Wspólna praca domowa z Analizy 2

Gracjan Barski, album: 448189

23 March, 2024

Rozwiązanie:

Warunek z zadania przekształcamy do postaci:

$$\exists_{c\in\mathbb{R}}\,\forall_{x,y\in D}\ \frac{|f(x)-f(y)|}{||x-y||}\leq c$$

Przy założeniu $x\neq y$. Jeśli $x=y$ to mamy $0\leq 0$ i jest OK.

Trzeba pokazać, że zbiór

$$X=\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{||x-y||}: x,y\in D\wedge x\neq y\right\}$$

jest ograniczony z góry. Wnioskujemy, że jeśli wszystkie pochodne cząstkowe istnieją we wszystkich punktach D i są ograniczone, to f jest ciągła. Ponadto, D jest zbiorem zwartym, więc f jest również ograniczona. Więc dla każdego $x,y\in D$, $|f(x)-f(y)|$ jest wartością skończoną, tak samo jak $||x-y||$.

Teraz wystarczy rozważyć co się dzieje, jeśli (WLOG) $y\to x$.

Rozważmy wektor $v=y-x$. Wtedy badane wyrażenie można zapisać:

$$\frac{|f(x+v)-f(x)|}{||v||}$$

Interesuje nas granica

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+hv)-f(x)|}{h||v||}$$

Czyli $\partial_{\vec{v}}f(x)$. Wiemy, że jeśli funkcja posiada w danym punkcie pochodne cząstkowe, to jej pochodna kierunkowa wyraża się wzorem:

$$\nabla f(x)\cdot\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

Gdzie $\cdot$ oznacza standardowy iloczyn skalarny. Jako że każda z pochodnych cząstkowych w $\nabla f(x)$ istnieje, to powyższy iloczyn skalarny ma skończoną wartość. Więc pochodne kierunkowe dla każdego $x\in D$ w dowolnym kierunku istnieją i są skończonymi wartościami. Więc istotnie X jest ograniczony, co dowodzi tezy. $\square$