GAL - praca domowa 8.

Gracjan Barski, album: 448189

October 22, 2024

Rozwiązanie:

Najpierw zauważmy: $-A = A^T$, więc jeśli wykorzystamy własność, że dla każdej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ zachodzi $\det X = \det X^T$, to dostaniemy $\det A = \det -A$. Weźmy n nieparzyste. Wiemy, że przemnożenie macierzy przez -1 mnoży jej wyznacznik razy $(-1)^n$, więc mamy $\det A = -\det A$. Więc dostajemy $\det A = 0$. To był przypadek gdy n nieparzyste.

Teraz rozważmy n parzyste. Przekształćmy wyjściową macierz. Na razie będziemy tylko odejmować jedne wiersze od innych więc nie zmieniamy wyznacznika:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\forall_{2 \le i \le n} w_i - w_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Teraz po kolei odejmijmy drugi wiersz od wszystkich poniższych, potem trzeci wierz od wszystkich poniższych, i tak dalej ... Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wartość wyznacznika tej macierzy jest taka sama jak wyznacznika macierzy wyjściowej, ponieważ jedynie odejmowaliśmy wiersze od siebie. W pierwszej kolumnie mamy same zera oprócz jedynki w drugim wierszu. Skorzystajmy z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny, aby policzyć wyznacznik:

$$\det A = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Warto zaznaczyć, że ta macierz po prawej, której chcemy policzyć wyznacznik, jest rozmiaru $n-1 \times n-1$ (oczywiście rozmiar się zmniejszył przez zastosowanie rozwinięcia Laplace'a). Więc jest to macierz o nieparzystej liczbie wierszy i kolumn (ponieważ jesteśmy w przypadku n parzyste). Teraz, jeśli spróbujemy wyzerować pierwszy wiesz, to okaże się, że zostanie nam -1 na pierwszym miejscu tego wiersza. Możemy to uzyskać poprzez dodanie ostatniego ($n-1$-tego) wiersza do pierwszego, potem dodanie $n-3$-tego wiersza, i tak dalej. Za każdym razem usuwamy dwie -1 z pierwszego wiersza, ale ich jest nieparzyście wiele, więc zostanie jedna na początku. Finalnie otrzymamy taką macierz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Która jest trójkątna. Oczywiście wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów na diagonali, który w tym przypadku wynosi -1. Podstawiając do wcześniejszej formuły otrzymujemy:

$$\det A = -1 \cdot -1 = 1$$

W dowodzie zostały użyte macierze "duże" (to znaczy $n \geq 5$), więc gdyby ktoś miał wątpliwości, czy ta metoda działa dla macierzy "małych" (to znaczy $2 \leq n \leq 4$), to ten rezultat również sprawdza się dla tych "małych" i można to łatwo sprawdzić ręcznie. $\square$