

# Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

Εργασία 3η: Εκτίμηση Παραμέτρων Συστήματος Κινούμενου Μέσου  
Όρου με Χρήση Στατιστικής Ανώτερης Τάξης σε Προγραμματιστικό  
Περιβάλλον Octave/Matlab

Ονοματεπώνυμο: Χριστόδουλος Μιχαηλίδης

Διεύθυνση Ηλεκτρονικού Ταχυδρομείου: [chrdimmic@ece.auth.gr](mailto:chrdimmic@ece.auth.gr)

Ημερομηνία: 21 Ιουλίου 2022

<b>Εκφώνηση Εργασίας</b>	<b>3</b>
<b>Κατασκευή του σήματος εισόδου και του συστήματος κινούμενου μέσου όρου</b>	<b>5</b>
<b>Εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος</b>	<b>6</b>
<b>Επίδραση του λευκού προσθετικού θορύβου στην ποιότητα της ανακατασκευής</b>	<b>8</b>

## Εκφώνηση Εργασίας

### Εργασία 3<sup>η</sup>

#### VALIDITY CHECK OF GIANNAKIS' FORMULA!

Construct a real discrete signal  $x[k], k = 1, 2, \dots, N = 2048$ , which is derived as the output of a MA- $q$  process with coefficients of  $[1.0, 0.93, 0.85, 0.72, 0.59, -0.10]$ , driven by white non-Gaussian noise  $v[k]$ , which is derived from an exponential distribution with mean value of 1 (in Matlab,  $v = \text{exprnd}(1, [1, 2048])$ ). When you construct the signals  $x[k]$  and  $v[k]$  save them to use them throughout.

1. Justify the non-Gaussian character of input  $v[k]$  by calculating its skewness  $\gamma_3^v$  using the following equation:

$$\gamma_3^v = \frac{\sum_{i=1}^N (v(i) - \hat{m}_v)^3}{(N-1)\hat{\sigma}_v^3},$$

where  $\hat{m}_v$  and  $\hat{\sigma}_v$  denote the estimated from the data mean and standard deviation, respectively.

2. Estimate and plot the 3<sup>rd</sup>-order cumulants of  $x[k]$ ,  $c_3^x(\tau_1, \tau_2)$  using the indirect method with  $K = 32, M = 64, L_3 = 20$  [that is  $(-\tau_1:0:\tau_1) = (-20:0:20), (-\tau_2:0:\tau_2) = (-20:0:20)$ ].

3. Use the estimated  $c_3^x(\tau_1, \tau_2)$  to estimate the impulse response  $\hat{h}[k]$  of the MA system using the Giannakis' formula, i.e.,

$$\hat{h}[k] = \frac{c_3^x(q, k)}{c_3^x(q, 0)}, k = 0, 1, 2, \dots, q,$$

$$\hat{h}[k] = 0, k > q.$$

4. Estimate the impulse response of the MA system using the Giannakis' formula, yet considering:
- Sub-estimation of the order  $q$ , that is,  $\hat{h}_{sub}[k]$ : MA- $q_{sub}$ , where  $q_{sub} = q - 2$ .
  - Sup-estimation of the order  $q$ , that is,  $\hat{h}_{sup}[k]$ : MA- $q_{sup}$ , where  $q_{sup} = q + 3$ .

5. Estimate the MA- $q$  system output  $x_{est}[k]$ , using the convolution between the input  $v[k]$  and the estimated impulse response from Step 3, i.e.,  $x_{est}[k] = v[k] * \hat{h}[k]$  and plot in the same figure the original  $x[k]$  (blue color) and the estimated  $x_{est}[k]$  (red color; keep only the first  $N$  samples). Find the normalized root mean square error (NRMSE) using the formula

$$NRMSE = \frac{RMSE}{\max(x[k]) - \min(x[k])}, \text{ with}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (x_{est}[k] - x[k])^2}{N}}$$

Comment upon the findings.

6. Repeat Step 5, for the case of  $x_{sub}[k] = v[k] * \hat{h}_{sub}[k]$  and  $x_{sup}[k] = v[k] * \hat{h}_{sup}[k]$ .

Comment upon the findings and compare with the results of Step 5.

7. Consider that we add a noise source of white Gaussian noise at the output of the system, producing a variation in the signal-to-noise-ratio (SNR) of  $[30: -5: -5]$ dB, i.e.,  $y_i[k] = x[k] + n_i[k]$ ,  $i = 1:8$ . Repeat Steps 2, 3 and 5, but instead of  $x[k]$  use the noise contaminated output  $y_i[k]$  for each  $i$ th given level of SNR (you can easily create the contaminate signal by using the `awgn.m` function of Matlab ( $y = \text{awgn}(x, \text{snr}, 'measured')$ ) and simply changing each time the given SNR). Make a plot of the NRMSE error in the estimation of  $y_i[k]$  versus the SNR range. Comment upon your results.

8. (optional) Instead of using just one realization of the input and output data of MA- $q$  system, you could repeat the whole process 50-100 times and work with the mean values of your results (that is mean NRMSE) to increase the viability and generalization of your conclusions about the Giannakis' formula.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η εκτίμηση των παραμέτρων ενός συστήματος κινούμενου μέσου όρου χρησιμοποιώντας στατιστική ανώτερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις του Γιαννάκη οι οποίες μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε τις

παραμέτρους του συστήματος γνωρίζοντας μόνο την έξοδο αυτού, αρκεί η στοχαστική διαδικασία στην είσοδο του συστήματος να είναι μη Γκαουσιανή.

## Κατασκευή του σήματος εισόδου και του συστήματος κινούμενου μέσου όρου

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας χρησιμοποιήθηκε ένα σύστημα κινούμενου μέσου όρου το οποίο παράγει μία έξοδο  $x[k]$  από μία είσοδο  $v[k]$  ως εξής:

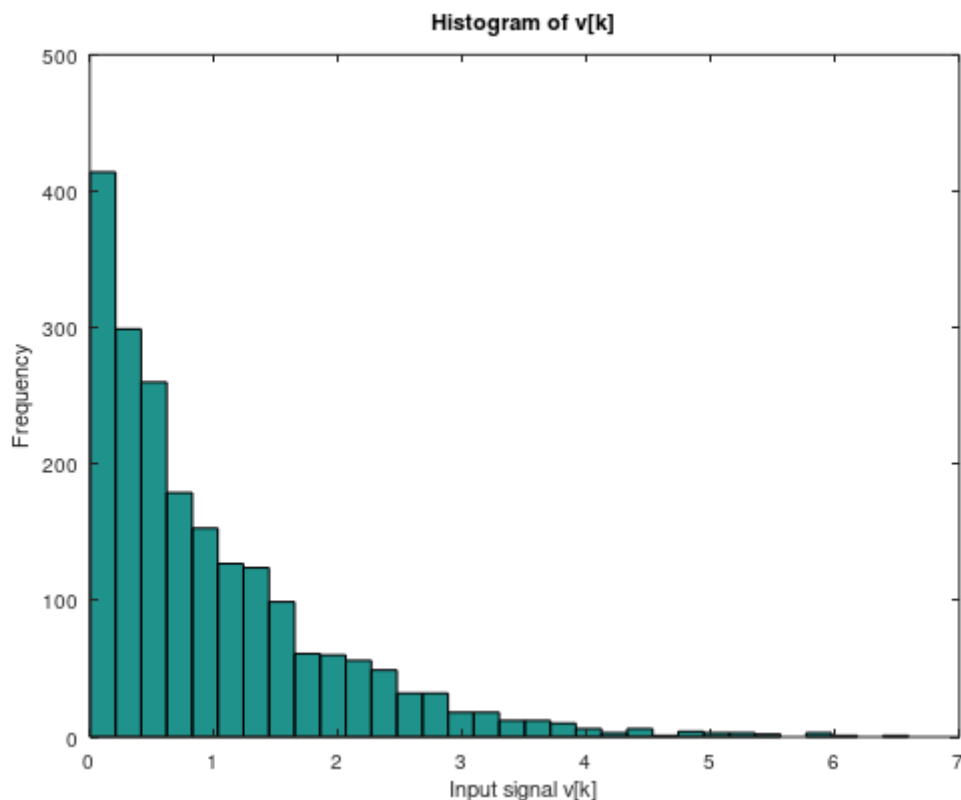
$$x[k] = h_0 v[k] + h_1 v[k-1] + h_2 v[k-2] + h_3 v[k-3] + h_4 v[k-4] + h_5 v[k-5]$$

όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση:

- η  $v[k]$  είναι μία στοχαστική διαδικασία εκθετικού θορύβου με παράμετρο  $\lambda=1$  και με μήκος 2048 δείγματα.
- $h_0 = 1.0$ ,  $h_1 = 0.93$ ,  $h_2 = 0.85$ ,  $h_3 = 0.72$ ,  $h_4 = 0.59$ ,  $h_5 = -0.10$

Επειδή οι εξισώσεις του Γιαννάκη απαιτούν η είσοδος του συστήματος να είναι μη Γκαουσιανή, υπολογίζουμε αρχικά την λοξότητα της στοχαστικής διαδικασίας  $v[k]$  και την βρίσκουμε ίση με  $\gamma = 1.719$ . Επειδή η λοξότητα είναι μη μηδενική, η  $v[k]$  δε μπορεί να είναι Γκαουσιανή.

Επιπλέον δίνεται και το ιστόγραμμα της  $v$ , όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι η κατανομή δεν είναι συμμετρική:



Διάγραμμα 1) Η κατανομή της εισόδου  $v[k]$

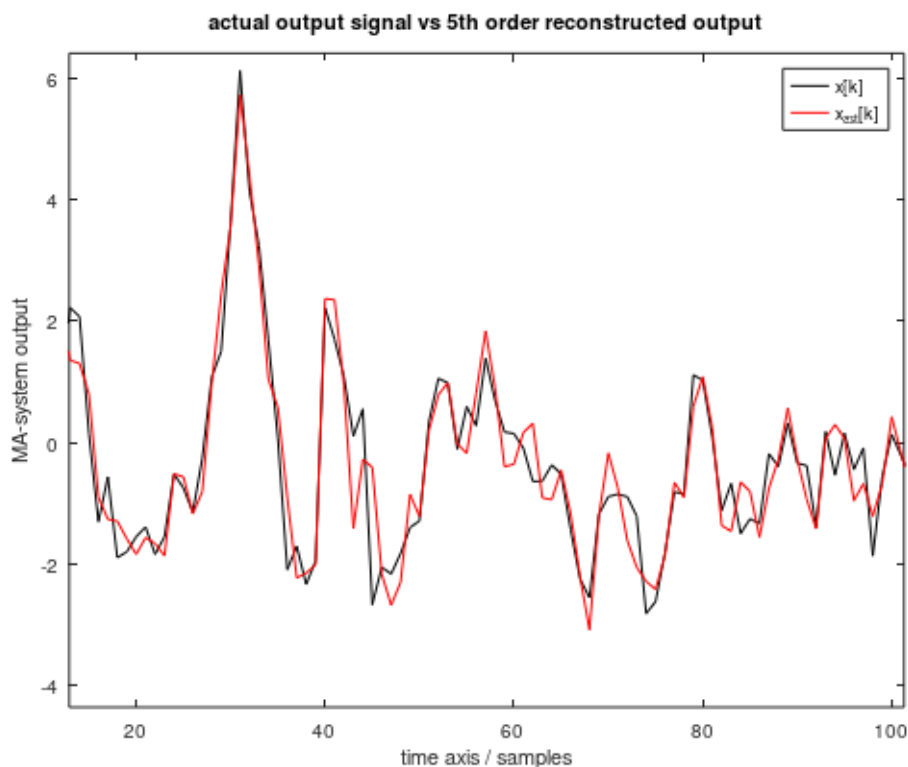
## Εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος

Σε πρώτη φάση χρησιμοποιούμε της εξισώσεις του Γιαννάκη για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους θεωρώντας γνωστή την τάξη ( $q=5$ ). Τελικά, προκύπτει ότι:  
 $h_0 = 1.00$ ,  $h_1 = 1.12$ ,  $h_2 = 0.88$ ,  $h_3 = 0.42$ ,  $h_4 = 0.38$ ,  $h_5 = 0.36$

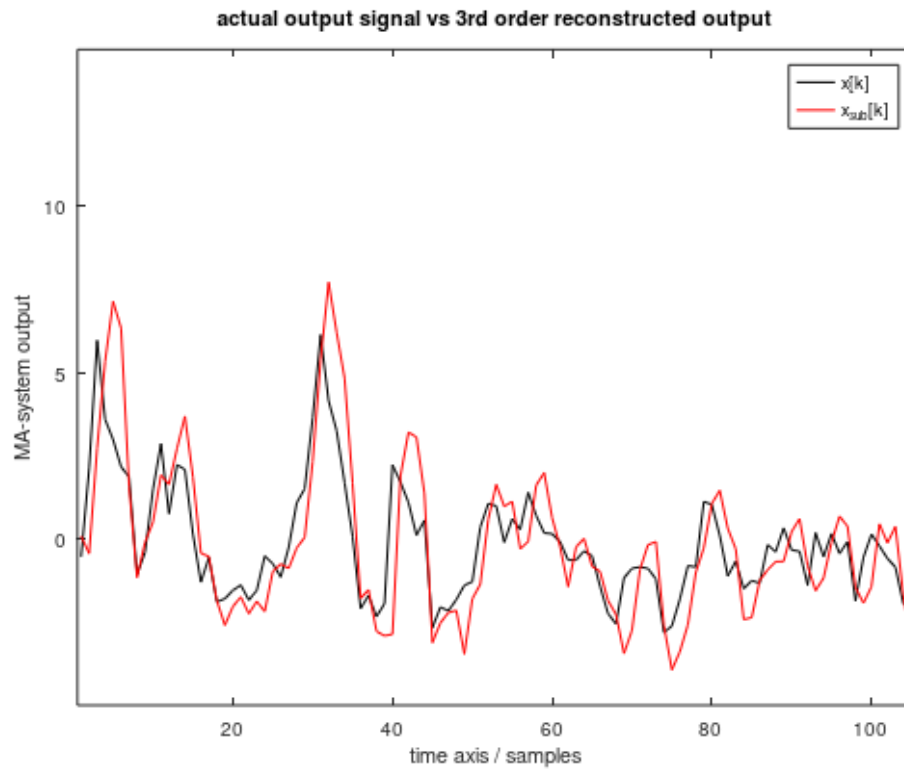
Στη συνέχεια εκτιμούμε τις παραμέτρους του συστήματος θεωρώντας ότι η τάξη του συστήματος είναι μικρότερη από την πραγματική ( $q=3$ ). Οι εκτιμήσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:  
 $h_0 = 1.00$ ,  $h_1 = 1.36$ ,  $h_2 = 1.44$ ,  $h_3 = 1.27$

Τέλος, θεωρούμε ότι η τάξη του συστήματος είναι μεγαλύτερη από την πραγματική ( $q=8$ ):  
 $h_0 = 1.00$ ,  $h_1 = 1.36$ ,  $h_2 = 1.44$ ,  $h_3 = 1.27$ ,  $h_4 = 1.33$ ,  $h_5 = 1.43$ ,  $h_6 = 1.28$ ,  $h_7 = 1.01$ ,  $h_8 = 1.16$

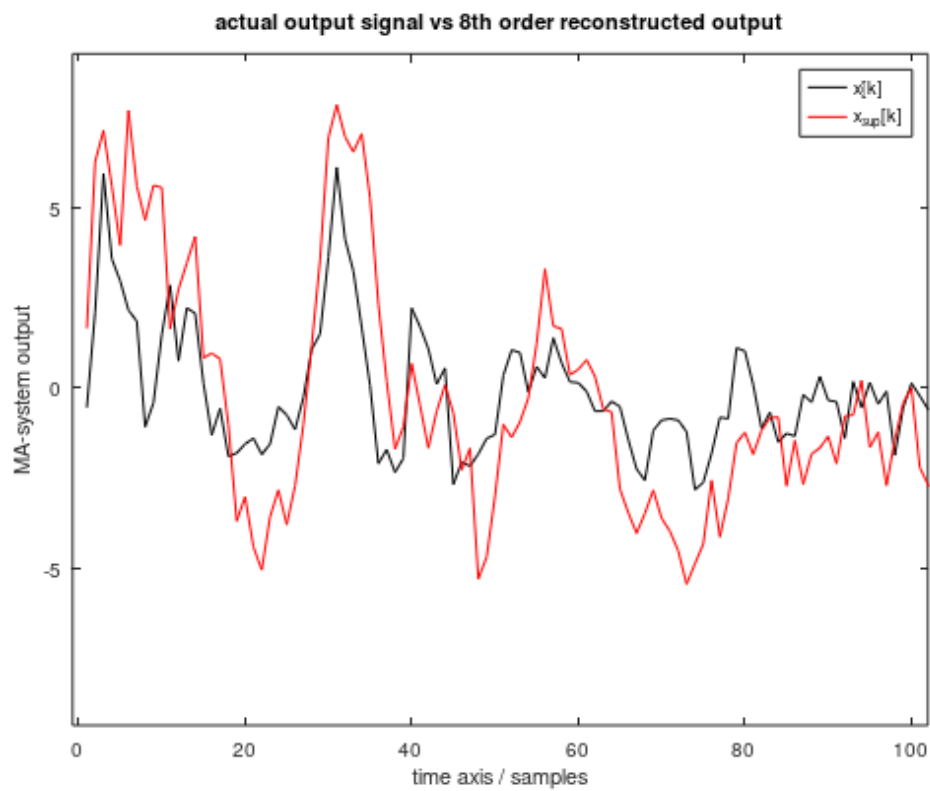
Εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι σε καμία περίπτωση οι εκτιμήσεις των παραμέτρων δεν προσεγγίζουν τις πραγματικές. Στη συνέχεια συγκρίνουμε την έξοδο του πραγματικού συστήματος με την έξοδο που παίρνουμε αν εφαρμόσουμε την ίδια είσοδο στα τρία διαφορετικά συστήματα που έδωσαν οι τρεις προηγούμενες εκτιμήσεις:



Διάγραμμα 2) Με μαύρη γραμμή η πραγματική έξοδος. Με κόκκινη η ανακατασκευή 5ης τάξης



Διάγραμμα 3) Με μαύρη γραμμή η πραγματική έξοδος. Με κόκκινη η ανακατασκευή 3ης τάξης.



Διάγραμμα 4) Με μαύρη γραμμή η πραγματική έξοδος. Με κόκκινη γραμμή η ανακατασκευή 8ης τάξης

Παρατηρούμε λοιπόν ότι σε γενικές γραμμές η εκτίμηση της εξόδου ακολουθεί την πραγματική έξοδο αρκετά καλά. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση της ανακατασκευής 8ης τάξης όπου φαίνεται ότι η εκτίμηση της εξόδου απέχει αρκετά από την πραγματική.

Προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί η ποιότητα της ανακατασκευής χρησιμοποιούνται οι δείκτες RMSE και NRMSE οι οποίοι παίρνουν μικρές τιμές, όταν το σφάλμα εκτίμησης είναι μικρό.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

τάξη ανακατασκευής (q)	RMSE	NRMSE
3η τάξη	1.455151	0.103188
5η τάξη	0.605729	0.042954
8η τάξη	2.563026	0.181750

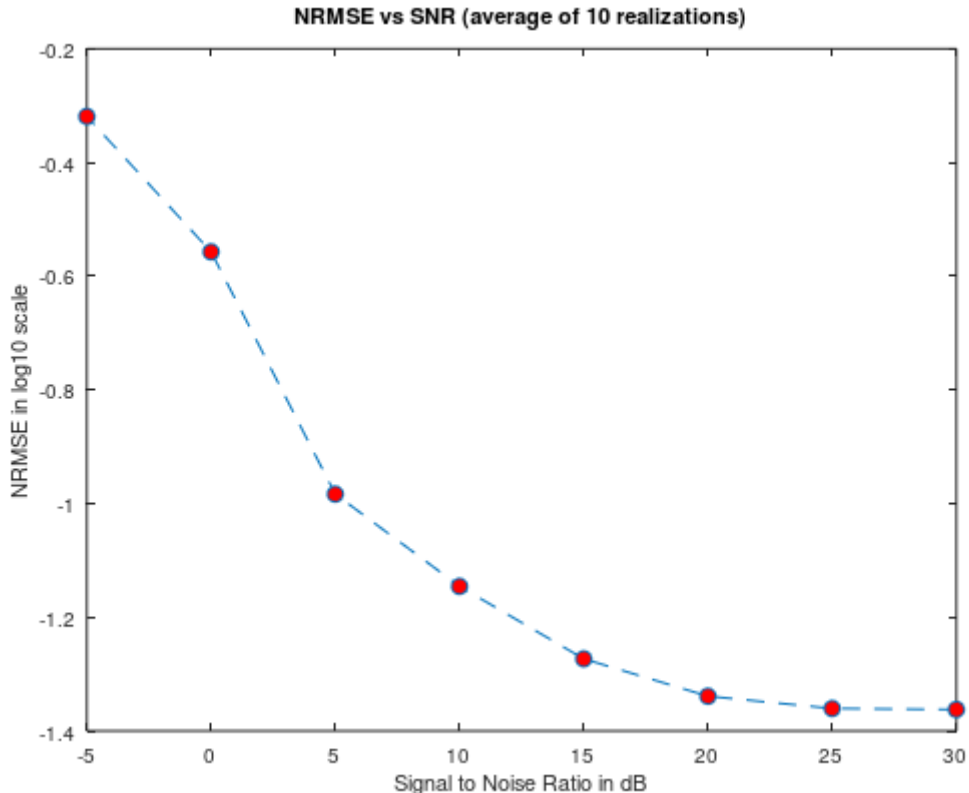
Παρατηρούμε ότι οι δείκτες σφάλματος ελαχιστοποιούνται όταν πραγματοποιείται ανακατασκευή 5ης τάξης, δηλαδή όταν η τάξη της ανακατασκευής ταυτίζεται με την τάξη του πραγματικού συστήματος. Αντιθέτως, οι δείκτες σφάλματος μεγιστοποιούνται όταν η τάξη της ανακατασκευής είναι μεγαλύτερη ( $q=8$ ) από την πραγματική. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι εμφανίζονται φαινόμενα υπο-εκμάθησης (underfit) και υπερ-εκμάθησης (overfit).

Αξίζει να σημειωθεί πάντως ότι οι εξισώσεις του Γιαννάκη είναι ιδιαίτερα επιρρεπείς στον θόρυβο εκτίμησης του σωρείτη τρίτης τάξης. Κατά τη διάρκεια των δοκιμών παρατηρήθηκε ότι για ορισμένες εισόδους  $v[k]$  η ανακατασκευή της εξόδου αποτύγχανε πλήρως.

## Επίδραση του λευκού προσθετικού θορύβου στην ποιότητα της ανακατασκευής

Στο τελευταίο πείραμα η έξοδος του συστήματος μολύνεται με λευκό προσθετικό θόρυβο. Στη συνέχεια οι εξισώσεις του Γιαννάκη και η ανακατασκευή της εξόδου υπολογίζεται από αυτό το θορυβώδες σήμα. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται 10 φορές για κάθε επίπεδο θορύβου και υπολογίζεται ένας μέσος όρος σε κάθε περίπτωση.





Διάγραμμα 8) Κανονικοποιημένο τετραγωνικό σφάλμα (σε λογαριθμική κλίμακα) vs SNR

Όπως είναι αναμενόμενο ο δείκτης NRMSE παίρνει μικρότερες τιμές, όταν το SNR (signal to noise ratio) είναι μεγάλο, δηλαδή όταν η ενέργεια του προσθετικού θορύβου είναι μικρή σε σύγκριση με την ενέργεια του σήματος εξόδου.

Σημείωμα για τον κώδικα που συνοδεύει την εργασία

Η γλώσσα που χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας είναι η Octave. Η Octave είναι μία γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου η οποία σε γενικές γραμμές είναι συμβατή με την MATLAB. Όλα τα διαγράμματα που παρουσιάζονται σε αυτή την εργασία προκύπτουν τρέχοντας τα scripts που συνοδεύουν αυτή την αναφορά. Επειδή υπάρχουν ορισμένες ασυμβατότητες ανάμεσα στην MATLAB και στην Octave, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί η έκδοση 7.1.0 της Octave για την εκτέλεση των scripts.

Ο κώδικας της εργασίας έχει αναρτηθεί σε ένα δημόσιο αποθετήριο στο Github το οποίο μπορείτε να το βρείτε από τον ακόλουθο σύνδεσμο:

<https://github.com/cmichailidis/ASPT-assignments>

Σε αυτό το αποθετήριο βρίσκεται και ο κώδικας για τις άλλες τρεις εργασίες του μαθήματος.

Ο κώδικας αυτής της εργασίας βρίσκεται στον φάκελο exercise3 και αποτελείται από τα εξής αρχεία:

- demo.m: ένα script επίδειξης το οποίο καλείται χωρίς εξωτερικά ορίσματα από το τερματικό της Octave
- cum3x.m: μια τροποποιημένη έκδοχή της συνάρτησης cum3x() του "Higher Order Spectral Analysis Toolbox" της MATLAB

- `data.mat`: ένα αρχείο το οποίο περιέχει το σήμα εισόδου  $v[k]$  για το οποίο οι εκτιμήσεις της εξίσωσης του Γιαννάκη είναι ικανοποιητικά καλές.