Wspólna praca domowa z Analizy 2

Gracjan Barski, album: 448189

May 15, 2024

Rozwiązanie:

Zakładam $d \geq 2$. Oznaczmy $S_i = \sup\{|\partial_i f(x)| \mid x \in D\}$
Każde S_i istnieje, ponieważ funkcje pochodne cząstkowe są ograniczone.

Robimy indukcję po d. Dla $d = 2$ mamy:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| \\ &= |f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2) + f(y_1, x_2) - f(y_1, y_2)| \\ &\leq |f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2)| + |f(y_1, x_2) - f(y_1, y_2)|\end{aligned}$$

Z nierówności trójkąta. Teraz z twierdzeniu o wartości średniej mamy, że istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie że:

$$\frac{f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2)}{x_1 - y_1} = \partial_1 f(c, x_2) \leq S_1$$

Z tego wnioskujemy

$$f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2) \leq S_1 |x_1 - y_1|$$

Analogicznie dla S_2. Więc mamy:

$$|f(x) - f(y)| \leq S_1|x_1 - y_1| + S_2|x_2 - y_2|$$

Co z nierówności Cauchy'ego-Schwarza daje

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{S_1^2 + S_2^2} \cdot \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} \cdot ||x - y|| = M \cdot ||x - y||$$

Dla pewnego $M \in \mathbb{R}$.

Hipoteza indukcyjna: Zakładam, że zachodzi:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x_1, \ldots, x_k) - f(y_1, \ldots, y_k)| \leq M \cdot ||x - y||$$

Krok: $k \to k + 1$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) - f(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1})| \\ &= |f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) - f(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}) + f(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}) - f(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1})| \\ &\leq |f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) - f(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1})| + |f(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}) - f(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1})|\end{aligned}$$

$|f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) - f(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1})| \leq \partial_{k+1} f(x_1, \ldots, c) \cdot |x_{k+1} - y_{k+1}| \leq S_{k+1} \cdot |x_{k+1} - y_{k+1}|$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ (Z twierdzenia o wartości średniej, jak wyżej).

$|f(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}) - f(y_1, \dots, y_k, y_{k+1})|$ możemy traktować jak różnicę funkcji k zmiennych z jednym stałym parametrem. A z założenia indukcyjnego, wiemy, że takie wyrażenie jest ograniczone przez

$$M \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^2}$$

Więc mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq S_{k+1} \cdot |x_{k+1} - y_{k+1}| + M \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{S_{k+1}^2 + M^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} |x_i - y_i|^2} \leq M' \cdot ||x - y||$$

Gdzie druga nierówność wynika znowu z nierówności Cauchy'ego-Schwarza, a $M' \in \mathbb{R}$. $\square$