עבור של המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -4\\ 8 & -11 & -8\\ -8 & 8 & 5\end{pmatrix}$

מצאו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה הבאה וקבעו אם היא לכסונה במידה שהמטריצה ניתנת ללכסון, מצאו מטריצה הפיכה P המלכסנת אותה, ומצאו את הצורה האלכסונית של המטריצה.

פתרון:

נמצא את הפולינום האופייני בעזרת נוסחה:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\lambda^3-\left(a_{11}+a_{22}+a_{33}\right)\lambda^2+\left(\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\right)\lambda-\det(A)$$

נחשב $\det(A)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -4\\ 8 & -11 & -8\\ -8 & 8 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & -4\\ 8 & -11 & -8\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & -4\\ 0 & 21 & 24\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

$$\det\left(A\right)=1\cdot\begin{vmatrix}21 & 24\\ -3 & -3\end{vmatrix}=-63+72=9$$

$$|A-\lambda I|=\lambda^3-\left(1-11+5\right)\lambda^2+\left(\begin{vmatrix}-11 & -8\\ 8 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -4\\ -8 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -4\\ -8 & -1\end{vmatrix}\right)\lambda-9=0$$

$$|A-\lambda I|=\lambda^3+5\lambda^2+3\lambda-9=0$$

לפי נוסחות וייטה $\begin{cases}\lambda_1\lambda_2\lambda_3=9\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-5\end{cases}\Rightarrow \lambda_1=-3,\lambda_2=-3,\lambda_3=1$ הערכים העצמיים

נמצא את הוקטורים העצמיים

עבור $\lambda_1=\lambda_2=-3$

$$\left(A-(-3)I\right)\vec{v}=\left(A+3I\right)\vec{v}=\begin{pmatrix}1+3 & -4 & -4\\ 8 & -11+3 & -8\\ -8 & 8 & 5+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

נפתור $\begin{pmatrix}4 & -4 & -4\\ 8 & -8 & -8\\ -8 & 8 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{v^{(1)}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{v^{(2)}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$ (נבחר שני פתרונות בלתי תלויות) $\Leftarrow v_1-v_2-v_3=0$

עבור $\lambda_3=1$

$$(A-1I)\vec{v}=\begin{pmatrix}1-1 & -4 & -4\\8 & -11-1 & -8\\-8 & 8 & 5-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v^{(3)}}=\begin{pmatrix}v_1\\2v_1\\-2v_1\end{pmatrix}=v_1\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\Leftarrow 2v_1=v_2,v_2=-v_3\Leftarrow\begin{pmatrix}0 & -4 & -4\\8 & -12 & -8\\-8 & 8 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

נבחר $\overrightarrow{v^{(3)}}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 2\\0 & 1 & -2\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\2 & -2 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=PDP^{-1}$$