GAL - praca domowa 7. z dnia 18.01.2023

Gracjan Barski, album: 448189

October 22, 2024

Rozwiązanie:

(a) Pokazać, że poniższa funkcja jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{n,n}$ nad $\mathbb{R}$:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

Weźmy dowolne $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{n,n}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Aby funkcja była iloczynem skalarnym musi mieć następujące własności:

I. $\langle X, \alpha_1 Y + \alpha_2 Z\rangle = \alpha_1\langle X, Y\rangle + \alpha_2\langle X, Z\rangle$

Teraz pewne przekształcenia:

$$\begin{aligned}\langle X, \alpha_1 Y + \alpha_2 Z\rangle &= \operatorname{tr}(X^T(\alpha_1 Y + \alpha_2 Z)) \\ &= \operatorname{tr}(\alpha_1 X^T Y + \alpha_2 X^T Z) \\ &= \alpha_1\langle X, Y\rangle + \alpha_2\langle X, Z\rangle\end{aligned}$$

Gdzie ostatnie przekształcenie wynika z addytywności i jednorodności operacji śladu macierzy.

II. $\langle X, Y\rangle = \overline{\langle Y, X\rangle}$

Tak samo jak wyżej:

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle &= \operatorname{tr}(X^T Y) \\ &= \operatorname{tr}((Y^T X)^T) \\ &= \operatorname{tr}(Y^T X) \\ &= \langle Y, X\rangle \\ &= \overline{\langle Y, X\rangle}\end{aligned}$$

Gdzie powyższe przekształcenia wynikają z faktu $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$ oraz z faktu, że $X, Y \in \mathbb{R}^{n,n}$ więc sprzęganie wyniku nic nie zmienia.

III. $X \neq 0 \Longrightarrow \langle X, X\rangle > 0$

$X \neq 0$ więc istnieją takie indeksy $1 \leq i, j \leq n$, takie że $x_{i,j} \neq 0$.
Oznaczmy $Y = X^T X$ oraz $y_{i,j}$ jako element w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy, wtedy mamy: $\langle X, X\rangle = \operatorname{tr}(X^T X) = \operatorname{tr}(Y)$. Rozważmy element $y_{i,i}$:

$$y_{j,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{k,j} \cdot x_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1}(x_{k,j} \cdot x_{k,j}) + x_{i,j} \cdot x_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{n}(x_{k,j} \cdot x_{k,j}) > 0$$

Ostatnia nierówność wynika z $x_{i,j} \neq 0$, a wcześniej indeksy przy x są zamienione ponieważ jedna z macierzy była transponowana. Jeśli $y_{j,j} > 0$ to $\operatorname{tr}(Y) > 0$ $\square$

(b) Znaleźć rzut ortogonalny I_n na $\operatorname{span}(B_1, B_2, \ldots, B_n)$

Oznaczmy $B = \operatorname{span}(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ Pokażmy, że zbiór $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ jest bazą ortogonalną B. Rozważmy kombinację liniową:

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \ldots + \alpha_n B_n = 0$$
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} = 0$$

Z tego wnioskujemy, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, więc układ jest niezależny liniowo, więc jest bazą podprzestrzeni B.

Teraz pokażmy, że dla dowolnych $1 \leq i, j \leq n$, takich że $i \neq j$ zachodzi $B_i \perp B_j$. Rozważmy $\langle B_i, B_j \rangle = \mathrm{tr}(B_i^T B_j)$ Chcielibyśmy, aby to było równe 0. Więc suma wyrazów na diagonali musi być równa 0, jednak jak się okaże, każdy wyraz na diagonali jest równy 0. Oznaczmy $X = B_i^T B_j$. Rozpatrzmy dla dowolnego $1 \leq i \leq n$ wyraz $x_{i,i}$:

$$x_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} \cdot b_{k,i} = 0$$

Gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że macierze B_i, B_j mają jedynki w innych kolumnach więc nigdy na siebie nie trafią. Więc mamy bazę ortogonalną. Teraz wiemy, że rzut I_n na B jest wyrażony wzorem:

$$P_B(I_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle B_j, I_n \rangle}{\langle B_j, B_j \rangle} \cdot B_j$$

Dla dowolnego $1 \leq j \leq n$ Rozważmy: $\langle B_j, I_n \rangle = \mathrm{tr}(B_j^T I_n) = 1$ co wynika ze struktury macierzy B_j i I_n.

Dla dowolnego $1 \leq j \leq n$ Rozważmy: $\langle B_j, B_j \rangle = \mathrm{tr}(B_j^T B_j) = n$ co wynika ze struktury macierzy B_j.

Więc otrzymujemy:

$$P_B(I_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} B_j$$

Czyli rzut I_n na B to

$$\frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$