Pmat - praca domowa z dnia 4.12.2023

Gracjan Barski, album: 448189

December 4, 2023

W poniższych rozumowaniach moc zbioru oznaczam modułami, to znaczy moc zbioru A to $|A|$, oraz zaliczam 0 do liczb naturalnych.

Zadanie 323:

1) Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_r$?

   Najpierw zauważmy, że $\varnothing\ r\ \varnothing$ oraz że $[\varnothing]_r = \{\varnothing\}$ ponieważ zbiór pusty to jedyny podzbiór $\mathbb{N}$ który nie posiada elementu najmniejszego. Więc (jak się okaże poniżej) jest to jedyna klasa abstrakcji która nie jest jednoznacznie określona przez liczbę naturalną.

   Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{N} \to (\mathcal{P}(\mathbb{N})/_r - \{[\varnothing]_r\})$ określoną wzorem $f(n) = [\{n\}]_r$. Przeciwdziedzina może wydawać się dziwna, ale ustalenie takiej jest zasadne, ponieważ $[\varnothing]_r$ to jedyna klasa abstrakcji której nie otrzymamy z takiej funkcji. Wykażmy własności tej funkcji:

   (a) Iniektywność: Weźmy takie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ że $n_1 \neq n_2$ oraz rozważmy wartości $f(n_1)$ i $f(n_2)$. Mamy:

   $$f(n_1) = [\{n_1\}]_r$$
   $$f(n_2) = [\{n_2\}]_r$$

   Relacja r jest relacją równoważności (w szczególności jest zwrotna), więc do $f(n_1)$ należy zbiór $\{n_1\}$. Wiemy że $f(k)$ to zbiór wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ takich że ich minimum to k. Łącząc to z warunkiem $n_1 \neq n_2$ wnioskujemy że $\{n_1\} \notin f(n_2)$, ponieważ minimum zbioru $\{n_1\}$ to n_1, więc z definicji nierówności zbiorów istotnie $f(n_1) \neq f(n_2)$.

   (b) Surjektywność: Weźmy dowolną klasę abstrakcji $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})/_r$. Warto zaznaczyć, że X jest rodziną podzbiorów $\mathbb{N}$ ($X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$). Wszystkie elementy w X mają taką własność, że ich minimum to pewna ustalona liczba $a_0 \in \mathbb{N}$, czyli $\forall_{x \in X}\ \min x = a_0$. Wnioskujemy: $f(a_0) = X$. Więc istotnie f jest surjekcją.

   Więc f jest bijekcją, a co za tym idzie moce zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_r - \{[\varnothing]_r\}$ są takie same. Zauważmy, że $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_r = (\mathcal{P}(\mathbb{N})/_r - \{[\varnothing]_r\}) \cup \{[\varnothing]_r\}$ Więc mamy $|\mathcal{P}(\mathbb{N})/_r| = |\mathbb{N}| + 1$ (ponieważ zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_r - \{[\varnothing]_r\}$ nie zawiera $[\varnothing]_r$). Z tego i z operacjach na liczbach kardynalnych otrzymujemy: $|\mathcal{P}(\mathbb{N})/_r| = \aleph_0$. □

2) Jakiej mocy są poszczególne klasy abstrakcji? Z rozumowania powyżej wiemy już że $|[\varnothing]_r| = 1$. Każda pozostała klasa abstrakcji jest unikalnie zdefiniowana przez liczbę naturalną n (z podpunktu (1)). Więc rozważmy funkcję $f_n\colon (\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}) \to [\{n\}]_r$ dla $n \in \mathbb{N}$ opisaną wzorem:

   $$f_n(A) = \{a + n + 1 \mid a \in A\} \cup \{n\}$$

   Ta funkcja jest iniekcją: Weźmy dowolne $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takie że $A_1 \neq A_2$. Jeśli do każdego elementu z tych zbiorów dodam $n+1$, to jest to po prostu przesunięcie wartości w tych zbiorach i one nadal nie są równe. Ponadto żaden z tych zbiorów nie zawiera elementu n, ponieważ do każdego elementu dodaliśmy $n+1$, a najmniejszy możliwy element w pierwotnych zbiorach A_1, A_2 to 0, więc możemy dostać co najwyżej $n+1$. Z tego wnioskujemy że jeśli do obu zbiorów "dorzucę" n to nadal nie będą równe. Więc f_n jest iniekcją.

   Z tego wnioskuję $|[\{n\}]_r| \geq \mathfrak{c}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ (ponieważ $|(\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\})| = \mathfrak{c}$).

   Teraz rozważę funkcję $g_n\colon [\{n\}]_r \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ opisaną wzorem $g_n(A) = A$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oczywistym jest, że jest to iniekcja (ponieważ każda identyczność to iniekcja), więc otrzymuję $|[\{n\}]_r| \leq \mathfrak{c}$.

Z twierdzenia Cantora - Bernesteina $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; |[\{n\}]_r| = \mathfrak{c}$. $\square$