

# Выпускная квалификационная работа

## Численное моделирование динамики частиц дробы в рудоразмольной мельнице методом дискретных элементов

Катнов Артем Александрович

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

Научный руководитель:  
Жуков Никита Александрович,  
старший преподаватель

22 июня 2021 года

## 1 Метод дискретных элементов

## 2 Описание модели

- Контактные силы
- Силы диссипации
- Кинематика частиц
- Модель разрушения

## 3 Постановка задачи

## 4 Результаты

# Метод дискретных элементов

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты



Рис.: Демонстрация сыпучей среды

Cundall P. A. A computer model for simulating progressive, large-scale movement in blocky rock system //Proceedings of the International Symposium on Rock Mechanics, 1971. – 1971.

# Цель работы

## Шаровая мельница

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Цель работы: исследование динамики системы частиц дробии руды во вращающемся барабане рудоразмольной мельницы.

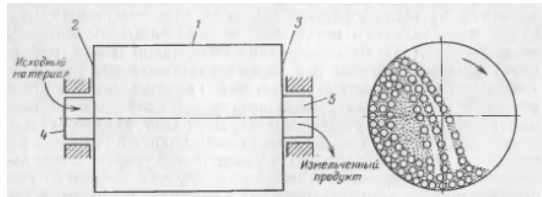


Рис.: Схематическое изображение шаровой мельницы

# Метод дискретных элементов



Рис.: Общий алгоритм метода дискретных элементов

# Метод дискретных элементов

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

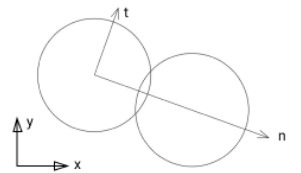
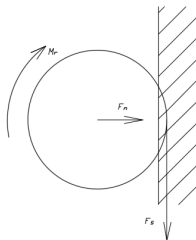
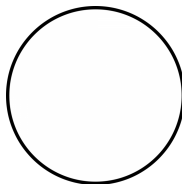


Рис.: Частица-частица



Частица-стена



Свободный полет

# Метод дискретных элементов

## Алгоритм процедуры на шаге по времени

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

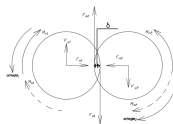
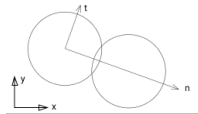
Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

- 1) Определение контактов
- 2) Переход в локальную систему координат
- 3) Расчет контактных сил
- 4) Перевод полученных значений в глобальную систему координат
- 5) Определения кинематического закона
- 6) Определение нового положения шаров



# Описание модели

## Контактные силы

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

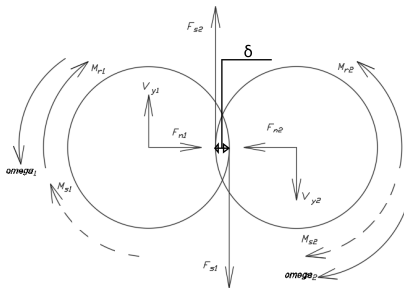
Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

$F_s$  – нормальная сила  
 $F_s$  – сила скольжения  
 $M_r$  – момент качения

Syed Z., Tekeste M., White D. A coupled sliding and rolling friction model for DEM calibration // Journal of Terramechanics. – 2017. – Т. 72. – С. 9-20.





# Описание модели

## Контактные силы в нормальном направлении

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

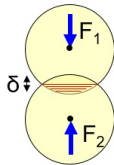
Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

$$F_n = k_n \cdot \delta_n \quad (1)$$

где  $F_n$  — контактная сила, возникающая в точке контакта и действующая на оба шара, [Н];  
 $k_n$  — коэффициент жёсткости, [Н/м];  
 $\delta_n$  — взаимное проникновение, так называемое вхождение шаров друг в друга, [м].



$$k_n = \frac{4}{3} \cdot E_{eff} \cdot \sqrt{R_{eff} \cdot \delta_n} \quad (2)$$

где

$$\frac{1}{E_{eff}} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

$$\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

# Описание модели

Контактные силы в тангенциальном и окружном направлениях

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

$F_s$  – нормальная сила

$F_s$  – сила скольжения

$M_r$  – момент качения

$$F_s = \mu_s \cdot F_n \cdot \text{sign}(v_{rel\_tan})$$

$$M_s = F_s \cdot R_{eff}$$

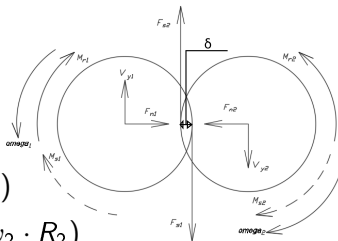
$$M_r = \mu_r \cdot F_n \cdot R_{eff} \cdot \text{sign}(\omega_{rel})$$

$$v_{rel\_tan}^1 = v_y^1 - v_y^2 - (\omega_1 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot R_2)$$

$$\omega_{rel} = \omega_1 + \omega_2$$

$$v_{rel\_tan} \neq 0$$

$$\omega_{rel} \neq 0$$



# Описание модели

## Силы диссипации

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

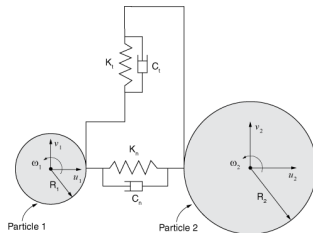
Результаты

$$D_n = c_n \cdot v_{n\_rel}$$

$$D_t = c_t \cdot v_{t\_rel}$$

$$c_n = 2 \cdot \sqrt{m \cdot 2 \cdot E_{eff} \cdot \delta_n \sqrt{R_{eff}} \cdot \zeta_n}$$

$$c_t = 4 \cdot \sqrt{m \cdot 2 \cdot G_{eff} \cdot \delta_n \sqrt{R_{eff}} \cdot \zeta_t}$$



Караваяев А. С., Копысов С. П., Сармакеева А. С.  
Моделирование динамики произвольных тел методом  
дискретных элементов // Вестник Удмуртского  
университета. Математика. Механика. Компьютерные  
науки. – 2015. – Т. 25. – №. 4. – С. 473-482.

# Описание модели

## Кинематика частиц

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

$$x = x_0 + v_0^x \cdot \Delta t + \frac{a_0^x \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^x \cdot \Delta t^3}{6} \quad (3)$$

$$y = y_0 + v_0^y \cdot \Delta t + \frac{a_0^y \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^y \cdot \Delta t^3}{6} \quad (4)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + v_0^\vartheta \cdot \Delta t + \frac{a_0^\vartheta \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^\vartheta \cdot \Delta t^3}{6} \quad (5)$$

$$b_n = \frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} \quad (6)$$

$$b_t = \frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} \quad (7)$$

$$b_\vartheta = \frac{\varepsilon_{t+\Delta t} - \varepsilon_t}{\Delta t} \quad (8)$$

$$\{b\}^{glob} = [T] \cdot \{b\}^{loc}$$

# Описание модели

## Блок-схема итерационного уточнения

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

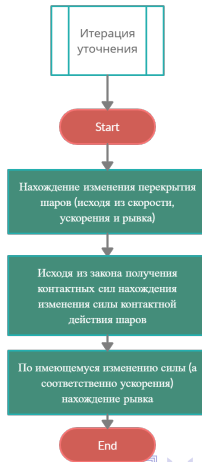
Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты



# Описание модели

## Совокупность уравнений

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

## С контактным взаимодействием

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{m \cdot \bar{a}_t} = \overline{F_n} + \overline{F_s} + \overline{D} + \overline{G} \\ \overline{I \cdot \varepsilon_t} = \overline{M_s} + \overline{M_r} \\ \bar{v}_t = \bar{v}_{t-\Delta t} + \bar{a}_t \cdot \Delta t + \frac{\bar{b}_t \cdot \Delta t^2}{2} \\ \bar{s}_t = \bar{s}_{t-\Delta t} + \bar{v}_{t-\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{\bar{a}_t \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{\bar{b}_t \cdot \Delta t^3}{6} \\ v_t^\vartheta = v_{t-\Delta t}^\vartheta + \varepsilon_t \cdot \Delta t \\ \vartheta_t = \vartheta_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t}^\vartheta \cdot \Delta t + \frac{\varepsilon_t \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_t^\vartheta \cdot \Delta t^3}{6} \end{array} \right.$$

## В свободном полете

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{m \cdot \bar{a}_t} = \overline{G} \\ \overline{I \cdot \varepsilon_t} = 0 \\ \bar{v}_t = \bar{v}_{t-\Delta t} + \bar{a}_t \cdot \Delta t \\ \bar{s}_t = \bar{s}_{t-\Delta t} + \bar{v}_{t-\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{\bar{a}_t \cdot \Delta t^2}{2} \\ v_t^\vartheta = v_{t-\Delta t}^\vartheta \\ \vartheta_t = \vartheta_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t}^\vartheta \cdot \Delta t \end{array} \right.$$

# Описание модели

## Модель разрушения

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

$$E_t = E_{t-\Delta t} + E - E_{min} \quad (9)$$

$$E = \int_0^{\delta_{max}} k_n(\delta) \cdot \delta d\delta \quad (10)$$

$$P = 1 - e^{-S \cdot E_t} \quad (11)$$

$S, E_{min}$  – параметры материала

Белоглазов И. И., Иконников Д. А. Применение метода дискретных элементов для моделирования процесса измельчения горных пород в щековой дробилке // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2016. – Т. 59. – №. 9.

# Описание модели

## Модель разрушения

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

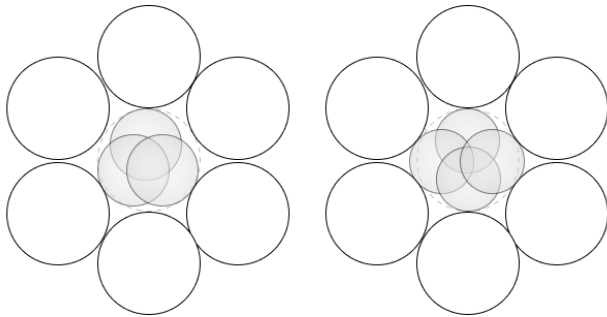


Рис.: Демонстрация положения разрушенных частиц



# Постановка задачи

## Рудоразмольная мельница

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

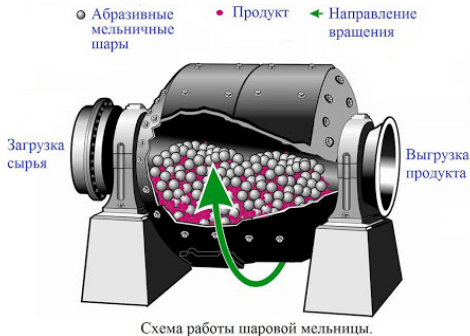


Рис.: Схематическое изображение шаровой мельницы

# Постановка задачи

Таблица: Реальные значения параметров

Модуль продольной упругости дробы	$2 \times 10^{11}$ Па
Модуль сдвига дробы	$8 \times 10^{10}$ Па
Плотность дробы	$7800 \text{ кг/м}^3$
Модуль продольной упругости руды	$6 \times 10^{10}$ Па
Модуль сдвига руды	$2.4 \times 10^{10}$ Па
Плотность руды	$4800 \text{ кг/м}^3$
Размеры сито по ширине	1 м
Размеры сито по ширине	1 м
Пропускная способность сито	0.04 м
Радиус шаровой мельницы	1 м
Изначальный радиус шаров	0.1 м
Количество шаров	100
Процент заполненности мельницы	50 %

# Постановка задачи

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Таблица: Реальные значения параметров(продолжение)

Шаг по времени	$10^{-5}$ сек
Период добавления руды	1 сек
К-т диссипации в норм-ом направлении	0.1
К-т диссипации в танген-ом направлении	0.1
К-т трения скольжения	0.1
К-т трения качения	0.05
Минимальная энергия разрушения руды	25 Дж
Параметр прочности	0.01 1/Дж

# Результаты

## Каскадный режим

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Каскадный режим работы шаровой мельницы (21.5 об/мин)

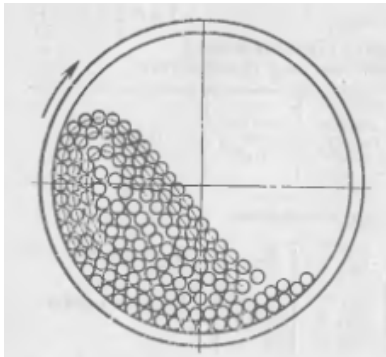


Рис.: Теоретическая картина каскадного режима

# Результаты

## Каскадный режим

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Каскадный режим работы шаровой мельницы (21.5 об/мин)

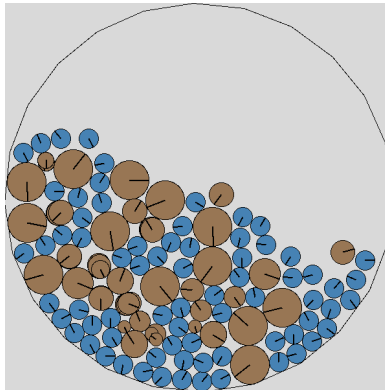


Рис.: Экспериментальная схема шаровой нагрузки при каскадном режиме работы мельницы

# Результаты

## Каскадный режим

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы  
Силы  
диссипации  
Кинематика  
частиц  
Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Каскадный режим работы шаровой мельницы (21.5 об/мин)

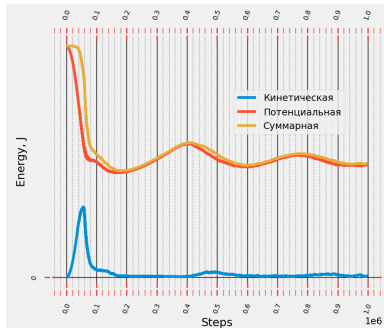


Рис.: График изменения энергии во времени при каскадном режиме работы мельницы

# Результаты

## Смешанный режим

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Смешанный каскадно-водопадный режим работы (57.3 об/мин)

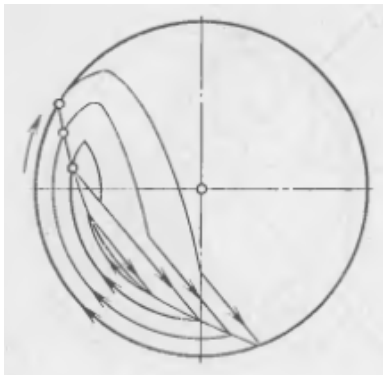


Рис.: Теоретическая картина смешанного режима

# Результаты

## Смешанный режим

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Смешанный каскадно-водопадный режим работы (57.3 об/мин)

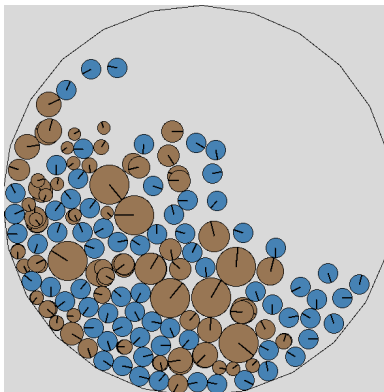


Рис.: Экспериментальная схема шаровой нагрузки при смешанном каскадно-водопадном режиме работы мельницы



# Результаты

## Смешанный режим

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Смешанный каскадно-водопадный режим работы (57.3 об/мин)

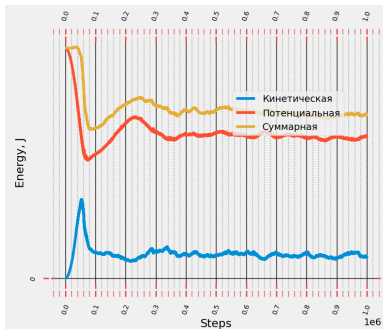


Рис.: График изменения энергии во времени при смешанном каскадно-водопадном режиме работы мельницы

# Результаты

## Водопадный режим

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Водопадный режим работы шаровой мельницы (81.16 об/мин)

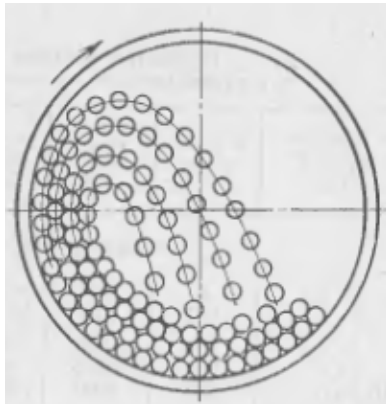


Рис.: Теоретическая картина водопадного режима

# Результаты

## Водопадный режим

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

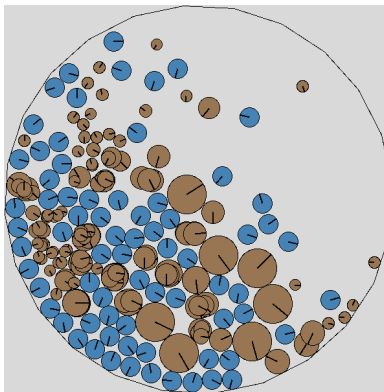
Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Водопадный режим работы шаровой мельницы (81.16 об/мин)



**Рис.:** Экспериментальная схема шаровой нагрузки при водопадном режиме работы мельницы

# Результаты

## Водопадный режим

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Водопадный режим работы шаровой мельницы (81.16 об/мин)

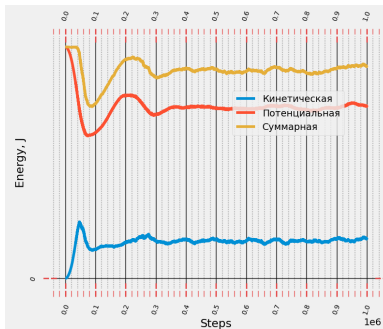


Рис.: График изменения энергии во времени при водопадном режиме работы мельницы

# Результаты

С превышением критической частоты

Превышение критической частоты (143.235 об/мин)

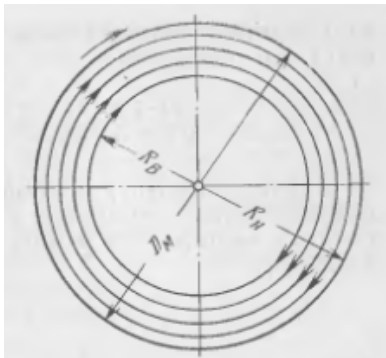
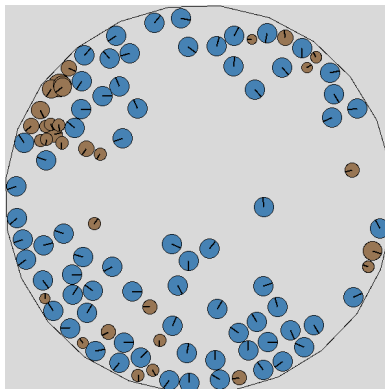


Рис.: Теоретическая картина закритического режима

# Результаты

С превышением критической частоты

Превышение критической частоты (143.235 об/мин)



**Рис.:** Экспериментальная схема шаровой нагрузки при превышении критической частоты

# Результаты

С превышением критической частоты

Превышение критической частоты (143.235 об/мин)

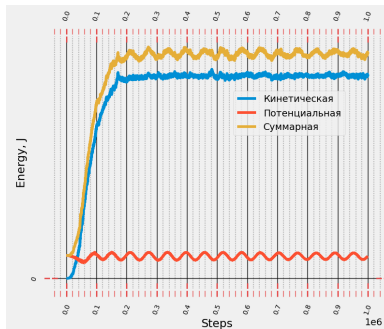


Рис.: График изменения энергии во времени при превышении критической частоты

# Результаты

## Распределение эффективности работы мельницы

$$eff = \frac{m_{sieved}}{m_{sum}}$$

$m_{sieved}$  – масса просеянной руды

$m_{sum}$  – масса всей руды

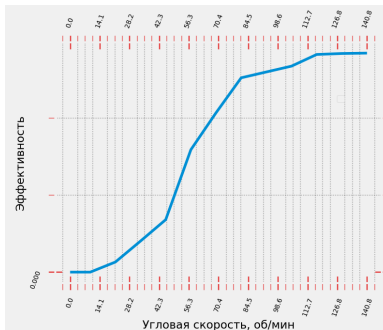


Рис.: График изменения эффективности работы мельницы при изменении скорости вращения мельницы



# Выводы

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

В данной работе:

- разработана математическая модель взаимодействия частиц;
- рассмотрены 4 характерных режима работы мельницы;
- произведена оценка эффективности для каждого из рассмотренных режимов;
- для полноценного исследования эффективности режимов работы также следует рассматривать скорость подачи руды в качестве дополнительного параметра режима.

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

Спасибо за внимание!

# Доп. материалы

## Шар-стенка

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

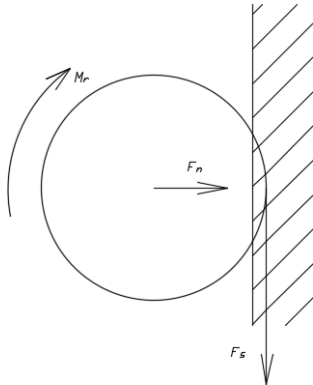
Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты



# Доп. материалы

## Упрощения МДЭ

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

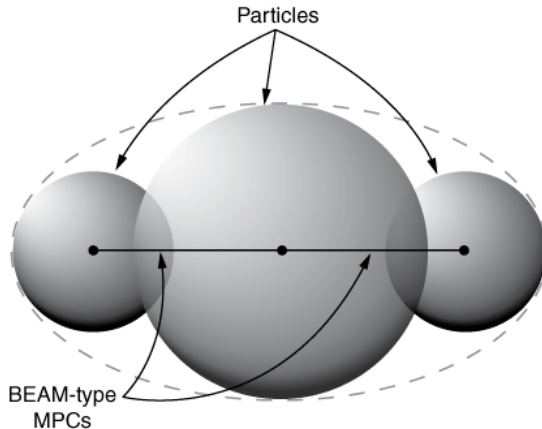
Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты



# Выпускная квалифика- ционная работа

**Катнов  
Артем Алек-  
сандрович**

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

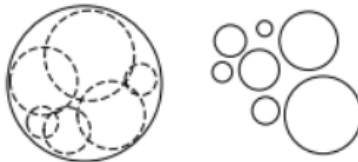
Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты



# Доп. материалы

## Контактные силы скольжения

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

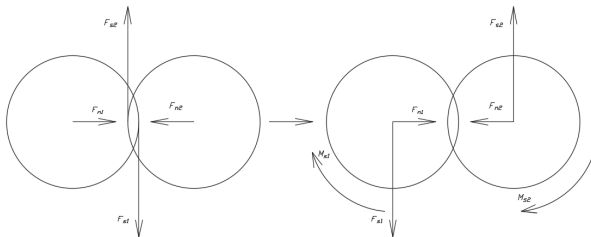


Рис.: Приведение силы трения скольжения к центру элемента

# Доп. материалы

## Рождение новых частиц

Выпускная  
квалифика-  
ционная  
работа

Катнов  
Артем Алек-  
сандрович

Метод  
дискретных  
элементов

Описание  
модели

Контактные  
силы

Силы  
диссипации

Кинематика  
частиц

Модель  
разрушения

Постановка  
задачи

Результаты

$$R_{old}^3 = 2 \cdot R_{new}^3 \rightarrow R_{new} = \frac{R_{old}}{\sqrt[3]{2}}$$
$$S_{old} = \frac{\pi \cdot R_{old}^2}{2} \quad S_{new} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot R_{new}^2}{2} = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\pi \cdot R_{old}^2}{2} = \sqrt[3]{2} \cdot S_{old}$$

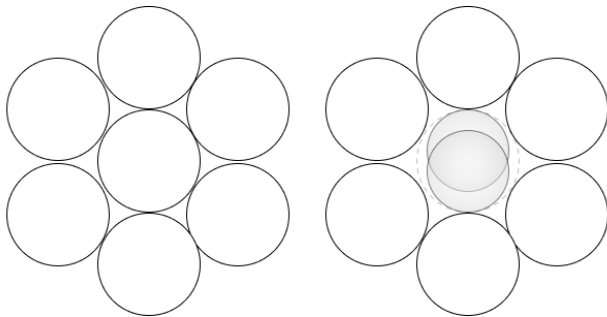


Рис.: Демонстрация положения разрушенных частиц