Zadanie 2 z Analizy Matematycznej dla Informatyków

Autor rozwiązania: Gracjan Barski, album: 448189

November 23, 2023

Rozwiązanie:

Najpierw przekształćmy:

$$x_n = \sqrt{7n+1} - \sqrt{7n} = \frac{1}{\sqrt{7n+1} + \sqrt{7n}}$$

Teraz, x_n jest malejący:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{7n+8} + \sqrt{7n+7}} - \frac{1}{\sqrt{7n+1} + \sqrt{7n}} < 0$$

Gdzie ostatnia nierówność wynika z $\forall_{n \in \mathbb{N}} \ \sqrt{7n+8} + \sqrt{7n+7} > \sqrt{7n+1} + \sqrt{7n}$. Rozważmy jeszcze zbieżność x_n, z operacji arytmetycznych na granicach mamy:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{7n+1} + \sqrt{7n}} \longrightarrow \frac{1}{\infty + \infty} = 0$$

Co jeśli $p = 0$? Prawdziwa jest własność $\forall_{n \in \mathbb{N}} \ x_n \neq 0$, więc $\forall_{n \in \mathbb{N}} \ x_n^0 = 1$ Więc szukany szereg to $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, a wiadomo (z ćwiczeń) że taki szereg jest rozbieżny. Z tego wnioskujemy, że jest bezwzględnie rozbieżny (z kontrapozycji twierdzenia o szeregach bezwzględnie zbieżnych).

W pozostałych przypadkach najpierw rozważmy zwykłą zbieżność, a potem zbieżność bezwzględną.

1) $p > 0$: Wtedy oczywiście $x_n^p \longrightarrow 0$ (wynika to z tego samego rozumowania co zbieżność x_n). Mamy też x_n^p malejący, a to wynika z $x_{n+1} < x_n \implies x_{n+1}^p < x_n^p$ (ponieważ funkcja wykładnicza x^p jest rosnąca gdy p jest dodatnie). Więc mamy spełnione warunki kryterium Leibniza.
   Z tego wnioskujemy $\sum_{n \in \mathbb{N}}^{\infty}(-1)^n x_n^p$ zbieżny.

2) $p < 0$: Rozpatrzmy granicę ciągu $(-1)^n x_n^p$, jeśli zrobimy podstawienie $k = -p$ (wtedy $k > 0$), to otrzymamy:
   $$(-1)^n x_n^p = (-1)^n(\sqrt{7n+1} + \sqrt{7n})^k$$
   A ponieważ człon ciągu $(\sqrt{7n+1} + \sqrt{7n})^k \longrightarrow \infty$ dla dowolnego $k > 0$, to ciąg jest rozbieżny (alternuje pomiędzy ∞, a $-\infty$).

   Więc ciąg nie spełnia koniecznego kryterium zbieżności $\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ zbieżny} \implies a_n \longrightarrow 0\right)$, więc jest rozbieżny, a co za tym idzie rozbieżny bezwzględnie.

Te przypadki wyczerpały wszystkie możliwe wartości p, więc teraz zbieżność bezwzględna:

Prawdą jest że $\forall_{n \in \mathbb{N}} \ \forall_{p \in \mathbb{R}} \ x_n^p > 0$, więc zbieżność bezwzględna sprowadza się do zbieżności $\sum_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} x_n^p$. Poczyńmy obserwację: x_n^p jest asymptotycznie podobne do $\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ (dlaczego?). Oba są zawsze niezerowe, a granica ich ilorazu wynosi:

$$\frac{x_n^p}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}} = \left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{7n+1} + \sqrt{7n}}\right)^p = \left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{7 + \frac{1}{n}} + \sqrt{7}\right)}\right)^p = \left(\frac{1}{\sqrt{7 + \frac{1}{n}} + \sqrt{7}}\right)^p \longrightarrow \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{7}}\right)^p \neq 0$$

Przy czym ostatni brak równości jest prawdziwy dla każdego $p \in \mathbb{R}$, a to oznacza, że faktycznie te ciągi są asymptotycznie podobne. Łącząc to z faktem, że $\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ jest zawsze dodatnie, otrzymujemy równoważność pomiędzy zbieżnościami szeregów tych ciągów. Więc wystarczy sprawdzić kiedy $\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ jest zbieżne.

Z wykładu wiadomo że $\frac{1}{n^k}$ jest zbieżne wtedy i tylko wtedy gdy $k > 1$. Podstawiając szukany ciąg otrzymujemy $\frac{p}{2} > 1$, więc $p > 2$. Gdy $k \leq 1$ (czyli $p \leq 2$) to ciąg jest rozbieżny.

Podsumowując:

1. $p \leq 0$ szereg jest rozbieżny.
2. $p \in (0; 2]$ szereg jest zbieżny warunkowo.
3. $p > 2$ szereg bezwzględnie zbieżny.

$\square$