# PMat - wspólna praca domowa seria IV

Gracjan Barski, album: 448189

February 15, 2024

**Zadanie 417:**

$\langle X, \leq \rangle$ dowolny porządek i dowolne $A, B \subseteq X$.

(a) Stwierdzenie fałszywe. Kontrprzykład:

$$\begin{aligned} &X = \mathbb{Q} \\ &\leq = \leq_0 \\ &A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < \sqrt{2}\} \\ &B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 2\} \end{aligned}$$

Gdzie $\leq_0$ oznacza "standardową" relację nierówności.
Jasnym jest, że $\sup(A \cup B) = 2$, jednak $\sup A$ nie istnieje.

$\leq_0$ już jest liniowy więc liniowość tego porządku nic nie zmienia.

(b) Stwierdzenie fałszywe. Kontrprzykład:

$$\begin{aligned} &X = \mathbb{N} \\ &\leq = \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \\ &A = \{1\} \\ &B = \{2\} \end{aligned}$$

$\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$ trywialnie jest porządkiem częściowym.
Jasnym jest, że $\sup A = 1$ oraz $\sup B = 2$, jednak $\sup(A \cup B)$ nie istnieje ponieważ elementy $1, 2$ są porównywalne tylko same ze sobą, więc nie istnieje żaden element "większy" od obu z nich.

Jednak jeśli $\leq$ ma być liniowe to zdanie będzie prawdziwe.
Oznaczmy $\sup A = a$, $\sup B = b$. WLOG $a \geq b$, wtedy wiemy że:

$$\forall_{x \in A}\, x \leq a \quad \wedge \quad \forall_{y \in B}\, y \leq a$$

Więc $a$ jest ograniczeniem górnym $A \cup B$. Jednak znalezienie mniejszego ograniczenia nie jest możliwe, ponieważ $a$ było już supremum $A$, a w wyniku operacji sumowania zbiorów, nic z nich nie ubyło, więc nie da się zmniejszyć kresu. Więc $\sup(A \cup B) = a$.

(c) Stwierdzenie prawdziwe. Oznaczmy $\sup A = a$, $\sup B = b$, $\sup(A \cup B) = c$, $\sup\{a, b\} = d$.

Z definicji $d$, wiemy że $a \leq d \wedge b \leq d$.

Z definicji $a$, wiemy że: $\forall_{x \in A}\, x \leq a$.

Z przechodniości relacji $\leq$, mamy: $\forall_{x \in A} x \leq d$.

Poprzez analogiczne rozumowanie dla $B$ otrzymujemy fakt, że $d$ jest ograniczeniem górnym $A \cup B$. Jeśli $d$ byłoby najmniejszym możliwym ograniczeniem, to byłoby kresem, więc byłoby równe $c$ a to kończyłoby zadanie. W innym przypadku, jeśli byłoby nieporównywalne z $c$, to wtedy w ogóle założenia zadania nie są spełnione bo $\sup(A \cup B)$ nie istniałoby (ponieważ kres nie byłby jednoznacznie określony). Dlatego teraz załóżmy, że $d$ nie jest najmniejszym możliwym kresem, to znaczy $c \leq d$.

Wtedy istnieje jakieś $e$, które jest ograniczeniem górnym $A \cup B$ spełniające $e \leq d$. Jednak wtedy nie zachodzi $(a \leq e \wedge b \leq e)$, ponieważ jeśli by zachodziło to wtedy $d$ nie byłoby kresem $\{a, b\}$. Więc $e$ nie jest ograniczeniem górnym któregoś ze zbiorów $A, B$, więc nie jest też ograniczeniem $A \cup B$, co prowadzi do sprzeczności (ponieważ $e$ miało być ograniczeniem tej sumy), więc takie $e$ nie istnieje. Z tego wnioskujemy, że $d$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym $A \cup B$, więc $c = d$.

Jeśli $\leq$ ma być liniowy to nic się nie zmienia. $\square$

**Zadanie 433:**

$r$ porządek częściowy na $A$. $f\colon A \xrightarrow{\text{bij}} A$. $g\colon A\times A \to A\times A$. $g(x,y) = \langle f(x), f(y)\rangle$.

(a) $g(r) \subseteq r \iff f$ jest monotoniczna ze względu na porządek $r$.

($\Longrightarrow$) Weźmy dowolne $x, y \in A$ takie że $x\ r\ y$. Z definicji $g$, wiemy że $\langle f(x), f(y)\rangle \in g(r)$. Ale wiemy że $g(r) \subseteq r$, więc z definicji inkluzji zbiorów mamy $f(x)\ r\ f(y)$, więc $f$ jest monotoniczna ze względu na porządek $r$.

($\Longleftarrow$) Weźmy dowolne $x, y \in A$ takie że $x\ g(r)\ y$ **(1)**, oraz weźmy $a, b \in A$ takie że $f(a) = x$ oraz $f(b) = y$. Takie $a, b$ istnieją, ponieważ $x, y$ należą do obrazu funkcji. Z definicji $g(r)$ oraz z **(1)** wiemy że $a\ r\ b$, a z monotoniczności $f$ mamy $f(a)\ r\ f(b)$ czyli $x\ r\ y$, więc istotnie $g(r) \subseteq r$.

Czyli $f$ może być dowolna, nie musi być bijekcją.

(b) $r \subseteq g(r) \iff \forall_{x,y\in A}\ (f(x)\ r\ f(y) \Longrightarrow x\ r\ y)$

($\Longrightarrow$) Weźmy dowolne $x, y \in A$ takie że $f(x)\ r\ f(y)$. Z inkluzji $r \subseteq g(r)$ mamy $\langle f(x), f(y)\rangle \in g(r)$. Ale teraz z faktu, że $f$ jest iniekcją (musi być ponieważ moglibyśmy dostać $x'$ i $y'$ takie że $\langle x', y'\rangle \notin r$) i z definicji $g(r)$ mamy $x\ r\ y$, więc zachodzi $\forall_{x,y\in A}\ (f(x)\ r\ f(y) \Longrightarrow x\ r\ y)$.

($\Longleftarrow$) Weźmy dowolne $x, y \in A$ takie że $x\ r\ y$, oraz weźmy $a, b \in A$ takie że $f(a) = x$ oraz $f(b) = y$. Takie $a, b$ istnieją ponieważ $f$ jest surjekcją. Teraz z założenia $x\ r\ y$ mamy $f(a)\ r\ f(b)$, a to z warunku po prawej stronie oryginalnej równoważności daje $a\ r\ b$. Z definicji $g$, wiemy że $\langle f(a), f(b)\rangle \in g(r)$, a to z definicji $a, b$ daje: $\langle x, y\rangle \in g(r)$, więc istotnie $r \subseteq g(r)$. $\square$

W tym podpunkcie założenie, że $f$ jest bijekcją było istotne

**Zadanie 594:**

Jakiej mocy jest zbiór wszystkich łańcuchów? (Oznaczmy go $X$)

(a) W zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$ uporządkowanym przez relację podzielności.

Wiemy że $|X| \le \mathfrak{c}$, ponieważ wszystkich łańcuchów jest na pewno mniej niż wszystkich podzbiorów liczb naturalnych bez 0 (chociażby dlatego, że podzbiór $\{2, 3\}$ nie jest łańcuchem), a zbiór wszystkich podzbiorów $\mathbb{N} - \{0\}$ ma moc $\mathfrak{c}$. Teraz znaleźć dolne ograniczenie i będzie gotowe.

Weźmy nieskończony zbiór $P = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ składający się z kolejnych naturalnych potęg dwójki. Jego moc to $\aleph_0$, ponieważ istnieje bijekcja $f\colon P \to \mathbb{N}$, określona $f(n) = \log_2(n)$. Wszystkie elementy w nim są postaci $2^p$ dla pewnego $p \in \mathbb{N}$. Biorąc dwa dowolne różne elementy $2^k, 2^l \in P$ dla $k, l \in \mathbb{N}$ $(k \ne l)$, zachodzi $2^k \mid 2^l$ lub $2^l \mid 2^k$. Więc wszystkie elementy są porównywalne ze sobą nawzajem, więc istotnie każdy podzbiór $P$ jest łańcuchem w tym porządku. Z tego, że $|P| = \aleph_0$, otrzymujemy $|\mathcal{P}(P)| = \mathfrak{c}$. Więc łańcuchów które są podzbiorami $P$ jest $\mathfrak{c}$, ale tych łańcuchów w $X$ jest więcej (chociażby $\{3, 9\}$), więc $|X| \ge \mathfrak{c}$.

Z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy $|X| = \mathfrak{c}$.

(b) W zbiorze słów nad alfabetem $\{a, b\}$ uporządkowanym prefiksowo.

Wiadomo, że $X \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\}^*)$. Z wykładu wiadomo, że $|\{a, b\}^*| = \aleph_0$, więc $|\mathcal{P}(\{a, b\}^*)| = \mathfrak{c}$, więc $|X| \le \mathfrak{c}$. Teraz rozważmy zbiór $A$ zdefiniowany następująco:

$$\epsilon \in A$$
$$w \in A \Longrightarrow w \cdot a \in A$$

Gdzie $\cdot$ oznacza konkatenację słów. Teraz weźmy dowolne dwa różne elementy $A$, oczywiście jeden z nich jest prefiksem drugiego (ponieważ składają się z samych $a$ lub element jest pusty i są różnej długości). Analogiczne rozumowanie wykazuje, że dowolny podzbiór $A$ jest łańcuchem. Oczywiście $A \sim \mathbb{N}$ (prosta bijekcja $f\colon A \to \mathbb{N}$, gdzie $f(w) = |w|$), więc $|A| = \mathbb{N}$. Wiemy że każdy podzbiór $A$ jest łańcuchem, a skoro $A$ to tych łańcuchów jest $\mathfrak{c}$, ale łańcuchów w $X$ jest więcej niż tylko te złożone z elementów z $A$ (na przykład $\{a, ab\}$), więc $|X| \ge \mathfrak{c}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy $|X| = \mathfrak{c}$.

(c) W zbiorze słów nad alfabetem $\{a, b\}$ uporządkowanym leksykograficznie.

Tutaj wszystko działa jak w podpunkcie (b), tak samo wszystkie podzbiory $A$ są łańcuchami w tym porządku (ponieważ elementy składają się z samych $a$ lub element jest pusty i są różnej długości), więc tutaj również $|X| = \mathfrak{c}$.