PMat - wspólna praca domowa seria III

Gracjan Barski, album: 448189

January 22, 2024

W poniższych rozumowaniach moc zbioru oznaczam modułami, to znaczy moc zbioru A to $|A|$, oraz zaliczam 0 do liczb naturalnych.

Zadanie 309:

a) Pokazać, że r jest relacją równoważności.

Weźmy funkcję $h\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$. Ta funkcja otrzyma wielomian na wejściu i wszystkie jego współczynniki zredukuje mod 2. Traktując wielomian jako wektor w przestrzeni liniowej nad $\mathbb{Z}$ to można zapisać:

$$h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \mod 2 \\ x_2 \mod 2 \\ \vdots \\ x_n \mod 2 \end{bmatrix}$$

Łatwo zaważyć że $r = \ker h$. Prosty dowód poprzez wzajemną inkluzję:

$(\subseteq)$ weźmy taką parę $\langle f, g\rangle \in r$. Wiemy że ich odpowiadające współczynniki mają taką samą parzystość (bo tylko różnica dwóch liczb o tej samej parzystości daje wynik parzysty). Korzystając z faktu że dwie liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ spełniają równość $a \equiv b \mod 2$ wtedy i tylko wtedy gdy ich parzystość jest taka sama otrzymujemy $h(f) = h(g)$, czyli $\langle f, g\rangle \in \ker h$.

$(\supseteq)$ weźmy taką parę $\langle f, g\rangle \in \ker h$. Korzystając z tych samych dwóch faktów co wyżej wnioskujemy że ich odpowiadające współczynniki mają taką samą parzystość. Czyli ich różnica będzie miała tylko współczynniki parzyste, więc $\langle f, g\rangle \in r$.

Z wzajemnej inkluzji wnioskujemy równość zbiorów.

Z wykładu wiadomo że relacja jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja, której ta relacja jest jądrem, więc wnioskujemy że r jest relacją równoważności. $\square$

b) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.

1) $[0]_r$ zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach parzystych
2) $[1]_r$ zbiór wszystkich wielomianów które przy x^0 mają współczynnik nieparzysty, a pozostałe współczynniki parzyste
3) $[x+1]_r$ zbiór wszystkich wielomianów które przy x^0 i x^1 mają współczynniki nieparzyste, a pozostałe współczynniki parzyste

c) Wyznaczyć moc zbioru $\mathbb{Z}[x]/_r$.

Rozważmy funkcję $f\colon \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{Z}[x]/_r$ określoną wzorem

$$f(A) = \left[\sum_{n=0}^{\max A} \chi_A(n) \cdot x^n\right]_r$$

Gdzie $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ to zbiór wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, a χ_A to indykator zbioru A. Biorę tylko skończone podzbiory $\mathbb{N}$, ponieważ gdybym wziął wszystkie to argument funkcji mógłby nie mieć elementu największego, a jeżeli suma we wzorze iterowałaby do nieskończoności to otrzymany obiekt nie byłby wielomianem, więc byłby poza dziedziną (wielomiany muszą mieć skończony stopień).

Pokażę, że f jest iniekcją.

Weźmy dwa dowolne $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takie że $A_1 \neq A_2$, to oznacza że w którymś jest element, którego nie ma w drugim. Bez straty ogólności załóżmy $\exists_{a_1 \in A_1}\ a_1 \notin A_2$. Weźmy to a_1. Rozważmy wartość $f(A_1)$:

$$f(A_1) = \left[\sum_{n=0}^{\max A_1} \chi_{A_1}(n) \cdot x^n \right]_r = \left[\chi_{A_1}(0) \cdot x^0 + \chi_{A_1}(1) \cdot x^1 + \ldots + \chi_{A_1}(a_1) \cdot x_1^a + \ldots + \chi_{A_1}(\max A_1) \cdot x^{\max A_1}\right]$$

Jako że $\chi_{A_1}(a_1) = 1$, to wielomiany w $f(A_1)$ mają współczynniki nieparzyste przy x^{a_1}. W przeciwieństwie do tego, wszystkie wielomiany w $f(A_2)$ mają współczynniki parzyste (bo $\chi_{A_2}(a_1) = 0$), więc wnioskujemy, że:

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\max A_1} \chi_{A_1}(n) \cdot x^n, \sum_{n=0}^{\max A_2} \chi_{A_2}(n) \cdot x^n \right\rangle \notin r$$

A jeśli nie są ze sobą w relacji r to ich klasy abstrakcji są różne (ponieważ r jest relacją równoważności), więc istotnie f jest iniekcją.

Teraz pokażę, że f jest surjekcją:

Weźmy klasę abstrakcji $[p]_r$, dla dowolnego $p \in \mathbb{Z}[x]$. Weźmy wielomian $p' \in \mathbb{Z}[x]$, który spełnia $p' = h(p)$ (gdzie funkcja h to funkcja zdefiniowana w podpunkcie a)). Czyli p' to po prostu wielomian ze zredukowanymi $\bmod 2$ współczynnikami wielomianu p. Jak wykazano w podpunkcie wcześniejszym, p i p' są ze sobą w relacji r, więc $[p]_r = [p']_r$. Więc teraz będziemy rozpatrywać klasę abstrakcji $[p']_r$. Biorę p' i sprawdzam przy jakich potęgach x ma on współczynniki równe 1, a następnie te potęgi umieszczam w zbiorze A. Formalnie:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{współczynnik } p' \text{ przy } x^n \text{ jest równy } 1\}$$

Dla ścisłości warto zaznaczyć, że taki zbiór jest skończony, ponieważ wielomiany mają skończony stopień, więc istotnie $A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Z własności f mamy: $f(A) = [p']_r = [p]_r$ więc istotnie f jest surjekcją.

Więc f jest bijekcją, a to oznacza, że $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{Z}[x]_r$. Z ćwiczeń wiadomo że $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})| = \aleph_0$, więc wnioskujemy: $|\mathbb{Z}[x]/_r| = \aleph_0$. $\square$

d) Wskazać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

Weźmy klasę abstrakcji $[p]_r$ dla dowolnego $p \in \mathbb{Z}[x]$.

Rozważmy funkcję identycznościową $f_p\colon [p]_r \to \mathbb{Z}[x]$ zadaną wzorem $f(p) = p$. Z oczywistych względów ta funkcja jest iniekcją. Więc wnioskujemy, że $|[p]_r| \leq |\mathbb{Z}[x]|$. Wiemy że $|\mathbb{Z}[x]| = \aleph_0$ (fakt z wykładu), więc mamy $|[p]_r| \leq \aleph_0$. Teraz potrzebujemy dolnego ograniczenia, jednak jest ono trywialne.

Pokażę, że dla dowolnej takiej klasy $[p]_r$ mamy w niej nieskończenie wiele elementów. Skorzystam z faktu, że wielomian jest wyznaczony unikalnie przez jego współczynniki. Weźmy ten wielomian p oraz jego pewien współczynnik a_i przy x^i. Teraz weźmy wielomian p', który ma wszystkie współczynniki te same co p, oprócz tego a_i. Chcielibyśmy żeby $p' \in [p]_r$, więc jeśli za współczynnik przy x^i wezmę $a_i + 2k$ dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$, to faktycznie $p' \in [p]_r$ (ponieważ $a_i + 2k - a_i \equiv 0 \mod 2$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$). Więc mam do wyboru $\aleph_0$ współczynników, więc istotnie klasa abstrakcji $[p]_r$ jest nieskończona. A z tego wnioskuję, że $\aleph_0 \leq |[p]_r|$ (ponieważ $\aleph_0$ to najmniejsza możliwa nieskończoność).

Z twierdzenia Cantora-Bernsteinta otrzymuję $|[p]_r| = \aleph_0$ dla każdego $p \in \mathbb{Z}[x]$. $\square$

Zadanie 336:

a) Znaleźć $\bigcup\limits_{r \in \mathcal{R}} g(r)$ i $\bigcap\limits_{r \in \mathcal{R}} g(r)$

Najpierw pokażę, że $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} g(r) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Prosty dowód poprzez wzajemną inkluzję:

($\subseteq$) Weźmy dowolne $A \in \bigcup_{r \in \mathcal{R}} g(r)$. Z definicji mamy $\exists_{r \in \mathcal{R}}\ A \in g(r)$, a to oznacza że w szczególności $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ponieważ $g(r)$ jest typu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

($\supseteq$) Weźmy dowolne $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Weźmy taką relację równoważności $r \in \mathcal{R}$ której jedną z klas abstrakcji jest zbiór A, a drugą $\mathbb{N} - A$. Wtedy $g(r) = \{A, \mathbb{N} - A\}$, więc $A \in r$, a z tego $A \in \bigcup_{r \in \mathcal{R}} g(r)$.

Z wzajemnej inkluzji wnioskujemy równość zbiorów.

Teraz pokażę, że $\bigcap_{r \in \mathcal{R}} g(r) = \varnothing$.

Załóżmy nie wprost, że $\bigcap_{r \in \mathcal{R}} g(r)$ jest niepuste. To oznacza, że istnieje $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takie że $\forall_{r \in \mathcal{R}}\ A \in g(r)$, czyli innymi słowy A jest klasą abstrakcji w każdej relacji $r \in \mathcal{R}$. Rozważmy dwa przypadki:

1) A jest singletonem: Wtedy A nie należy do $g(\mathbb{N}^2)$, ponieważ relacja $\mathbb{N}^2$ posiada tylko jedną klasę abstrakcji, która nie jest singletonem (a mianowicie cały zbiór $\mathbb{N}$).
2) A nie jest singletonem: Wtedy A nie należy do $g(\mathbf{1}_{\mathbb{N}})$, ponieważ relacja $\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$ posiada tylko klasy abstrakcji które są singletonami.

Mamy sprzeczność w obu przypadkach, więc takie A nie istnieje, a to oznacza że $\bigcap_{r\in\mathcal{R}} g(r) = \varnothing$. $\square$

b) Czy g jest iniekcją? Czy jest surjekcją?

Wykażę iniektywność g:

Wiadomo, że każda relacja równoważności na danym zbiorze jest definiowana **unikalnie** przez podział na tym zbiorze (fakt z wykładu), więc jeśli wezmę dwie relacje równoważności $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ takie że $r_1 \neq r_2$, to są one zdefiniowane przez dwa różne podziały $\mathbb{N}$. Warto zauważyć, że funkcja $g(r)$, mapuje r właśnie na ten podział (bo $\mathbb{N}/_r$ to w istocie to samo co podział $\mathbb{N}$ według relacji r), więc z $g(r_1)$ i $g(r_2)$ otrzymamy dwa różne podziały, a to dowodzi że g jest iniekcją.

Teraz czy jest surjektywna? Nie jest. Kontrprzykład:

Jak już zostało opisane wyżej, dla każdego $r \in \mathcal{R}$ wynikiem $g(r)$ jest podział $\mathbb{N}$, więc z g nie dostanę zbioru który nie jest podziałem $\mathbb{N}$, a w szczególności takiego zbioru $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dla którego zachodzi $\bigcup A \neq \mathbb{N}$ (ponieważ dla podziału musiałaby zachodzić równość). Przykładem A może być $\{\{1\}\}$, które jest nieosiągalne. $\square$

c) Znaleźć $g(\mathcal{R})$ oraz $g^{-1}(\{Z \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |Z| = 1\})$ i $g^{-1}(\{\{Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |Z| = 1\}\})$.

Najpierw $g(\mathcal{R})$. Pokażę, że:

$$g(\mathcal{R}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \mid A \text{ jest podziałem } \mathbb{N}\}$$

Oznaczę ten zbiór po prawej jako $\mathcal{B}$. Dowód poprzez wzajemną inkluzję:

($\subseteq$) Weźmy dowolne $A \in g(\mathcal{R})$, czyli $\exists_{r\in\mathcal{R}}\ g(r) = A$, czyli A jest podziałem $\mathbb{N}$ (z podpunktu b)). Z tego mamy $A \in \mathcal{B}$.

($\supseteq$) Weźmy dowolne $A \in \mathcal{B}$, czyli A jest podziałem $\mathbb{N}$, a to oznacza, że unikalnie definiuje pewną relację równoważności $r \in \mathcal{R}$. A z tego mamy że $g(r) = A$, więc $A \in g(\mathcal{R})$.

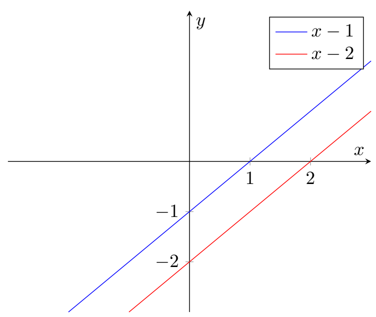
Z wzajemnej inkluzji wnioskujemy równość zbiorów.

Teraz $g^{-1}(\{Z \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |Z| = 1\})$. Czyli szukamy przeciwobrazu zbioru, który zawiera zbiory, które zawierają dokładnie jeden podzbiór $\mathbb{N}$. Z definicji g, każdy taki podzbiór $\mathbb{N}$, który jest w tych zbiorach, powinien być klasą abstrakcji i jednocześnie być podziałem $\mathbb{N}$. Istnieje tylko jeden podział $\mathbb{N}$ który ma jeden element, a mianowicie $\{\mathbb{N}\}$. Łatwo zauważyć, że $g(\mathbb{N}^2) = \{\mathbb{N}\}$, więc szukany przeciwobraz to $\{\mathbb{N}^2\}$

Teraz $g^{-1}(\{\{Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |Z| = 1\}\})$. Czyli szukamy relacji $r \in \mathcal{R}$, do której po przyłożeniu g otrzymamy zbiór wszystkich singletonów z $\mathbb{N}$. Innymi słowy taka relacja dla której zachodzi $g(r) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots\}$. Widać że jeśli weźmiemy $r = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$ to właśnie taki rezultat otrzymamy, ponieważ klasami abstrakcji $\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$ są wszystkie podzbiory $\mathbb{N}$, które są jednoelementowe. Więc szukany przeciwobraz to $\{\mathbf{1}_{\mathbb{N}}\}$. $\square$

Zadanie 579:

a) Narysować $F(\{1, 2\})$:



b) Czy F jest iniekcją lub czy jest surjekcją.

Pokażę że F jest iniekcją.

Weźmy $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ takie że $A_1 \neq A_2$. Czyli muszą różnić się co najmniej jednym elementem. Bez straty ogólności założę, że $\exists_{a_1 \in A_1}\ a_1 \notin A_2$. Więc do $F(A_1)$ należą wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y które spełniają $x - y = a_1$, ale do $F(A_2)$ nie należą, więc istotnie $F(A_1) \neq F(A_2)$ co dowodzi że F jest iniekcją.

Teraz pokażę że F nie jest surjekcją.

Załóżmy przeciwnie że F jest surjekcją i istnieje takie $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ że $F(A) = \{\langle 0, 0\rangle\}$. Z definicji F wiemy że w takim wypadku $0 \in A$, ale wtedy również:

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} \subseteq F(A)$$

Mamy sprzeczność z założeniem, więc nie istnieje takie A, więc F nie jest surjekcją. $\square$

c) Udowodnić że $F(\mathbb{N})$ jest częściowym porządkiem w $\mathbb{R}$ i podać przykład nieskończonego antyłańcucha w tym porządku.

Relacja częściowego porządku musi być zwrotna, antysymteryczna i przechodnia.

1) Zwrotność:

   Weźmy dowolne $x \in R$. $x - x = 0 \in \mathbb{N}$ więc $\langle x, x\rangle \in F(\mathbb{N})$.

2) Antysymetria:

   Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ takie że $\langle x, y\rangle \in F(\mathbb{N})$ i $\langle y, x\rangle \in F(\mathbb{N})$. Z definicji F to oznacza że $x - y \in \mathbb{N}$ i $y - x \in \mathbb{N}$. Zauważmy że $(x - y) + (y - x) = 0$ Więc są to elementy przeciwne w grupie $(\mathbb{Z}, +, 0)$ Ale jedynym elementem $\mathbb{Z}$ który należy do $\mathbb{N}$ i jego element przeciwny również należy do $\mathbb{N}$ jest 0, więc $x - y = 0$, a z tego $x = y$.

3) Przechodniość:

   Weźmy dowolne $x, y, z \in \mathbb{R}$ takie że $\langle x, y\rangle \in F(\mathbb{N})$ i $\langle y, z\rangle \in F(\mathbb{N})$. Z tego wiemy że $x - y \in \mathbb{N}$ i $y - z \in \mathbb{N}$. Teraz dodajmy te dwa elementy do siebie: $(x - y) + (y - z) = x - z$. Korzystając z faktu że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty na dodawanie, otrzymujemy $x - z \in \mathbb{N}$. Więc $\langle x, z\rangle \in F(\mathbb{N})$.

Wnioskujemy że istotnie $F(\mathbb{N})$ jest relacją częściowego porządku.

Teraz znaleźć nieskończony antyłańcuch w tym porządku. Rozpatrzmy zbiór B:

$$B = \{a\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{N}\}$$

Niewątpliwie ten zbiór jest nieskończony. Pokażmy że dowolne dwa elementy B nie są porównywalne w porządku $F(\mathbb{N})$:

Weźmy dowolne dwa różne elementy $b_1, b_2 \in B$, takie że $b_1 \neq b_2$ Można je zapisać odpowiednio jako $a_1\sqrt{2}, a_2\sqrt{2}$, gdzie $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$. Jeśli $b_1 \neq b_2$ to łatwo wywnioskować że $a_1 \neq a_2$. Różnica $b_1 - b_2$ jest równa $(a_1 - a_2)\sqrt{2}$ i jeśli $a_1 \neq a_2$ to ta wartość nigdy nie jest naturalna (to samo dla różnicy $b_2 - b_1$), więc para składająca się z tych dwóch elementów nie jest w zbiorze $F(\mathbb{N})$ więc nie są porównywalne. $\square$

d) Wyznaczyć przeciwobraz zbioru wszystkich relacji zwrotnych w $\mathbb{R}$ przy funkcji F.

Oznaczmy zbiór wszystkich relacji zwrotnych jako $\mathcal{R}$. Pokażę, że $F^{-1}(\mathcal{R}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid 0 \in A\}$. Dowód poprzez wzajemną inkluzję:

($\subseteq$) Weźmy dowolne $A \in F^{-1}(\mathcal{R})$. Wiemy że $F(A) = r$ gdzie r jest zwrotne, czyli $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ \langle x, x\rangle \in r$ Ale z definicji F to oznacza że $0 \in A$, więc $A \in \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid 0 \in A\}$.

($\supseteq$) Weźmy dowolne $A \in \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid 0 \in A\}$. Jeśli $0 \in A$ to z definicji F mamy:

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} \subseteq F(A)$$

Więc do $F(A)$ należą wszystkie pary postaci $\langle x, x\rangle$ gdzie $x \in \mathbb{R}$. A to oznacza, że jest to relacja zwrotna. Wnioskujemy że $A \in F^{-1}(\mathcal{R})$.

Z wzajemnej inkluzji wnioskujemy równość zbiorów. $\square$

e) Jakiej mocy jest zbiór $F(\mathbb{Q})$?

Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to F(\mathbb{Q})$ określoną wzorem:

$$f(x, q) = \langle x, x - q \rangle$$

Sprawdźmy czy taka funkcja jest poprawnie zdefiniowana:

Weźmy dowolne $x \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{Q}$. Mamy $f(x, q) = \langle x, x - q \rangle$, i to musi należeć do $F(\mathbb{Q})$, więc różnica elementów w parze musi być wymierna: $x - (x - q) = q \in \mathbb{Q}$, więc funkcja jest poprawnie zdefiniowana.

Teraz wykażmy jej iniektywność.

Weźmy dowolne dwie pary $\langle x_1, q_1 \rangle, \langle x_2, q_2 \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$. Jak przyłożymy funkcję f do tych par to otrzymamy odpowiednio $\langle x_1, x_1 - q_1 \rangle$ oraz $\langle x_2, x_2 - q_2 \rangle$. Chcemy aby otrzymane pary nie były równe sobie więc rozpatrzmy dwa przypadki:

1) $x_1 \neq x_2$: Pierwsze elementy otrzymanych par się różnią, więc wartości funkcji istotnie są różne.
2) $q_1 \neq q_2$: Jeśli zachodzi również $x_1 \neq x_2$ to lądujemy w przypadku 1) i sprawa jest załatwiona, więc teraz załóżmy $x_1 = x_2$. Pierwsze elementy otrzymanych par są takie same, więc spójrzmy na drugie. Wynoszą odpowiednio $x_1 - q_1$ i $x_2 - q_2$. Łącząc ze sobą dwa założenia $q_1 \neq q_2$ i $x_1 = x_2$ otrzymujemy: $x_1 - q_1 \neq x_2 - q_2$, więc istotnie otrzymane pary są różne.

Wnioskujemy że f jest iniekcją.

Teraz pokażę jej surjektywność:

Weźmy dowolną parę liczb $a, b \in \mathbb{R}$ taką że $\langle a, b \rangle \in F(\mathbb{Q})$. Z definicji funkcji F musi zachodzić $a - b \in \mathbb{Q}$. Jeśli wezmę $x \in \mathbb{R}$ takie że $x = a$ oraz wezmę $q \in \mathbb{Q}$ takie że $q = a - b$ (istotnie jest to elementem $\mathbb{Q}$ z założenia), to mam $f(x, q) = \langle a, b \rangle$. Więc mamy surjekcję.

Więc f jest bijekcją, a co za tym idzie $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \sim F(\mathbb{Q})$. Z operacji na liczbach kardynalnych mamy:

$$|\mathbb{R} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| \cdot |\mathbb{Q}| = \mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{c}$$

Więc $|F(\mathbb{Q})| = \mathfrak{c}$. $\square$