Wspólna praca domowa z Analizy 2

Gracjan Barski, album: 448189

March 26, 2024

Rozwiązanie:

(a) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ jest poprawnie określona.

W mianowniku nigdy nie występuje 0: $\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}} \, 2^n + x^2 > 0$.

Oraz szereg funkcyjny dla każdego $x \in \mathbb{R}$ jest zbieżny: $\forall_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{2^n + x^2} < \frac{1}{2^n}$. Jako że $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ jest zbieżny, to z kryterium porównawczego $F(x)$ również zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Więc istotnie funkcja jest poprawnie określona $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Z poprzedniego podpunktu mamy już udowodnioną zbieżność punktową. Teraz weźmy pochodną wyrażenia z oryginalnej sumy i pokażmy, że szereg tych pochodnych jest jednostajnie zbieżny, otrzymujemy:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2^n + x^2}\right) = \frac{-2x}{(2^n + x^2)^2}$$

Teraz rozważmy normę tej pochodnej:

$$\left\| \frac{-2x}{(2^n + x^2)^2} \right\| \leq \left\| \frac{-2x}{2^n + x^2} \right\| \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

Gdzie pierwsza nierówność wynika z tego, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}} \, 2^n + x^2 \geq 1$, a druga wynika z przekształcenia wyrażenia $0 \leq (2^{\frac{n}{2}} + x)^2$.

Wiadomo, że $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$ jest zbieżny, więc wnioskujemy, że

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{-2x}{(2^n + x^2)^2}$$

jest jednostajnie zbieżny.Z twierdzenia VI.4 o różniczkowalności granicy (Uwaga 2.) wnioskujemy, że $F(x)$ jest różniczkowalna.

Co więcej dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja $\frac{-2x}{(2^n+x^2)^2}$ jest ciągła, więc z twierdzenia VI.3 o ciągłości granicy (Uwaga 2.) wnioskujemy, że $F'(x)$ jest ciągła.

(c) Rozważmy rozwinięcie Taylora o środku $x_0 = 0$ dla $F(x)$:

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)x + \frac{F''(x_0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$F(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x_0^2} \overset{\text{x}_0=0}{=} 2$$

$$F'(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-2x}{(2^n + x^2)^2} \overset{\text{x}_0=0}{=} 0$$

$$\frac{F''(x_0)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{6x^4 + 2^{n+2}x^2 - 2^{2n+1}}{(4^n + 2^{n+1}x^2 + x^4)^2} \overset{\text{x}_0=0}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{-2 \cdot 2^{2n}}{4^{2n}} = -\frac{4}{3}$$

Mogliśmy wziąć drugą pochodną $F(x)$ w $x = 0$, ponieważ

$$\lim_{x \to 0^-} F''(x) = \lim_{x \to 0^+} F''(x)$$

więc $F'(x)$ jest różniczkowalna w tym punkcie.

Podstawiamy rozwinięcie Taylora za $F(x)$ do wyrażenia z treści:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - 2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - \frac{4}{3}x^2 + o(x^2) - 2}{x^2} \to -\frac{4}{3}$$

□