GAL - praca domowa z dnia 21.11.2023

Gracjan Barski, album: 448189

November 27, 2023

W przestrzeni liniowej $f\colon (-2,2) \to \mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ rozważamy funkcje

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x-2}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x+2},$$
$$f_5(x) = \frac{1}{x^2-4}, \quad f_6(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

Wyznacz bazy podprzestrzeni liniowych

$$U = \operatorname{span}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$$

oraz

$$V = \{f \in U \mid f(-1) - f(1) = f(0) = 0\}.$$

Rozwiązanie:

Najpierw baza U. Trzeba sprawdzić czy podane funkcje są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$. Najpierw zauważę, że $f_3 + f_4 = 2 \cdot f_6$, czyli funkcje f_3, f_4, f_6 są liniowo zależne. Więc mogę usunąć f_6 z szukanej bazy. Następnie: $f_3 - f_4 = 4 \cdot f_5$, więc analogicznie usuwam f_5 z szukanej bazy. Teraz wystarczy pokazać, że f_1, f_2, f_3, f_4 są liniowo niezależne.

Rozważmy kombinację liniową i przyrównajmy do 0 (gdzie 0 to wektor zerowy, to znaczy funkcja $g\colon (-2,2) \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $g(x) = 0$):

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \frac{1}{x-2} + \alpha_4 \frac{1}{x+2} = 0$$

Teraz wspólny mianownik po lewej ...

$$\frac{\alpha_1(x^2-4) + \alpha_2(x^3-4x) + (\alpha_3+\alpha_4)x + 2\alpha_3 + 2\alpha_4}{x^2-4} = 0$$

Więc licznik musi być równy 0. Przekształcając licznik mamy:

$$\alpha_2 x^3 + \alpha_1 x^2 + (\alpha_3 + \alpha_4 - 4\alpha_2)x + (2\alpha_3 - 2\alpha_4 - 4\alpha_1) = 0$$

Wiadomo że współczynniki jednoznacznie wyznaczają wielomian, więc mamy:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 - 4\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_3 - 2\alpha_4 - 4\alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

Z tego wnioskujemy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Więc faktycznie układ funkcji f_1, f_2, f_3, f_4 jest liniowo niezależny. Z wykładu wiadomo że jeśli układ rozpinający daną przestrzeń jest minimalnym układem liniowo niezależnym w tej przestrzeni, to układ jest bazą tej przestrzeni, więc wnioskujemy że jest to baza U.

Teraz baza V.

Wiemy że V ma być podprzestrzenią liniową U, więc wszystko co należy do V, należy też do U. Stąd:

$$g \in V \implies g = \alpha_1 + \alpha_2 x + \frac{\alpha_3}{x-2} + \frac{\alpha_4}{x+2}$$

Gdzie współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ to pewne elementy $\mathbb{R}$. Wiemy też że musi zachodzić:

$$g(-1) = g(1) \wedge g(0) = 0$$

Podstawiając argumenty do funkcji, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_4}{2} & = 0 \\ 2\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{3} - \frac{2\alpha_4}{3} & = 0 \end{cases}$$

Zapisując to w postaci macierzy mamy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Otrzymujemy rozwiązania:

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_4 \\ \frac{1}{3}\alpha_3 + \frac{1}{3}\alpha_4 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha_3 + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_4$$

Gdzie α_3, α_4 to dowolne elementy z $\mathbb{R}$. Wiadomo że do V należą wszystkie funkcje postaci:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix} \cdot \vec{\alpha}$$

A bazą przestrzeni rozwiązań $\vec{\alpha}$ jest $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ (po przeskalowaniu). Więc bazą przestrzeni V jest $\{g_1, g_2\}$, gdzie:

$$g_1 = 3 + 2x + \frac{6}{x-2}$$
$$g_2 = -3 + 2x + \frac{6}{x+2}$$

$\square$