Pmat - praca domowa z dnia 16.10.2023

Gracjan Barski

October 17, 2023

Zadanie 57:

Która z następujących równości zachodzi dla dowolnych rodzin $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

a) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$

Nie zachodzi, kontrprzykład:

Wiadomo, że rodziny indeksowane $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ to funkcje. W tym przypadku to funkcje postaci $\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$, gdzie elementy zbioru indeksowanego są typu $\mathcal{D}$. Weźmy takie funkcje $A(n)$, $B(n)$ że:

$$A(n) = \begin{cases} \{1\};\, n = 1 \\ \{2\};\, n = 2 \\ \varnothing;\, n > 2 \end{cases}$$

$$B(n) = \begin{cases} \{1\};\, n = 1 \\ \{2\};\, n = 2 \\ \varnothing;\, n > 2 \end{cases}$$

Wtedy lewa część równania przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} L &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\{1\} \times \{1\}, \{2\} \times \{2\}, \varnothing \times \varnothing, \ldots) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\{(1,1)\}, \{(2,2)\}, \varnothing, \ldots) \\ &= \{(1,1), (2,2)\} \end{aligned}$$

A prawa strona:

$$\begin{aligned} P &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\{1\}, \{2\}, \varnothing, \ldots\} \times \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\{1\}, \{2\}, \varnothing, \ldots\} \\ &= \{1,2\} \times \{1,2\} \\ &= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} \end{aligned}$$

Brak równości wynika jasno.

b) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$

Weźmy dowolne rodziny zbiorów: $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
Aby udowodnić równość, udowodnię inkluzję w obie strony:

($\supseteq$) Weźmy dowolną parę uporządkowaną $(a,b) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, z tego i z własności iloczynu kartezjańskiego mamy:

$$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \wedge b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Następnie z definicji:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a \in A_n \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}}\ b \in B_n$$

Nasz cel to wykazać, że $(a,b) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n)$. Jest to równoważne z:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ ((a,b) \in A_n \times B_n)$$

A to z kolei (z definicji iloczynu kartezjańskiego) jest równoważne z:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (a \in A_n \wedge b \in B_n)$$

Więc wystarczy pokazać, że prawdziwe jest:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a \in A_n \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}}\ b \in B_n \Longrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (a \in A_n \wedge b \in B_n)$$

Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a \in A_n$, oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $b \in B_n$, to można pogrupować te n-y i iterować po zbiorze liczb naturalnych wspólnie (gdyż n-y w obu przypadkach pochodzą z tego samego zbioru), wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $a \in A_n$ i $b \in B_n$, a to dowodzi implikacji.

($\subseteq$) Weźmy dowolną parę uporządkowaną $(a,b) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n)$, przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak wyżej, dostajemy warunek równoważny:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (a \in A_n \wedge b \in B_n)$$

Nasz cel to pokazać, że: $(a,b) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak wyżej, dostajemy warunek równoważny:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a \in A_n \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}}\ b \in B_n$$

Wystarczy dowieść implikacji:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (a \in A_n \wedge b \in B_n) \Longrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a \in A_n \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}}\ b \in B_n$$

Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a \in A_n$ i $b \in B_n$, to z definicji koniunkcji, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a \in A_n$. Analogicznie, też z definicji koniunkcji, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $b \in B_n$. To dowodzi powyższej implikacji.

Zostały udowodnione inkluzje w obie strony, a to z definicji równości zbiorów, oznacza, że są równe. $\square$