Praca domowa z ćwiczeń - Analiza Matematyczna

Gracjan Barski, album: 448189

January 20, 2024

Zadanie 1:

Pytanie sprowadza się do poszukiwania ekstremów na przedziale $[-1;1]$. Chcemy, aby wszystkie ekstrema były w przedziale $[-1;1]$. Sprawdźmy wartości na krańcach przedziału, ponieważ one też są ekstremami:

$$T(-1) = -16 + 20 - 5 = -1 \checkmark$$
$$T(1) = 16 - 20 + 5 = 1 \checkmark$$

Teraz policzmy wartości w ekstremach. $T'(x) = 80x^4 - 60x^2 + 5$. Chcemy $T'(x) = 0$. Jest to warunek wystarczający, ponieważ rozważamy $x \in (-1;1)$ oraz T jest różniczkowalna. Zróbmy podstawienie $t = x^2$, z założeniem $t \geq 0$. Po skróceniu współczynników mamy $16t^2 - 12t + 1 = 0$ Dostajemy rozwiązania:

$$t_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad t_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$$

Obie te wartości są większe od zera, ponieważ $3 > \sqrt{5}$, więc spełniają warunki. Więc poszukiwane miejsca zerowe pochodnej to:

$$x_1 = \sqrt{t_1} \qquad x_2 = -\sqrt{t_1} \qquad x_3 = \sqrt{t_2} \qquad x_4 = -\sqrt{t_2}$$

Wszystkie te wartości są w przedziale $[-1;1]$, więc wystarczy pokazać, że $T(x_1), T(x_2), T(x_3), T(x_4) \in [-1;1]$, jednak jeśli pokażemy, że $T(x_1), T(x_3) \in [-1;1]$, to będzie gotowe, ponieważ $T(x)$ jest funkcją nieparzystą, a nasz poszukiwany przedział jest symetryczny względem 0.

Rozważmy:

$$\begin{aligned}
T(x_1) &= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\left(16 \cdot \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right)^4 - 20 \cdot \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right)^2 + 5\right) \\
&= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\left(16 \cdot \frac{14+6\sqrt{5}}{64} - 20 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{8} + 5\right) \\
&= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\left(\frac{4-4\sqrt{5}}{4}\right) \\
&= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\left(1-\sqrt{5}\right) \\
&= -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\left(\sqrt{5}-1\right) \\
&= -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\sqrt{6-2\sqrt{5}} \\
&= -\sqrt{\frac{18-6\sqrt{5}+6\sqrt{5}-10}{8}} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Analogiczne przekształcenia pokażą, że $T(x_3) = 1$.

Z nieparzystości $T(x)$ otrzymujemy $T(x_2) = 1$ oraz $T(x_4) = -1$. Więc wykazaliśmy, że jeśli $|x| \leq 1$, to $|T(x)| \leq 1$. $\square$

Zadanie 2:

Weźmy dowolną funkcję $g(x)$ monotoniczną rosnącą, ciągłą na $[1;\infty]$, spełniającą $g(1) = 0$. Teraz rozważmy funkcję f:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 1 \\ -g(\frac{1}{x}) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Pokażę, że funkcja spełnia, żądane warunki.

Oczywiście zachodzi $f(1) = 0$. Musi zachodzić również $f(x) = -f(\frac{1}{x})$. Rozpatrzmy dwa przypadki:

(1) $x > 1$

Wtedy $f(x) = g(x)$, oraz $f(\frac{1}{x}) = -g(x)$. Z tych równości otrzymujemy $f(x) = -f(\frac{1}{x})$.

(2) $0 < x < 1$

Wtedy $f(x) = -g(\frac{1}{x})$, oraz $f(\frac{1}{x}) = g(\frac{1}{x})$. Z tych równości otrzymujemy $f(x) = -f(\frac{1}{x})$.

f musi być ciągła. g jest ciągła, oraz składanie funkcji ciągłych zachowuje ciągłość, więc jedyna nieciągłość jaka mogłaby zajść, to w punkcie $x = 1$. Obliczmy granicę:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -g\left(\frac{1}{x}\right) = -g\left(\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x}\right) \to -g(1) = 0 = g(1) = f(1)$$

Więc $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, więc f jest ciągła na $(0;\infty)$. Teraz sprawdźmy czy f jest rosnące. Dla argumentów $x \geq 1$, sprawa jest oczywista, bo g jest rosnące. Więc weźmy takie $x, y \in \mathbb{R}$, że $0 < x < y < 1$. Rozważmy wartości: $f(x) = -g(\frac{1}{x})$, oraz $f(y) = -g(\frac{1}{y})$. Z założenia, wiemy że $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, więc z monotoniczności g, mamy $g(\frac{1}{x}) > g(\frac{1}{y})$, a mnożąc przez -1 otrzymujemy $-g(\frac{1}{x}) < -g(\frac{1}{y})$ Więc istotnie f jest rosnąca na całej dziedzinie.

Pokazaliśmy, że dla dowolnego g spełniającego określone powyżej warunki, funkcja f spełnia warunki zadania, oczywiście takich funkcji g jest nieskończenie wiele oraz mają przeróżne formy, więc wypisywanie wszystkich mija się z celem. $\square$

Zadanie 3:

Obserwacja: $a_n - b_n\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^n$. Wynika to z rozwinięcia $(2-\sqrt{3})^n$ ze wzoru Newtona (ponieważ b_n to po prostu suma współczynników przy nieparzystych potęgach $\sqrt{3}$, a zmieniając znak przy $\sqrt{3}$, ta suma się nie zmienia). Z tego otrzymujemy:

$$2a_n = a_n - b_n\sqrt{3} + a_n + b_n\sqrt{3}$$

A z tego:

$$a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}$$

Wyznaczamy b_n:

$$b_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - a_n}{\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

Teraz rozważmy granicę:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}}{\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{3}\, \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{3}\, \frac{(2+\sqrt{3})^n \left(1 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n\right)}{(2+\sqrt{3})^n \left(1 - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n\right)} \to \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Gdzie ostatni wniosek wynika z tego, że $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n \to 0$, ponieważ $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3} \in (0;1)$. $\square$