Zadanie 1 z Analizy Matematycznej dla Informatyków
czwartek, 9 XI — czwartek, 16 XI 2023
AUTOR ROZWIĄZANIA: GRACJAN BARSKI, INDEKS: 448189, GRUPA 2 **BEZ**

Znajdź granicę ciągu $a = \{a_n\}_{n\geq 1}$, lub wykaż, że granica nie istnieje, jeżeli a jest zadany wzorem:

$$a_n = \left(\frac{999}{1000} + \frac{n^{(1000^{999})}}{\left(\frac{1000}{999}\right)^n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rozwiązanie: Przeprowadźmy szereg przekształceń:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{999}{1000} + \frac{n^{(1000^{999})}}{\left(\frac{1000}{999}\right)^n}\right)^n \\ &= \left(\frac{999}{1000} + \left(\frac{999}{1000}\right)^n \cdot n^{(1000^{999})}\right)^n \\ &= \left(\frac{999}{1000}\right)^n \cdot \left(1 + \left(\frac{999}{1000}\right)^{n-1} \cdot n^{(1000^{999})}\right)^n \\ &= \left(\frac{999}{1000}\right)^n \cdot \alpha_n \end{aligned}$$

Gdzie $\alpha_n = \left(1 + \left(\frac{999}{1000}\right)^{n-1} \cdot n^{(1000^{999})}\right)^n$

Teraz rozważmy granicę ciągu α_n; przekształćmy go:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left(1 + \left(\frac{999}{1000}\right)^{n-1} \cdot n^{(1000^{999})}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{n^{(1000^{999})}}{\left(\frac{1000}{999}\right)^{n-1}}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{\frac{\left(\frac{1000}{999}\right)^{n-1}}{n^{(1000^{999})}}}\right)^n \end{aligned}$$

Teraz oznaczmy:

$$\beta_n = \frac{\left(\frac{1000}{999}\right)^{n-1}}{n^{(1000^{999})}}$$

Oraz:

$$\gamma_n = \frac{n}{\beta_n}$$

A następnie przekształćmy:

$$\alpha_n = \left[\left(1 + \frac{1}{\beta_n}\right)^{\beta_n}\right]^{\gamma_n}$$

Zastanówmy się, co dzieje się z β_n, gdy $n \to \infty$.

Rozważmy granicę ciągu postaci: $\dfrac{a^n}{n^b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a, b > 1$, takim ciągiem jest β_n, a gamma jest odwrotnością takiego ciągu γ_n. Oznaczmy granicę tego ciągu jako L

Weźmy pierwiastek b-tego stopnia z wyrazów tego ciągu, otrzymamy: $\frac{\left(a^{1/b}\right)^n}{n}$, granica tego ciągu jest równa $L^{\frac{1}{b}}$ (Z twierdzenia które było dowodzone na ćwiczeniach).

Oznaczmy $c = a^{\frac{1}{b}}$. Wtedy wystarczy pokazać obliczyć granicę $\frac{c^n}{n}$. Weźmy $c = d + 1$. Jasnym jest że $c > 1$, więc $d > 0$. Wtedy ze wzoru Newtona, dla $n \geq 2$ mamy:

$$c^n = (d+1)^n \geq 1 + \binom{n}{1} d + \binom{n}{2} d^2 = 1 + n \cdot d + \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot d^2 > \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot d^2$$

Więc z tego mamy:

$$\frac{c^n}{n} > \frac{\frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot d^2}{n} = \frac{1}{2}(n-1) \cdot d^2$$

Czyli mamy dolne ograniczenie, które ma granicę w nieskończoności (bo $d \neq 0$), a to oznacza, że ciąg po lewej stronie również ma granicę w nieskończoności, czyli $L^{\frac{1}{b}} = \infty$, co implikuje $L = \infty$

Teraz wróćmy do naszych ciągów β_n i γ_n; właśnie udowodniliśmy, że:

$$\beta_n \to \infty$$

Oraz jako że γ_n jest odwrotnością ciągu postaci $\dfrac{a^n}{n^b}$, (gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a, b > 1$), to analogiczny dowód jak powyżej pokaże, że

$$\gamma_n \to 0$$

Wróćmy do ciągu α_n:

$$\alpha_n = \left[\left(1 + \frac{1}{\beta_n} \right)^{\beta_n} \right]^{\gamma_n}$$

Z tego co pokazaliśmy wyżej, widać że wyrażenie w środku nawiasu kwadratowego dąży do stałej e, a wykładnik γ_n dąży do 0, więc całość $\alpha_n \to 1$.

Wróćmy do głównego ciągu $a_n = \left(\frac{999}{1000}\right)^n \cdot \alpha_n$. Z oczywistych względów $\left(\frac{999}{1000}\right)^n \to 0$, więc z operacji arytmetycznych na granicach mamy:

$$a_n \to 0 \cdot 1 = 0$$

$\square$