Pmat - praca domowa z dnia 27.11.2023

Gracjan Barski, album: 448189

November 30, 2023

Zadanie 263:

a) Chcemy aby $r^{\exists}$ była przechodnia. Weźmy jako r relację pełną na $\mathbb{N}$ (czyli każdy element z $\mathbb{N}$ jest w relacji z elementem każdym z $\mathbb{N}$). Zapiszmy formalnie:

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N}\}$$

Z ćwiczeń wiemy, że faktycznie taka relacja jest przechodnia. Pokażmy że wtedy relacja $r^{\exists}$ jest przechodnia.

Weźmy dowolne zbiory $X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takie że $(X, Y) \in r^{\exists}$ oraz $(Y, Z) \in r^{\exists}$. Wtedy z definicji mamy:

$$\exists_{x_0 \in X \ y_0 \in Y} \ (x_0, y_0) \in r$$

$$\exists_{y_1 \in Y \ z_0 \in Z} \ (y_1, z_0) \in r$$

Ale z tego że relacja r jest pełna, to mamy również $(x_0, z_0) \in r$ więc z definicji $r^{\exists}$ mamy $(X, Z) \in r^{\exists}$ $\square$

b) Chcemy aby $r^{\exists}$ była nieprzechodnia. Weźmy jako r relację $\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$. Z ćwiczeń wiemy, że faktycznie taka relacja jest przechodnia. Teraz aby pokazać, że $r^{\exists}$ nieprzechodnia można wziąc taki przykład:

$$(\{1\}, \{1, 2\}) \in r^{\exists} \land (\{1, 2\}, \{2, 3\}) \in r^{\exists}$$

ale

$$(\{1\}, \{2, 3\}) \notin r^{\exists}$$

bo $(1, 2) \notin r$ oraz $(1, 3) \notin r$. Więc $r^{\exists}$ nieprzechodnia.