

# Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

## Εργασία 2η: Αλγόριθμοι Εκτίμησης Φασμάτων Ανώτερης Τάξης σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον Octave/Matlab

Ονοματεπώνυμο: Χριστόδουλος Μιχαηλίδης

Διεύθυνση Ηλεκτρονικού Ταχυδρομείου: [chrdimmic@ece.auth.gr](mailto:chrdimmic@ece.auth.gr)

Ημερομηνία: 21 Ιουλίου 2022

Εκφώνηση Εργασίας	3
Κατασκευή του δοκιμαστικού σήματος $X[k]$	4
Εκτίμηση του Φάσματος Ισχύος (Power Spectrum)	5
Εκτίμηση του φάσματος δεύτερης τάξης (bispectrum) με την έμμεση μέθοδο	6
Η άμεση μέθοδος εκτίμησης του bispectrum	7
Επίδραση των παραμέτρων $K$ και $M$ στην ποιότητα της εκτίμησης	8
Εκτίμηση του φάσματος ισχύος και του bispectrum από πολλαπλές υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας $X[k]$	13
Σημείωμα για τον κώδικα που συνοδεύει την εργασία.	15

## Εκφώνηση Εργασίας

### Εργασία 2<sup>η</sup>

Consider the real discrete process given by

$$X[k] = \sum_{i=1}^6 \cos(\omega_i k + \varphi_i), k = 0, 1, \dots, N-1,$$

where  $\omega_i = 2\pi\lambda_i$ ,  $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$  and  $\lambda_6 = \lambda_4 + \lambda_5$ ,  $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $\varphi_6 = \varphi_4 + \varphi_5$  and  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$  are independent and uniformly distributed random variables on  $[0, 2\pi]$ . Consider that  $\lambda_1 = 0.12\text{Hz}$ ,  $\lambda_2 = 0.30\text{Hz}$ ,  $\lambda_4 = 0.19\text{Hz}$  and  $\lambda_5 = 0.17\text{Hz}$  (hence,  $\lambda_3 = 0.42\text{Hz}$  and  $\lambda_6 = 0.36\text{Hz}$ ). Moreover, let  $N = 8192$  as the data length.

1. Construct the  $X[k]$ .
  2. Estimate the power spectrum  $C_2^X(f)$ . Use  $L_2 = 128$  max shiftings for autocorrelation.
  3. Estimate the bispectrum (only in the primary area)  $C_3^X(f_1, f_2)$  using
    - a) the indirect method with  $K = 32$  and  $M = 256$ . Use  $L_3 = 64$  max shiftings for the third-order cumulants. Use: a<sub>1</sub>) rectangular window and a<sub>2</sub>) Parzen window.
    - b) the direct method with  $K = 32$  and  $M = 256$ . Use  $J = 0$ .
  4. Plot  $X[k]$ ,  $C_2^X(f)$ ,  $C_3^X(f_1, f_2)$  (all estimations).
- 
5. Compare the estimations of  $C_3^X(f_1, f_2)$  amongst {a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, b} settings. Comment on the comparisons.
  6. What can you deduce regarding the frequency content from the comparison of  $C_2^X(f)$  and  $C_3^X(f_1, f_2)$  (all estimations)?
  7. How the results will change if you repeat the process from 1 to 5 taking into account:
    - a) different segment length: i)  $K = 16$  and  $M = 512$  ii)  $K = 64$  and  $M = 128$ ?
    - b) 50 realizations of the  $X[k]$  and comparing the mean values of the estimated  $C_2^X(f)$ ,  $C_3^X(f_1, f_2)$ ?

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η εκτίμηση του φάσματος δεύτερης τάξης (bispectrum) ενός δοκιμαστικού σήματος με χρήση δύο διαφορετικών αλγορίθμων. Σε αυτή την αναφορά παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του κάθε εκτιμητή, καθώς επίσης και κάποια συμπεράσματα σχετικά με την πληροφορία που μας παρέχει το bispectrum για τον μηχανισμό που παράγει το δοκιμαστικό σήμα.

## Κατασκευή του δοκιμαστικού σήματος $X[k]$

Το δοκιμαστικό σήμα που χρησιμοποιήθηκε για όλα τα πειράματα της άσκησης είναι ένα άθροισμα έξι διαφορετικών συνημιτόνων με συχνότητες:

$$f_1 = 0.12\text{Hz}, f_2 = 0.30\text{Hz}, f_3 = f_1 + f_2 = 0.42\text{Hz}$$

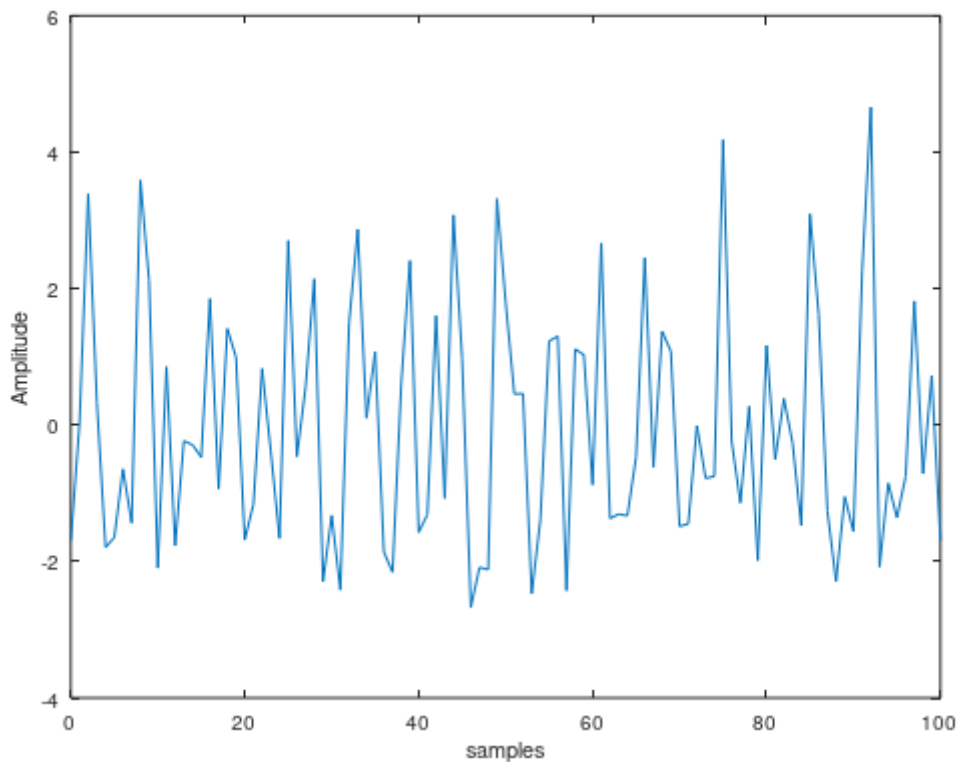
$$f_4 = 0.19\text{Hz}, f_5 = 0.17\text{Hz}, f_6 = f_4 + f_5 = 0.36\text{Hz}$$

Οι αρχικές φάσεις κάθε συνιστώσας επιλέχθηκαν τυχαία στο διάστημα  $[0, 2\pi)$  έτσι ώστε να εμφανίζεται τετραγωνική σύζευξη φάσης στα ζεύγη  $(f_1, f_2)$  και  $(f_4, f_5)$  οπότε :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 \text{ και } \varphi_4 + \varphi_5 = \varphi_6$$

Το συνολικό μήκος της χρονοσειράς είναι 8192 δείγματα με τη συχνότητα δειγματοληψίας να θεωρείται ίση με 1Hz.

Στο διάγραμμα 1) φαίνεται ένα μικρό απόσπασμα της χρονοσειράς:



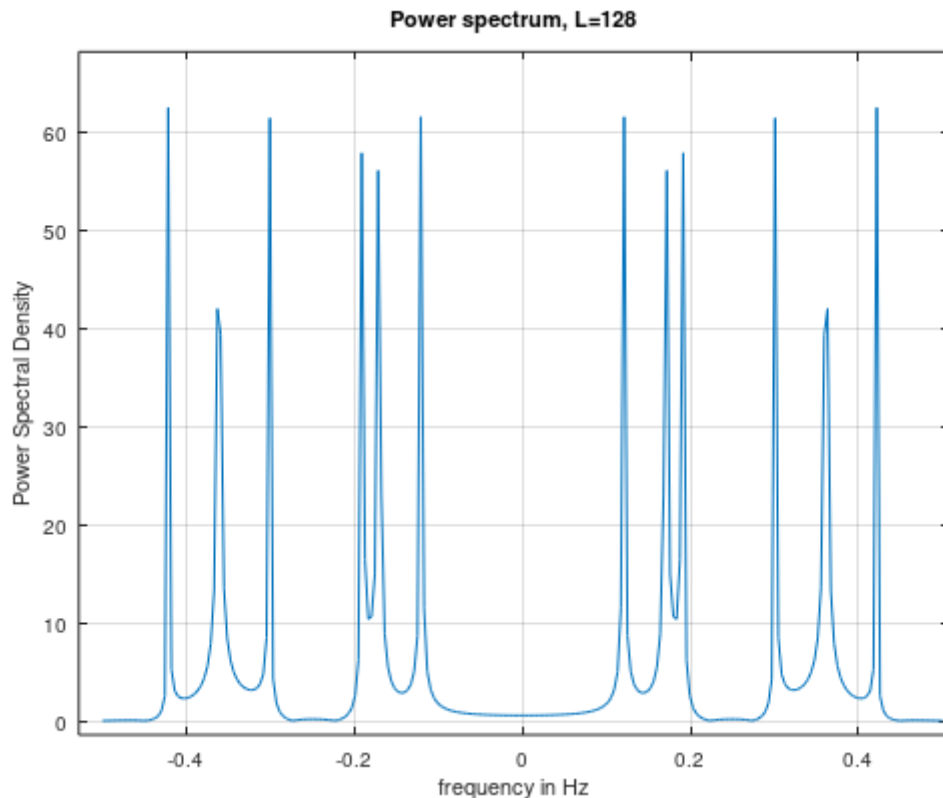
Διάγραμμα 1) Τα 100 πρώτα δείγματα του δοκιμαστικού σήματος

## Εκτίμηση του Φάσματος Ισχύος (Power Spectrum)

Το φάσμα ισχύος εκτιμήθηκε έμμεσα από την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας. Πιο συγκεκριμένα:

- Εκτιμήθηκε η αυτοσυσχέτιση του  $X[k]$  για τις πρώτες  $L=128$  υστερήσεις.
- Υπολογίστηκε μια εκτίμηση του φάσματος ισχύος εφαρμόζοντας τον γρήγορο μετασχηματισμό Fourier στην αυτοσυσχέτιση.

Στο διάγραμμα 2) φαίνεται η τελική εκτίμηση:



Διάγραμμα 2) Η εκτίμηση του φάσματος ισχύος για την στοχαστική διαδικασία  $X[k]$

Για το φάσμα ισχύος μπορούμε να κάνουμε τα εξής σχόλια:

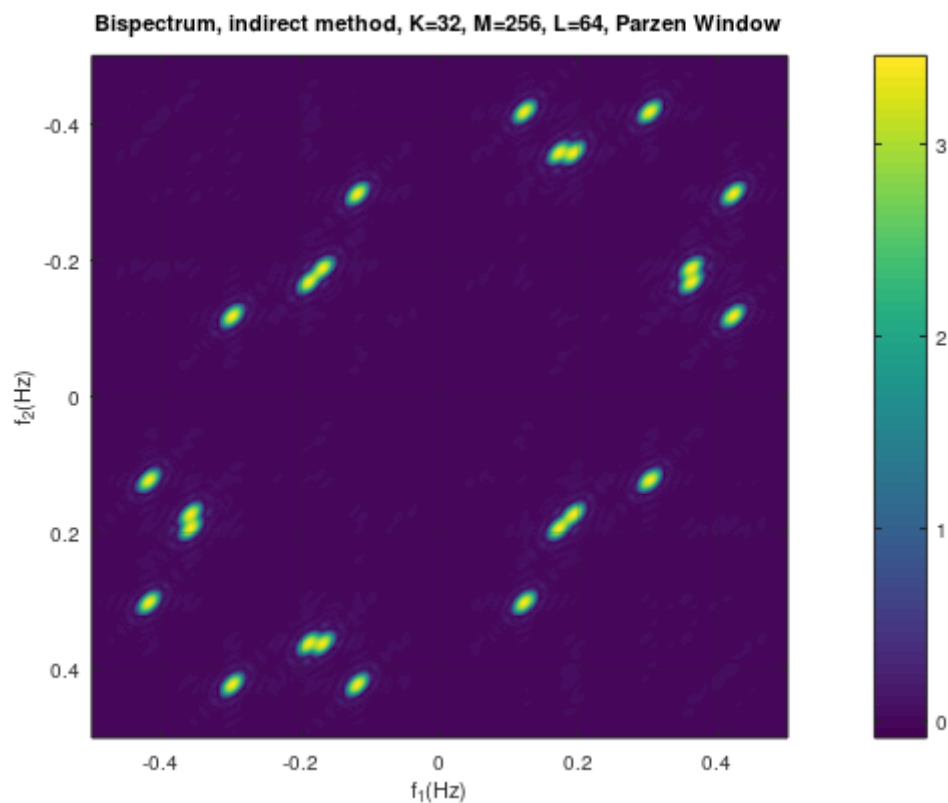
- Όπως είναι αναμενόμενο, είναι συμμετρικό γύρω από τη μηδενική συχνότητα.
- Εκατέρωθεν της μηδενικής συχνότητας παρατηρούνται 6 διακεκριμένες μεταξύ τους κορυφές οι οποίες (παρατηρώντας τον άξονα της συχνότητας) αντιστοιχούν στις συχνότητες  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$  και στις αντίθετες αυτών.
- Θεωρητικά, θα περίμενε κανείς το φάσμα ισχύος να μηδενίζεται παντού εκτός από τις προαναφερθείσες συχνότητες. Επειδή εδώ παρατηρούμε μία εκτίμηση του φάσματος ισχύος σε ένα απόσπασμα πεπερασμένου μήκους ( $N=8192$  δείγματα), εκδηλώνεται το φαινόμενο της φασματικής διαρροής. Δηλαδή, η εκτίμηση του φάσματος έχει μη μηδενικές τιμές σε περιοχές όπου κανονικά δε θα έπρεπε να υπάρχει φασματικό περιεχόμενο.

## Εκτίμηση του φάσματος δεύτερης τάξης (bispectrum) με την έμμεση μέθοδο

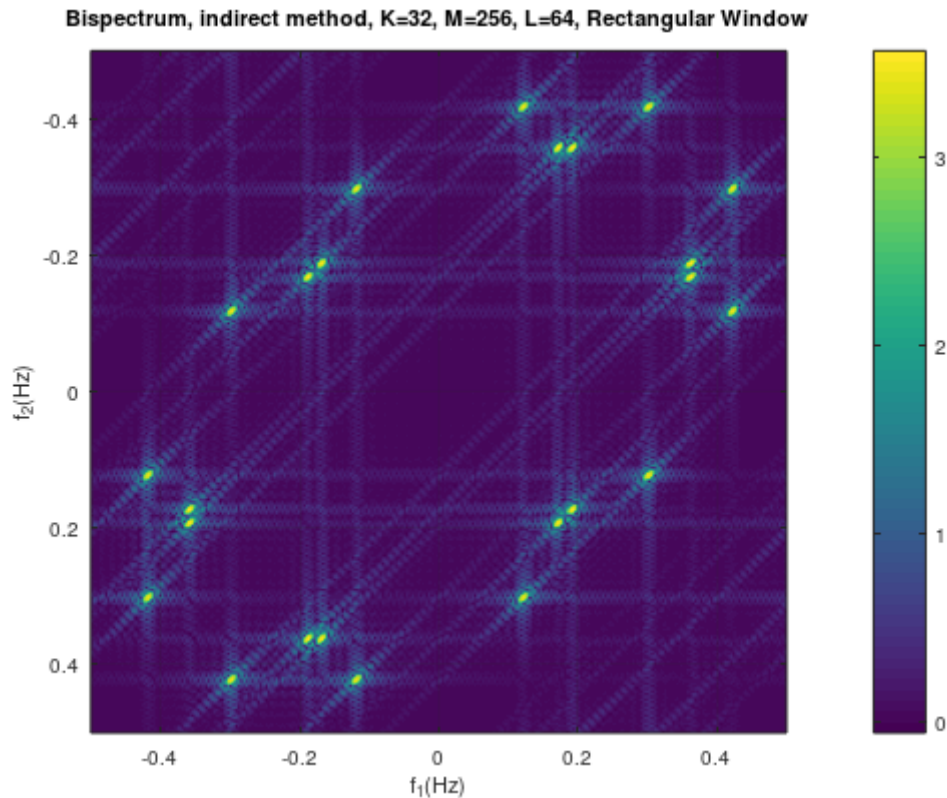
Η έμμεση μέθοδος δίνει μία εκτίμηση του bispectrum ακολουθώντας τον παρακάτω αλγόριθμο:

- Η αρχική χρονοσειρά μήκους  $N$  χωρίζεται σε  $K$  τμήματα μήκους  $M$  δειγμάτων. Αν δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των επιμέρους τμημάτων, τότε ισχύει προφανώς  $N = KM$ .
- Για κάθε επιμέρους τμήμα υπολογίζεται ο σωρείτης τρίτης τάξης για κάποιο πλήθος  $L$  υστερήσεων.
- Σε κάθε επιμέρους εκτίμηση του σωρείτη εφαρμόζεται μία συνάρτηση παραθύρωσης
- Στο αποτέλεσμα του προηγούμενου βήματος εφαρμόζεται ένας δισδιάστατος μετασχηματισμός Fourier, έτσι ώστε να προκύψει μία εκτίμηση του bispectrum σε κάθε επιμέρους τμήμα.
- Η τελική εκτίμηση του bispectrum υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των επιμέρους εκτιμήσεων.

Στα διαγράμματα 3) και 4) φαίνονται οι εκτιμήσεις του bispectrum για παραμέτρους  $K=32$ ,  $M=256$ ,  $L=64$  και συναρτήσεις παραθύρωσης Parzen και ορθογώνια αντίστοιχα.



Διάγραμμα 3) Εκτίμηση με έμμεση μέθοδο και παράθυρο Parzen



Διάγραμμα 4) Εκτίμηση με έμμεση μέθοδο και ορθογώνιο παράθυρο

Σχετικά με τις εκτιμήσεις που προκύπτουν μπορούμε να πούμε τα εξής:

- Και στις δύο περιπτώσεις το bispectrum εμφανίζει 12 περιοχές συμμετρίας.
- Αν επικεντρωθούμε στην κύρια περιοχή του bispectrum, παρατηρούμε ότι αυτό παίρνει μεγάλες τιμές κοντά στην περιοχή  $(f_1, f_2) = (0.12, 0.30)$  και στην περιοχή  $(f_3, f_4) = (0.19, 0.17)$ . Επομένως, το bispectrum είναι όντως ένα χρήσιμο εργαλείο για την ανίχνευση φαινομένων τετραγωνικής σύζευξης φάσης.
- Στην περίπτωση της ορθογώνιας συνάρτησης παραθύρωσης εκδηλώνεται πολύ έντονα το φαινόμενο της φασματικής διαρροής (spectral leakage).
- Στην περίπτωση της συνάρτησης Parzen η επίδραση του προηγούμενου φαινομένου δεν είναι ιδιαίτερα αισθητή. Ωστόσο, οι λοβοί οι οποίοι αντιστοιχούν στις τετραγωνικά συζευγμένες αρμονικές είναι πιο μεγάλοι σε έκταση και σε ορισμένες περιπτώσεις έχουν συγχωνευθεί με τους λοβούς των γειτονικών περιοχών συμμετρίας. Συνεπώς, ανάλογα με την συνάρτηση παραθύρωσης που επιλέγεται κάθε φορά, μπορούμε να επιλέξουμε “θυσιάσουμε” ευκρίνεια στον άξονα της συχνότητας με ...

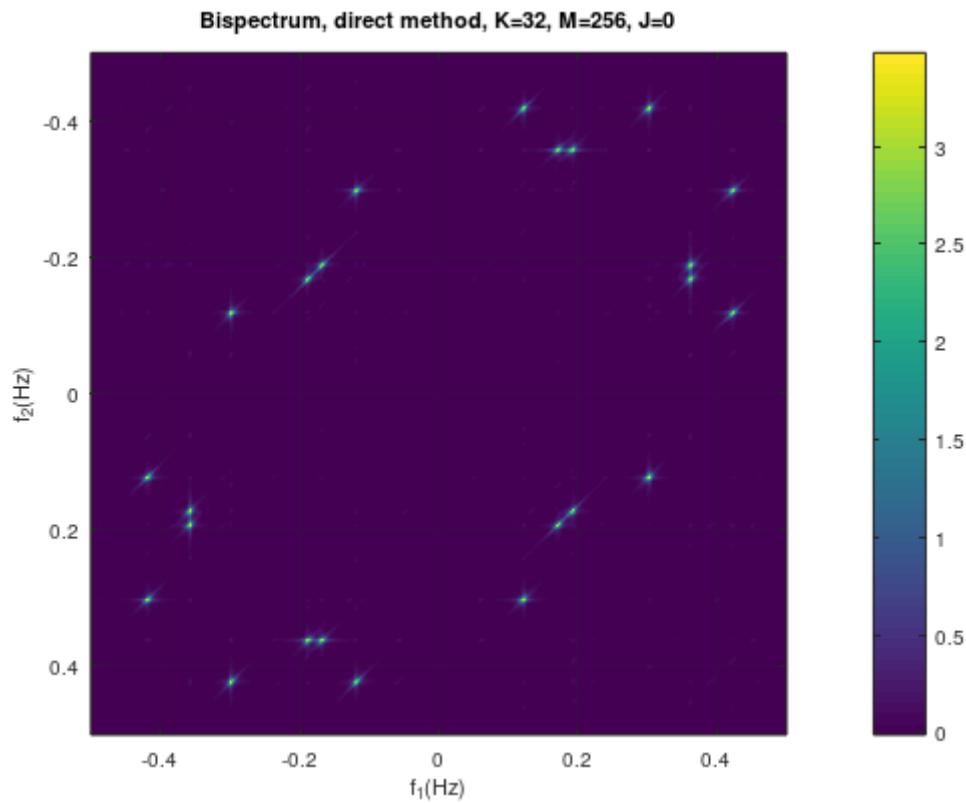
## Η άμεση μέθοδος εκτίμησης του bispectrum

Η άμεση μέθοδος εκτίμησης του bispectrum υπολογίζει το φάσμα δεύτερης τάξης απευθείας μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$B(f_1, f_2) = F(f_1)F(f_2)F^*(f_1 + f_2)$$

όπου B το bispectrum και F ο μετασχηματισμός Fourier της χρονοσειράς.

Στο διάγραμμα 5) φαίνεται η εκτίμηση με παραμέτρους  $K=32$ ,  $M=256$



Διάγραμμα 5) Άμεση μέθοδος εκτίμησης

Από το διάγραμμα 5) προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Και η άμεση μέθοδος εκτίμησης εντοπίζει φαινόμενα τετραγωνικής σύζευξης φάσης στα ίδια ζεύγη συχνοτήτων με την έμμεση μέθοδο.
- Οι λοβοί οι οποίοι αντιστοιχούν σε τετραγωνικά συζευγμένες συχνότητες είναι πιο “εντοπισμένοι” πάνω στο επίπεδο  $f_1$ - $f_2$  σε σχέση με αυτούς της έμμεσης μεθόδου.
- Και εδώ εκδηλώνεται το φαινόμενο της φασματικής διαρροής αν και σε μικρότερο βαθμό.
- Η άμεση μέθοδος εκτίμησης είναι υπολογιστικά “φθηνότερη” από την έμμεση, επειδή παρακάμπτει το ενδιάμεσο στάδιο εκτίμησης των σωρειτών.

Όλα τα παραπάνω πλεονεκτήματα καθιστούν την άμεση μέθοδο μια πιο ελκυστική επιλογή από την έμμεση.

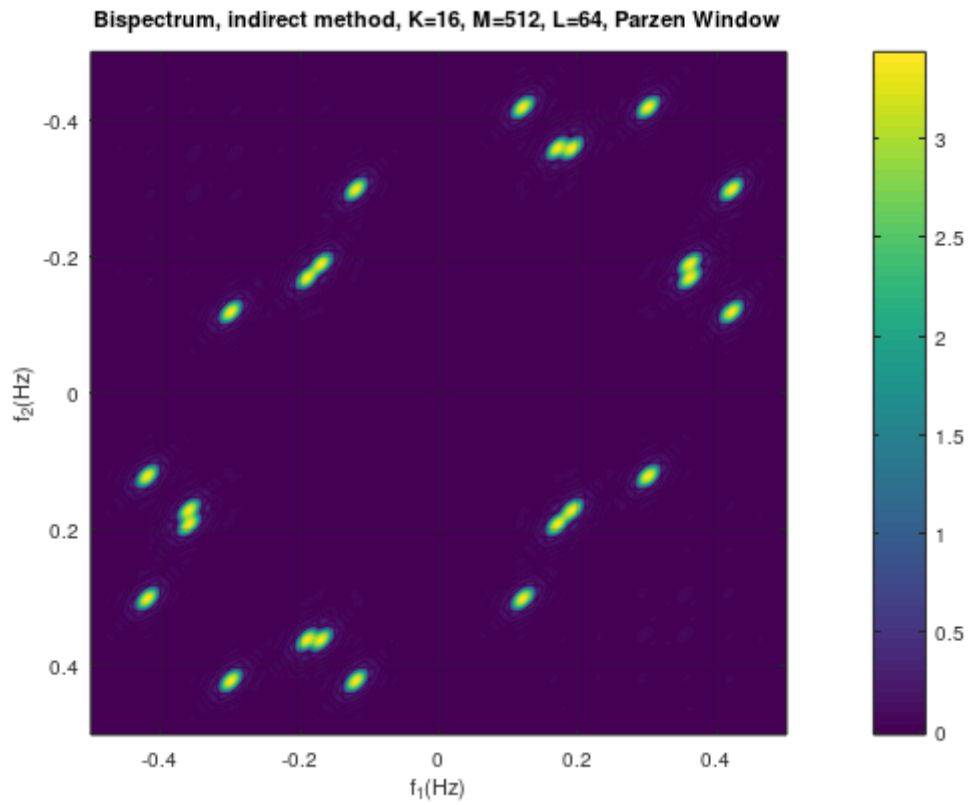
## Επίδραση των παραμέτρων K και M στην ποιότητα της εκτίμησης

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω πειράματα αυτή τη φορά με διαφορετική επιλογή παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε:

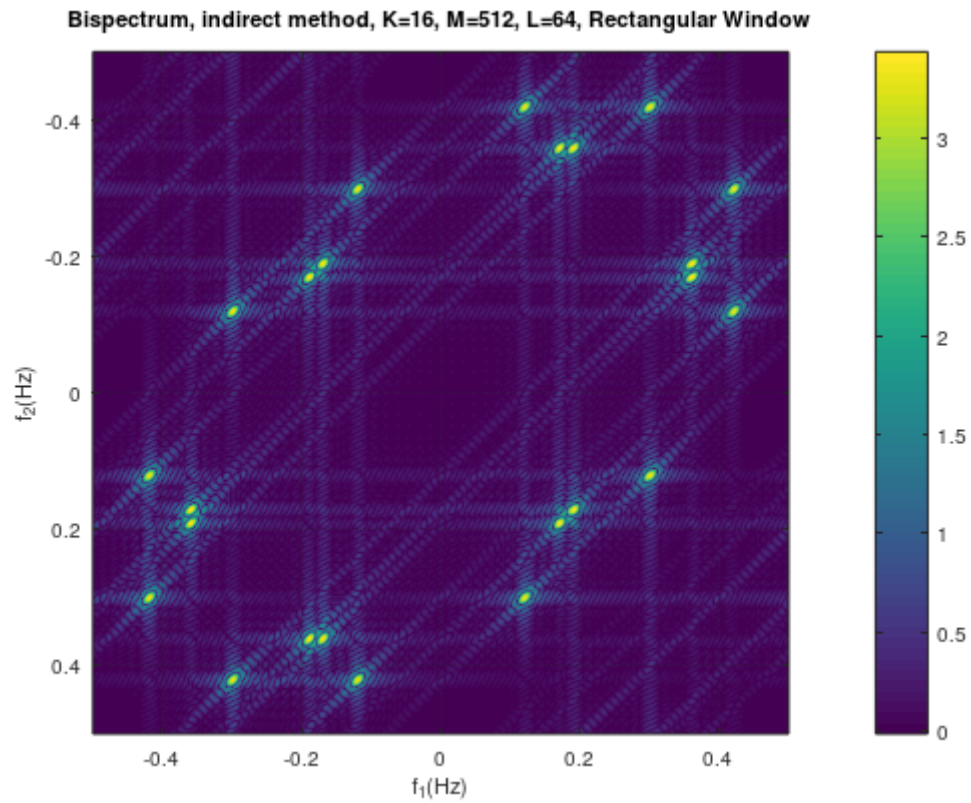


- $K=16$  και  $M=512$
- $K=64$  και  $M=128$

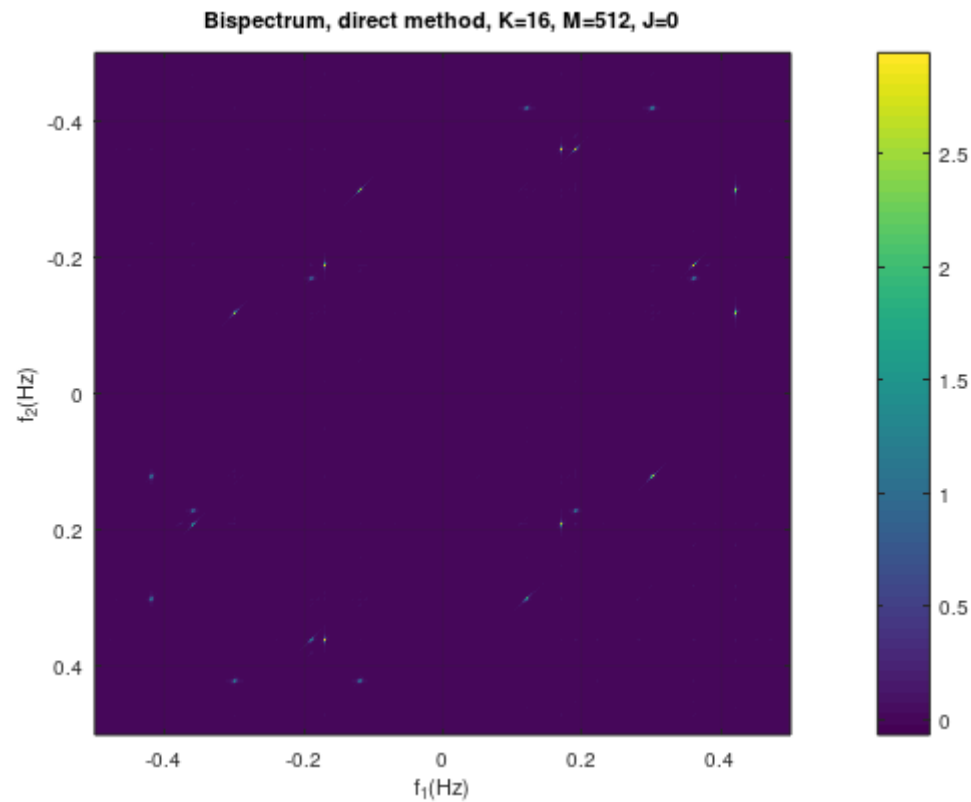
Στα διαγράμματα 6), 7) και 8) φαίνεται η εκτίμηση του bispectrum με  $K=16$ ,  $M=512$  και παράθυρο Parzen, ορθογώνιο παράθυρο και άμεση εκτίμηση αντίστοιχα.



Διάγραμμα 6) εκτίμηση με παράθυρο Parzen

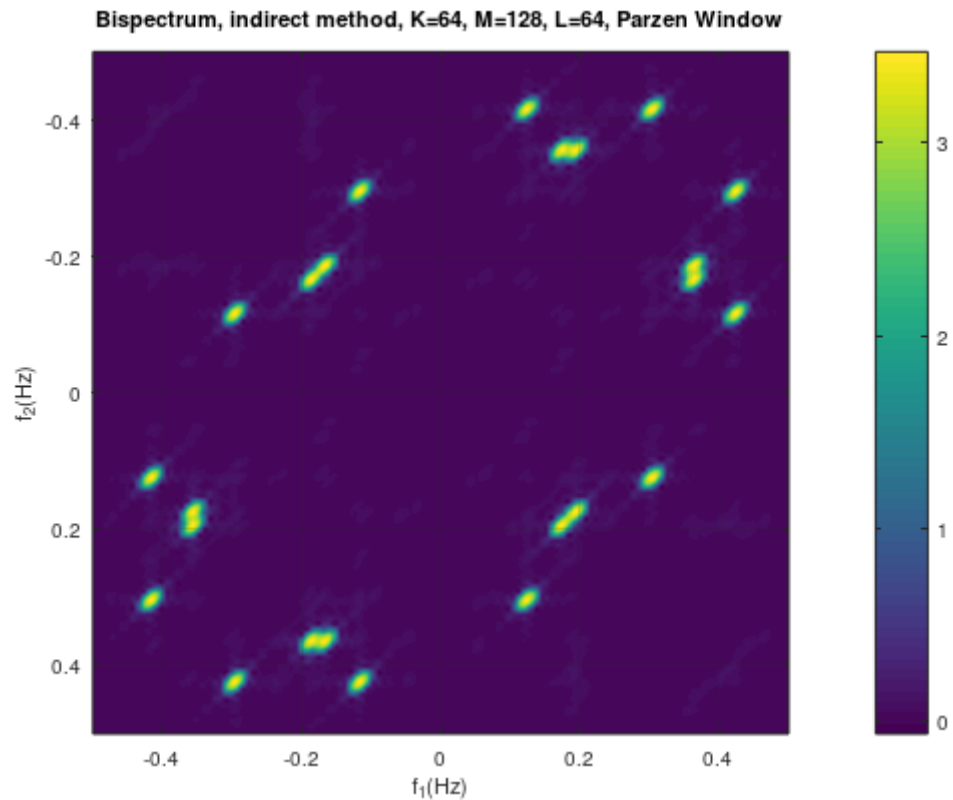


Διάγραμμα 7) Εκτίμηση με ορθογώνιο παράθυρο

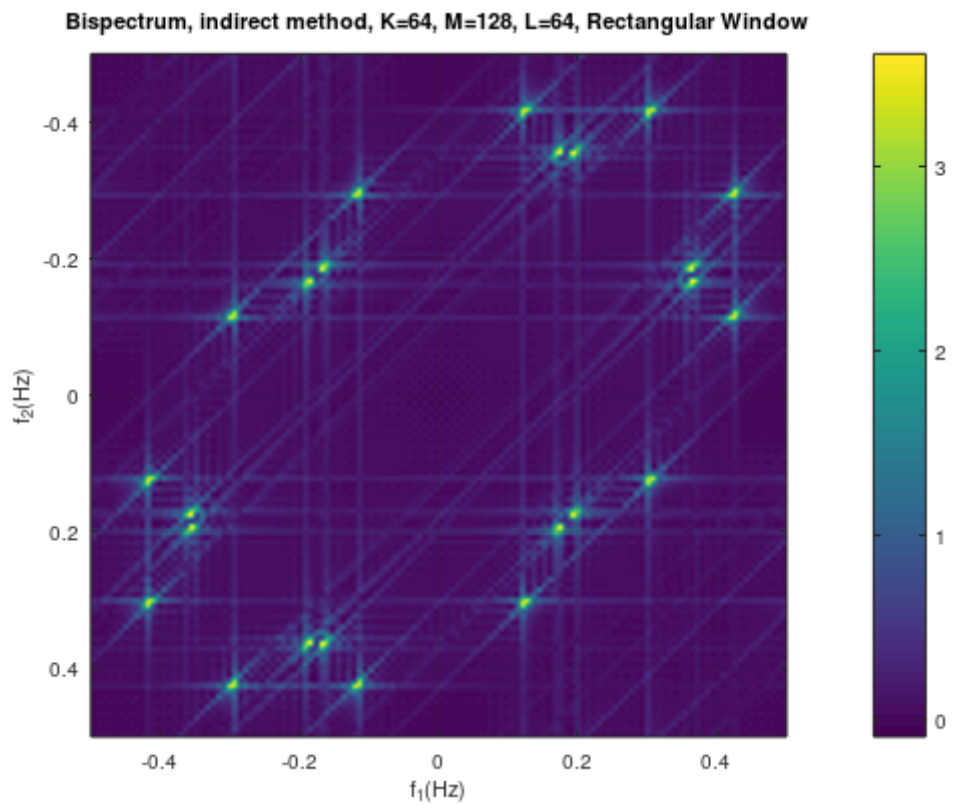


Διάγραμμα 8) Άμεση μέθοδος εκτίμησης.

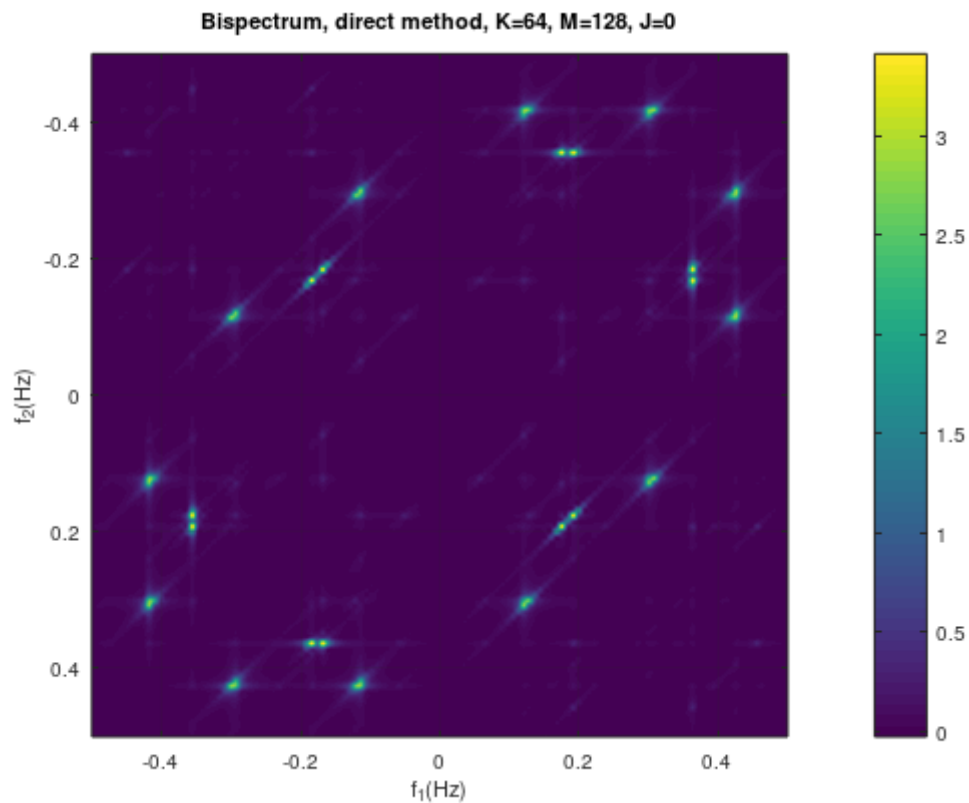
Στα διαγράμματα 9), 10) και 11) φαίνονται οι εκτιμήσεις του bispectrum με παραμέτρους  $K=64$ ,  $M=128$  και παράθυρο Parzen, ορθογώνιο παράθυρο και άμεση εκτίμηση αντίστοιχα.



Διάγραμμα 9) Εκτίμηση με παράθυρο Parzen



Διάγραμμα 10) Εκτίμηση με ορθογώνιο παράθυρο



Διάγραμμα 11) Άμεση εκτίμηση

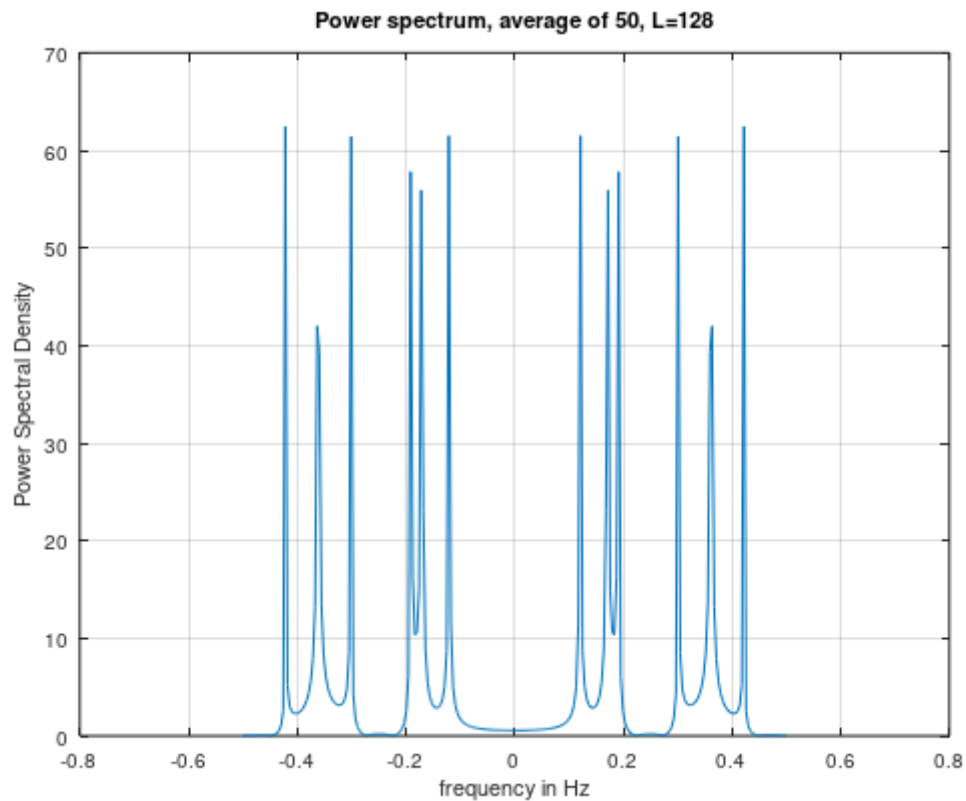
Συνοψίζοντας μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής για την επίδραση των παραμέτρων  $K$  και  $M$  στην εκτίμηση του bispectrum.

- Για την άμεση μέθοδο η μείωση του  $M$  από 512 σε 128 μειώνει την ανάλυση στους άξονες της συχνότητας κατά 4 όπως είναι αναμενόμενο.
- Για την έμμεση μέθοδο η αύξηση του  $K$  από 16 σε 64 δε φαίνεται να βοηθά ιδιαίτερα στην αντιμετώπιση του φαινομένου της φασματικής διαρροής. Αντιθέτως, η μείωση του  $M$  από 512 σε 128 (η οποία συμβαίνει αναπόφευκτα όταν το  $K$  αυξάνεται) φαίνεται να οδηγεί πάλι χειρότερη ανάλυση στον άξονα της συχνότητας, παρόλο που το πλήθος των υστερήσεων είναι  $L=64$  σε κάθε περίπτωση. Αυτό ενδέχεται να συμβαίνει, επειδή μειώνοντας το  $M$  αναγκάζομαστε να εκτιμήσουμε το σωρείτη τρίτης τάξης με λιγότερα δεδομένα σε κάθε υποσύνολο.
- Τέλος, όσον αφορά την διασπορά των εκτιμήσεων μπορούμε να πούμε ότι αυτή δεν αλλάζει, επειδή και στην έμμεση και στην άμεση μέθοδο εκτίμησης η διασπορά είναι αντιστρόφως ανάλογη του γινομένου  $KM$ , το οποίο ισούται με το συνολικό μήκος  $N=8192$  σε κάθε περίπτωση, επειδή δεν υπάρχει αλληλοεπικάλυψη μεταξύ των επιμέρους υποσυνόλων.

## Εκτίμηση του φάσματος ισχύος και του bispectrum από πολλαπλές υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας $X[k]$

Στο τελευταίο σετ δοκιμών το φάσμα ισχύος και το bispectrum υπολογίζονται ως ο μέσος όρος 50 διαφορετικών υλοποιήσεων της στοχαστικής διαδικασίας.

Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται η νέα εκτίμηση για το φάσμα ισχύος.

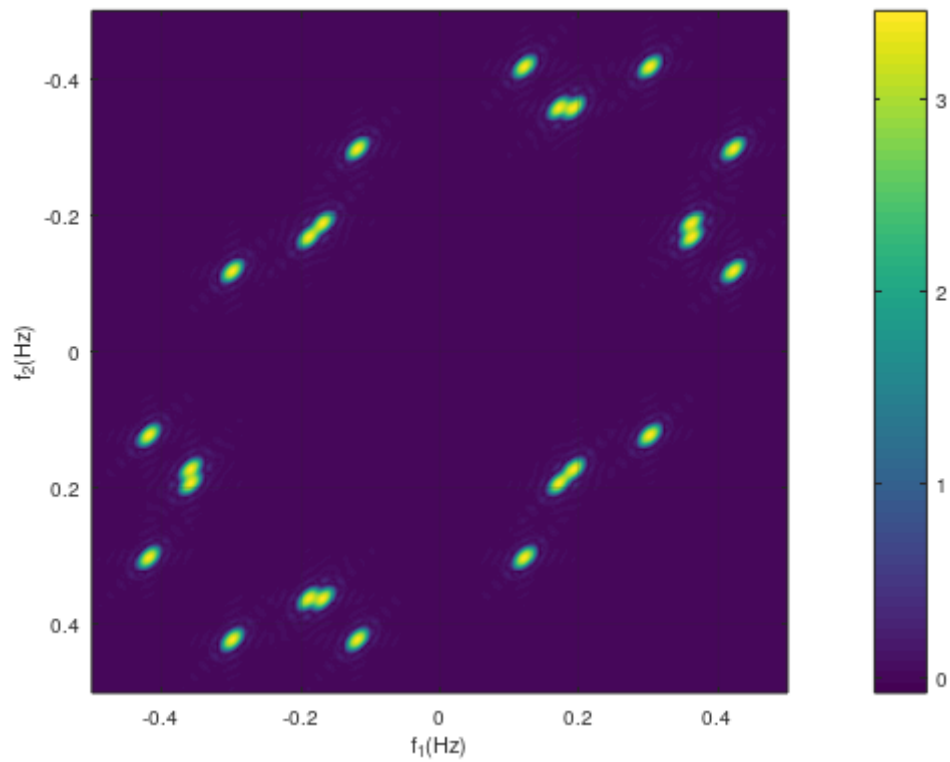


Διάγραμμα 12) Εκτίμηση του φάσματος ισχύος από 50 διαφορετικές υλοποιήσεις της  $X[k]$

Η μόνη παράμετρος που αλλάζει ανάμεσα στις 50 διαφορετικές υλοποιήσεις είναι οι αρχικές φάσεις των επιμέρους συνημιτονοειδών κυματομορφών. Το πλάτος και η συχνότητα των συνιστωσών παραμένει σταθερό. Επειδή όμως το φάσμα ισχύος δεν περιέχει πληροφορία για την φάση, δεν παρατηρείται κάποια διαφορά στην νέα εκτίμηση του φάσματος ισχύος.

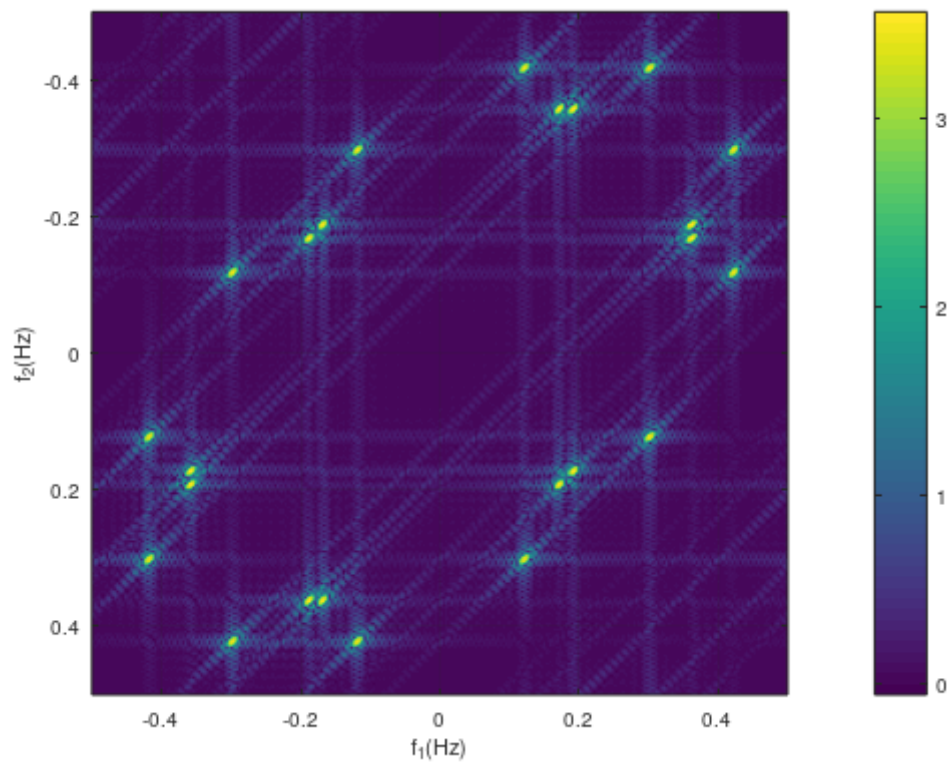
Επιπλέον, επειδή τα φαινόμενα τετραγωνικής σύζευξης φάσης παρατηρούνται στα ίδια ζεύγη συχνοτήτων, δεν παρατηρείται κάποια διαφορά και στις εκτιμήσεις του bispectrum ανεξάρτητα από την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε.

Bispectrum, indirect method, Average of 50, K=32, M=256, L=64, Parzen Window

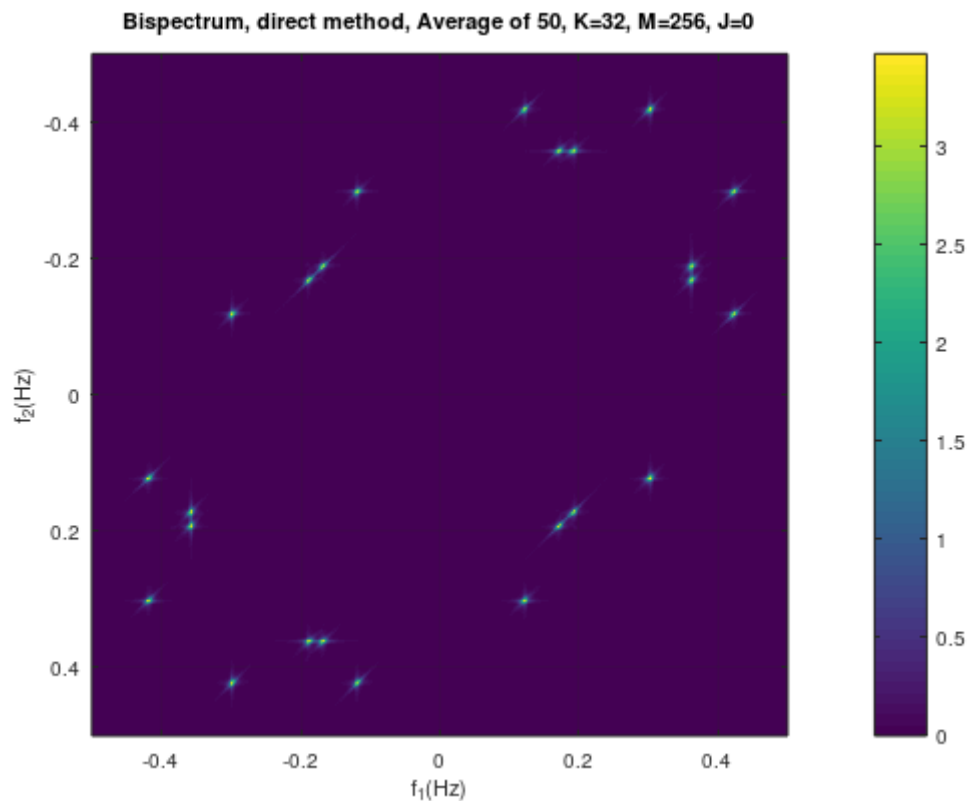


Διάγραμμα 13) Εκτίμηση με έμμεση μέθοδο, παράθυρο Parzen σε 50 διαφορετικές υλοποιήσεις

Bispectrum, indirect method, Average of 50, K=32, M=256, L=64, Rectangular Window



Διάγραμμα 14) Εκτίμηση με έμμεση μέθοδο και ορθογώνιο παράθυρο σε 50 διαφορετικές υλοποιήσεις.



Διάγραμμα 15) Εκτίμηση με άμεση μέθοδο σε 50 διαφορετικές υλοποιήσεις.

## Σημείωμα για τον κώδικα που συνοδεύει την εργασία.

Η γλώσσα που χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας είναι η Octave. Η Octave είναι μία γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου η οποία σε γενικές γραμμές είναι συμβατή με την MATLAB. Όλα τα διαγράμματα που παρουσιάζονται σε αυτή την εργασία προκύπτουν τρέχοντας τα scripts που συνοδεύουν αυτή την αναφορά. Επειδή υπάρχουν ορισμένες ασυμβατότητες ανάμεσα στην MATLAB και στην Octave, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί η έκδοση 7.1.0 της Octave για την εκτέλεση των scripts.

Ο κώδικας της εργασίας έχει αναρτηθεί σε ένα δημόσιο αποθετήριο στο Github το οποίο μπορείτε να το βρείτε από τον ακόλουθο σύνδεσμο:

<https://github.com/cmichailidis/ASPT-assignments>

Σε αυτό το αποθετήριο βρίσκεται και ο κώδικας για τις άλλες τρεις εργασίες του μαθήματος.

Ο κώδικας αυτής της εργασίας βρίσκεται στον φάκελο exercise2 και αποτελείται από τα εξής αρχεία:

- demo1.m: ένα script το οποίο παράγει τα διαγράμματα 2) έως 11) και καλείται χωρίς εξωτερικά ορίσματα από το τερματικό της Octave

- demo2.m: ένα script το οποίο παράγει τα διαγράμματα 12) έως 15) και καλείται χωρίς εξωτερικά ορίσματα από το τερματικό της Octave
- bispeci.m: μία τροποποιημένη εκδοχή της συνάρτησης bispeci() από το “Higher Order Spectral Analysis Toolbox” της MATLAB
- bispecd.m: μία τροποποιημένη εκδοχή της συνάρτησης bispecd() από το “Higher Order Spectral Analysis Toolbox” της MATLAB