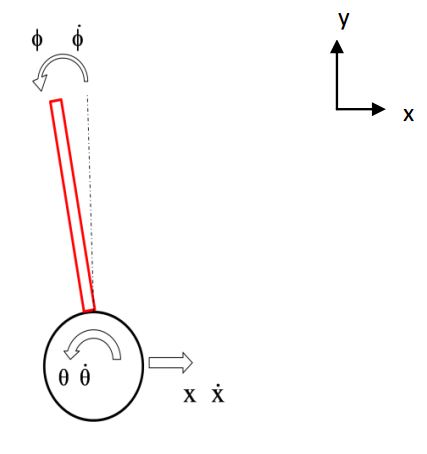
เพนดูลัมผกผัน (Inverted pendulum) เป็นปัญหาพื้นฐานในการเรียนการสอนและในการสาธิตการประยุกต์ทฤษฎีระบบควบคุม เพนดูลัมผกผันเป็นระบบที่มีจุดสมดุลอยู่รอบแกนหมุนด้วยกันสองจุด ได้แก่จุดที่เพนดูลัมตั้งตรงอยู่ในแนวดิ่ง และจุดที่เพนดูลัมทิ้งตัวลงในแนวดิ่ง แต่จุดที่มีเสถียรภาพเมื่อไม่มีตัวควบคุมนั้นจะมีจุดเดียวคือ จุดที่แกนทิ้งตัวลงเท่านั้น ไม่ว่าจะปล่อยเพนดูลัมที่จุดใดก็ตาม เพนดูลัมจะตกลงสู่จุดนี้เสมอ การที่จะทำให้เพนดุลัมนี้สามารถตั้งตรงในแนวดิ่งได้นั้นขึ้นอยู่กับการเพิ่มตัวควบคุมที่เหมาะสมเข้าไปในระบบซึ่งมีอยู่หลากหลายวิธี และยังสามารถออกแบบระบบควบคุมให้เป็นเชิงเส้น หรือไม่เชิงเส้น ทั้งหมดขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้ออกแบบและความเหมาะสม โดยในโครงงานนี้ต้องการออกแบบสร้างยานพาหนะที่ใช้ทฤษฎีของเพนดูลัมผกผันนี้ โดยควบคุมระบบป้อนกลับแบบ PID จึงประมาณค่าเป็นระบบเชิงเส้นเพื่อนำไปออกแบบระบบควบคุมต่อไป

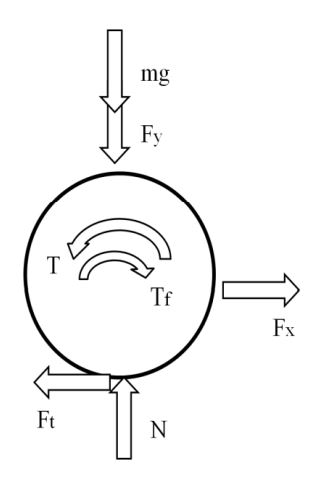
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเพนดูลัมผกผัน



รูปที่ แสดงทิศทางในเชิงบวกของการเคลื่อนที่

จากรูปที่ เป็นการจำลองระบบเพื่อหาจุดรักษาเสถียรภาพและออกแบบตัวควบคุม ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์หาได้โดยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ซึ่งเป็นผลรวมของแรงกระทำจากภายนอก แรงลัพธ์ และ โมเมนต์ลัพธ์ ตามกฎของพลศาสตร์ของนิวตัน

โดยยานพาหนะสองล้อรักษาสมดุลนี้ประกอบด้วยล้อและเพนดูลัม สมการการเคลื่อนที่ของระบบจึงประกอบด้วยการเคลื่อนที่ของล้อและเพนดูลัม ซึ่งแผนภาพของวัตถุอิสระ(Free body diagram : FBD) ของล้อแสดงถึงแรงที่กระทำทั้งหมดต่อล้อ อยู่ในรูปที่



รูปที่ แผนภาพของวัตถุอิสระของล้อ

จากรูปที่ แรงลัพธ์ทิศทางในแนวแกน x เท่ากับแรงเฉื่อยที่อยู่ในทิศทางการเคลื่อนตามกฎของนิวตัน จึงจะได้สมการดังนี้

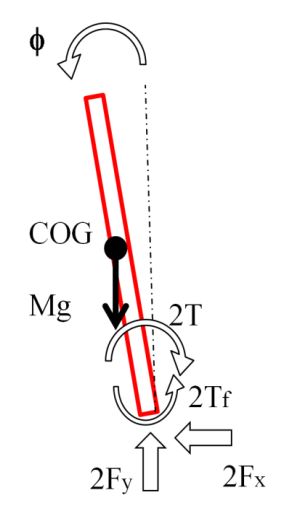
ซึ่งในแนวตั้งนั้นไม่มีการเคลื่อนที่ ดั้งนั้น ผลรวมของแรงในแนวแกน y จึงเท่ากับ 0 จึงได้สมการดังนี้

และ คือแรงที่เกิดขึ้นที่จุดศูนย์กลางของล้อ และ คือแรงฉุดที่เกิดขึ้นระหว่างล้อและผิวสัมผัส นอกจากนี้ยังพิจารณาการเคลื่อนที่แบบหมุน

จากสมการข้างต้น คือ รัศมีของล้อและ คือ แรงเสียดทานที่เกิดจากแรงบิดในทิศทางการหมุน ซึ่งหาได้จาก

โดยที่ b คือ สัมประสิทธิ์ของความเสีอดทาน  
 คือ ความเร็วเชิงมุมของล้อ  
 คือ ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัม

สมการการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมได้จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ซึ่งจะได้แรงลัพธ์ในแนวแกน x และ y และโมเมนต์ลัพธ์ดังรูปที่



รูปที่ แผนภาพของวัตถุอิสระของเพนดูลัม

จากรูปที่ แรงลัพธ์ของทิศทางการเคลื่อนที่ในแนวแกน x และ y จะได้สมการดังนี้

ในทิศทางการเคลื่อนที่แบบหมุน จะได้สมการดังนี้

สมการการเคลื่อนที่ของล้อและเพนดูลัมจะได้ดังนี้