PMat - praca domowa z dnia 11.12.2023

Gracjan Barski, album: 448189

October 22, 2024

Zadanie 409:

Najpierw pokażmy, że "$\preceq$" jest porządkiem częściowym.

1) Zwrotność: Weźmy $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Wiadomo, że zachodzi $\forall_{n\in\mathbb{N}} f(n) \leq f(n)$, więc $f \preceq f$.
2) Antysymetria: Weźmy $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takie że $f \preceq g$ i $g \preceq f$. Z tego mamy:
$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(n) \leq g(n) \land \forall_{n\in\mathbb{N}}\ g(n) \leq f(n)$$
Z komutywności kwantyfikatora ogólnego i koniunkcji otrzymujemy:
$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(n) \leq g(n) \land g(n) \leq f(n)$$
Czyli
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} f(n) = g(n)$$
Więc wnioskujemy $f = g$.
3) Przechodniość: Weźmy $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takie że $f \preceq g$ i $g \preceq h$. Z tego mamy:
$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(n) \leq g(n) \land \forall_{n\in\mathbb{N}}\ g(n) \leq h(n)$$
Z komutywności kwantyfikatora ogólnego i koniunkcji otrzymujemy:
$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(n) \leq g(n) \land g(n) \leq h(n)$$
Z przechodniości relacji "$\leq$":
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} f(n) \leq h(n)$$
Więc $f \preceq h$.

Więc mamy porządek częściowy.

Weźmy funkcję $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określoną wzorem $f = \lambda n.\ 0$. Weźmy dowolną funkcję $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Zachodzi $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ g(n) \geq 0$ ponieważ przeciwdziedziną funkcji g jest $\mathbb{N}$. Z tego otrzymujemy:
$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(n) \leq g(n)$$
Czyli f jest "mniejsze" od każdego elementu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, czyli jest w tym porządku elementem najmniejszym, a co za tym idzie jest też jedynym elementem minimalnym.

Teraz pokażę, że nie istnieje element maksymalny.

Załóżmy niewprost, że istnieje element maksymalny. Weźmy $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ które jest elementem maksymalnym. Z definicji to znaczy:
$$\forall_{g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\ f \preceq g \Longrightarrow f = g \tag{1}$$
Ale jeśli weźmiemy funkcję $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określoną wzorem $g = \lambda n. f(n) + 1$ to taka funkcja g, łamie warunek **(1)**, ponieważ $f \preceq g \land f \neq g$. więc sprzeczność, a to oznacza, że funkcja maksymalna nie istnieje. Co za tym idzie, nie istnieje również element maksymalny.

Teraz nieskończony łańcuch w tym porządku: Weźmy zbiór:
$$\{\lambda n.k \mid k \in \mathbb{N}\}$$
Jest to zbiór wszystkich funkcji stałych w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Niewątpliwie są one wszystkie ze sobą porównywalne, ponieważ ten zbiór jest trywialnie izomorficzny ze zbiorem $\langle\mathbb{N}, \leq\rangle$, który jest łańcuchem.

Teraz nieskończony antyłańcuch: Zdefiniujmy funkcję f_k:

$$f_k = \lambda n.\ \texttt{if}\ n == k\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ 0$$

Weźmy zbiór tych funkcji:

$$A = \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Oczywiste, że ten zbiór jest nieskończony. Weźmy dowolne $f_k, f_l \in A$ takie, że $k \neq l$. Teraz rozpatrzmy wartości funkcji w k, l:

$$f_k(k) = 1 \geq 0 = f_l(k)$$

oraz

$$f_k(l) = 0 \leq 1 = f_l(l)$$

Więc oczywiście nie zachodzi $f_k \preceq f_l$ ani $f_l \preceq f_k$. Więc wszystkie dowolne pary nie są porównywalne, więc jest to antyłańcuch.

Nie jest to liniowy porządek, ponieważ istnieją elementy które nie są ze sobą porównywalne, chociażby f_1 i f_2 (jak pokazano powyżej). W skrypcie stoi, że porządek gęsty jest liniowy, jednak w niektórych innych źródłach stoi, że nie musi on być liniowy, więc rozpatrzę gęstość tego porządku:

Weźmy takie dwie funkcje $f, f_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takie że $f = \lambda n.\ 0$. Jasne jest, że $f \preceq f_0$. Jedyne co rozróżnia te dwie funkcje to wartość w $n = 0$, i różni się ona tylko o 1, dla pozostałych argumentów są takie same, więc nie istnieje żadna funkcja g spełniająca $(f \preceq g \wedge g \preceq f_0 \wedge g \neq f \wedge g \neq f_0)$. Wnioskujemy, że porządek nie jest gęsty. $\square$

Teraz zadanie dodatkowe. Mamy relację funkcji częściowych $\langle \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}, \preceq \rangle$:

$$f \preceq g \iff \forall_{n \in \mathrm{dom}(f)}\ x \in \mathrm{dom}(g) \wedge f(x) = g(x)$$

Czyli f i g są ze sobą w relacji gdy $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ oraz wartości w $\mathrm{dom}(f)$ są takie same. Musimy znaleźć maksymalny łańcuch w tym porządku, który jest izomorficzny z $\langle [0;1], \leq \rangle$. Wiemy, że izomorfizm wymaga, aby zbiory miały taką samą moc. $|[0;1]| = \mathfrak{c}$. Sprawdźmy jaką ma moc dowolny maksymalny łańcuch w danym porządku.

Jasne jest, że najmniejszy element tego łańcucha to funkcja, której dziedziną jest zbiór pusty, więc będzie to też najmniejszy element w poszukiwanym łańcuchu maksymalnym. Jasnym jest też, że elementy maksymalne, to wszystkie funkcje, których dziedzina to $\mathbb{N}$. Więc w łańcuchu może być tylko jedna taka funkcja, i będzie elementem największym. Nasze poszukiwania maksymalnego łańcucha funkcji w tym porządku sprowadzają się do poszukiwania maksymalnego łańcucha w $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$, ponieważ wartości funkcji nie grają roli, muszą być takie same we wszystkich dziedzinach, więc mamy jeden wybór. Rozpatrujmy takie funkcje $f_X : X \to \mathbb{N}$ określone wzorami $f_X = \lambda n.\ 0$

Skoro mamy już ustalony element najmniejszy ($f_\varnothing$), to następna funkcja w łańcuchu musi mieć dziedzinę, która różni się od poprzedniej o co najmniej jeden element, więc weźmy taką, która różni się o jeden, na przykład $A = \{0\}$. Istotnie $f_\varnothing \preceq f_A$. Analogicznie, następna funkcja, też musi różnić się o co najmniej jeden element w dziedzinie, aby być w relacji z poprzednimi i być różną. Weźmy za dziedzinę zbiór $B = \{0, 1\}$. Istotnie $f_\varnothing \preceq f_B$ oraz $f_A \preceq f_B$. Można kontynuować takie działanie aż otrzymamy $f_{\mathbb{N}}$. I wtedy jasne jest, że moc takiego łańcucha jest równa $\aleph_0$. Więc izomorfizm pomiędzy takim łańcuchem a $\langle [0;1], \leq \rangle$ nie istnieje. Innym argumentem za tym że taki izomorfizm nie istnieje, może być fakt, że taki żaden maksymalny łańcuch w tym porządku nie jest gęsty (na przykład pomiędzy $f_\varnothing$ i $f_{\{0\}}$ nie istnieje żadna inna funkcja pomiędzy), a łańcuch $\langle [0;1], \leq \rangle$ jest trywialnie gęsty.