GAL - praca domowa na ćwiczenia (grupy 2 i 3)

Gracjan Barski, album: 448189

October 22, 2024

Zadanie 1:

Odpowiedź: Tak.

Uzasadnienie: Weźmy dowolną bazę przestrzeni Y, oczywiście posiada ona $n-1$ wektorów. Oznaczmy te wektory $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Teraz rozszerzmy tą bazę do bazy X dodając jeden wektor x_n, który razem z bazą Y tworzy układ liniowo niezależny. Można tak zrobić ponieważ Y jest podprzestrzenią X o wymiarze o 1 mniejszym. Teraz weźmy układ wektorów $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ i weźmy bazę dualną (sprzężoną) do tej bazy: $(x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*, x_n^*)$. Nasz poszukiwany funkcjonał $x^* \in X^*$ to $x^* = x_n^*$. Czyli ten, który zwraca współczynnik który stoi przy x_n w reprezentacji wektora jako suma przeskalowanych wektorów z bazy. Jeśli wektor należy do Y to jego współczynnik przy x_n będzie równy 0, więc się zgadza, a jeśli wektor będzie miał w rozkładzie wektor x_n to znaczy, że nie należy do Y (ponieważ $x_n \notin Y$), a funkcjonał zwróci wartość niezerową, a to jest pożądane zachowanie. Taki funkcjonał istnieje dla każdej podprzestrzeni $Y \subset X$ o wymiarze $n-1$. □

Zadanie 2:

Odpowiedź: Nie

Uzasadnienie: Wiemy (Z podstaw matematyki) że wszystkich wielomianów w $\mathbb{Q}[x]$ jest $\aleph_0$. Teraz sprawdźmy kardynalność zbioru wszystkich funkcjonałów $(\mathbb{Q}[x])^*$. Chcielibyśmy znaleźć iniekcję $f\colon [0;1) \to (\mathbb{Q}[x])^*$, wtedy $|(\mathbb{Q}[x])^*| \geq \mathfrak{c}$, więc będziemy wiedzieć, że te dwie przestrzenie liniowe nie są ze sobą izomorficzne, ponieważ nie spełniają kluczowego warunku na tą samą moc.

Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą $x \in [0;1)$. Zapiszmy x jako rozwinięcie dziesiętne $x = 0, x_0x_1x_2x_3\ldots$, oraz zapiszmy wielomian $q \in \mathbb{Q}[x]$ jako $q = a_0 + a_1x + a_2 + x^2 + \ldots$ Teraz rozważmy $f\colon [0;1) \to (\mathbb{Q}[x])^*$ takie że:

$$f(x)(q) = \sum_{k=0}^{\deg q} x_i \cdot a_i$$

Pokażmy, że f jest iniekcją. Weźmy dwa dowolne $x, y \in [0;1)$. Takie że $x \neq y$. Zapiszmy $x = 0, x_0x_1x_2x_3\ldots$ oraz $y = 0, y_0y_1y_2y_3\ldots$ Jeśli mają być różne, to $\exists_i\ x_i \neq y_i$. Weźmy takie i i rozważmy wielomian $q = a_i \cdot x^i$. Teraz przyłóżmy $f(x)$ oraz $f(y)$ do q. Dostajemy:

$$f(x)(q) = a_i \cdot x_i$$
$$f(y)(q) = a_i \cdot y_i$$

Jednak te wartości są różne (ponieważ $x_i \neq y_i$), więc przekształcenia funkcjonały $f(x)$, $f(y)$ przyjmują różne wartości na tym samym argumencie, więc są różne. Co za tym idzie dowiedliśmy, że f jest iniekcją, więc $|(\mathbb{Q}[x])^*| > |\mathbb{Q}[x]|$, więc te przestrzenie nie są ze sobą izomorficzne. □

Zadanie 3:

Implikacje w obie strony:

($\Longrightarrow$) Załóżmy $\ker f \subseteq \ker g$. Wiemy, że istnieje przestrzeń liniowa U, taka że $Y = \text{im} f \oplus U$. Wtedy każdy wektor $y \in Y$ może być jednoznacznie zapisany jako $y = i + u$, gdzie $i \in \text{im} f$, $u \in U$. Można zapisać i jako $i = f(x)$ dla pewnego $x \in X$ (aksjomat wyboru). Teraz rozważmy taką funkcję $h\colon Y \to Z$. Określoną wzorem:

$$h(y) = h(f(x) + u) = g(x)$$

Teraz wystarczy sprawdzić czy taka funkcja jest dobrze określona, to znaczy, czy wartość $h(y)$ będzie taka sama niezależnie od tego jakiego $x \in X$ wybierzemy do $f(x)$.

Rozważmy dowolne elementy $x_1, x_2 \in X$, takie że $f(x_1) = f(x_2)$, chcielibyśmy aby zachodziło również $g(x_1) = g(x_2)$. Przekształćmy założenie, otrzymujemy $f(x_1 - x_2) = 0$ (ponieważ f to przekształcenie liniowe), więc $x_1 - x_2 \in \ker f$, ale $\ker f \subseteq \ker g$, więc $g(x_1 - x_2) = 0$, a z tego $g(x_1) = g(x_2)$ (ponieważ g to przekształcenie liniowe).

Więc istotnie taka funkcja jest dobrze określona. Teraz rozważmy złożenie: $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = g(x)$ (ponieważ $f(x) \in \text{im} f$), więc wykazaliśmy istnienie takiej funkcji h.

($\Longleftarrow$) Załóżmy, że istnieje pewne przekształcenie liniowe $h\colon Y \to Z$ spełniające $g = h \circ f$. Teraz weźmy dowolny element $x' \in X$, taki że $x' \in \ker f$. Jeżeli rozważymy $g(x')$ to otrzymamy:

$$g(x') = h(f(x')) = h(0) = 0$$

Ponieważ każde przekształcenie liniowe przekształca 0 na 0. Więc $x' \in \ker g$.
Z tego wnioskujemy $\ker f \subseteq \ker g$. $\square$

Zadanie 4:

zJeśli $X = U \oplus V$, to wiemy, że dowolny $x \in X$ można zapisać jednoznacznie jako $x = u + v$ gdzie $u \in U$ oraz $v \in V$. Weźmy przekształcenie liniowe h spełniającą warunki zadania, i sprawdźmy jego wartość dla x:

$$h(x) = h(u + v) = h(u) + h(v) = f(u) + g(v)$$

Więc okazuje się, że każda wartość funkcji $h(x)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości funkcji $f(u)$ i $g(v)$ dla argumentów jednoznacznie wyznaczonych przez początkowy argument x. Jako że funkcje f i g są ustalone, to istnieje tylko jedno takie przekształcenie liniowe h. $\square$