

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим  
Сампленный  
режим  
Водопадный  
режим  
С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

# Кусовая работа

Численное моделирование динамики частиц дробы в  
рудоразмольной мельнице методом дискретных  
элементов

Катнов Артем

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

15 января 2021 г.

## 1 Метод дискретных элементов

## 2 Описание модели

- Контактные силы
- Силы диссипации
- Кинематика частиц

## 3 Результаты работы

- Каскадный режим
- Смешанный режим
- Водопадный режим
- С превышением критической частоты

## 4 Доп. материалы

# Метод дискретных элементов

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Самшанный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

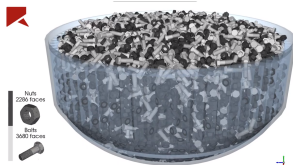


Рис.: Демонстрация сыпучей среды

Cundall P. A. A computer model for simulating progressive, large-scale movement in blocky rock system //Proceedings of the International Symposium on Rock Mechanics, 1971. – 1971.

# Цель работы

## Шаровая мельница

## Кусовая работа

Катнов  
Артем

## Метод дискретных элементов

## Описание модели

- Контактные силы
- Силы диссипации
- Кинематика частиц

## Результаты работы

- Каскадный режим
- Смешанный режим
- Водопадный режим
- С превышением критической частоты

Доп.  
материалы

Цель работы: исследование динамики системы частиц дробы во вращающемся барабане рудоразмольной мельницы.

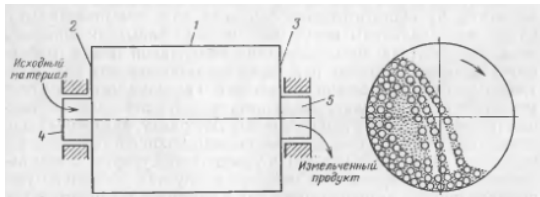


Рис.: Схематическое изображение шаровой мельницы

# Метод дискретных элементов

## Алгоритм метода

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

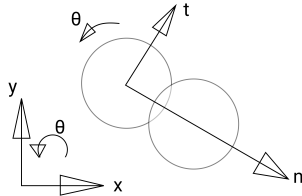
Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим  
Смешанный  
режим  
Водопадный  
режим  
С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы



# Описание модели

## Контактные силы

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

**Контактные  
силы**

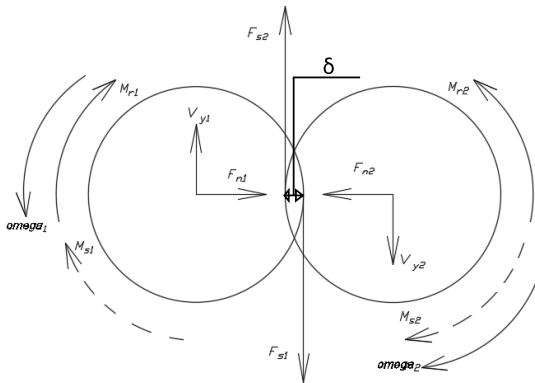
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим  
Смешанный  
режим  
Водопадный  
режим  
С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Syed Z., Tekeste M., White D. A coupled sliding and rolling friction model for DEM calibration // Journal of Terramechanics. – 2017. – Т. 72. – С. 9-20.



# Описание модели

## Контактные силы в нормальном направлении

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Самый  
режим

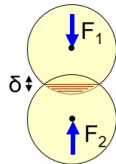
Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

$$F_n = k_n \cdot \delta_n \quad (1)$$

где  $F_n$  — контактная сила, возникающая в точке контакта и действующая на оба шара, [Н];  
 $k_n$  — коэффициент жёсткости, [Н/м];  
 $\delta_n$  — взаимное проникновение, так называемое вхождение шаров друг в друга, [м].



$$k_n = \frac{4}{3} \cdot E_{eff} \cdot \sqrt{R_{eff} \cdot \delta_n} \quad (2)$$

где

$$\frac{1}{E_{eff}} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

$$\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

# Описание модели

Контактные силы в тангенциальном и окружном направлениях

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

**Контактные  
силы**

Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

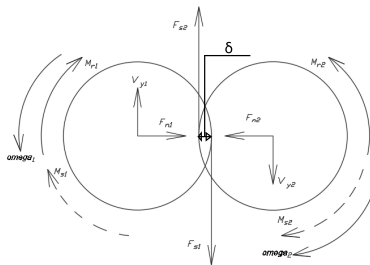
Каскадный  
режим

Сампльный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы



$$F_s = \mu_s \cdot F_n \cdot \text{sign}(v_{rel\_tan}) \quad v_{rel\_tan} \neq 0$$

$$M_s = F_s \cdot R_{eff}$$

$$M_r = \mu_r \cdot F_n \cdot R_{eff} \cdot \text{sign}(\omega_{rel}) \quad \omega_{rel} \neq 0$$

$$v_{rel\_tan}^1 = v_y^1 - v_y^2 - (\omega_1 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot R_2)$$

$$\omega_{rel} = \omega_1 + \omega_2$$



# Описание модели

## Контактные силы скольжения

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

**Контактные  
силы**

Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Смешанный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

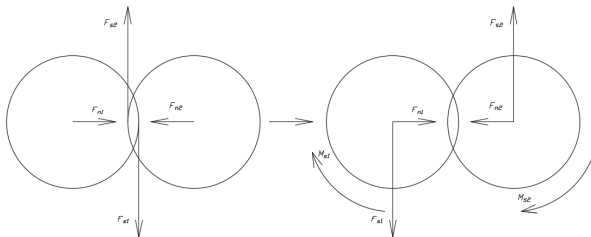


Рис.: Приведение силы трения скольжения к центру элемента

# Описание модели

## Силы диссипации

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Самый  
режим

Водопадный  
режим

С  
превышением  
критической  
частоты

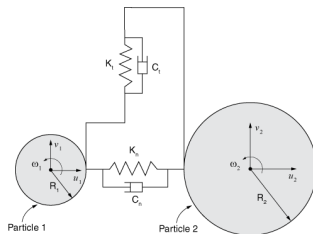
Доп.  
материалы

$$D_n = c_n \cdot v_{n\_rel}$$

$$D_t = c_t \cdot v_{t\_rel}$$

$$c_n = 2 \cdot \sqrt{m \cdot 2 \cdot E_{eff} \cdot \delta_n \sqrt{R_{eff}}} \cdot \zeta_n$$

$$c_t = 4 \cdot \sqrt{m \cdot 2 \cdot G_{eff} \cdot \delta_n \sqrt{R_{eff}}} \cdot \zeta_t$$



Караваяев А. С., Копысов С. П., Сармакеева А. С.  
Моделирование динамики произвольных тел методом  
дискретных элементов // Вестник Удмуртского  
университета. Математика. Механика. Компьютерные  
науки. – 2015. – Т. 25. – №. 4. – С. 473-482.

# Описание модели

## Кинематика частиц

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Самшаанный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

$$x = x_0 + v_0^x \cdot \Delta t + \frac{a_0^x \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^x \cdot \Delta t^3}{6} \quad (3)$$

$$y = y_0 + v_0^y \cdot \Delta t + \frac{a_0^y \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^y \cdot \Delta t^3}{6} \quad (4)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + v_0^\vartheta \cdot \Delta t + \frac{a_0^\vartheta \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^\vartheta \cdot \Delta t^3}{6} \quad (5)$$

$$b_n = \frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} \quad (6)$$

$$b_t = \frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} \quad (7)$$

$$b_\vartheta = \frac{\varepsilon_{t+\Delta t} - \varepsilon_t}{\Delta t} \quad (8)$$

$$\{b\}^{glob} = [T] \cdot \{b\}^{loc}$$

# Описание модели

## Блок-схема итерационного уточнения

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

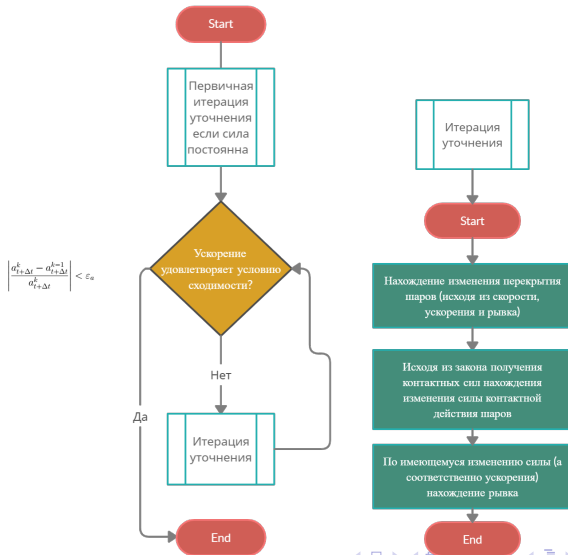
Каскадный  
режим

Самый  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы



# Описание модели

## Совокупность уравнений

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Самшаинный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{m \cdot a_t} = \overline{F_n} + \overline{F_s} + \overline{D} + \overline{G} \\ \overline{l \cdot \varepsilon_t} = \overline{M_s} + \overline{M_r} \\ \overline{v_t} = \overline{v_{t-\Delta t}} + \overline{a_t} \cdot \Delta t + \frac{\overline{b_t} \cdot \Delta t^2}{2} \\ \overline{s_t} = \overline{s_{t-\Delta t}} + \overline{v_{t-\Delta t}} \cdot \Delta t + \frac{\overline{a_t} \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{\overline{b_t} \cdot \Delta t^3}{6} \\ v_t^{\vartheta} = v_{t-\Delta t}^{\vartheta} + \varepsilon_t \cdot \Delta t \\ \vartheta_t = \vartheta_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t}^{\vartheta} \cdot \Delta t + \frac{\varepsilon_t \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_t^{\vartheta} \cdot \Delta t^3}{6} \end{array} \right.$$

# Описание модели

## Совокупность уравнений

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

**Кинематика  
частиц**

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Самша нный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{m \cdot a_t} = \overline{G} \\ \overline{l \cdot \varepsilon_t} = 0 \\ \bar{v}_t = \bar{v}_{t-\Delta t} + \bar{a}_t \cdot \Delta t \\ \bar{s}_t = \bar{s}_{t-\Delta t} + \bar{v}_{t-\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{\bar{a}_t \cdot \Delta t^2}{2} \\ v_t^\vartheta = v_{t-\Delta t}^\vartheta \\ \vartheta_t = \vartheta_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t}^\vartheta \cdot \Delta t \end{array} \right.$$

# Результаты работы

## Постановка задачи

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Сампльный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Модуль продольной упругости	$2 \times 10^{11}$ Па
Модуль сдвига	$8 \times 10^{10}$ Па
Плотность материала	$7800 \text{ кг/м}^3$
К-т диссипации в норм-ом направлении	0.1
К-т диссипации в танген-ом направлении	0.1
К-т трения скольжения	0.1
К-т трения качения	0.05
Радиус шаровой мельницы	2.5 м
Радиус шаров	0.1 м
Количество шаров	120
Процент заполненности мельницы	21 %
Шаг по времени	$10^{-5}$ сек

# Результаты работы

## Каскадный режим

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

**Каскадный  
режим**

Самый  
режим  
Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Каскадный режим работы шаровой мельницы (2 об/мин)

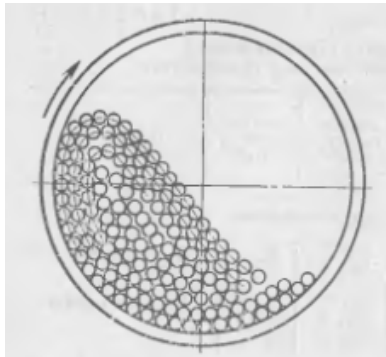


Рис.: Теоретическая картина каскадного режима



# Результаты работы

## Каскадный режим

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

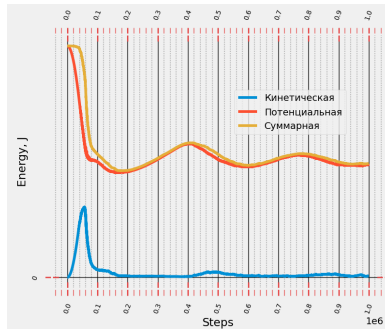
Результаты  
работы

**Каскадный  
режим**

Самый  
режим  
Водопадный  
режим  
С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Каскадный режим работы шаровой мельницы (2 об/мин)



**Рис.:** График изменения энергии во времени при каскадном режиме работы мельницы

# Результаты работы

## Смешанный режим

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

**Смешанный  
режим**

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Смешанный каскадно-водопадный режим работы (14 об/мин)

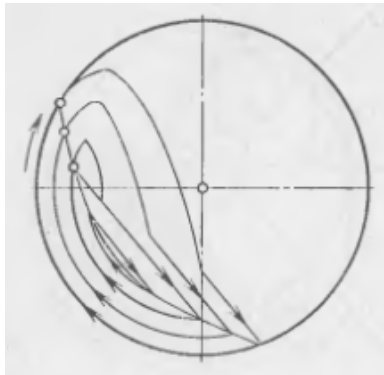


Рис.: Теоретическая картина смешанного режима

# Результаты работы

## Смешанный режим

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

**Смешанный  
режим**

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Смешанный каскадно-водопадный режим работы (14 об/мин)

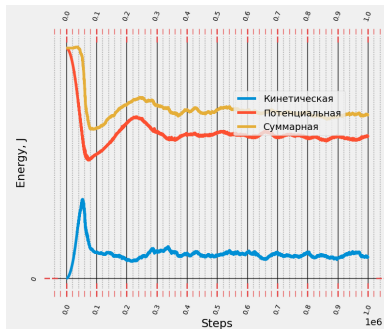


Рис.: График изменения энергии во времени при смешанном каскадно-водопадном режиме работы мельницы

# Результаты работы

## Водопадный режим

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Сампанный  
режим

**Водопадный  
режим**

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Водопадный режим работы шаровой мельницы (17 об/мин)

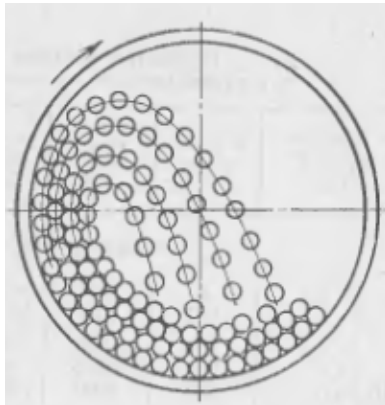


Рис.: Теоретическая картина водопадного режима

# Результаты работы

## Водопадный режим

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Смешанный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Водопадный режим работы шаровой мельницы (17 об/мин)

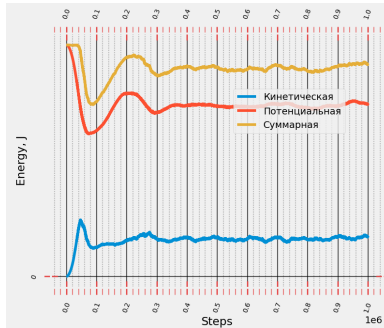


Рис.: График изменения энергии во времени при водопадном режиме работы мельницы

# Результаты работы

## С превышением критической частоты

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Самшаанный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Превышение критической частоты (30 об/мин)

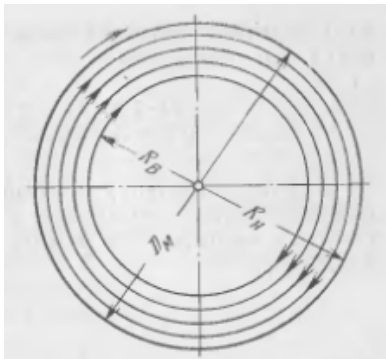


Рис.: Теоретическая картина закритического режима

# Результаты работы

## С превышением критической частоты

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Смешанный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Превышение критической частоты (30 об/мин)

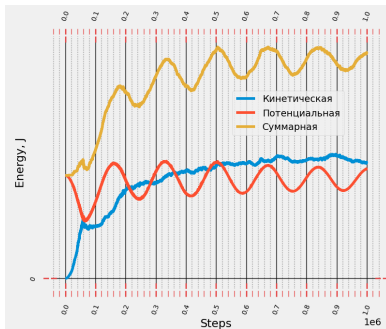


Рис.: График изменения энергии во времени при превышении критической частоты

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим

Смешанный  
режим

Водопадный  
режим

С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

Спасибо за внимание!



# Доп. материалы

## Шар-стенка

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

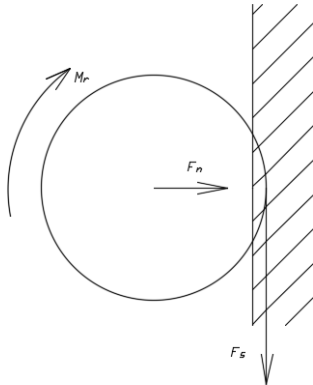
Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим  
Смешанный  
режим  
Водопадный  
режим  
С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы



# Доп. материалы

## Упрощения МДЭ

Кусовая  
работа

Катнов  
Артем

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц

Результаты  
работы

Каскадный  
режим  
Самосный  
режим  
Водопадный  
режим  
С превышением  
критической  
частоты

Доп.  
материалы

