4815: [Cqoi2017]小Q的表格 莫比乌斯反演 分块

国际惯例的题面:

看到这两个公式，很多人都会想到与gcd有关。没错，最终的结论就是f(a,b)=f(gcd(a,b))\*(a/gcd(a,b))\*(b/gcd(a,b))。然而结论只能猜出来是不行的，我们考虑如何证明他。

网上很多大神的构造性证明已经很清楚了，然而我太菜，不会构造，让我们来一发非构造性证明。

由于:

我们设，则，显然我们有前提条件。

用x替换b，得:

我们移项，得:

如果，我们可以继续迭代:

如果我们让上面两个等式相乘，会发现:

显然迭代下去，我们会有:

如果，我们令，我们有:

如果我们令(下取整)，我们有:

然而我们现在连右边那个东西能否整除都不知道……没关系，继续展开等式。

……

我们看到了一个非常愉悦的事情:两个约掉了。

仔细观察，会发现分子上的东西是f的第二个参数的连乘积，分母上的东西是f的第二个参数取模第一个参数的连乘积(废话)。

考虑我们一直迭代下去，最终会剩下什么。

迭代终止的条件是，这时候我们带入前面推出时适用的公式，的那个这样会剩下分子的前两项和分母的最后两项。

显然分子剩下的前两项为和，分母剩下的最后一项为，而根据上面迭代的等式，分母的倒数第二项为倒数第二次带入的第一个参数，显然也是。

至此我们的结论得证(一个证明搞这么麻烦，我好蒻啊)。

然后就是计算的问题。

我们要求的是:

如果我们能够预处理出g()，O(sqrt(n))修改并O(1)查询f()的前缀和，我们就能在sqrt(n)的复杂度内完成每次操作。

显然维护f()直接大力块状数组即可，重点是g()。

这里有一个很优美的结论，就是

然后我们就有:

之后线性筛就好了。

代码(老年选手已经毫不畏惧卡常数):

蒟蒻不会构造只会胡乱证明