

# Научно-исследоват. работа

## Численное моделирование динамики частиц дробы в рудоразмольной мельнице методом дискретных элементов

Катнов Артем

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

21 мая 2021 г.

## 1 Метод дискретных элементов

## 2 Описание модели

- Контактные силы
- Силы диссипации
- Кинематика частиц
- Модель разрушения

## 3 Доп. материалы

# Метод дискретных элементов

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп. материалы

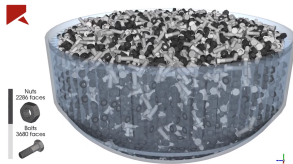


Рис.: Демонстрация сыпучей среды

Cundall P. A. A computer model for simulating progressive, large-scale movement in blocky rock system //Proceedings of the International Symposium on Rock Mechanics, 1971. – 1971.

# Цель работы

## Шаровая мельница

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп. материалы

Цель работы: исследование динамики системы частиц дробии руды во вращающемся барабане рудоразмольной мельницы.

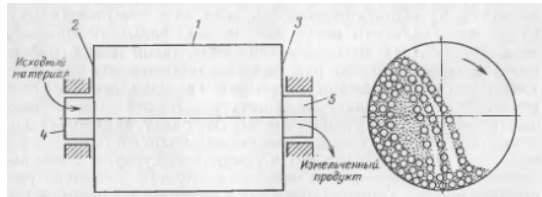


Рис.: Схематическое изображение шаровой мельницы

# Метод дискретных элементов

## Алгоритм метода



Рис.: Общий алгоритм метода дискретных элементов

# Метод дискретных элементов

## Алгоритм метода

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

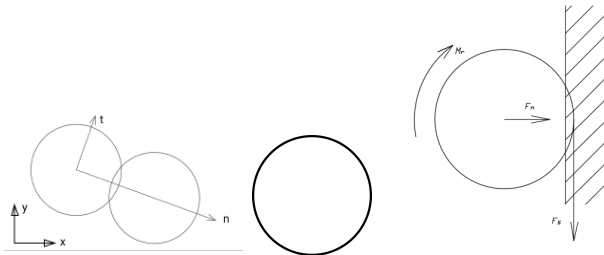
Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

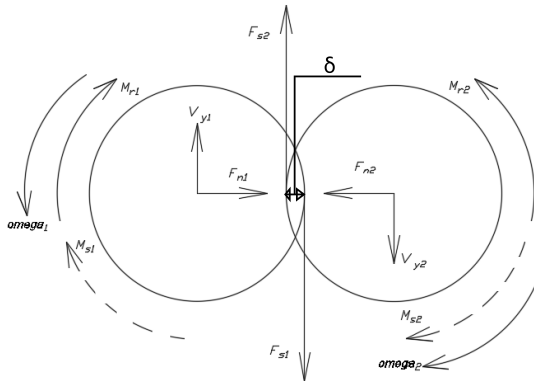
Доп. материалы



# Описание модели

## Контактные силы

Syed Z., Tekeste M., White D. A coupled sliding and rolling friction model for DEM calibration // Journal of Terramechanics. – 2017. – Т. 72. – С. 9-20.



# Описание модели

## Контактные силы в нормальном направлении

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

Силы диссипации

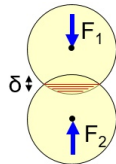
Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп. материалы

$$F_n = k_n \cdot \delta_n \quad (1)$$

где  $F_n$  — контактная сила, возникающая в точке контакта и действующая на оба шара, [Н];  
 $k_n$  — коэффициент жёсткости, [Н/м];  
 $\delta_n$  — взаимное проникновение, так называемое вхождение шаров друг в друга, [м].



$$k_n = \frac{4}{3} \cdot E_{eff} \cdot \sqrt{R_{eff} \cdot \delta_n} \quad (2)$$

где

$$\frac{1}{E_{eff}} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

$$\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



# Описание модели

Контактные силы в тангенциальном и окружном направлениях

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

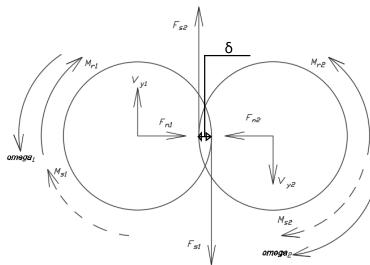
Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп. материалы



$$F_s = \mu_s \cdot F_n \cdot \text{sign}(v_{rel\_tan}) \quad v_{rel\_tan} \neq 0$$

$$M_s = F_s \cdot R_{eff}$$

$$M_r = \mu_r \cdot F_n \cdot R_{eff} \cdot \text{sign}(\omega_{rel}) \quad \omega_{rel} \neq 0$$

$$v_{rel\_tan}^1 = v_y^1 - v_y^2 - (\omega_1 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot R_2)$$

$$\omega_{rel} = \omega_1 + \omega_2$$

# Описание модели

## Контактные силы скольжения

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

**Контактные силы**

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп. материалы

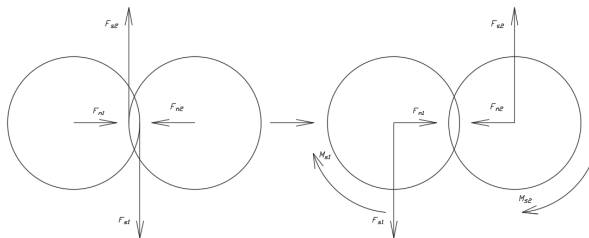


Рис.: Приведение силы трения скольжения к центру элемента

# Описание модели

## Силы диссипации

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

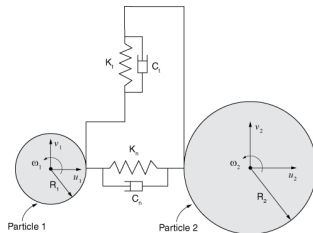
Доп. материалы

$$D_n = c_n \cdot v_{n\_rel}$$

$$D_t = c_t \cdot v_{t\_rel}$$

$$c_n = 2 \cdot \sqrt{m \cdot 2 \cdot E_{eff} \cdot \delta_n \sqrt{R_{eff}} \cdot \zeta_n}$$

$$c_t = 4 \cdot \sqrt{m \cdot 2 \cdot G_{eff} \cdot \delta_n \sqrt{R_{eff}} \cdot \zeta_t}$$



Караваяев А. С., Копысов С. П., Сармакеева А. С.  
Моделирование динамики произвольных тел методом дискретных элементов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – №. 4. – С. 473-482.

# Описание модели

## Кинематика частиц

Научно-исследоват.  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

**Кинематика  
частиц**

Модель  
разрушения

Доп.  
материалы

$$x = x_0 + v_0^x \cdot \Delta t + \frac{a_0^x \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^x \cdot \Delta t^3}{6} \quad (3)$$

$$y = y_0 + v_0^y \cdot \Delta t + \frac{a_0^y \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^y \cdot \Delta t^3}{6} \quad (4)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + v_0^\vartheta \cdot \Delta t + \frac{a_0^\vartheta \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^\vartheta \cdot \Delta t^3}{6} \quad (5)$$

$$b_n = \frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} \quad (6)$$

$$b_t = \frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} \quad (7)$$

$$b_\vartheta = \frac{\varepsilon_{t+\Delta t} - \varepsilon_t}{\Delta t} \quad (8)$$

$$\{b\}^{glob} = [T] \cdot \{b\}^{loc}$$

# Описание модели

## Блок-схема итерационного уточнения

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артём

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

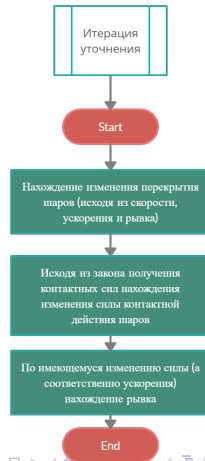
Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп. материалы

$$\left| \frac{a_{t+\Delta t}^k - a_{t+\Delta t}^{k-1}}{a_{t+\Delta t}^k} \right| < \varepsilon_a$$



# Описание модели

## Совокупность уравнений

Научно-исследоват.  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Доп.  
материалы

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{m \cdot a_t} = \overline{F_n} + \overline{F_s} + \overline{D} + \overline{G} \\ \overline{l \cdot \varepsilon_t} = \overline{M_s} + \overline{M_r} \\ \overline{v_t} = \overline{v_{t-\Delta t}} + \overline{a_t} \cdot \Delta t + \frac{\overline{b_t} \cdot \Delta t^2}{2} \\ \overline{s_t} = \overline{s_{t-\Delta t}} + \overline{v_{t-\Delta t}} \cdot \Delta t + \frac{\overline{a_t} \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{\overline{b_t} \cdot \Delta t^3}{6} \\ v_t^\vartheta = v_{t-\Delta t}^\vartheta + \varepsilon_t \cdot \Delta t \\ \vartheta_t = \vartheta_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t}^\vartheta \cdot \Delta t + \frac{\varepsilon_t \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_t^\vartheta \cdot \Delta t^3}{6} \end{array} \right.$$

# Описание модели

## Совокупность уравнений

Научно-исследоват.  
работа

Катнов  
Артём

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

**Кинематика  
частиц**

Модель  
разрушения

Доп.  
материалы

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{m \cdot a_t} = \overline{G} \\ \overline{l \cdot \varepsilon_t} = 0 \\ \bar{v}_t = \bar{v}_{t-\Delta t} + \bar{a}_t \cdot \Delta t \\ \bar{s}_t = \bar{s}_{t-\Delta t} + \bar{v}_{t-\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{\bar{a}_t \cdot \Delta t^2}{2} \\ v_t^\vartheta = v_{t-\Delta t}^\vartheta \\ \vartheta_t = \vartheta_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t}^\vartheta \cdot \Delta t \end{array} \right.$$

# Описание модели

## Модель разрушения

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Дополнительные материалы

$$E_t = E_{t-\Delta t} + E - E_{min} \quad (9)$$

$$E = \frac{k \cdot \delta^2}{2} \quad (10)$$

$$P = 1 - e^{-S \cdot E_t} \quad (11)$$

Белоглазов И. И., Иконников Д. А. Применение метода дискретных элементов для моделирования процесса измельчения горных пород в щековой дробилке //Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2016. – Т. 59. – №. 9.



# Описание модели

## Модель разрушения

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп. материалы

$$R_{old}^3 = 2 \cdot R_{new}^3 \quad \rightarrow \quad R_{new} = \frac{R_{old}}{\sqrt[3]{2}}$$
$$S_{old} = \frac{\pi \cdot R_{old}^2}{2} \quad S_{new} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot R_{new}^2}{2} = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\pi \cdot R_{old}^2}{2} = \sqrt[3]{2} \cdot S_{old}$$

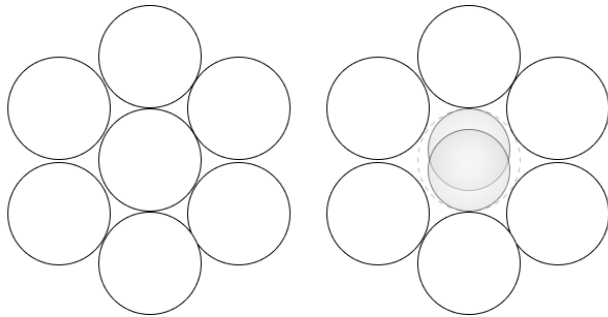


Рис.: Демонстрация положения разрушенных частиц

# Описание модели

## Модель разрушения

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артем

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп.  
материалы

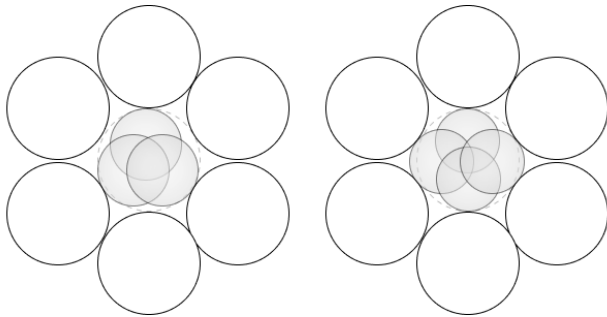


Рис.: Демонстрация положения разрушенных частиц

Научно-  
исследоват.  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

**Модель  
разрушения**

Доп.  
материалы

Рис.: Схематическое изображение шаровой мельницы

Таблица: Реальные значения параметров

Катнов  
Артём

Модуль продольной упругости дробы	$2 \times 10^{11}$ Па
Модуль сдвига дробы	$8 \times 10^{10}$ Па
Плотность дробы	7800 кг/м <sup>3</sup>
Модуль продольной упругости руды	$6 \times 10^{10}$ Па
Модуль сдвига руды	$2.4 \times 10^{10}$ Па
Плотность руды	4800 кг/м <sup>3</sup>
Минимальная энергия разрушения руды	0.1 Дж
Параметр прочности	1 1/Дж
Размеры сито по ширине	1 м
Размеры сито по ширине	1 м
Пропускная способность сито	0.04 м
К-т диссипации в норм-ом направлении	0.1
К-т диссипации в танген-ом направлении	0.1
К-т трения скольжения	0.1

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп. материалы

Научно-  
исследоват.  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

**Модель  
разрушения**

Доп.  
материалы

Спасибо за внимание!

# Доп. материалы

## Шар-стенка

Научно-исследоват.  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

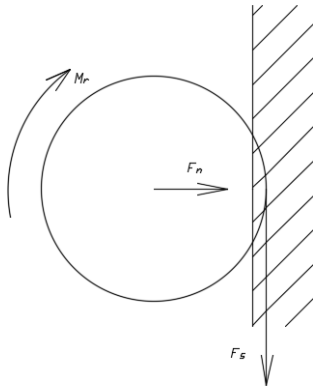
Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Доп.  
материалы



# Доп. материалы

## Упрощения МДЭ

Научно-исследовательская работа

Катнов  
Артём

Метод дискретных элементов

Описание модели

Контактные силы

Силы диссипации

Кинематика частиц

Модель разрушения

Доп. материалы

