăm că grupurile sunt diferite, însă nu știm de ce.
[3] Problema poate fi rezolvată prin includerea unor interacțiuni.



Variabile discriminante pentru fiecare group

Estimatorul Huber–White

Numit și estimator *sandwich* – aplică o corecție erorilor standard (Huber, 1967; White, 1980).

Testele de semnificație devin din nou precise.

Avantaje ale estimatorului *sandwich*

1. Estimare eficientă (OLS);

2. Procedură acceptată în disciplină și relativ ușor de explicat.

Probleme cu estimatorul *sandwich*

1. Nu permite includerea variabilelor măsurate la nivel de grup;

2. Erorile corelate indică o posibilă specificație incorectă a ecuației, ceea ce face corecția estimatorului *sandwich* irelevantă (Freedman, 2006).

Modele ierarhice

Avantaje

- Rezolvă problema autocorelației prin teorie, iar nu printr-o corecție *post-hoc*;
- Constante diferite pot fi estimate (ca în cazul variabilelor discriminante);
- Pante diferite pot fi estimate;
- Permit includerea predictorilor la nivel de grup (e.g., țară);
- Extrem de flexibile la diverse situații.

Dezavantaje

- Mult mai complexe din punct de vedere matematic;
- Solicitante din punct de vedere computațional;
- Complexe și din punct de vedere teoretic.[4]

[4] Putem considera asta și un avantaj.

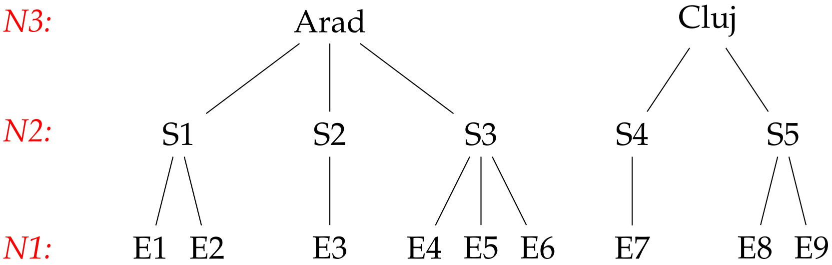
Terminologie

Diverse niveluri de analiză: 2, (mai rar) 3, sau chiar 4.

Nivelul 1: studenți, alegători, clase, companii;

Nivelul 2: clase, țări, școli, regiuni;

Nivelul 3: școli, –, districte școlare, țări.



Elevi, grupați în școli, grupate în județe

Nivelul 1

Să presupunem o situație similară ESS: i indivizi 1, 2, ..., I, care sunt grupați în j țări 1, 2, ..., J.

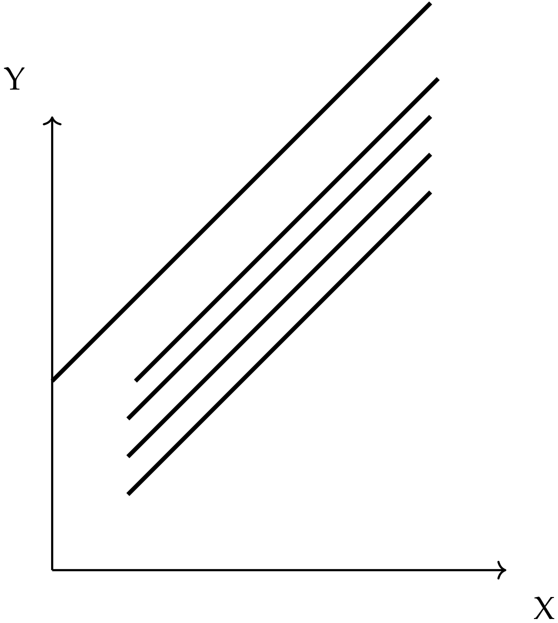
$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1j} + \beta_{2j}X_{2j} + \cdots + \beta_{kj}X_{kj} + \epsilon_{ij}, \;\; \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (5)$$

Similară cu ecuația 1 cu excepția indicatorilor j.

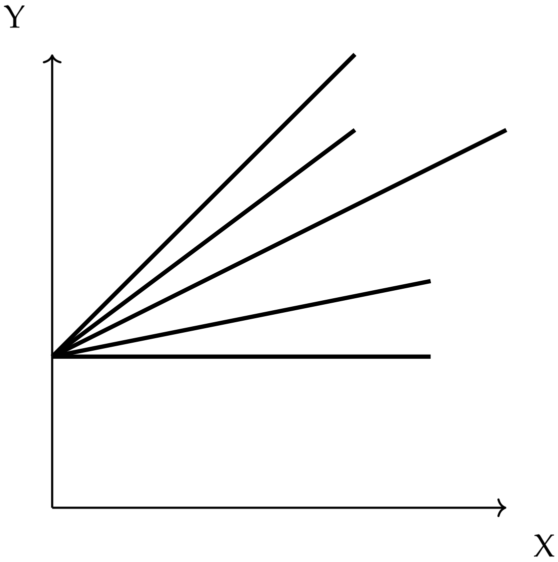
Nivelul 1

Implicații majore: coeficienții variază de la țară la țară!

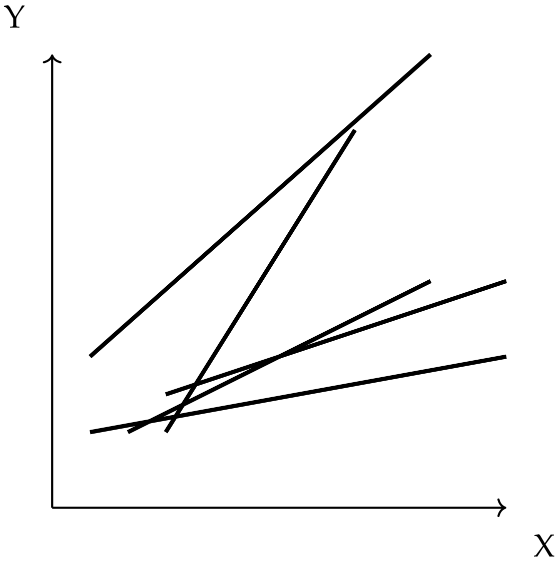
O constrângere a modelelor ierarhice este că acești coeficienți sunt distribuiți normal.



$$\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \beta_{k+1} D1 + \dots$$



$$\beta_0 + \beta_{1j}X_{1j} + \beta_{2j}X_{2j} + \cdots + \beta_{kj}X_{kj}$$



$$\beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1j} + \beta_{2j}X_{2j} + \cdots + \beta_{kj}X_{kj}$$

Întrebări?

Nivelul 2

Începem cu constanta:

$$\beta_{0j} = \underbrace{\gamma_{00}}_{\text{Medie}} + \underbrace{u_{0j}}_{\text{Reziduu}} \tag{6}$$

Un pic diferit față de ecuația 4. Nu mai estimăm $m - 1$ parametri suplimentari, ci doar 2: o medie și o varianță a γ_{00}.

$$\Downarrow$$

Distribuție normală a constantelor!

Nivelul 2

Continuăm cu coeficienții:

$$\begin{cases} \beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} Z_j + u_{1j} \\ \beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21} Z_j + u_{2j} \end{cases} \tag{7}$$

Z_j poate diferi între ecuații. Practic, o variabilă măsurată la nivelul 2 (e.g. PIB/capita) explică efectul[5] unei variabile de la nivelul 1.

[5]Cel mai corect: varianța efectului.

Două niveluri

Împreună, avem[6]:

$$Y_i = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1j} + \beta_{2j}X_{2j} + \epsilon_{ij} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \\ \beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}Z_j + u_{1j} \\ \beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21}Z_j + u_{2j} \end{cases} \tag{9}$$

[6] Păstrăm doar 2 predictori la nivelul 1. Puteam avea, dacă doream, un predictor și pentru constanta de la nivelul 1.

Forma desfășurată

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \gamma_{00} + u_{0j} + (\gamma_{10} + \gamma_{11} Z_j + u_{1j}) X_{1j} + (\gamma_{20} + \gamma_{21} Z_j + u_{2j}) X_{2j} + r_{ij} \\ &= \underbrace{\gamma_{00} + \gamma_{10} X_{1j} + \gamma_{20} X_{2j} + \gamma_{11} Z_j X_{1j} + \gamma_{21} Z_j X_{2j}}_{\text{Efecte fixe}} + \underbrace{u_{1j} X_{1j} + u_{2j} X_{2j} + r_{ij} + u_{0j}}_{\text{Efecte aleatorii}} \end{aligned}$$

Multe programe statistice cer această formă (e.g. R, Stata, SPSS).

Interpretare

Efecte fixe (*fixed*) – similare coeficienților din regresia OLS.

γ_{20} = schimbarea observată în Y_{ij} atunci când X_{2j} crește cu o unitate.

γ_{11} = schimbarea observată în efectul lui X_{1j} atunci când Z_j crește cu o unitate.[7]

[7] În modele ierarhice, ea se numește "interacțiune inter-nivel" (*cross-level*).

Interpretare

Efecte aleatorii (*random*) – practic, nu sunt efecte, ci variante ale efectelor fixe.

Efecte aleatorii + fixe = efecte mixte.[8]

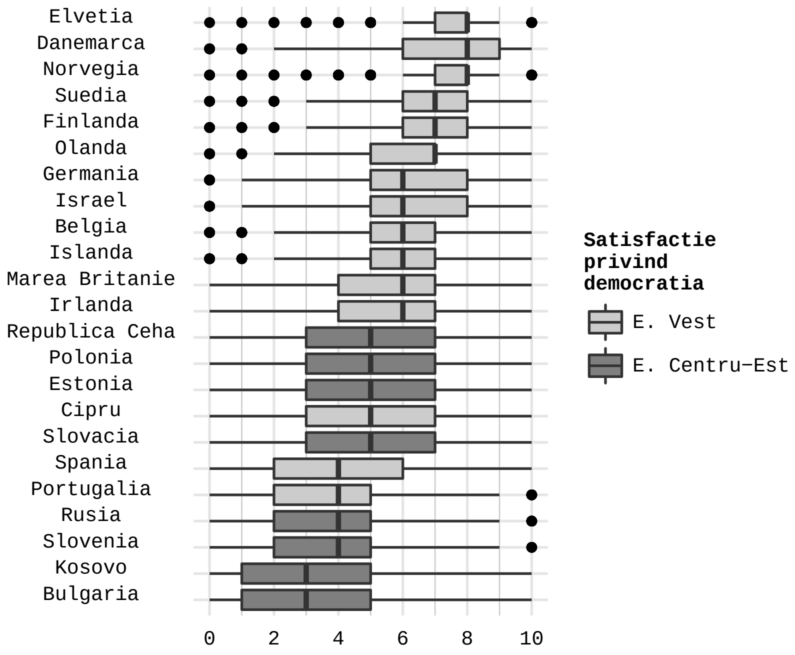
[8] Modelele ierarhice se mai numesc și modele multinivel, modele cu coeficienți aleatorii, modele mixte.

Respiro empiric

Analiza

Vom analiza predictorii satisfacției privind democrația, folosind datele ESS 2012.

Codul R și baza de date: `https://manuelbosancianu.github.io/workshops/2014-07-Cluj`


Elvetia
Danemarca
Norvegia
Suedia
Finlanda
Olanda
Germania
Israel
Belgia
Islanda
Marea Britanie
Irlanda
Republica Ceha
Polonia
Estonia
Cipru
Slovacia
Spania
Portugalia
Rusia
Slovenia
Kosovo
Bulgaria
0
2
4
6
8
10
Satisfactie privind democratia
E. Vest
E. Centru−Est

Modele OLS

	Danemarca	Belgia	Elveția	Estonia	Slovacia	Grecia
(Constanta)	4.06^{***}	2.95^{***}	6.50^{***}	3.11^{***}	3.48^{***}	3.11^{***}
	(0.30)	(0.28)	(0.26)	(0.32)	(0.47)	(0.41)
Vârsta (decenii)	0.03	0.04	-0.06^{*}	-0.04	0.02	-0.02
	(0.03)	(0.03)	(0.03)	(0.03)	(0.05)	(0.04)
Bărbat	0.19	0.17	0.24^{*}	-0.07	0.15	-0.02
	(0.10)	(0.09)	(0.09)	(0.11)	(0.14)	(0.12)
Ani educație	0.03^{**}	0.08^{***}	-0.01	0.01	-0.03	-0.01
	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.02)	(0.03)	(0.02)
Venit (gospodărie)	0.02	0.03	0.03	0.09^{***}	0.05	0.13^{***}
	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.03)	(0.03)
Religiozitate	0.02	0.09^{***}	0.03^{*}	-0.05^{**}	0.06^{**}	0.06^{*}
	(0.02)	(0.01)	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.02)
Încredere	0.34^{***}	0.20^{***}	0.15^{***}	0.29^{***}	0.25^{***}	0.25^{***}
	(0.03)	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.03)	(0.03)
R^2	0.12	0.11	0.06	0.11	0.07	0.10
Adj. R^2	0.12	0.10	0.05	0.11	0.07	0.09
Num. obs.	1340	1633	1184	1813	1204	1356

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$

Modele OLS

Observăm că există diferențe între coeficienții obținuți pe eșantioane diferite, e.g. venit.

Sunt aceste diferențe sistematice, i.e. explicate de o variabilă la nivel de țară?

Modele OLS – variabile discriminante

Țara	Coef.	SE	Țara	Coef.	SE
(Constanta)	1.708	0.083	Polonia	1.43	0.077
Vârsta (decenii)	0.002	0.007	Republica Cehă	1.686	0.078
Bărbat	0.116	0.024	Irlanda	1.928	0.072
Educație (ani)	0.002	0.003	Marea Britanie	2.037	0.073
Venit (gospodărie)	0.068	0.005	Islanda	1.976	0.103
Religiozitate	0.066	0.004	Belgia	2.291	0.073
Încredere	0.216	0.005	Israel	2.325	0.074
Kosovo	0.168	0.084	Germania	2.518	0.067
Slovenia	0.24	0.087	Olanda	2.514	0.075
Rusia	0.476	0.072	Finlanda	2.947	0.071
Portugalia	0.905	0.086	Suedia	3.274	0.075
Spania	0.525	0.076	Norvegia	3.413	0.077
Slovacia	1.52	0.079	Danemarca	3.413	0.079
Cipru	1.644	0.089	Elveția	3.694	0.081
Estonia	1.329	0.072			

Categoria de referință: Bulgaria

Modele OLS – corecție pentru SE

Variabila	Fără corecție	Corecție
(Constanta)	34.21	34.03
Bărbat	3.11	3.08
Vârsta (decenii)	7.29	7.27
Educație (ani)	6.84	6.73
Venit (gospodărie)	16.49	16.39
Religiozitate	9.64	9.19
Încredere	64.58	59.12

Comparație modele cu/fără corecția Huber–White; sunt prezentate doar valorile t.

Modelul “nul”

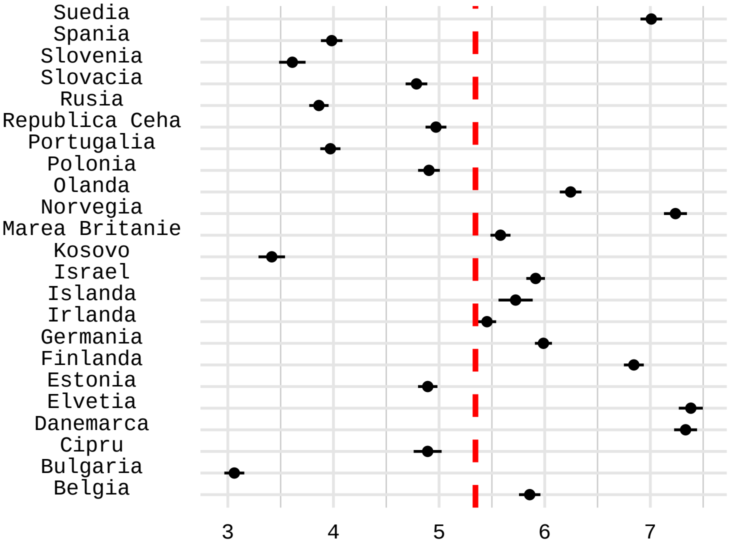
Fără predictori, doar pentru a testa variabilitatea constantei.

$$\begin{cases} Y_{ij} = \beta_{0j} + \epsilon_{ij} \\ \beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \end{cases} \tag{10}$$

Modele ierarhice

	Model 1
(Constanta)	5.34^{***}
	(0.27)
AIC	189716.72
BIC	189742.71
Log Likelihood	-94855.36
Devianță	189710.72
Num. obs.	42685
Num. grupuri: Țară	23
Varianță: Țară (Constantă)	1.72
Varianță: Reziduală	4.97

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$



Variabilitatea constantei

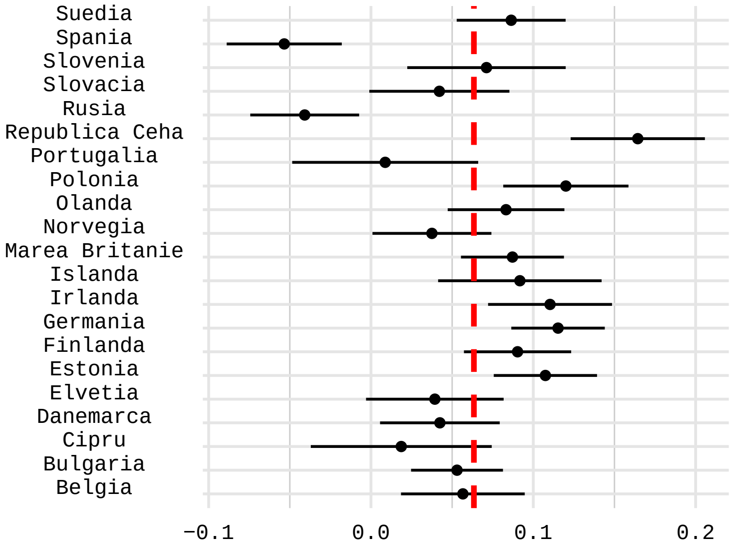
	OLS	MLM
Vârsta (decenii)	0.02^{**}	0.00
	(0.01)	(0.01)
Bărbat	0.19^{***}	0.12^{***}
	(0.03)	(0.02)
Ani educație	0.03^{***}	0.00
	(0.00)	(0.00)
Venit (gospodărie)	0.08^{***}	0.07^{***}
	(0.01)	(0.00)
Religiozitate	0.04^{***}	0.07^{***}
	(0.00)	(0.00)
Încredere	0.35^{***}	0.22^{***}
	(0.01)	(0.01)
R^2	0.14	
Adj. R^2	0.14	
Num. obs.	33174	33174
AIC		144357.31
BIC		144433.00
Log Likelihood		-72169.66
Devianță		144339.31
Num. grupuri: Țară		23
Varianță: Țară (Constantă)		1.22
Varianță: Reziduală		4.52

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$

	Model 1	Model 2	Model 3
Venit (gospodărie)	0.07^{***}	0.07^{***}	0.06^{***}
	(0.00)	(0.00)	(0.01)
Religiozitate	0.07^{***}	0.07^{***}	0.07^{***}
	(0.00)	(0.00)	(0.00)
Încredere	0.22^{***}	0.22^{***}	0.22^{***}
	(0.01)	(0.01)	(0.01)
Inegalitate	-0.12^{**}	-0.09^{*}	-0.06
	(0.04)	(0.04)	(0.04)
Postcomunism		-1.19^{**}	-1.30^{***}
		(0.37)	(0.37)
AIC	131892.63	131886.22	131777.60
BIC	131975.90	131977.82	131885.85
Log Likelihood	-65936.31	-65932.11	-65875.80
Devianță	131872.63	131864.22	131751.60
Num. obs.	30556	30556	30556
Num. grupuri: Țară	21	21	21
Varianță: Țară (Constantă)	0.90	0.60	0.59
Varianță: Țară Venit			0.00
Varianță: Reziduală	4.36	4.36	4.34

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$

Model 3 – două efecte aleatorii



Variabilitatea efectului venitului

Ultimul model

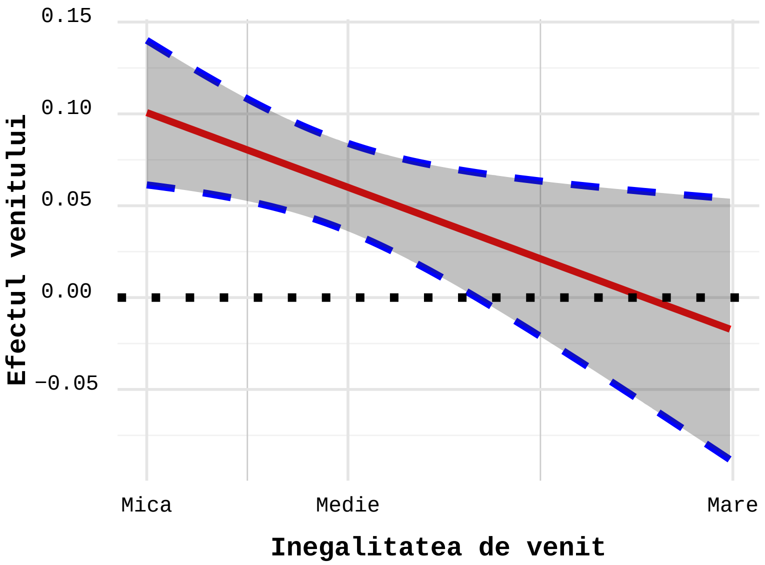
Interacțiune inter-nivel:

$$\begin{cases} \beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} * Postcomunism + \gamma_{02} * Inegalitate + u_{0j} \\ \vdots \\ \beta_{5j} = \gamma_{50} + \gamma_{51} * Inegalitate + u_{5j} \end{cases} \tag{11}$$

	Interactiune
Venit (gospodărie)	0.06^{***}
	(0.01)
Religiozitate	0.07^{***}
	(0.00)
Încredere	0.22^{***}
	(0.01)
Inegalitate	-0.09^{*}
	(0.04)
Postcomunism	-1.29^{***}
	(0.38)
Venit * Inegalitate	-0.01^{*}
	(0.00)
AIC	131785.75
BIC	131902.33
Log Likelihood	−65878.88
Devianță	131757.75
Num. obs.	30556
Num. grupuri: Țară	21
Variantă: Țară (Constantă)	0.67
Variantă: Țară Venit	0.00
Variantă: Reziduală	4.34

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$

Interacțiune venit și inegalitate



0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
Efectul venitului
Mica
Medie
Mare
Inegalitatea de venit

Înapoi la teorie ...

Când folosim HLM?

Cum luăm decizia de a folosi un model ierarhic?

1. Teoretic: un argument în favoarea variabilității variabilei dependente, sau un grafic precum cel prezentat anterior;
2. Statistic: o măsură simplă a variabilității la cele 2 niveluri.

ICC

Intraclass Correlation Coefficient (ICC) ≈ "coeficient de corelație intra-grup".

Cunoscut și ca Variance Partitioning Coefficient (VPC) ≈ "coeficient de partiționare a varianței".

ICC

Pornim de la modelul nul:

$$\begin{cases} Y_{ij} = \beta_{0j} + \epsilon_{ij} \\ \beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \end{cases} \tag{12}$$

Dacă $var(u_{0j}) = \tau_0^2$ iar $var(r_{ij}) = \sigma^2$...

ICC

$$ICC = \frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 + \sigma^2} \tag{13}$$

Proporția de varianță de la nivelul 2 din varianța totală a constantelor.

ICC

De fapt, o corelație între 2 două observații din cadrul aceluiași grup.

Cu cât e mai mare, cu atât mai bine: observațiile din același grup sunt mai similare, iar grupurile sunt mai diferite între ele.

Prag $\approx$ 0.10 sau 0.15.[9]

[9] Modelul nostru are ICC ≈ 0.25.

Indici

Echivalent funcțional cu R^2 din regresia OLS, deși nu pot fi interpretați în același fel

Produși de estimarea ML (*maximum likelihood*)[10]

[10] Traducere aproximativă: "verosimilitate maximă".

Indici

4 (practic, 3 importanți) indici: logLikelihood[11], devianța, AIC, și BIC.

[11] Traducere aproximativă: "logaritmul verosimilității".

logLikelihood

Probabilitatea ca datele să fi fost generate de parametrii estimați de model $\in (0, 1]$.

Logaritmul acestei cantități $\in (-\infty, 0]$.

Valori mai mari (apropiate de 0) denotă o potrivire mai bună.

logLikelihood

Indice	Model 1	Model 2	Model 3	Interacțiune
logLik	-65936.31	-65932.11	-65875.8	-65878.88

Nu ține cont de complexitatea modelului!

Devianță

Calculată cu formula $-2 * logLik$.

Este un indice de *nepotrivire*: $-2 * logLik \in [0, \infty)$.

Indice folosit pentru compararea modelelor[12]:
$Dev_1 - Dev_2 \sim \chi^2$.

[12] Cu grade de libertate = diferența dintre parametrii estimați de cele 2 modele.

Devianță

Indice	Model 1	Model 2	Model 3	Interacțiune
Devianță	131872.63	131864.22	131751.6	131757.75

Nu ține cont de complexitatea modelului!

AIC

Criteriul Informațional Akaike (*Akaike Information Criterion*).

$AIC = -2 * logLik + 2k$, unde k este numărul de parametri estimați.

AIC

Indice	Model 1	Model 2	Model 3	Interacțiune
AIC	131892.63	131886.22	131777.6	131785.75

Ține cont de complexitatea modelului!

BIC

Criteriul Informațional Bayesian (*Bayesian Information Criterion*).

$BIC = -2 * logLik + k * ln(N)$, unde k este numărul de parametri estimați iar N este dimensiunea eșantionului.

Teoretic, poate fi folosit pentru compararea modelelor estimate pe eșantioane de mărimi diferite.

BIC

Indice	Model 1	Model 2	Model 3	Interacțiune
BIC	131975.9	131977.82	131885.85	131902.33

Informații suplimentare

O a cincea măsură, numită R^2 – vezi Snijders and Bosker (2011).

O sursă foarte bună și accesibilă este Luke (2004).

Maximum Likelihood

2 varietăți: FIML (*full information ML*) și REML (*restricted ML*).

FIML este mai folosită deoarece calculele sunt mai ușoare.[13]

În cele mai multe situații, rezultatele sunt identice.

[13] Vezi Hox (2010, pp. 40–41) pentru situațiile în care ar trebui folosite fiecare.

Generalized Least Squares

“Metoda generalizată a pătratelor celor mai mici”.

O ponderare este aplicată datelor, pentru a corecta problema autocorelației.

Nu este iterativă, precum ML, deci este mult mai rapidă!

Generalized Least Squares

Rezultatele obținute de către ML și GLS tind să fie similare pe măsură ce eșantionul crește spre infinit.

Cu toate acestea, GLS tinde să ofere erori standard puțin mai imprecise decât ML.[14]

[14] Trade-off: viteză sau precizie?

Nivelul 1

Modelele ierarhice sunt foarte puternice: estimarea decurge OK chiar și cu grupuri de dimensiuni inegale.

Ponderare a estimanzilor: β_{total}, $\beta_{grupuri}$ – ponderile sunt inversa gradului de precizie a estimanzilor.[15]

5–10 observații sunt acceptabile atât timp cât alte grupuri conțin mai multe.

[15] Mai multe detalii în Steenbergen and Jones (2002).

Nivelul 2

Sursa celor mai multe probleme!

Cât de mare se poate, iar niciodată mai puțin de 15–20 de grupuri.

Afectează analizele de comportament politic, unde nu avem foarte multe țări.

3 niveluri

Aceleași principii, deși estimarea devine complexă.

Efecte aleatorii la diferite niveluri, plus 3 tipuri de interacțiuni inter-nivel posibile: 3–2, 3–1, 2–1.

Finalul

	DV: participare la vot
Vârsta (decenii)	0.33^{***}
	(0.01)
Ani educație	0.09^{***}
	(0.00)
Venit (gospodărie)	0.12^{***}
	(0.01)
Religiozitate	0.03^{***}
	(0.01)
Inegalitate	-0.05^{*}
	(0.02)
Postcomunism	-0.63^{**}
	(0.21)
AIC	28050.73
BIC	28117.18
Log Likelihood	-14017.37
Devianță	28034.73
Num. obs.	29919
Num. grupuri: Țară	21
Varianță: Țară (Constantă)	0.19
Varianță: Reziduală	1.00

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$

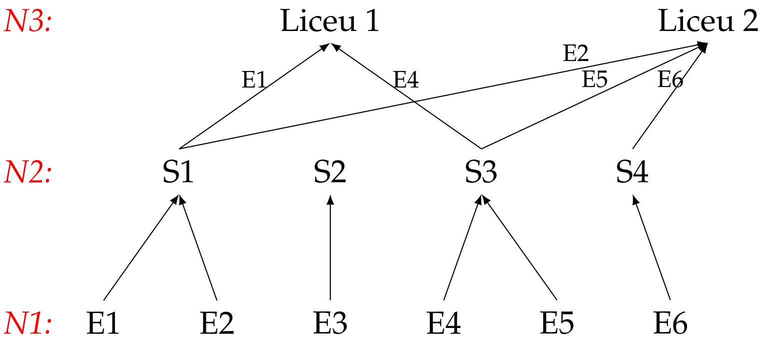
Model ierarhic logistic

Inter-clasificare

Reformă în sănătate – unde trebuie alocați cu prioritate bani: spitale sau medici de familie?

Nu există o ierarhie clară: medici trimit pacienți la mai multe spitale.

Alte exemple posibile: elevi care trec din clasa a 8-a într-a 9-a.



Elevi, grupați în școli...

Mulțumesc pentru atenție!

Referințe

Freedman, D. A. (2006). On The So-Called "Huber Sandwich Estimator" and "Robust Standard Errors". *The American Statistician*, *60*(4), 299–302.

Hox, J. J. (2010). *Multilevel Analysis: Techniques and Applications*. New York: Routledge.

Huber, P. J. (1967). The Behavior of Maximum Likelihood Estimates Under Nonstandard Conditions. In *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. I* (pp. 221–233). Berkeley, CA: University of California Press.

Luke, D. A. (2004). *Multilevel Modeling*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Snijders, T. A. B., & Bosker, R. J. (2011). *Multilevel Analysis: An Introduction to Basic and Advanced Multilevel Modeling*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Steenbergen, M. R., & Jones, B. S. (2002). Modeling Multilevel Data Structures. *American Journal of Political Science*, *46*(1), 218–237.

White, H. (1980). A Heteroskedasticity–Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica*, *48*(4), 817–838.