Zadanie 3 z Analizy Matematycznej dla Informatyków

Gracjan Barski, album: 448189

January 9, 2024

Rozwiązanie:

(a) Z definicji granicy mamy:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N_1\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ (x < N_1 \implies |g(x)-7| < \epsilon)$$

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N_2\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ (x > N_2 \implies |g(x)-7| < \epsilon)$$

Wybierzmy $\epsilon = 0.001$ i dla tego epsilona weźmy odpowiednie $N_1, N_2 \in \mathbb{R}$ spełniające powyższe warunki. Rozważmy przedział $[N_1; N_2]$. Funkcja g jest ciągła, więc z twierdzenia Weierstressa o osiąganiu kresów, wiemy że istnieje $M \in [N_1; N_2]$ takie że $g(M) = \sup g([N_1; N_2])$.

Rozważmy wartość $3e$: Wiemy że $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, oraz że ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący. Dla $n = 5$ mamy $3 \cdot a_5 = 3 \cdot 1.2^5 = 3 \cdot 2.48832 = 7.46496 > 7$. Więc $3e$ jest większe od 7 o co najmniej 0.46496.

Wracając do rozważań o przedziale $[N_1; N_2]$, wiemy, że istnieje M, dla którego $g(M) = \sup g([N_1; N_2])$. Wiemy również, że $g(17) = 3e$, więc $g(M) \geq 3e$. Oczywiście zachodzi $N_1 < 17, M < N_2$. Jako że jeśli $x \in (-\infty; N_1) \cup (N_2; \infty)$ to wartość $g(x)$ różni się od 7 o co najwyżej 0.001 (epsilon wybrany na początku), czyli może być co najwyżej 7.001, to wiemy, że $g(M)$ jest największą wartością funkcji w całej dziedzinie $\mathbb{R}$.

(b) Rozważmy funkcję $f(x) = g(x+\pi) - g(x)$. Warto zaznaczyć, że dziedzina f to $\mathbb{R}$, oraz że f jest ciągła (ponieważ jest różnicą dwóch funkcji ciągłych). Wystarczy pokazać, że f posiada miejsce zerowe. Weźmy wartość M z poprzedniego podpunktu. Wiemy, że $g(M)$ jest wartością największą w całej dziedzinie. Teraz rozważmy wartości funkcji f:

$$f(M) = g(M+\pi) - g(M) \leq 0$$

$$f(M-\pi) = g(M) - g(M-\pi) \geq 0$$

Gdzie nierówności wynikają z faktu, że $g(M)$ jest wartością największą. Teraz, jeśli $f(M) = 0$ lub $f(M-\pi) = 0$ to mamy tezę. Z drugiej strony, jeśli obie te wartości są niezerowe, to z własności Darboux dla funkcji ciągłych otrzymujemy, że istnieje $c \in (M-\pi; M)$ takie że $f(c) = 0$. □