

Выпускная квалификационная работа

Численное моделирование динамики частиц дробы в рудоразмольной мельнице методом дискретных элементов

Катнов Артем Александрович

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

Научный руководитель:
Жуков Никита Александрович,
старший преподаватель

22 июня 2021 года

1 Метод дискретных элементов

2 Описание модели

- Контактные силы
- Силы диссипации
- Кинематика частиц
- Модель разрушения

3 Постановка задачи

4 Результаты

Метод дискретных элементов

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

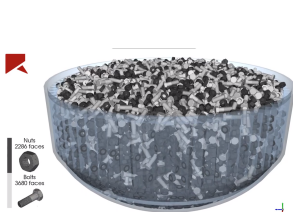


Рис.: Демонстрация сыпучей среды

Cundall P. A. A computer model for simulating progressive, large-scale movement in blocky rock system //Proceedings of the International Symposium on Rock Mechanics, 1971. – 1971.

Цель работы

Шаровая мельница

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Цель работы: исследование динамики системы частиц дробии руды во вращающемся барабане рудоразмольной мельницы.

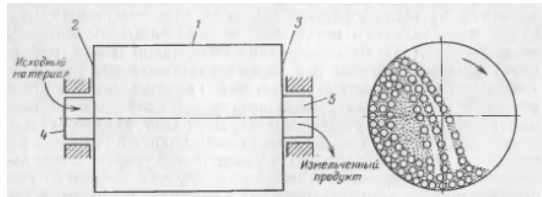


Рис.: Схематическое изображение шаровой мельницы

Метод дискретных элементов



Рис.: Общий алгоритм метода дискретных элементов

Метод дискретных элементов

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

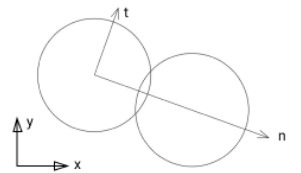
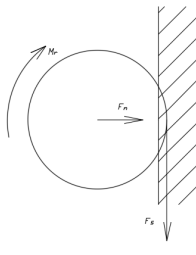
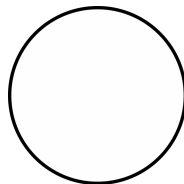


Рис.: Частица-частица



Частица-шар



Свободный полет

Метод дискретных элементов

Алгоритм процедуры на шаге по времени

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

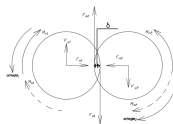
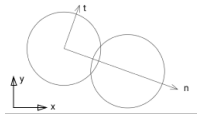
Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

- 1) Определение контактов
- 2) Переход в локальную систему координат
- 3) Расчет контактных сил
- 4) Перевод полученных значений в глобальную систему координат
- 5) Определения кинематического закона
- 6) Определение нового положения шаров



Описание модели

Контактные силы

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

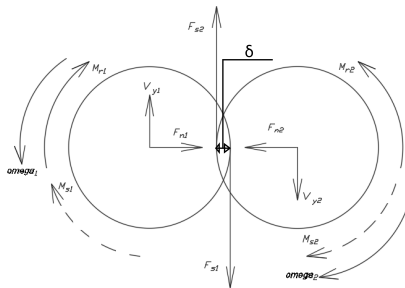
Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

F_s – нормальная сила
 F_s – сила скольжения
 M_r – момент качения

Syed Z., Tekeste
M., White D. A coupled
sliding and rolling
friction model for DEM
calibration // Journal
of Terramechanics. –
2017. – Т. 72. – С. 9-20.



Описание модели

Контактные силы в нормальном направлении

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

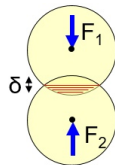
Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

$$F_n = k_n \cdot \delta_n \quad (1)$$

где F_n — контактная сила, возникающая в точке контакта и действующая на оба шара, [Н];
 k_n — коэффициент жёсткости, [Н/м];
 δ_n — взаимное проникновение, так называемое вхождение шаров друг в друга, [м].



$$k_n = \frac{4}{3} \cdot E_{eff} \cdot \sqrt{R_{eff} \cdot \delta_n} \quad (2)$$

где

$$\frac{1}{E_{eff}} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

$$\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Описание модели

Контактные силы в тангенциальном и окружном направлениях

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

F_s – нормальная сила

F_s – сила скольжения

M_r – момент качения

$$F_s = \mu_s \cdot F_n \cdot \text{sign}(v_{rel_tan})$$

$$M_s = F_s \cdot R_{eff}$$

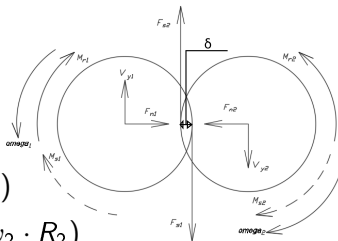
$$M_r = \mu_r \cdot F_n \cdot R_{eff} \cdot \text{sign}(\omega_{rel})$$

$$v_{rel_tan}^1 = v_y^1 - v_y^2 - (\omega_1 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot R_2)$$

$$\omega_{rel} = \omega_1 + \omega_2$$

$$v_{rel_tan} \neq 0$$

$$\omega_{rel} \neq 0$$



Описание модели

Силы диссипации

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

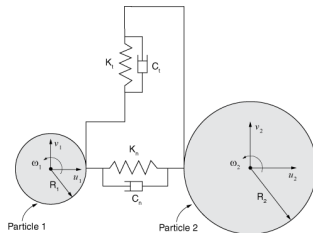
Результаты

$$D_n = c_n \cdot v_{n_rel}$$

$$D_t = c_t \cdot v_{t_rel}$$

$$c_n = 2 \cdot \sqrt{m \cdot 2 \cdot E_{eff} \cdot \delta_n \sqrt{R_{eff}} \cdot \zeta_n}$$

$$c_t = 4 \cdot \sqrt{m \cdot 2 \cdot G_{eff} \cdot \delta_n \sqrt{R_{eff}} \cdot \zeta_t}$$



Караваяев А. С., Копысов С. П., Сармакеева А. С.
Моделирование динамики произвольных тел методом
дискретных элементов // Вестник Удмуртского
университета. Математика. Механика. Компьютерные
науки. – 2015. – Т. 25. – №. 4. – С. 473-482.

Описание модели

Кинематика частиц

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

$$x = x_0 + v_0^x \cdot \Delta t + \frac{a_0^x \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^x \cdot \Delta t^3}{6} \quad (3)$$

$$y = y_0 + v_0^y \cdot \Delta t + \frac{a_0^y \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^y \cdot \Delta t^3}{6} \quad (4)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + v_0^\vartheta \cdot \Delta t + \frac{a_0^\vartheta \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_0^\vartheta \cdot \Delta t^3}{6} \quad (5)$$

$$b_n = \frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} \quad (6)$$

$$b_t = \frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} \quad (7)$$

$$b_\vartheta = \frac{\varepsilon_{t+\Delta t} - \varepsilon_t}{\Delta t} \quad (8)$$

$$\{b\}^{glob} = [T] \cdot \{b\}^{loc}$$

Описание модели

Блок-схема итерационного уточнения

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

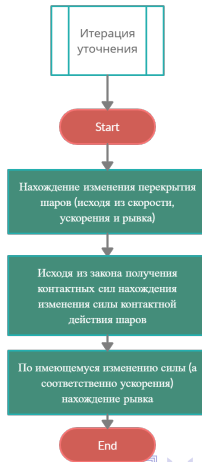
Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты



Описание модели

Совокупность уравнений

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

С контактным взаимодействием

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{m \cdot \bar{a}_t} = \overline{F_n} + \overline{F_s} + \overline{D} + \overline{G} \\ \overline{I \cdot \varepsilon_t} = \overline{M_s} + \overline{M_r} \\ \bar{v}_t = \bar{v}_{t-\Delta t} + \bar{a}_t \cdot \Delta t + \frac{\bar{b}_t \cdot \Delta t^2}{2} \\ \bar{s}_t = \bar{s}_{t-\Delta t} + \bar{v}_{t-\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{\bar{a}_t \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{\bar{b}_t \cdot \Delta t^3}{6} \\ v_t^\vartheta = v_{t-\Delta t}^\vartheta + \varepsilon_t \cdot \Delta t \\ \vartheta_t = \vartheta_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t}^\vartheta \cdot \Delta t + \frac{\varepsilon_t \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{b_t^\vartheta \cdot \Delta t^3}{6} \end{array} \right.$$

В свободном полете

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{m \cdot \bar{a}_t} = \overline{G} \\ \overline{I \cdot \varepsilon_t} = 0 \\ \bar{v}_t = \bar{v}_{t-\Delta t} + \bar{a}_t \cdot \Delta t \\ \bar{s}_t = \bar{s}_{t-\Delta t} + \bar{v}_{t-\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{\bar{a}_t \cdot \Delta t^2}{2} \\ v_t^\vartheta = v_{t-\Delta t}^\vartheta \\ \vartheta_t = \vartheta_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t}^\vartheta \cdot \Delta t \end{array} \right.$$

Описание модели

Модель разрушения

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

$$E_t = E_{t-\Delta t} + E - E_{min} \quad (9)$$

$$E = \frac{k \cdot \delta^2}{2} \quad (10)$$

$$P = 1 - e^{-S \cdot E_t} \quad (11)$$

Белоглазов И. И., Иконников Д. А. Применение метода дискретных элементов для моделирования процесса измельчения горных пород в щековой дробилке //Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2016. – Т. 59. – №. 9.

Описание модели

Модель разрушения

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

$$R_{old}^3 = 2 \cdot R_{new}^3 \rightarrow R_{new} = \frac{R_{old}}{\sqrt[3]{2}}$$
$$S_{old} = \frac{\pi \cdot R_{old}^2}{2} \quad S_{new} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot R_{new}^2}{2} = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\pi \cdot R_{old}^2}{2} = \sqrt[3]{2} \cdot S_{old}$$

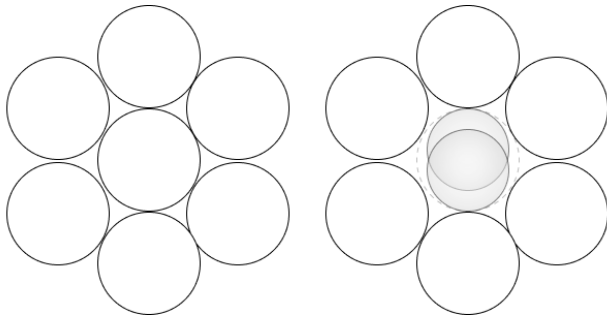


Рис.: Демонстрация положения разрушенных частиц

Описание модели

Модель разрушения

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

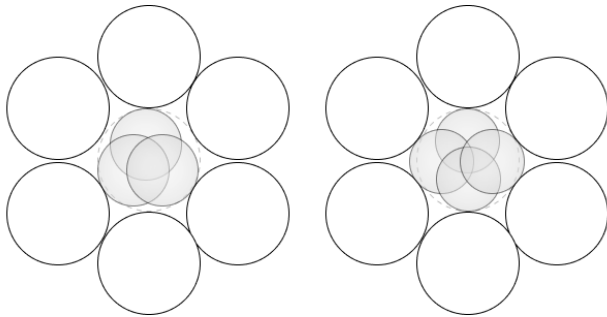


Рис.: Демонстрация положения разрушенных частиц

Постановка задачи

Рудоразмольная мельница

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

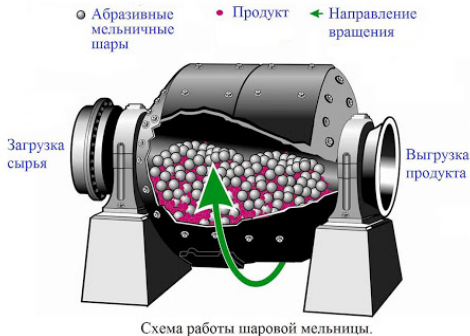


Рис.: Схематическое изображение шаровой мельницы

Постановка задачи

Таблица: Реальные значения параметров

Модуль продольной упругости дробы	2×10^{11} Па
Модуль сдвига дробы	8×10^{10} Па
Плотность дробы	7800 кг/м^3
Модуль продольной упругости руды	6×10^{10} Па
Модуль сдвига руды	2.4×10^{10} Па
Плотность руды	4800 кг/м^3
Размеры сито по ширине	1 м
Размеры сито по ширине	1 м
Пропускная способность сито	0.04 м
Радиус шаровой мельницы	1 м
Изначальный радиус шаров	0.1 м
Количество шаров	100
Процент заполненности мельницы	50 %

Постановка задачи

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Таблица: Реальные значения параметров(продолжение)

Шаг по времени	10^{-5} сек
Период добавления руды	1 сек
К-т диссипации в норм-ом направлении	0.1
К-т диссипации в танген-ом направлении	0.1
К-т трения скольжения	0.1
К-т трения качения	0.05
Минимальная энергия разрушения руды	25 Дж
Параметр прочности	0.01 1/Дж

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Результаты

Каскадный режим

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Каскадный режим работы шаровой мельницы (21.5 об/мин)

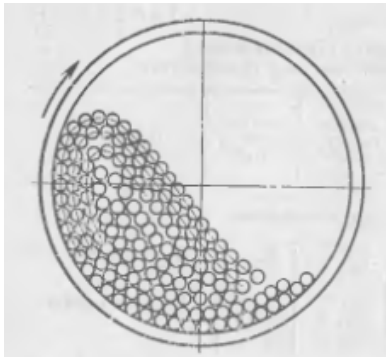


Рис.: Теоретическая картина каскадного режима

Результаты

Каскадный режим

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Каскадный режим работы шаровой мельницы (21.5 об/мин)

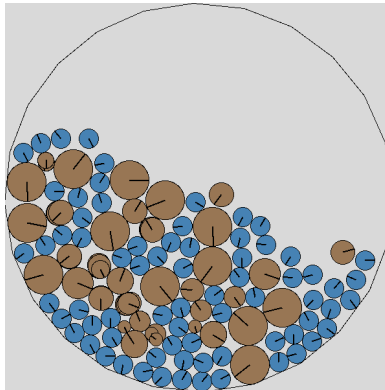


Рис.: Экспериментальная схема шаровой нагрузки при каскадном режиме работы мельницы

Результаты

Каскадный режим

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы
Силы
диссипации
Кинематика
частиц
Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Каскадный режим работы шаровой мельницы (21.5 об/мин)

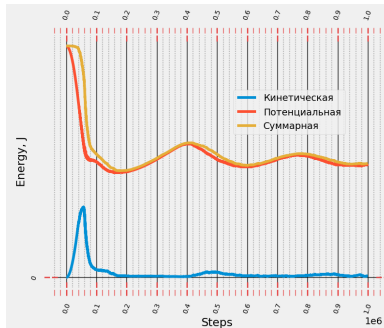


Рис.: График изменения энергии во времени при каскадном режиме работы мельницы

Результаты

Смешанный режим

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Смешанный каскадно-водопадный режим работы (57.3 об/мин)

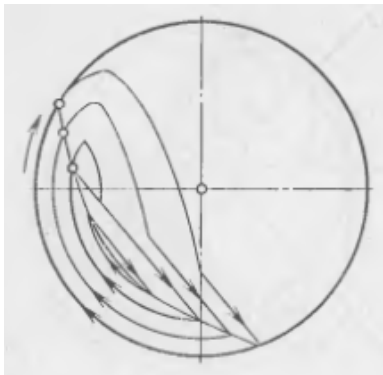


Рис.: Теоретическая картина смешанного режима

Результаты

Смешанный режим

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Смешанный каскадно-водопадный режим работы (57.3 об/мин)

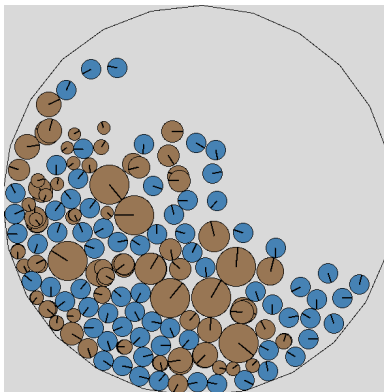


Рис.: Экспериментальная схема шаровой нагрузки при смешанном каскадно-водопадном режиме работы мельницы

Результаты

Смешанный режим

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Смешанный каскадно-водопадный режим работы (57.3 об/мин)

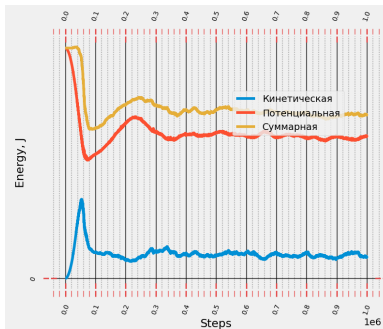


Рис.: График изменения энергии во времени при смешанном каскадно-водопадном режиме работы мельницы

Результаты

Водопадный режим

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Водопадный режим работы шаровой мельницы (81.16 об/мин)

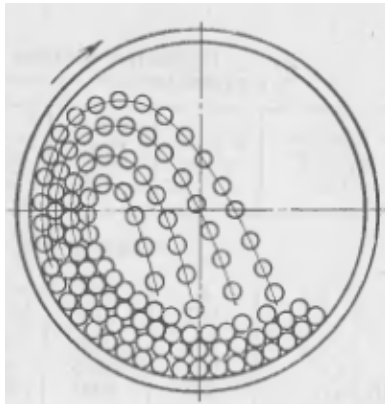


Рис.: Теоретическая картина водопадного режима

Результаты

Водопадный режим

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Водопадный режим работы шаровой мельницы (81.16 об/мин)

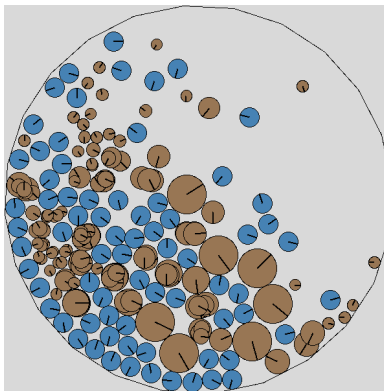


Рис.: Экспериментальная схема шаровой нагрузки при водопадном режиме работы мельницы

Результаты

Водопадный режим

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Водопадный режим работы шаровой мельницы (81.16 об/мин)

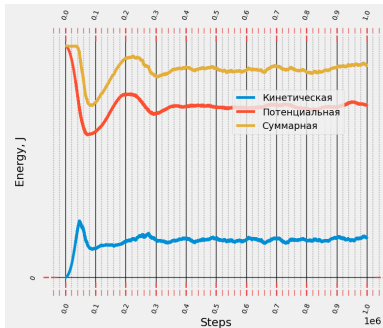


Рис.: График изменения энергии во времени при водопадном режиме работы мельницы

Результаты

С превышением критической частоты

Превышение критической частоты (143.235 об/мин)

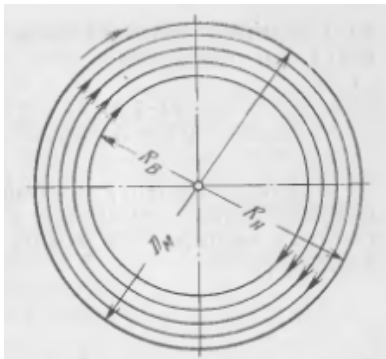


Рис.: Теоретическая картина закритического режима

Результаты

С превышением критической частоты

Превышение критической частоты (143.235 об/мин)

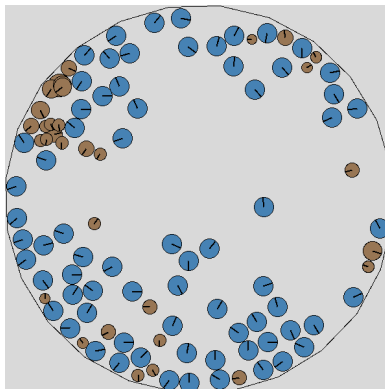


Рис.: Экспериментальная схема шаровой нагрузки при превышении критической частоты

Результаты

С превышением критической частоты

Превышение критической частоты (143.235 об/мин)

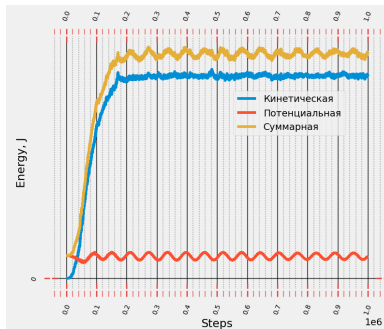


Рис.: График изменения энергии во времени при превышении критической частоты

Результаты

Распределение эффективности работы мельницы

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

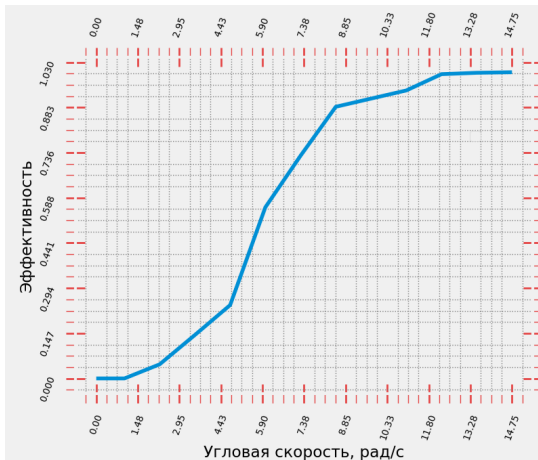


Рис.: График изменения эффективности работы мельницы при изменении скорости вращения мельницы

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

Спасибо за внимание!

Доп. материалы

Шар-стенка

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

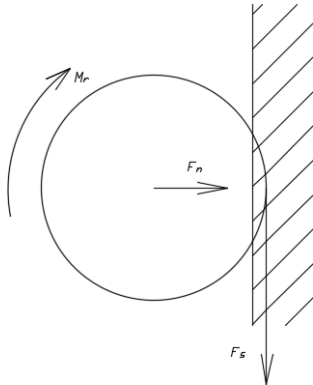
Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты



Доп. материалы

Упрощения МДЭ

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

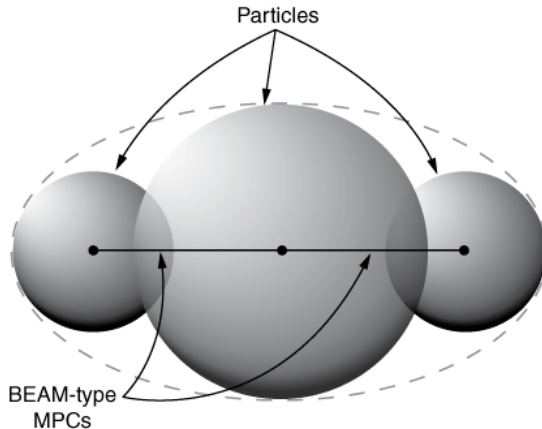
Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты



Выпускная квалифика- ционная работа

**Катнов
Артем Алек-
сандрович**

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

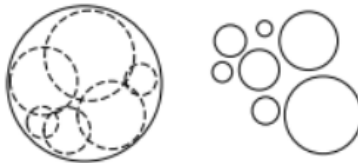
Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты



Доп. материалы

Контактные силы скольжения

Выпускная
квалифика-
ционная
работа

Катнов
Артем Алек-
сандрович

Метод
дискретных
элементов

Описание
модели

Контактные
силы

Силы
диссипации

Кинематика
частиц

Модель
разрушения

Постановка
задачи

Результаты

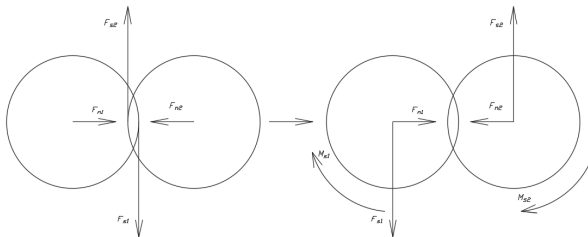


Рис.: Приведение силы трения скольжения к центру элемента