GAL - praca domowa z dnia 12.10.2023

Gracjan Barski

October 16, 2023

Zadanie 1:

Udowodnij, że dla dowolnych liczb z, $w \in \mathbb{C}$ następujące warunki są równoważne:

(1) $|z - w| < |1 - z \cdot \overline{w}|$

(2) $(|z| < 1 \wedge |w| < 1) \vee (|z| > 1 \wedge |w| > 1)$

Dowód: Weźmy dowolne liczby z, $w \in \mathbb{C}$

Weźmy warunek (1) i przekształćmy go równoważnie; Korzystamy z tego, że obie strony nierówności są nieujemne (bo to moduły liczb zespolonych), więc można je podnieść do kwadratu:

$$|z - w| < |1 - z \cdot \overline{w}|$$
$$|z - w|^2 < |1 - z \cdot \overline{w}|^2$$

Korzystamy własności liczb zespolonych - dla dowolnych z, $w \in \mathbb{C}$ mamy $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ oraz $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{\overline{z}} = z$ mamy więc:

$$(z - w)(\overline{z - w}) < (1 - z \cdot \overline{w})(\overline{1 - z \cdot \overline{w}})$$
$$(z - w)(\overline{z} - \overline{w}) < (1 - z \cdot \overline{w})(\overline{1} - \overline{z \cdot \overline{w}})$$
$$(z - w)(\overline{z} - \overline{w}) < (1 - z \cdot \overline{w})(1 - \overline{z} \cdot w)$$

Wymnażając i skracając mamy:

$$z \cdot \overline{z} - z \cdot \overline{w} - \overline{z} \cdot w + w \cdot \overline{w} < 1 - \overline{z} \cdot w - z \cdot \overline{w} + z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}$$
$$|z|^2 + |w|^2 < 1 + |z|^2 \cdot |w|^2$$
$$|z|^2 - |z|^2 \cdot |w|^2 + |w|^2 - 1 < 0$$
$$|z|^2(1 - |w|^2) + |w|^2 - 1 < 0$$
$$(|z|^2 - 1)(1 - |w|^2) < 0$$

Teraz po pomnożeniu stronami razy -1:

$$(|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1) > 0$$

Więc teraz wystarczy udowodnić równoważność:
$(|z| < 1 \wedge |w| < 1) \vee (|z| > 1 \wedge |w| > 1) \iff (|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1) > 0$

Najpierw udowodnię w prawą stronę:
$(\Longrightarrow)$ Weźmy przypadek 1°: $|z| < 1 \wedge |w| < 1$

Wtedy z własności modułu mamy również:

$$0 \leq |z| < 1 \wedge 0 \leq |w| < 1$$

Z tych nierówności, otrzymuję równoważnie:

$$-1 \leq |z|^2 - 1 < 0 \wedge -1 \leq |w|^2 - 1 < 0$$

Iloczyn dwóch liczb z przedziału $[-1; 0)$ zawsze będzie większy od zera.

Weźmy przypadek 2°: $(|z| > 1 \wedge |w| > 1)$

Wtedy otrzymujemy nierówności:

$$|z|^2 - 1 > 0 \wedge |w|^2 - 1 > 0$$

Dwie liczby większe od zera pomnożone przez siebie dają liczbę większą od zera.

Teraz w drugą stronę:
$(\Longleftarrow)$ Jeśli mamy: $(|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1) > 0$, to są dwie możliwości:

1°: Oba nawiasy większe od zera; $|z|^2 - 1 > 0 \wedge |w|^2 - 1 > 0$

Wtedy $|z|^2 > 1 \wedge |w|^2 > 1$, jako że obie strony są większe od 0, to możemy spierwiastkować stronami, otrzymamy:

$$|z| > 1 \wedge |w| > 1$$

2°: Oba nawiasy mniejsze od zera; $|z|^2 - 1 < 0 \wedge |w|^2 - 1 < 0$

Wtedy $|z|^2 < 1 \wedge |w|^2 < 1$, jako że obie strony są większe od 0, to możemy spierwiastkować stronami, otrzymamy:

$$|z| < 1 \wedge |w| < 1$$

Możliwe przypadki zostały wyczerpane, więc implikacja zachodzi.

Zostały udowodnione implikacje w obie strony, co dowodzi równoważności. $\square$