# Praca domowa - ćwiczenia P.Mat

Gracjan Barski

October 10, 2023

zadanie 26: Sprawdzić, czy dla **dowolnych** zbiorów $A, B, C$ zachodzą podane równości.

a) $(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = C$

Nie zachodzi; Kontrprzykład: Weźmy takie $A, B, C$:

$$A = \{1\}$$
$$B = \{2\}$$
$$C = \{1\}$$

Wtedy lewa strona równania równa jest: $\varnothing$, a prawa strona równa jest $\{1\}$.

b) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$

Zachodzi, dowód: Weźmy dowolne zbiory $A, B, C$. Aby to udowodnić, udowodnię inkluzję w obie strony. Zacznę od inkluzji w prawo.

($\subseteq$) Weźmy dowolnego $x$, takiego że $x \in A$. Teraz mamy dwa przypadki:

1. $x \in B$
   Jeśli $x \in A$ i $x \in B$, to z definicji $x \in A \cap B$.
   Jeśli $x \in A \cap B$, to z definicji sumy zbiorów $x \in (A \cap B) \cup (A - B)$.
2. $x \notin B$
   Z definicji różnicy zbiorów $x \in A - B$, co implikuje że $x \in (A \cap B) \cup (A - B)$.

W każdym z przypadków mamy $x \in (A \cap B) \cup (A - B)$, co dowodzi inkluzję.

($\supseteq$) Weźmy dowolnego $x$, takiego że $x \in (A \cap B) \cup (A - B)$. Wtedy z definicji mamy dwa dwa przypadki:

1. $x \in A \cap B$
   z definicji iloczynu zbiorów, $x \in A$.
2. $x \in A - B$
   z definicji różnicy zbiorów: $x \in A$.

Mogą zajść oba przypadki jednocześnie, jednak nic to nie zmienia w rozumowaniu.
W każdym przypadku mamy $x \in A$, co dowodzi inkluzję.

Dowiedliśmy inkluzji zbiorów w obie strony, co z definicji równości zbiorów oznacza, że równość podana w zadaniu zachodzi. $\square$

c) $A - (A - B) = A \cap B$

Zachodzi, dowód: Aby to udowodnić, wykonam szereg równoważnych przekształceń logicznych.

Weźmy dowolne zbiory $A, B, C$. Weźmy dowolnego $x$, takiego że $x \in A - (A - B)$.
Z definicji różnicy zbiorów mamy: $x \in A - (A - B) \iff x \in A \wedge x \notin A - B$.
Otrzymany warunek można zapisać równoważnie:

$$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B) \iff \tag{1}$$
$$x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \iff \tag{2}$$
$$(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \tag{3}$$

Równoważność z (1) do (2) wynika z prawa De Morgana, a równoważność z (2) do (3) wynika z rozdzielności koniunkcji względem alternatywy. Lewa część alternatywy w (3) jest sprzecznością, gdyż oba wykluczające się wzajemnie warunki nie mogą zachodzić jednocześnie. To oznacza, że prawa część alternatywy jest prawdziwa, czyli zachodzi $(x \in A \wedge x \in B)$.
Z definicji $(x \in A \wedge x \in B) \iff x \in A \cap B$. To oznacza, że dowolny $x$, którego wzięliśmy na początku, należy do $A \cap B$. W dowodzie zastosowane były tylko równoważności, więc równość faktycznie jest dowiedziona. $\square$

d) $A \cup (A \cap B) = A$

Zachodzi, dowód: analogicznie jak w b), Weźmy dowolne zbiory $A, B, C$. Inkluzja w lewo:

($\supseteq$) Weźmy dowolnego $x$, takiego że $x \in A$. Wtedy z definicji sumy zbiorów mamy $x \in A \cup (A \cap B)$.

($\subseteq$) Weźmy dowolnego $x$, takiego że $x \in A \cup (A \cap B)$. Wtedy z definicji sumy zbiorów mamy:

$$(x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \iff \tag{1}$$
$$(x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \iff \tag{2}$$
$$(x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \tag{3}$$

Gdzie przejście z (1) do (2) wynika z rozdzielności alternatywy względem koniunkcji, a przejście z (2) do (3) wynika z własności alternatywy ($q \vee q = q$ dla dowolnego $q$).
(3) w szczególności oznacza, że $x \in A$, co udowadnia inkluzję.

Dowiedliśmy inkluzji zbiorów w obie strony, co z definicji równości zbiorów oznacza, że równość podana w zadaniu zachodzi. $\square$

e) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

Zachodzi, dowód: Aby to udowodnić, wykonam szereg równoważnych przekształceń logicznych Weźmy dowolne zbiory $A, B, C$. Weźmy dowolnego $x$, takiego że $x \in (A \cup B) - C$. Wtedy z definicji mamy:

$$x \in (A \cup B) - C \iff \tag{1}$$
$$(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \iff \tag{2}$$
$$(x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \iff \tag{3}$$
$$x \in (A - C) \cup (B - C) \tag{4}$$

Gdzie przejście z (1) do (2) wynika z definicji sumy i różnicy zbiorów, przejście z (2) do (3) wynika z rozdzielności koniunkcji względem alternatywy, a przejście z (3) do (4) wynika z definicji operacji sumy i różnicy zbiorów.
To oznacza, że dowolny $x$, którego wzięliśmy na początku, należy do $(A - C) \cup (B - C)$. W dowodzie zastosowane były tylko równoważności, więc równość faktycznie jest dowiedziona. $\square$