Pmat - wspólna praca domowa z dnia 24.10.2023

Gracjan Barski, album: 448189

November 5, 2023

Zadanie 80:

Funkcja f **nie jest iniekcją** (dlaczego?).

Kontrprzykład: Weźmy takie argumenty funkcji:

$$f(\{1,2\},\{2\}) = \{1\} = f(\{1,2,3\},\{2,3\})$$

Funkcja f **jest surjekcją**:

Aby otrzymać dowolny zbiór $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, weźmy jako argument funkcji parę uporządkowaną $\langle A, \varnothing \rangle$. Wtedy mamy:

$$f(A, \varnothing) = A$$

Teraz **obraz zbioru** $\mathcal{P}(Pr) \times \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$; oznaczę ten zbiór par jako B. Pokażę, że $f(B) = \mathcal{P}(Pr)$:

Biorąc za pierwszy argument funkcji dowolny zbiór $C \in \mathcal{P}(Pr)$, a za drugi argument weźmy NParz[1], po zastosowaniu przekształcenia f otrzymamy zbiór C (żaden element C nie jest elementem zbioru NParz, bo C zawiera tylko elementy parzyste).

Teraz pokazać, że nie można dostać nic innego niż podzbiory zbioru liczb parzystych.

Istotnie, z definicji różnicy zbiorów, wartością funkcji f, może być tylko zbiór, którego elementy są w pierwszym z argumentów tej funkcji. Pierwszym argumentem jest podzbiór liczb parzystych, więc drugim argumentem może być dowolny nieskończony podzbiór $\mathbb{N}$ i nie zmieni to faktu że wartością funkcji będzie zbiór który zawiera tylko elementy parzyste, a taki zbiór oczywiście należy do $\mathcal{P}(Pr)$.

Teraz **przeciwobraz zbioru** $\{\varnothing\}$. Po pierwsze, $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (bo $\varnothing \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$), więc można rozpatrywać jego przeciwobraz Jeśli wynikiem różnicy zbiorów $C - D$ ma być zbiór pusty, to wtedy $C \subseteq D$. I to jest jedyny warunek; z tego:

$$f^{-1}(\{\varnothing\}) = \{\langle C, D \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid C \subseteq D\}$$

Zadanie 52:

Zdefiniujmy formalnie zbiór $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{P}(T) \,|\, \forall_{s \in S} \exists_{a \in A} \; a \in T_s\}$$

Zakładamy niepustość $\mathcal{K}$.
Weźmy dowolną rodzinę zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$. Aby udowodnić równość:

$$\bigcup_{s \in S} \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{Y \in \mathcal{K}} \bigcup_{t \in Y} A_t$$

Udowodnię inkluzję w obie strony; oznaczę lewą stronę równania jako L, a prawą jako P.

$(\subseteq)$ Weźmy dowolny x taki że $x \in L$. Z definicji, to oznacza że:

$$\exists_{s \in S} \forall_{t \in T_s} \; x \in A_t$$

Czyli pisząc słowami, istnieje taki zbiór $T_s \in \{T_s\}_{s \in S}$, że dla każdego $t \in T_s$, mamy $x \in A_t$. Wskażmy ten zbiór T_s i nazwijmy go T_{s_0}.

[1] NParz oznacza tu zbiór liczb naturalnych nieparzystych

Nasz cel w tym momencie to pokazać, że $x \in P$, czyli:

$$\forall_{Y \in \mathcal{K}} \exists_{t \in Y} \ x \in A_t$$

Czyli pisząc słowami, dla każdego zbioru $Y \in \mathcal{K}$ istnieje taki element $t \in Y$, że $x \in A_t$

Teraz weźmy dowolny $Y \in \mathcal{K}$. Z definicji zbioru $\mathcal{K}$, istnieje taki element y, że $y \in T_{s_0}$. Dalej, definicja $\mathcal{K}$ mówi też, że jest tam dowolny zbiór Y, który zawiera element wspólny z każdym z T_s. Biorąc różne zbiory Y, będziemy mogli otrzymywać różne y, które należą do T_{s_0} (wtedy oczywiście $x \in A_y$). Więc można wskazać konkretne zbiory Y, które wyczerpują wszystkie elementy z T_{s_0}.

A teraz formalnie, można wziąć taki podzbiór $X \subseteq \mathcal{K}$, że:

$$\forall_{t \in T_{s_0}} \exists_{Y \in X} \ t \in Y$$

A więc z każdego $Y \in X$ wskazujemy dany element t ze zbioru T_{s_0}; co najważniejsze mamy gwarancję, że taki element istnieje, oraz że wszystkie elementy $t \in T_{s_0}$ zostaną wskazane. Wtedy z założenia $(x \in L)$, dla każdego takiego elementu $y \in Y$ mamy $x \in A_y$

Co ze zbiorami które należą do $\mathcal{K} - X$? One nie są problemem, one również zawierają przynajmniej po jednym elemencie z T_{s_0}, więc będziemy wskazywać właśnie te elementy, które już zostały wskazane wcześniej. Pokazaliśmy właśnie, że jeśli $x \in L$, to możemy z każdego $Y \in \mathcal{K}$ wskazywać takie $t \in Y$, że $t \in T_{s_0}$, co dowodzi, że $x \in P$.

$(\supseteq)$ Skorzystamy z prawa kontrapozycji: $(p \longrightarrow q) \iff (\neg q \longrightarrow \neg p)$.

Chcemy udowodnić, że $x \in P \implies x \in L$. Jest to równoważne z $x \notin L \implies x \notin P$.

Weźmy dowolny x taki że $x \notin L$. Z definicji to oznacza, że:

$$\neg \ \exists_{s \in S} \forall_{t \in T_s} \ x \in A_t$$
$$\forall_{s \in S} \exists_{t \in T_s} \ x \notin A_t$$

Nasz cel w tym momencie to pokazać, że $x \notin P$, czyli:

$$\neg \ \forall_{Y \in \mathcal{K}} \exists_{t \in Y} \ x \in A_t$$
$$\exists_{Y \in \mathcal{K}} \forall_{t \in Y} \ x \notin A_t$$

Z założenia, każdy T_s ma takie t, że $x \notin A_t$, nazwijmy te konkretne t w każdym T_s jako t_{0_s}. (Wtedy mamy $\forall_{s \in S} \ x \notin A_{t_{0_s}}$)
Z definicji $\mathcal{K}$ istnieje takie $Y_0 \in \mathcal{K}$, że:

$$Y_0 = \{t_{0_s} \mid s \in S\}$$

Ponieważ każdy T_s ma konkretny element t_{0_s}, więc taki zbiór Y_0 spełnia definicję $\mathcal{K}$.

Z tego:

$$\forall_{t \in Y_0} \ x \notin A_t$$

Z powyższego zdania i z faktu, że $Y_0 \in \mathcal{K}$:

$$\exists_{Y \in \mathcal{K}} \forall_{t \in Y} \ x \notin A_t$$

□

Zadanie 134:

a) Φ jest iniekcją $\iff$ ϕ jest surjekcją.

Udowodnię implikacje w obie strony

$(\implies)$ Φ jest iniekcją, to znaczy, dla dowolnych $f_1, f_2 \in A^C$ mamy:

$$f_1 \neq f_2 \implies \Phi(f_1) \neq \Phi(f_2) \tag{1}$$

Dla ścisłości, funkcje f_1, f_2 są różne, gdy $\exists_{x \in C} \quad f_1(x) \neq f_2(x)$.

Zależność (1) jest prawdziwa dla dowolnych różnych $f : C \longrightarrow A$. Warto zauważyć, że istnieją dwie takie funkcje które są różne, ponieważ A zawiera co najmniej 2 elementy (gdyby zbiór A zawierał jeden, to istniałaby tylko jedna funkcja $C \longrightarrow A$, więc nie można by było wziąć dwóch różnych funkcji). Więc w szczególności możemy wybrać taką parę funkcji f_l i f_k, że te funkcje są różne tylko dla jednego argumentu. nazwijmy go $c_0 \in C$.

Jako że ten argument c_0 jest dowolny (bo funkcje są dowolne), to funkcja ϕ musi przyjmować wartość dowolnego c_0. Więc musi być surjekcją.

($\Longleftarrow$) ϕ jest surjekcją. Weźmy dwie dowolne funkcje $f_1, f_2 \in A^C$ takie że $f_1 \neq f_2$. Możemy takie wziąć, ponieważ A ma co najmniej 2 elementy. Wtedy $\exists_{c \in C} \quad f_1(c) \neq f_2(c)$, nazwijmy tą wartość c_0.

Jeśli ϕ jest surjekcją z B do C, to w szczególności ϕ przyjmuje wartość c_0 dla pewnego argumentu $b_0 \in B$.

Teraz, weźmy $\Phi(f_1)$ i $\Phi(f_2)$. Z powyższego wynika:

$$\Phi(f_1)(b_0) \neq \Phi(f_2)(b_0)$$

Więc istotnie Φ jest iniekcją. □

b) Φ jest surjekcją $\Longleftrightarrow$ ϕ jest iniekcją.

Udowodnię implikacje w obie strony:

($\Longrightarrow$) Skorzystamy z prawa kontrapozycji: $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$. Załóżmy, że ϕ nie jest iniekcją, wtedy

$$\exists_{b_1, b_2 \in B} \quad \phi(b_1) = \phi(b_2)$$

A z tego mamy:

$$\forall_{f \in A^C} \quad \Phi(f)(b_1) = \Phi(f)(b_2)$$

Więc nie możemy dostać z Φ funkcji, która elementom b_1 i b_2 przydziela różne wartości, więc nie jest surjekcją.

($\Longleftarrow$) Weźmy dowolną funkcję $\phi : B \longrightarrow C$, która jest iniekcją. Wtedy każdy element z B jest mapowany unikalnie na C. Weźmy zbiór $D = \phi(B)$, który będzie obrazem zbioru B (elementy zbioru D to elementy ze zbioru C; niekoniecznie wszystkie). Jako że ϕ jest iniekcją, to zbiór D jest równoliczny z B.

Teraz biorąc dowolną funkcję $f \in A^C$, możemy otrzymać dowolną funkcję $B \longrightarrow A$, która traktuje elementy ze zbioru D jako mapowanie zbioru B i przekształca je w zbiór A. Oczywiście, funkcja f, może też przyjąć jako argumenty elementy ze zbioru $C - D$ (o ile C zawiera elementy z poza D). Jednak to nie problem, dlatego że w złożeniu $f \circ \phi$, funkcja f nigdy ich nie przyjmie, bo funkcja ϕ nigdy ich nie zwróci (bo są z poza obrazu $f(B)$). □