Kolokwium domowe z Analizy 2

Gracjan Barski, album: 448189

May 25, 2024

Zad 1:

Wiemy, że $Dg(0)$ istnieje wtw dla każdego $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ zachodzi:

$$g(\vec{v}) - g(0) = Dg(0)(\vec{v}) + h_0(\vec{v})$$

Gdzie $\lim\limits_{||v||\to 0} \dfrac{h_0(\vec{v})}{||v||} \to 0$. Wystarczy wyznaczyć α dla których ta granica jest równa 0. Oznaczmy $\vec{v} = [u, v]$.

$$g(\vec{v}) - g(0) = 7u + 11v + d(u)(|u|^2 + |v|^2)^\alpha$$

Teraz mamy dwie opcje:

(a) $d(u) = 0$

Otrzymujemy $Dg(0)(\vec{v}) = 7u + 11v$ oraz $h_0(\vec{v}) = 0$, które spełnia żądany warunek.

(b) $d(u) = 1$

Z jedyności różniczki otrzymujemy $Dg(0)(\vec{v}) = 7u + 11v$ oraz $h_0(\vec{v}) = (|u|^2 + |v|^2)^\alpha$. Rozważmy poszukiwaną granicę:

$$L = \lim_{||v||\to 0} \frac{h_0(\vec{v})}{||v||} = \lim_{||v||\to 0} \frac{(|u|^2 + |v|^2)^\alpha}{\sqrt{|u|^2 + |v|^2}} = \lim_{||v||\to 0} (|u|^2 + |v|^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

Rozważmy różne przedziały dla α:

1° $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$

$$L = \left(\frac{1}{|u|^2 + |v|^2}\right)^\beta$$

Dla pewnego $\beta \in (0; \frac{1}{2})$, co daje nam $L = \infty$. Wnioskujemy, że dla tych wartości α $Dg(0)$ nie istnieje.

2° $\alpha = \frac{1}{2}$

Wtedy $L = \lim_{||v||\to 0}(|u|^2 + |v|^2)^0 = 1$. Więc tutaj $Dg(0)$ też nie istnieje.

3° $\alpha > \frac{1}{2}$

Wtedy $L = \lim_{||v||\to 0}(|u|^2 + |v|^2)^\beta$ dla pewnego $\beta \in (0; \infty)$. Oczywiście $L = 0$, więc $Dg(0)$ istnieje i $Dg(0)(\vec{v}) = 7u + 11v$

$Dg(0)(\vec{v})$ ma istnieć dla dowolnego $\vec{v}$, zwłaszcza dla takiego gdy $d(u) = 1$, więc przedział z podpunktu (b) jest ostateczną odpowiedzią. □

Zad 2:

M jest zbiorem zwartym, więc f osiąga swoje kresy z twierdzenia Weierstrassa.
Przekształćmy warunki na M:

$$y = -x - y$$
$$z^2 + zx + x^2 = \frac{1}{2}$$

Traktujemy x jako parametr i obliczamy Δ:

$$\Delta = -3x^2 + 2$$

Wnioskujemy $x \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ oraz $z = \dfrac{-x \pm \sqrt{-3x^2+2}}{2}$.
Teraz możemy potraktować f jako funkcję jednej zmiennej x. Mamy dwa przypadki:

(a) $f(x,y,z) = 2x + z = \dfrac{3x + \sqrt{-3x^2+2}}{2} = g(x)$. Szukamy przedziałów monotoniczności pochodnej:

$$g'(x) \geq 0$$
$$\frac{3}{2} - \frac{3x}{2\sqrt{-3x^2+2}} \geq 0$$
$$\frac{x}{\sqrt{-3x^2+2}} \leq 1$$
$$x \leq \sqrt{-3x^2+2}$$

Dla $x \leq 0$ nierówność jest spełniona, teraz zakładamy $x > 0$ i podnosimy do kwadratu i otrzymujemy:

$$x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Otrzymujemy maksimum lokalne dla $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g(x_0) = \sqrt{2}$. Z warunku $x \geq y$ otrzymujemy $2x + z \geq 0$. Minimum lokalne będzie na skraju dziedziny, który trzeba będzie wyznaczyć z warunku $x \geq y$, czyli $2x + z \geq 0$:

$$3x + \sqrt{-3x^2+2} \geq 0$$

Dla $x \geq 0$ nierówność zachodzi, więc załóżmy $x < 0$.

$$\sqrt{3x^2+2} \geq -3x$$

Podnosimy do kwadratu:

$$x^2 \leq \frac{1}{6}$$

Więc $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. Szukamy najmniejszej wartości, którą jest $g\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0$.

(b) $f(x,y,z) = 2x + z = \dfrac{3x - \sqrt{-3x^2+2}}{2} = g(x)$

Analogiczne przekształcenia jak wyżej prowadzą do minimum lokalnego dla $x_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $f(x_0) = 0$ i maksimum lokalnego dla $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $f(x_1) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Wnioskujemy, że $\sup_M(f) = \sqrt{2}$ oraz $\inf_M(f) = 0$, te kresy są osiągalne.