GAL - praca domowa z dnia 9.11.2023

Gracjan Barski, indeks: 448189

November 15, 2023

Dla danej liczby naturalnej n, wyznacz wszystkie macierze $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, takie że $A \cdot B = B \cdot A$ dla każdego $B \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Rozwiązanie:

Jeśli przyjmiemy że $0 \in \mathbb{N}$, to trzeba taki przypadek rozważyć. Weźmy $n = 0$. Trzeba znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}^{0,0}$, która dla każdego $B \in \mathbb{R}^{0,0}$ ma własność $AB = BA$. Warto zaznaczyć, że istnieje tylko jedna macierz w $\mathbb{R}^{0,0}$, a mianowicie macierz pusta, która reprezentuje przekształcenie liniowe ze zbioru pustego w zbiór pusty. Pomnożenie dwóch takich macierzy daje przekształcenie ze zbioru pustego do zbioru pustego do zbioru pustego, więc każde takie przekształcenie będzie spełniało żądaną równość. Więc jeśli $A = [\,]$ (macierz pusta) to istotnie $AB = BA$ dla każdego $B \in \mathbb{R}^{0,0}$

Teraz załóżmy $n > 0$. Weźmy takie $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, które spełnia warunek zadania. Najpierw pokażę, że A jest macierzą diagonalną (tzn. taką której wyrazy poza główną przekątną są zerowe).
Rozpatrzmy taką macierz $X_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$, która charakteryzuje się tym że jej element $x_{i,j}$ jest równy 1, a pozostałe elementy są równe zero. Z założenia mamy $\forall_{1 \leq i,j \leq n} A \cdot X_{i,j} = X_{i,j} \cdot A$. Czyli musi zachodzić $\forall_{1 \leq i,j,k,l \leq n} (A \cdot X_{i,j})_{k,l} = (X_{i,j} \cdot A)_{k,l}$. Na razie weźmy dowolne $i \in \mathbb{N}$ takie że $1 \leq i \leq n$ oraz ustalmy $j = i$. Rozpatrzmy przypadek gdzie $k = i$
Z lewej mamy:

$$L = (A \cdot X_{i,i})_{i,l} = \sum_{s=1}^{n} A_{i,s} \cdot (X_{i,i})_{s,l} = \begin{cases} A_{i,i}; & i = l \\ 0; & i \neq l \end{cases}$$

A z prawej:

$$P = (X_{i,i} \cdot A)_{i,l} = \sum_{s=1}^{n} (X_{i,i})_{i,s} \cdot A_{s,l} = A_{i,l}$$

Z tego że $L = P$, wnioskujemy że gdy $i \neq j$, wtedy $A_{i,j} = 0$, w przeciwnym wypadku może być niezerowe. To oznacza że A jest macierzą diagonalną. Teraz wystarczy dowieść, że wszystkie elementy z diagonali A są takie same.

Znowu wykorzystamy tą samą macierz $X_{i,j}$. Weźmy dowolne $i, j \in \mathbb{N}$, takie że $1 \leq i, j \leq n$.
Mamy z założenia: $A \cdot X_{i,j} = X_{i,j} \cdot A$. Więc $\forall_{1 \leq k,l \leq n} (A \cdot X_{i,j})_{k,l} = (X_{i,j} \cdot A)_{k,l}$. Rozważmy takie k, l, że $k = i$, $l = j$:

$$L = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot (X_{i,j})_{k,j} = A_{i,i}$$

Oraz:

$$P = \sum_{k=1}^{n} (X_{i,j})_{i,k} \cdot A_{k,j} = A_{j,j}$$

Te równości wynikają ze struktury macierzy $X_{i,j}$. Z tego wynika, że $A_{i,i} = A_{j,j}$ dla każdego $1 \leq i, j \leq n$, więc istotnie wszystkie wyrazy A z diagonali są równe, a to oznacza, że $A = c \cdot \mathrm{I}$, gdzie $c \in R$.