GAL - praca domowa 6. z dnia 12.12.2023

Gracjan Barski, album: 448189

October 22, 2024

Rozwiązanie:

Mamy odwzorowanie $F\colon \mathbb{R}^{2,3} \to \mathbb{R}[x]_3$ dane wzorem

$$F(A)(x) = [1 \quad x] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

(a) Pokazać liniowość przekształcenia F. Najpierw pokażę addytywność:

$$F(A+B)(x) = [1 \quad x] \cdot (A+B) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$
$$= [1 \quad x] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} + [1 \quad x] \cdot B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$
$$= F(A)(x) + F(B)(x) \tag{3}$$

Gdzie równość **(2)** wynika z rozdzielności mnożenia względem dodawania w pierścieniu macierzy $R^{n,m}$. Więc mamy addytywność przekształcenia.

Teraz mnożenie przez skalar z $\mathbb{R}$:

$$F(\alpha A)(x) = [1 \quad x] \cdot \alpha A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$
$$= \alpha F(A)(x) \tag{5}$$

Gdzie równość **(5)** wynika z przemienności mnożenia macierzy przez skalary. Więc mamy liniowość przekształcenia F.

(b) Znaleźć bazę $\ker A$. Weźmy dowolne $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ i zapiszmy:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Gdzie $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Teraz chcemy $F(A)(x) = 0$ (0 to zero w pierścieniu wielomianów czyli wielomian zerowy). Mamy:

$$F(A)(x) = [1 \quad x] \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \tag{6}$$
$$= a + (b+d)x + (c+e)x^2 + fx^3 = 0 \tag{7}$$

Gdzie równość **(6)** jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie współczynniki otrzymanego wielomianu są zerowe, więc:

$$a = 0 \land b = -d \land c = -e \land f = 0$$

Wszystkie macierze spełniające te warunki są w $\ker A$ więc bazą może być na przykład zbiór:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Znaleźć V. Weźmy takie $V \subset \mathbb{R}^{2,3}$, którego bazą V jest

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Wtedy mamy równość:

$$F\mid_V \left(\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix} \right)(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ to współczynniki kombinacji liniowej bazy V.

Trywialnie jest to izomorfizm, ponieważ jeśli zmienimy jakikolwiek współczynnik przy którymś elemencie z bazy, to któryś jego współczynnik będzie inny, bo współczynniki wielomianu są równe współczynnikom kombinacji liniowej macierzy z bazy, a więc będzie to inny wielomian. Więc mamy iniektywność.

Jeśli chcemy otrzymać dowolny wielomian to wystarczy jego współczynniki dać jako odpowiednie współczynniki w kombinacji liniowej bazy V, więc mamy surjektywność. A z tego mamy izomorfizm. $\square$