ALBERT EINSTEIN

Grundzüge der Relativitätstheorie

Springer

Albert Einstein

Grundzüge der Relativitätstheorie

Translated by:
Good Translator

Published by:
Springer

Vorwort zur 1. Auflage der „Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie“

In der vorliegenden Ausarbeitung von vier Vorträgen, die ich an der Universität Princeton im Mai 1921 gehalten habe, wollte ich die Hauptgedanken und mathematische Methoden der Relativitätstheorie zusammenfassen. Dabei habe ich mich bemüht, alles weniger Wesentliche wegzulassen, das Grundsätzliche aber doch so zu behandeln, daß das Ganze als Einführung für alle diejenigen dienen kann, welche die Elemente der höheren Mathematik beherrschen, aber nicht allzuviel Zeit und Mühe auf den Gegenstand verwenden wollen. Auf Vollständigkeit kann diese kurze Darlegung selbstverständlich keinen Anspruch machen, zumal ich die feineren, mehr mathematisch interessanten Entwicklungen, welche sich auf Variationsrechnung gründen, nicht behandelt habe. Mein Hauptziel war es, das Grundsätzliche in dem ganzen Gedankengang der Theorie klar hervortreten zu lassen.

Januar 1922 A. Einstein

Inhaltsverzeichnis

Raum und Zeit in der vorrelativistischen Physik

Die Relativitätstheorie ist aufs engste verbunden mit der Theorie von Raum und Zeit. Deshalb soll mit einer kurzen Untersuchung des Ursprungs unserer Ideen von Raum und Zeit begonnen werden, obwohl ich weiß, daß ich mich dabei auf strittiges Gebiet begebe. Alle Wissenschaft, sei es Naturwissenschaft oder

Psychologie, sucht in gewisser Weise unsere Erlebnisse zu ordnen und in ein logisches System zu bringen. Wie hängen die geläufigen Ideen über Raum und Zeit mit dem Charakter unserer Erlebnisse zusammen?

Die Erlebnisse eines Menschen erscheinen uns als in eine Erlebnisreihe eingeordnet, in welcher die einzelnen unserer Erinnerung zugänglichen Einzelerlebnisse nach dem nicht weiter zu analysierenden Kriterium des „Früher“ und „Später“ geordnet erscheinen. Es besteht also für das Individuum eine Ich-Zeit oder subjektive Zeit. Diese ist an sich nichts Meßbares. Ich kann zwar den Erlebnissen Zahlen zuordnen, derart, daß dem späteren Erlebnis eine größere Zahl zugeordnet wird als dem früheren, aber die Art dieser Zuordnung bleibt zunächst in hohem Maße willkürlich. Ich kann jedoch die Art dieser Zuordnung weiter fixieren durch eine Uhr, indem ich den durch sie vermittelten Erlebnisablauf mit dem Ablauf der übrigen Erlebnisse vergleiche. Unter einer Uhr versteht man ein Ding, welches abzählbare Erlebnisse liefert und noch andere Eigenschaften besitzt, von denen im folgenden die Rede sein wird.

Verschiedene Menschen können mit Hilfe der

Sprache ihre Erlebnisse bis zu einem gewissen Grade miteinander vergleichen. Dabei zeigt sich, daß gewisse sinnliche Erlebnisse verschiedener Menschen einander entsprechen, während bei anderen ein solches Entsprechen nicht festgestellt werden kann. Jenen sinnlichen Erlebnissen verschiedener Individuen, welche einander entsprechen und demnach in gewissem Sinne überpersönlich sind, wird eine Realität gedanklich zugeordnet. Von ihr, daher mittelbar von der Gesamtheit jener Erlebnisse, handeln die Naturwissenschaften, speziell auch deren elementarste, die Physik. Relativ konstanten Erlebniskomplexen solcher Art entspricht der Begriff des physikalischen Körpers, speziell auch des festen Körpers. Die Uhr ist auch ein Körper bzw. ein körperliches System in diesem Sinne. Zum Wesen der Uhr gehört außerdem, daß die an ihr gezählten gleichartigen Teilvorgänge der Erlebnisfolge als einander gleich angesehen werden dürfen.

Begriffe und Begriffssysteme erhalten die Berechtigung nur dadurch, daß sie zum Überschauen von Erlebniskomplexen dienen; eine andere Legitimation gibt es für sie nicht. Es ist deshalb nach meiner Überzeugung einer der verderblichsten Taten der

Philosophen, daß sie gewisse begriffliche Grundlagen der Naturwissenschaft aus dem der Kontrolle zugänglichen Gebiete des Empirisch-Zweckmäßigen in die unangreifbare Höhe des Denknotwendigen (Apriorischen) versetzt haben. Denn wenn es auch ausgemacht ist, daß die Begriffe nicht aus den Erlebnissen durch Logik (oder sonstwie) abgeleitet werden können, sondern in gewissem Sinn freie Schöpfungen des menschlichen Geistes sind, so sind sie doch ebensowenig unabhängig von der Art der Erlebnisse, wie etwa die Kleider von der Gestalt der menschlichen Leiber. Dies gilt im besonderen auch von unseren Begriffen über Zeit und Raum, welche die Physiker – von Tatsachen gezwungen – aus dem Olymp des Apriori herunterholen mußten, um sie reparieren und wieder in einen brauchbaren Zustand setzen zu können.

Wir kommen nun zu den räumlichen Begriffen und Urteilen. Auch hier ist es unerläßlich, die Beziehung der Erlebnisse zu den Begriffen streng ins Auge zu fassen. Auf diesem Gebiete scheint mir POINCARÉ die Wahrheit besonders klar erfaßt zu haben in der Darstellung, welche er in seinem Buche: „La science et l'hypothèse“ gegeben hat. Unter allen Veränderungen, welche wir an festen Körpern wahrnehmen, sind diejenigen durch Einfachheit ausgezeichnet, welche durch willkürliche Bewegungen unseres Körpers rückgängig gemacht werden können; POINCARÉ nennt sie „Änderungen der Lage". Durch bloße Lagenänderungen kann man zwei Körper „aneinander anlegen". Das Fundament der Geometrie (Kongruenzsätze) bezieht sich auf die Gesetze, welche jene Lagerungsmöglichkeiten beherrschen. Für den Raumbegriff scheint uns folgendes wesentlich. Man kann durch Anlegen von Körpern B, C ... an einen Körper A neu Körper bilden, wir wollen sagen, den Körper A fortsetzen. Man kann einen Körper A so fortsetzen, daß er mit jedem anderen Körper X zur Berührung kommt. Wir können den Inbegriff aller Fortsetzungen des Körpers A als den „Raum des Körpers A" bezeichnen. Dann gilt, daß alle Körper sich „im Raum des (beliebig gewählten) Körpers A" befinden. Man kann in diesem Sinne nicht von dem „Raum" schlechthin, sondern nur von dem „zu einem Körper A gehörigen Raum" reden. Allerdings spielt im Alltagsleben der Körper Erdkruste eine so dominierende Rolle in der Beurteilung der Lagenverhältnisse der Körper, daß er zu dem ernstlich nicht zu verteidigenden Begriff *des* Raumes (schlechthin) geführt hat. Wir wollen aber, um diesen verhängnisvollen Irrtum auszuschließen, nur von „Bezugskörper“ oder „Bezugsraum“ reden. Erst die allgemeine Relativitätstheorie hat eine Verfeinerung dieses Begriffes nötig gemacht, wie wir später sehen werden.

Ich will nicht näher auf diejenigen Eigenschaften des Bezugsraumes eingehen, welche dazu geführt haben, als Element des Raumes den Punkt einzuführen und den Raum als Kontinuum aufzufassen. Ebensowenig will ich zu analysieren versuchen, durch welche Eigenschaften des Bezugsraumes der Begriff der stetigen Punktreihe oder Linie gerechtfertigt sei. Sind aber diese Begriffe nebst ihrer Beziehung zum festen Körper der Erlebniswelt gegeben, so ist leicht zu sagen, was unter der Dreidimensionalität des Raumes zu verstehen ist, nämlich die Aussage: Jedem Punkt lassen sich drei Zahlen x_1, x_2 und x_3 (Koordinaten) zuordnen, derart, daß diese Zuordnung umkehrbar eindeutig ist, und daß sich x_1, x_2 und x_3 stetig ändern, wenn der zugehörige Punkt eine stetig Punktreihe (Linie) beschreibt.

Die vorrelativistische Physik setzt voraus, daß die Lagerungsgesetze idealer fester Körper der euklidischen Geometrie gemäß seien. Was dies bedeutet, kann z. B. wie folgt ausgedrückt werden. Zwei an einem festen Körper markierte Punkte bilden eine Strecke. Eine solche kann in mannigfacher Weise gegenüber dem Bezugsraume ruhend gelagert werden. Wenn nun die Punkte dieses Raumes so durch Koordinaten x_1, x_2, x_3 bezeichnet werden können, daß die Koordinatendifferenzen Δx_1, Δx_2, Δx_3 der Streckenpunkte bei jeder Lagerung der Strecke die nämliche Quadratsumme

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{1}$$

liefern, so nennt man den Bezugsraum EUKLIDisch und die Koordinaten kartesische[1]. Es genügt hierfür sogar, diese Annahme in der Grenze für unendlich kleine Strecken zu machen. In dieser Annahme liegen einige weniger spezielle enthalten, auf die wir ihrer grundlegenden Bedeutung wegen aufmerksam

[1] Diese Relation muß gelten für beliebige Wahl des Anfangspunktes und der Richtung (Verhältnis $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$) der Strecke.

machen wollen. Erstens nämlich wird vorausgesetzt, daß man einen idealen festen Körper beliebig bewegen könne. Zweitens wird vorausgesetzt, daß das Lagerungsverhalten idealer fester Körper in dem Sinne unabhängig vom Material des Körpers und von seinen Ortsänderungen ist, daß zwei Strecken, welche *einmal* zur Deckung gebracht werden können, *stets und überall* zur Deckung gebracht werden können. Diese beiden Voraussetzungen, welche für die Geometrie und überhaupt für die messende Physik von grundlegender Bedeutung sind, entstammen natürlich der Erfahrung; sie beanspruchen in der allgemeinen Relativitätstheorie allerdings nur für (gegenüber astronomischen Dimensionen) unendlich kleine Körper und Bezugsräume Gültigkeit.

Die Größe s nennen wir die Länge der Strecke. Damit diese eindeutig bestimmt sei, muß die Länge einer bestimmten Strecke willkürlich festgesetzt, z. B. gleich 1 gesetzt werden (Einheitsmaßstab). Dann sind die Längen aller übrigen Strecken bestimmt. Setzt man die x_ν linear abhängig von einem Parameter λ

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$

so erhält man eine Linie, welche alle Eigenschaften der Geraden der euklidischen Geometrie besitzt. Speziell folgert man leicht, daß man durch n-maliges Abtragen einer Strecke s auf einer Geraden eine Strecke von der Länge $n \cdot s$ erhält. Eine Länge bedeutet also das Ergebnis einer längs einer Geraden ausgeführten Messung mit Hilfe des Einheitsmaßstabes; sie hat ebenso wie die gerade Linie eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Wir kommen nun zu einem Gedankengang, der in analoger Weise in der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie eine Rolle spielt. Wir fragen: Gibt es außer den verwendeten kartesischen Koordinaten noch andere gleichberechtigte? Die Strecke hat eine von der Koordinatenwahl unabhängige physikalische Bedeutung, ebenso also auch die Kugelfläche, welche man erhält als Ort der Endpunkte aller gleichen Strecken, welche man von einem beliebigen Anfangspunkt des Bezugsraumes aus abträgt. Sind sowohl x_ν als auch x'_ν (ν von 1 bis 3) kartesische Koordinaten unseres Bezugsraumes, so wird die Kugelfläche in bezug auf jene beiden Koordinatensysteme durch die

Gleichungen ausgedrückt:

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \text{konst.} \tag{2}$$

$$\sum \Delta x_\nu'^2 = \text{konst.} \tag{2a}$$

Wie müssen sich die x'_ν aus den x_ν ausdrücken, damit die Gleichungen (2) und (2a) äquivalent seien? Denkt man sich die x'_ν in Funktion der x_ν ausgedrückt, so kann man für genügend kleine Δx_ν nach dem Taylorschen Satze setzen:

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} \Delta x_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Delta x_\alpha \Delta x_\beta \ldots$$

Setzt man dies in (2a) ein und vergleicht mit (1), so sieht man, daß die x'_ν *lineare* Gleichungen der x_ν sein müssen. Setzt man demgemäß

$$x'_\nu = a_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_\alpha \tag{3}$$

oder

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha} \Delta x_\alpha \tag{3a}$$

so drückt sich die Äquivalenz der Gleichungen (2) und (2a) in der Form aus

$$\sum \varDelta x'^2_\nu = \lambda^2 \sum \varDelta x^2_\nu \tag{2b}$$
$$(\lambda \text{ von den unabhängig}).$$

Hieraus folgt zunächst, daß λ eine Konstante sein muß. Setzt man zunächst $\lambda = 1$, so liefern (2b) und (3a) die Bedingungen

$$\sum_\alpha b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \delta_{\alpha\beta}\,, \tag{4}$$

wobei $\delta_{\alpha\beta} = 1$ oder $\delta_{\alpha\beta} = 0$ ist, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$. Die Bedingungen (4) heißen Orthogonalitätsbedingungen, die Transformationen (3), (4) lineare orthogonale Transformationen. Verlangt man, daß $s^2 = \sum \varDelta x^2_\nu$ für jedes Koordinatensystem gleich dem Quadrat der Länge sei und daß stets mit dem gleichen Einheitsmaßstabe gemessen werde, so muß $\lambda = 1$ sein. Dann sind die linearen orthogonalen Transformationen die einzigen, welche den Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem eines Bezugsraumes zu einem anderen vermitteln. Man erkennt, daß bei Anwendung solcher Transformationen die Gleichungen einer Geraden wieder in die Gleichungen einer Geraden übergehen. Wir bilden noch die Umkehrung der Gleichungen (3a), indem wir beiderseits mit $b_{\nu\beta}$ multiplizieren und über ν summieren. Man erhält

$$\begin{aligned}\sum b_{\nu\beta}\,\Delta x'_{\nu} &= \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\,\Delta x_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}\,\Delta x_{\alpha} = \Delta x_{\beta}\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Dieselben Koeffizienten b vermitteln also auch die inverse Substitution der Δx_{ν}. Geometrisch ist $b_{\nu\alpha}$ der Kosinus des Winkels zwischen der x'_{ν}-Achse und der x_{α}-Achse.

Zusammenfassend können wir sagen: In der euklidischen Geometrie gibt es (in einem gegebenen Bezugsraume) bevorzugte Koordinatensysteme, die kartesischen, welche auseinander durch lineare orthogonale Transformation der Koordinaten hervorgehen. In solchen Koordinaten drückt sich der mit dem Maßstab meßbare Abstand s zweier Punkte des Bezugsraumes in besonders einfacher Weise aus. Auf diesen Begriff des Abstandes läßt sich die ganze Geometrie gründen. In der gegebenen Darstellung bezieht sich die Geometrie auf wirkliche Dinge (feste Körper), und ihre Sätze sind Behauptungen über das Verhalten dieser Dinge, welche zutreffend oder auch unzutreffend sein können.

Gewöhnlich pflegt man die Geometrie so zu lehren, daß eine Beziehung der Begriffe zu den Erlebnissen nicht hergestellt wird. Es hat auch Vorteile, dasjenige, was an ihr rein logisch und von der prinzipiell unvollkommenen Empirie unabhängig ist, zu isolieren. Der reine Mathematiker kann sich damit begnügen. Er ist zufrieden, wenn seine Sätze richtig, d. h. ohne logische Fehler aus den Axiomen abgeleitet sind. Die Frage, ob die euklidische Geometrie *wahr* ist oder nicht, hat für ihn keinen Sinn. Für unseren Zweck aber ist es nötig, den Grundbegriffen der Geometrie Naturobjekte zuzuordnen; ohne eine solche Zuordnung ist die Geometrie für den Physiker gegenstandslos. Für den Physiker hat es daher wohl einen Sinn, nach der Wahrheit bzw. dem Zutreffen der geometrischen Sätze zu sprechen. Daß die so interpretierte euklidische Geometrie nicht nur Selbstverständliches, d. h. durch Definitionen logisch Bedingtes ausspricht, erkennt man durch folgende einfache Überlegung, welche von HELMHOLTZ herrührt:

Zwischen n Punkten des Raumes gibt es $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ Abstände $s_{\mu\nu}$; zwischen diesen und den $3n$ Koordinaten bestehen die Relationen

$$s_{\mu\nu}^2 = \left(x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)}\right)^2 + \left(x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)}\right)^2 + \cdots$$

Aus diesen $\dfrac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen lassen sich die $3n$ Koordinaten eliminieren, aus welcher Elimination mindestens $\dfrac{n(n-1)}{2} - 3n$ Gleichungen zwischen den $s_{\mu\nu}$ folgen müssen[1]. Da die $s_{\mu\nu}$ meßbare Größen sind, die ihrer Definition nach voneinander unabhängig sind, brauchen diese Beziehungen zwischen den $s_{\mu\nu}$ a priori nicht zu bestehen.

Aus dem Vorhergehenden zeigt sich, daß die Transformationsgleichungen (3), (4) für die euklidische Geometrie eine fundamentale Bedeutung besitzen, indem sie den Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen beherrschen.

---

[1] In Wahrheit sind es $\dfrac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ Gleichungen.

Das kartesische Koordinatensystem zeichnet sich dadurch aus, daß sich in bezug auf jedes solche der meßbare Abstand s zweier Punkte durch die Gleichung

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$$

ausdrückt. Sind K_{x_ν} und $K'_{x'_\nu}$ zwei kartesische Koordinatensysteme, so gilt

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \sum \Delta x_\nu'^2 \,.$$

Die rechte Seite ist der linken identisch gleich vermöge der zwischen x' und x bestehenden linearen orthogonalen Transformationsgleichungen, und die rechte Seite unterscheidet sich von der linken nur dadurch, daß die x_ν durch die x'_ν ersetzt sind. Man drückt diesen Sachverhalt durch die Aussage aus: $\sum \Delta x_\nu^2$ ist eine Invariante bezüglich linearer orthogonaler Transformationen. Offenbar haben in der euklidischen Geometrie nur solche (und alle solche) Größen eine objektive (von der besonderen Wahl des kartesischen Systems unabhängige) Bedeutung, welche sich durch eine Invariante (bezüglich linearer orthogonaler Koordinaten) ausdrücken lassen. Hierauf beruht es, daß die Invariantentheorie, welche sich mit den Strukturgesetzen der Invariante beschäftigt, für die analytische Geometrie von Bedeutung ist.

Als zweites Beispiel einer geometrischen Invariante nenne ich die Größe eines Volumens. Dasselbe drückt sich in der Form aus:

$$V = \iiint dx_1\, dx_2\, dx_3\,.$$

In der Tat ist nach dem Jacobischen Transformationssatze

$$\iiint dx_1'\, dx_2'\, dx_3' = \iiint \frac{\partial(x_1', x_2', x_3')}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\,,$$

wobei der Integrand im letzten Integral die Funktionaldeterminante der x_ν' nach den x_ν bedeutet, welche nach (3) gleich der Determinante $\left|b_{\mu\nu}\right|$ der Substitutionskoeffizienten $b_{\nu\alpha}$ ist. Bildet man die Determinante der $\delta_{\mu\alpha}$ der Gleichung (4), so erhält man unter Anwendung des Multiplikationstheorems der Determinanten

$$\begin{aligned} 1 = \left|\delta_{\alpha\beta}\right| = \left|\sum_{\nu} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\right| = \left|b_{\mu\nu}\right|^2; \\ \left|b_{\mu\nu}\right| = \pm 1\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Beschränkt man sich auf diejenigen Transformationen, welche die Determinante +1 haben[1)] (und nur solche gehen aus *stetiger* Änderung des Koordinatensystems hervor), so ist also V eine Invariante.

Die Invariante ist aber nicht die einzige Form, welche gestattet, von der speziellen Wahl der kartesischen Koordinaten unabhängige Aussagen zum Ausdruck zu bringen. Andere Ausdrucksmittel sind die Vektoren und Tensoren. Es handle sich z. B. um die Aussage, daß Punkte mit den (laufenden) Koordinaten x_ν auf einer Geraden liegen. Dann gilt

$$x_\nu - A_\nu = \lambda B_\nu \quad (\nu \text{ von } 1 \text{ bis } 3)\,.$$

[1)] Es gibt also zweierlei kartesische Koordinatensysteme, welche man als „Rechtssysteme“ und „Linkssysteme“ bezeichnet. Der Unterschied zwischen beiden ist jedem Physiker und Ingenieur geläufig. Interessant ist, daß man Rechtssysteme bzw. Linkssysteme an sich nicht geometrisch definieren kann, wohl aber die Gegensätzlichkeit beider Typen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann hierbei

$$\sum B_\nu^2 = 1$$

gesetzt werden.

Multipliziert man die Gleichungen mit $b_{\beta\nu}$ [vgl. Gleichungen (3a) und (5)] und summiert über ν, so erhält man

$$x'_\beta - A'_\beta = \lambda B'_\beta\,,$$

wobei

$$B'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} B_\nu; \qquad A'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} A_\nu$$

gesetzt ist. Dies sind die Gleichungen der Geraden bezüglich eines zweiten kartesischen Koordinatensystems K'. Sie haben dieselbe Form wie die Gleichungen bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems; es zeigt sich also, daß die Gerade eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung hat. Formal betrachtet beruht dies darauf, daß sich die Größen $(x_\nu - A_\nu) - \lambda B_\nu$ transformieren wie Streckenkomponenten Δx_ν. Den Inbegriff dreier Größen, die für jedes kartesische Koordinatensystem definiert sind und sich transformieren wie Streckenkomponenten, nennt man einen Vektor. Verschwinden die drei Komponenten eines Vektors in bezug auf ein kartesisclles Koordinatensystem, so verschwinden sie auch für jedes andere, weil die Transformationsgleichungen homogen sind. So kann man die Bedeutung des Vektorbegriffes erfassen, ohne auf die geometrische Veranschaulichung rekurrieren zu müssen. Das geschilderte Verhalten der obigen Gleichung der Geraden drückt man so aus: Die Gleichung der Geraden ist bezüglich linearer orthogonaler Transformationen kovariant.

Nun soll kurz gezeigt werden, daß es geometrische Realitäten gibt, die auf den Begriff des Tensors führen. Es sei P_0 Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades, P ein beliebiger Punkt der Oberfläche, ξ_ν seien die Projektionen der Strecke $P_0 - P$ auf die Koordinatenachsen. Dann ist

$$\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 1\,,$$

oder – wie wir *von nun an in allen* analogen Fällen unter Weglassung des Summenzeichens schreiben wollen, indem wir festsetzen, daß die Summation über zweimal auftretende Indizes selbstverständlich sei –

$$a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 1$$

die Gleichung der Fläche. Die Größen $a_{\mu\nu}$ bestimmen die Fläche bis auf die Lage des Mittelpunktes in bezug auf das gewählte kartesische Koordinatensystem vollständig. Aus dem bekannten Transformationsgesetz der ξ_ν [Gleichung (3a)] für lineare orthogonale Transformationen findet man leicht für die $a_{\mu\nu}$ das Transformationsgesetz[1)]

$$a'_{\sigma\tau} = b_{\sigma\mu}b_{\tau\nu}a_{\mu\nu}\,.$$

Dies Transformationsgesetz ist homogen und vom ersten Grade in den $a_{\mu\nu}$. Die $a_{\mu\nu}$ nennt man vermöge dieses Transformationsgesetzes Komponenten eines Tensors vom zweiten Range[2)] (letzteres wegen

---

[1)] Die Gleichung $a'_{\sigma\tau}\xi'_\sigma\xi'_\tau = 1$ läßt sich vermöge (5) durch $a'_{\sigma\tau}b_{\mu\sigma}b_{\nu\tau}\xi_\sigma\xi_\tau = 1$ ersetzen, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

[2)] In der neueren Literatur wird der „Rang" eines Tensors häufig mit „Stufe" bezeichnet.

der Zwei-Zahl der Indizes). Verschwinden sämtliche Komponenten $a_{\mu\nu}$ eines Tensors in bezug auf ein kartesisches System, so verschwinden sie auch in bezug auf jedes andere kartesische System. Die Fläche zweiten Grades wird ihrer Form und Lage nach durch diesen Tensor (a) dargestellt.

Es lassen sich Tensoren von beliebig hohem Range (Indexanzahl) analytisch definieren. Es erweist sich als möglich und zweckmäßig, Vektoren als Tensoren vom Range 1, Invarianten (Skalare) als Tensoren vom Range 0 anzusehen. Mit Rücksicht darauf läßt sich die Aufgabe der Invariantentheorie dahin formulieren: Nach welchen Gesetzen lassen sich aus gegebenen Tensoren neue bilden? Diese Gesetze wollen wir nun betrachten, um sie in der Folge anwenden zu können. Dabei handelt es sich zunächst nur um die Tensoren bezüglich linearer orthogonaler Transformationen, wie sie den Übergang von einem kartesischen System zu einem anderen desselben Bezugsraumes beherrschen. Da die Gesetze im ‚ganzen von der Dimensionszahl unabhängig sind, wollen wir letztere vorläufig unbestimmt lassen (Dimensionszahl n).

D e f i n i t i o n. Wenn ein Gebilde bezüglich jedes kartesischen Koordinatensystems eines Bezugsraumes von n Dimensionen durch n^α Zahlen $A_{\mu\nu\varrho\dots}$ (α = Zahl der Indizes) definiert ist, so bilden diese die Komponenten eines Tensors vom Range α, wenn ihr Transformationsgesetz

$$A'_{\mu'\nu'\varrho'\dots} = b_{\mu'\mu} b_{\nu'\nu} b_{\varrho'\varrho} \dots A_{\mu\nu\varrho\dots} \tag{7}$$

ist.

Bemerkung: Aus dieser Definition folgt, daß

$$A_{\mu\nu\varrho\dots} B_\mu C_\nu D_\varrho \tag{8}$$

eine Invariante ist, falls (B), (C), (D) ... Vektoren sind. Umgekehrt kann der Tensorcharakter von (A) gefolgert werden, wenn bekannt ist, daß die obige Bildung für beliebige Wahl der Vektoren (B), (C) usw. auf eine Invariante führt.

A d d i t i o n u n d S u b t r a k t i o n. Durch Addition und Subtraktion entsprechender Komponenten von Tensoren gleichen Ranges entsteht wieder ein Tensor von gleichem Range:

$$A_{\mu\nu\varrho\dots} \pm B_{\mu\nu\varrho\dots} = C_{\mu\nu\varrho\dots} \tag{9}$$

Beweis aus der obigen Definition des Tensors.

M u l t i p l i k a t i o n. Aus einem Tensor vom Range α und einem Tensor vom Range ⊠erhält man einen Tensor vom Range $\alpha+\beta$, indem man alle Komponenten des ersten mit allen Komponenten des zweiten multipliziert:

$$T_{\mu\nu\varrho\ldots\alpha\beta\gamma\ldots} = A_{\mu\nu\varrho\ldots} B_{\alpha\beta\gamma\ldots} \tag{10}$$

V e r j ü n g u n g. Aus einem Tensor vom Range α erhält man einen Tensor vom Range $\alpha-2$, indem man zwei bestimmte Indizes einander gleich setzt und über diesen nunmehr einheitlichen Index summiert:

$$T_{\varrho\ldots} = A_{\mu\mu\rho\ldots} \left(= \sum_{\mu} A_{\mu\mu\rho\ldots} \right). \tag{11}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} A'_{\mu\mu\rho\ldots} &= b_{\mu\alpha} b_{\mu\beta} b_{\varrho\gamma} \ldots A_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \delta_{\alpha\beta} b_{\rho\gamma} \ldots A_{\alpha\beta\gamma\ldots} \\ &= b_{\rho\gamma} \ldots A_{\alpha\alpha\gamma\ldots} \end{aligned}$$

Zu diesen elementaren Rechnungsregeln tritt noch die der Tensorbildung (Erweiterung) durch Differentiation

$$T_{\mu\nu\varrho\ldots\alpha} = \frac{\partial A_{\mu\nu\varrho}}{\partial x_\alpha}. \tag{12}$$

Wenn (A) ein Tensor vom Range α ist, so ist (T) ein Tensor vom Range $\alpha+1$. Der Beweis folgt aus den Transformationsgleichungen (3a) und (5), aus welch letzteren man schließt:

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} = b_{\nu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{13}$$

Gemäß diesen Rechnungsregeln lassen sich aus Tensoren (bezüglich linearer orthogonaler Transformationen) neue ableiten.

Symmetrieeigenschaften der Tensoren. Tensoren heißen symmetrisch bzw. antisymmetrisch bezüglich zweier ihrer Indizes μ und ν, wenn die beiden Komponenten, die aus der Vertauschung der Indizes μ und ν auseinander hervorgehen, einander gleich bzw. entgegengesetzt gleich sind.

Bedingung der Symmetrie: $A_{\mu\nu\varrho} = A_{\nu\mu\varrho}$

Bedingung der Antisymmetrie: $A_{\mu\nu\varrho} = -A_{\nu\mu\varrho}$

Satz: Der Charakter der Symmetrie bzw. Antisymmetrie besteht unabhängig von der Koordinatenwahl, durch welchen Satz er erst wirklich Bedeutung erhält. Beweis aus der Definitionsgleichung der Tensoren.

Spezielle Tensoren.

I. Die Größen $\delta_{\varrho\sigma}$ [Gleichung (4)] sind Tensorkomponenten (Fundamentaltensor).

   Beweis: Setzt man in die rechte Seite der Transformationsgleichungen $A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} A_{\alpha\beta}$ für $A_{\alpha\beta}$ die Größen $\delta_{\alpha\beta}$ ($= 1$ bzw. 0, je nachdem α oder $\alpha \neq \beta$), so erhält man

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}.$$

   Die Berechtigung des letzten Gleichheitszeichens erhellt, wenn man (4) auf die inverse Substitution (5) anwendet.

II. Es gibt einen bezüglich aller Indexpaare antisymmetrischen Tensor ($\delta_{\mu\nu\varrho}$), dessen Rang α gleich der Dimensionszahl n ist, und dessen

Komponenten gleich $+1$ oder -1 sind, je nachdem $\mu \nu \varrho \ldots$ eine gerade oder ungerade permutation von $1\,2\,3 \ldots$ ist.

Beweis mit Hilfe des oben bewiesenen Satzes $|b_{\varrho\sigma}| = 1$.

Diese wenigen einfachen Sätze bilden – wie sich im folgenden zeigen wird – den invariantentheoretischen Apparat für den Aufbau der Gleichungen der vorrelativistischen Physik und der speziellen Relativitätstheorie.

Wir haben gesehen, daß es für die räumliche Beschreibullg in der vorrelativistischen Physik eines Bezugskörpers bzw. Bezugsraumes und in diesem eines kartesischen Koordinatensystems bedarf. Wir können diese bei den Begriffe in einen verschmelzen, indem wir uns das kartesische Koordinatensystem als ein kubisches Stabgerüst denken, welches aus lauter Stäben von der Länge 1 aufgebaut ist. Die Gitterpunkte dieses Gerüstes haben ganzzahlige Koordinaten. Daß die Stäbe eines solchen Gitters alle die Länge 1 haben, folgt aus der Fundamentalbeziehung

$$s^2 = \varDelta x_1^2 + \varDelta x_2^2 + \varDelta x_3^2 .$$

Zur zeitlichen Beschreibung bedürfen wir ferner einer Einheitsuhr, die etwa im Anfangspunkt unseres kartesischen Koordinatensystems (Stabgerüstes) aufgestellt sei. Findet irgendwo ein Ereignis statt, so können wir ihm drei Koordinaten x_ν und einen Zeitwert t zuschreiben, *wenn von dem Ereignis feststeht, welche Uhrzeit t der im Koordinatenursprung befindlichen Uhr ihm gleichzeitig sei*. Wir geben damit der Aussage der Gleichzeitigkeit distanter Ereignisse (hypothetisch) eine objektive Bedeutung, während oben nur von der Gleichzeitigkeit zweier Erlebnisse eines Subjekts die Rede war. Die so festgelegte Zeit ist jedenfalls unabhängig von der Lage des Koordinatensystems im Bezugsraume, also eine Invariante bezüglich der Transformation (3).

Die vorrelativistische Physik postuliert, daß die ihre Gesetze ausdrückenden Gleichungssysteme mit Bezug auf die Transformation (3) kovariant seiell, ebenso wie die Relation der Euklidischen Geometrie. Es wird dadurch die Isotropie und Homogenität des Raumes zum Ausdruck gebracht[1)]. Wir wollen

[1)] Allerdings könnte man z. B. auch in dem Falle, daß es im Raume eine physikalisch bevorzugte Richtung gäbe, die physikanun die wichtigsten physikalischen Gleichungen von diesem Gesichtspunkte aus betrachten.

Bewegungsgleichungen des Massenpunktes

$$m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = X_\nu \tag{14}$$

(dx_ν) ist ein Vektor, dt, also auch $\frac{1}{dt}$ eine Invariante, also $\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)$ ein Vektor; ebenso zeigt man, daß $\left(\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)$ ein Vektor ist. Allgemein ändert der Differentiationsprozeß nach der Zeit den Tensorcharakter

---

lischen Gesetze durch Gleichungen zum Ausdruck bringen, welche bezüglich der Transformationen (3) kovariant sind; eine solche Darstellung wäre aber in diesem Falle eine unzweckmäßige. Gäbe es nämlich eine bevorzugte Richtung, so wäre es im Interesse der Einfachheit der Naturbeschreibung zweckmäßig, das Koordinatensystem zu dieser Richtung in bestimmter Weise zu orientieren. Ist aber umgekehrt keine Richtung des Raumes vor anderen physikalisch bevorzugt, so ist es unlogisch, die Naturgesetze so zu formulieren, daß die Gleichwertigkeit verschieden orientierter Koordinatensysteme verborgen bleibt. Wir werden diesen Gesichtspunkt bei der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie wieder antreffen.

nicht. Da m eine Invariante ist (Tensor nullten Ranges), so ist auch $\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)$ ein Vektor oder Tensor ersten Ranges (nach dem Satz von der äußeren Multiplikation der Tensoren). Hat also die Kraft (X_ν) Vektorcharakter, so gilt dies auch für die Differenz $\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)$. Die Bewegungsgleichung gilt also auch für jedes andere kartesische Koordinatensystem des Bezugsraumes. Für den Fall, daß die Kräfte konservativ sind, ist der Vektorcharakter von X_ν leicht erkennbar. Denn dann existiert eine potentielle Energie Φ, welche nur von den Punktabständen abhängt, also eine Invariante ist; dann ist der Vektorcharakter der Kraft $X_\nu = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}$ eine Folge unserer allgemeinen Sätze (Erweiterung eines Tensors vom Range 0).

Durch Multiplikation mit dem Tensor ersten Ranges der Geschwindigkeit erhält man ferner die Tensorgleichung

$$\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)\frac{dx_\mu}{dt} = 0\,.$$

Durch Verjüngen und Multiplikation mit dem Skalar

dt erhält man die Gleichung der kinetischen Energie

$$d\left(\frac{mq^2}{2}\right) = X_\nu dx_\nu \,.$$

Bezeichnet man mit ξ_ν die Differenz der Koordinaten des materiellen Punktes und derjenigen eines raumfesten Punktes, so haben die ξ_ν Vektorcharakter. Offenbar ist $\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = \frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}$, so daß man die Bewegungsgleichungen des Punktes auch schreiben kann

$$m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} - X_\nu = 0 \,.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit ξ_μ, so erhält man eine Tensorgleichung

$$\left(m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)\frac{d\xi_\mu}{dt} = 0 \,.$$

Durch Verjüngen des linksstehenden Tensors und Bilden des zeitlichen Mittels gelangt man zum Virialsatz, worauf wir nicht näher eingehen. Durch Vertauschung der Indizes und nachfolgende Subtraktion erhält man nach einfacher Umformung den Momentensatz

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\xi_\mu\frac{d\xi_{nu}}{dt}-\xi_\nu\frac{d\xi_\mu}{dt}\right)\right]=\xi_\mu X_\nu-\xi_\nu X_\mu\,. \quad (15)$$

Bei dieser Darstellung wird es offenbar, daß die Momente von Vektoren nicht wieder Vektoren, sondern Tensoren sind. Wegen des antisymmetrischen Charakters gibt es aber nun nicht neun, sondern nur drei selbständige Gleichungen dieses Systems. Die Möglichkeit, antisymmetrische Tensoren zweiten Ranges im Raume von drei Dimensionen durch Vektoren zu ersetzen, beruht auf der Bildung des Vektors

$$A_\mu=\frac{1}{2}A_{\sigma\tau}\delta_{\sigma\tau\mu}\,.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathfrak{h}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\mathfrak{h}_2}{\partial x_3} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{e}_1}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathfrak{i}_1\\
&\frac{\partial\mathfrak{h}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\mathfrak{h}_3}{\partial x_1} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{e}_2}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathfrak{i}_2\\
&\ldots\\
&\frac{\partial\mathfrak{e}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{e}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathfrak{e}_3}{\partial x_3} = \varrho
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathfrak{e}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\mathfrak{e}_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{h}_1}{\partial t}\\
&\frac{\partial\mathfrak{e}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\mathfrak{e}_3}{\partial x_1} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{h}_2}{\partial t}\\
&\ldots\\
&\frac{\partial\mathfrak{h}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{h}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathfrak{h}_3}{\partial x_3} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$\mathfrak{i}$ ist ein Vektor, da die Stromdichte definiert ist als Elektrizitätsdichte, multipliziert mit dem Geschwindigkeitsvektor der Elektrizität. Also ist es nach den ersten drei Gleichungen naheliegend, auch $\mathfrak{e}$ als einen Vektor zu betrachten. Dann können wir $\mathfrak{h}$ nicht als

Vektor auffassen[1]. Die Gleichungen lassen sich aber leicht interpretieren, indem man $\mathfrak{h}$ als antisymmetrischen Tensor vom Range 2 interpretiert. Wir schreiben in diesem Sinne statt $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$ der Reihe nach $\mathfrak{h}_{23}$, $\mathfrak{h}_{31}$, $\mathfrak{h}_{12}$. Mit Rücksicht auf die Antisymmetrie von $\mathfrak{h}_{\mu\nu}$ können die ersten drei Gleichungen von (16) und (17) in die Form gebracht werden

$$= \frac{1}{c} \tag{19a}$$

$$= +\frac{1}{c}. \tag{20a}$$

$\mathfrak{h}$ erscheint demnach im Gegensatz zu $\mathfrak{e}$ als Größe vom Symmetriecharakter eines Drehmomentes oder einer Rotationsgeschwindigkeit. Die Divergenzgleichungen

[1] Diese Betrachtungen sollen den Leser mit der Tensorbetrachtung bekannt machen ohne die besonderen Schwierigkeiten der vierdimensionalen Betrachtungsweise, damit dann die entsprechenden Betrachtungen der speziellen Relativitätstheorie (Minkowskis Interpretation des Feldes) weniger Schwierigkeiten machen.

aber nehmen die Formen an

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_\nu}{\partial x_\nu} = \varrho \tag{19b}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial \mathfrak{h}_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathfrak{h}_{\varrho\mu}}{\partial x_\nu} = 0\,. \tag{20b}$$

Die letzte Gleichung ist eine antisymmetrische Tensorgleichung vom dritten Range (die Antisymmetrie der linken Seite bezüglich jedes Indexpaares ist mit Rücksicht auf die Antisymmetrie von $\mathfrak{h}_{\mu\nu}$ leicht zu beweisen).

Sie enthält also trotz ihrer drei Indizes nur eine einzige Bedingung. Diese Schreibweise ist darum natürlicher als die übliche, weil sie im Gegensatz zu letzterer ohne Zeichenänderung auf kartesische Linkssysteme wie auf Rechtssysteme paßt.

Spezielle Relativitätstheorie

Die bisherigen Überlegungen sind, abgesehen von der Voraussetzung der Gültigkeit der Euklidischen Geometrie, für die Lagerungsmöglichkeiten fester Körper auf die Voraussetzung gegründet, daß alle Richtungen des Raumes (bzw. Lagerungen kartesischer Koordinatensysteme) physikalisch gleichwertig seien. Es gibt keine absolute Richtung im Bezugsraume, welche durch objektive Merkmale ausgezeichnet wäre, sondern nur Relationen zwischen Richtungen. Man kann diese Aussage als „Relativitätsprinzip in bezug auf die Richtung" bezeichnen, und es wurde gezeigt, daß mittels des Tensorkalküls diesem Prinzip entsprechend gebaute Gleichungen (Naturgesetze) gefunden werden können. Nun stellen wir uns die Frage, ob es auch eine Relativität hinsichtlich des Bewegungszustandes des Bezugsraumes gibt, d. h. ob es relativ zueinander bewegte Bezugsräume gibt, welche physikalisch gleichwertig sind. Vom Standpunkt der Mechanik scheinen gleichberechtigte Bezugsräume zu existieren. Denn wir merken beim Experimentieren auf der Erde nichts davon, daß diese sich mit etwa 30 km/sec Geschwindigkeit um die Sonne bewegt. Andererseits scheint aber diese physikalische Gleichwertigkeit nicht für beliebig bewegte Bezugsräume zu gelten; denn die mechanischen Vorgänge scheinen in bezug auf einen schaukelnden Eisenbahnwagen nicht nach denselben Gesetzen vor sich zu gehen, wie in bezug auf einen gleichmäßig fahrenden EiSenbahnwagen; die Drehung der Erde macht sich

Allgemeine Relativitätstheorie

Alle bisherigen Überlegungen beruhen auf der Voraussetzung, daß die Inertialsysteme für die physikalische Beschreibung gleichberechtigt, den Bezugsräumen von anderen Bewegungszuständen für die Formulierung der Naturgesetze aber überlegen seien. Für diese Bevorzugung bestimmter Bewegungszustände vor allen anderen kann gemäß unseren bisherigen Betrachtungen in den wahrnehmbaren Körpern bzw. in dem Begriff der Bewegung eine Ursache nicht gedacht werden; sie muß vielmehr auf eine selbständige, d. h. durch nichts anderes bedingte Eigenschaft des raumzeitlichen Kontinuums zurückgeführt werden. Insbesondere scheint das Trägheitsgesetz dazu zu zwingen, dem Raum-Zeit-Kontinuum physikalisch-objektive Eigenschaften zuzuschreiben. War es vom Standpunkt NEWTONs konsequent die beiden Begriffe auszusprechen: „tempus absolutum, spatium absolutum“, so muß man auf dem Standpunkt der speziellen Relativitätstheorie von „continuum absolutum spatii et temporis est“ sprechen. Dabei bedeutet „absolutum“ nicht nur „physikalisch-real“, sondern auch „in ihren physikalischen Eigenschaften selbständig, physikalisch bedingend, aber selbst nicht bedingt“.

Allgemeine Relativitätstheorie (Fortsetzung)

Wir sind nun im Besitze der mathematischen Hilfsmittel zur Formulierung der Gesetze der allgemeinen Relativitätstheorie. Es soll für diese Darstellung nicht systematische Geschlossenheit erstrebt werden, sondern die einzelnen Resultate und Möglichkeiten sollen schrittweise aus dem Bekannten und auseinander entwickelt werden. Eine derartige Darstellung ist die dem provisorischen Stand unserer Kenntnisse am besten angemessene.

I Zum „kosmologischen Problem“

Seit dem ersten Erscheinen dieses Büchleins sind einige Fortschritte der Relativitätstheorie zu verzeichnen. Einige davon sollen zunächst kurz erwähnt werden.

Der erste Fortschritt betrifft den überzeugenden Nachweis von der Existenz der Rot-Verschiebung der Spektrallinien durch das (negative) Gravitationspotential des Erzeugungsortes (vgl. S.91). Dieser Nachweis wurde ermöglicht durch die Entdeckung von sogenann- ten "Zwergsternen", deren mittlere Dichte die des Was- sers um einen Faktor von der Größenordnung 10 4 über- trifft. Für einen solchen Stern (z. B. den lichtschwachen Begleiter des Sirius), dessen Masse und Radius bestimm- bar ist[1)], ist die nach der Tl1eorie zu erwartende Rot. verschliebung etwa 20mal so groß wie bei der Sonne und hat sich tatsächlich in dem erwarteten Betrage nach. ,veisen lassen.

[1)] Die Masse ergibt sich aus der Rückwirkung auf den Sirius auf spektroskopischem Wege mit Hilfe des NEwToNsehen Gesetzes, der Radius aus der absoluten Helligkeit und der aus der Telnperatur seines Leuchtens erschließbaren Leuchtstärke pro Flä.cheneinheit.

Ein zweiter Fortschritt, der hier kurz erwähnt werden soll, betrifft das Bewegungsgesetz eines gravitierenden Körpers. Bei der ursprünglichen Formulierung der Theorie ,vurde das Bewegungsgesetz für ein gravitie- rendes Partikel neben den1 Feldgesetz der Gravitation als eine unabhängige Grundannahme der Theorie ein- gefüllrt. Vgl. GI. (90); diese spricht aus, daß sich ein gravitierendes Partikel in einer Geodäte bewegt. Es ist dies eine hypothetische Übertragung des GALILEI- sehen Trägheitsgesetzes auf den Fall des Vorhanden seins "ecllter" Gravitationsfelder. Es hat sich gezeigt, daß sich dies Bewegungsgesetz - verallgemeinert auf den Fall beliebig großer gravitierender Massen - aus den Feldgleichunge11 des leeren Raums erschließen läßt. Nacll dieser Ableitung wird das Bewegungsgesetz durch die Bedingung erzwungen, daß das Feld außerhalb der es erzeugenden Massenpunkte nirgends singulär werden soll.

Auf einen dritten Fortscllritt, der sich auf das soge- nannte "kosmologische Problem" bezieht, soll hier aus- füllrlicher eingegangen werden, teils wegen seiner prin- zipiellen Bedeutung, teils auch deswegen, weil die Dis- kussion dieser Fragen noch keineswegs abgeschlossen ist. Ich fühle mich zu einer genaueren Diskussion auch dadllrcll gedrängt, daß ich mich des Eindruckes nicht er,vehren kann, daß bei d.er gegenwärtigen Behandlung dieses Problems die wichtigsten prinzipiellen Gesichts- punkte nicllt genügend hervortreten.

Dies Problem läßt sich etwa so forlnulieren. Wir sind auf Grund der Beobachtungen am Fixstern-Himmel hinreichend davon überzeugt, daß das System der Fix- sterne nicht im wesentlichen einer Insel gleicht, die in einem unendlichen leeren Raum schwebt, daß es also nicht so etwas gibt wie einen Schwerpunkt der ganzen in der Welt befindlichen Masse materieller Substanz. Wir fühlen uns vielmehr zu der Überzeugung gedrängt, daß es, abgesehen von den lokalen Verdichtungen in Einzelsterne und Sternsysteme, eine mittlere Dichte der Materie im Raum gibt, die überall größer als Null ist. Es entsteht also die Frage: Läßt sich diese von der Erfahrung nahegelegte Hypothese mit den Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie in Einklang bringen 1 Wir haben zuerst das Problem schärfer zu formulieren. Man denke sich einen Teilraum des Universums, der eben groß genug ist, daß die mittlere Dichte der in ihm enthaltenen Stern-Materie als kontinuierliche Funktion von Xl’ .●. , X 4 betrachtet werden kann. In einem solchen Teilraum kann man annähernd ein Inertialsystem (MINKOwsKI-Raum) finden, auf das man die Stern- Bewegungen bezieht. Man kann es so einrichten, daß .die mittlere Geschwindigkeit der Materie in bezug auf dieses System in allen Koordinatenrichtungen ver- schwindet. Es bleiben dann noch (nahezu ungeordnete) Geschwindigkeiten der Sterne übrig, ähnlich der Bewe- gung der Moleküle eines Gases. Wesentlich ist nun zu- nächst, daß diese Geschwindigkeiten erfahrungsgemäß gegen die Lichtgeschwindigkeit sehr klein sind. Es ist deshalb vernünftig, von der Existenz dieser Relativ- Bewegungen zunächst ganz abzusehen und die Sterne ersetzt zu denken durch einen materiellen Staub ohne (ungeordnete) Relativbewegung der Teilchen gegen- einander.

Die bisherigen Forderungen genügen aber noch keines- wegs, um das Problem zu einem hinreichend bestimmten zu machen. Die einfachste und radikalste Spezialisierung wäre der Ansatz: die (natürlich gemessene) Dichte e der Materie ist überall im (vierdimensionalen) Raume die- selbe, die Metrik ist bei passender Koordinatenwahl unabhängig von X 4 und b e z ü g l   c h Xl' XI' X a homogen und isotrop. Dieser Fall ist es, den ich zunächst als die natürlichste idealisierte Darstellung für den physikalischen Raum im Großen ansah; er ist auf den Seiten 102-107 dieses Büchleins behandelt. Das Bedenkliche an dieser Lösung liegt darin, daß man einen negativen Druck einführen muß, für welchen es keine physikalische Rechtfertigung gibt. Ursprünglich habe ich zur Ermöglichung jener Lösung statt des genannten Druckes eine neues Glied in die Gleichungen eingeführt, welches vom Standpunkt des Relativitäts-Prinzips erlaubt ist. Die so erweiterte Gravitationsgleichungen lauten

$$R_{ik} = 0, \tag{1}$$

wobei *Lambda* eine universelle Konstante („kosmologische Konstante") bedeutet. Die Einfügung dieses zweiten Gliedes ist eine Komplizierung der Theorie, welche deren logische Einfachheit bedenklich vermindert. Seine Einführung kann nur durch die Notlage entschuldigt werden, welche die kaum vermeidbare

Einführung einer endlichen durchschnittlichen Dichte der Materie mit sich bringt. Beiläufig sei bemerkt, daß in NEWTONS Theorie dieselbe Schwierigkeit besteht.

Aus diesem Dilemma hat der Mathematiker FRIEDMANN einen Ausweg gefunden[1]. Sein Ergebnis hat dann durch HUBBLES Entdeckung der Expansion des Fixstern-Systems (mit der. Distanz gleichmäßig anwachsender Rot-Verschiebung der Spektrallinien) eine überraschende Bestätigung gefunden. Das Folgende ist im wesentlichen nichts anderes als eine Darlegung von FRIEDMANNS Idee: Vierdimensionaler Raum, der bezüglich dreier Dimensionen isotrop ist.

Wir nehmen wahr, daß die Sternsysteme von uns aus gesehen nach allen Richtungen hin ungefähr gleicll dicht verteilt sind. Wir sehen uns dadurch zu der An- nahme gedrängt, daß diese räumliche Isotropie des Systems für alle Beobachter zutreffen würde, für jeden Ort und jede Zeit eines gegen die ihn umgeben-

---

[1] Er hat gezeigt, daß es nach den Feldgleichungen möglich ist, eine endliche Dichte im ganzen Raume (dreidimensional aufgefaßt) zu haben, ohne die Feldgleichungen ad hoc zu erweitern. Zeitschr. f. Physik 10 (1922).

de Ma- terie ruhenden Beobachters. Dagegen machen wir nicht l11ehr die Anllahme, daß die mittlere Dichte der Materie für einen relativ z'ur benachbarten Materie ruhenden Beobachter zeitlich konstant sei. Damit entfällt auch die Annahme, daß der Ausdruck des metrischen Feldes die Zeit nicht enthalte.

Wir müssen nun eine mathematische Form finden für die Voraussetzung, daß die Welt in räumlicher Be- ziehung allenthalben isotrop sei. Durch jeden Punkt P des (vierdimensionalen) Raumes geht eine Teilchen- Bahn (im folgenden kurz "Geodäte" genannt). P und Q seien zwei infinitesimal benachbarte Punl te einer solchen Geodäte. Dann werden wir zu verlangen haben, daß bezüglich jeder „Drehung" des Koordinatensystems um Pund Q der Ausdruck des Feldes invariant sein soll. Dies soll gelten für jedes Element jeder Geodäte.

Diese Forderung beschränkt nicht nur die Metrik, sondern auch die Koordinatenwahl, von welch letzterer Beschränkung wir uns nach Auffindung der Metriken von dem verlangten Symmetrie-Charakter wieder frei machen können.

Die Forderung einer solchen Invarianz verlangt, daß die Geodäte in ihrem ganzen Verlauf der Drehungsachse angehört und all ihre Punkte bei der Drehung des Koordinatensystems fest bleiben. Die Lösung soll also drehungsinvariant sein bezüglich aller Drehungen des Koordinatensystems um alle die dreifach unendlich vielen Geodäten.

Auf die deduktive Ableitung der Lösung dieses Pro- blems will ich hier der Kürze halber nicht eingehen. für einen dreidimel1sionalen Raum erscheint es jedoch anschaulich evident, daß eine bezüglich zweifach un- endlich vielen Linien drehungsinvariante Metrik im ,vesentlichen (Ien Typus einer (bei passender Koordi- natenwahl) zentralsymmetrischen Lösung haben muß, wobei die Drehachsen die radial verlaufenden Geraden sind, die ja aus Symmetriegründen Geodäten sind. Die Flächen konstanten Radius sind dann Flächen kon- stantel (positiver) Krümmung, welche auf den (radialen) Geodäten überall senkrecht stehen. In invarianter Aus- drucksweise ergibt sich also:

Es gibt eine zu den Geodäten orthogonale Flächen- schar. Jede dieser Flächen ist eine Fläche konstanter Krümmung. Je zwei Flächen dieser Schar schneiden aus diesen Geodäten gleich, lange Stücke heraus.

Bemerkung. Der so anscllaulich gewonnene Fall ist nur insofern nicht der allgemeine, als die Flächen der Schar auch Flächen negativer konstanter Krümmung oder EUKLIDisch(verschwindende Krümmung) sein können.

Indem uns interessierenden vierdimensionalen Fall ist es genau analog. Es ist ferner kein wesentlicher Unterscllied, ,venn der metrische Raum vom Trägheits- index 1 ist; nur muß man die radialen Richtungen zeit- artig, die in den Flächen der Schar liegenden Richtungen dementsprechend raumartig wählen. Die Achsen der lokalen Liclltkegel aller Punkte liegen auf den radialen Linien.

Koordinatenwabl

Statt jener vier Koordinaten, für welche die räumliche Isotropie des Kontinuums am unmittelbarsten hervortritt, wählen wir nun andere Koordinaten, die vom Standpunkt der physikalischen Interpretation be- quelner sind. Als zeitartige Linien, auf denen Xl' X 2 , x 3 konstant sind und X 4 allein variabel, wählen wir die Teilchen-Geodäten, welche in der zentralsymmetrischen Dar- stellung die vom Zentrum ausgellenden Geraden sind. x 4 sei ferner gleich dem metrischen Abstand vom Zen- trum. In solchen Koordinaten ausgedrückt, ist die Metrik von der speziellen Gestalt

Die Feldgleichungen

Wir haben nun ferner den Feldgleichungen der Gravitation Genüge zu leisten, und zwar den Feldgleichungen ohne das früher ad hoc eingeführte "kosmologische Glied":

Der Spezialfall verschwindender räumlicher Krümmung ($z = 0$)

Der einfachste Sonderfall bei nicht verschwindender Dichte e ist der Fall

Lösungen der Gleichung’en im Falle nicht verschwindender riiumlicher Krümmung

Berücksichtigt man eine räunlliche Krümmung räumlichen Schnittes (x 4 = konst.), so hat man Gleichungen

Erweiterung der vorstehenden Überlegungen durch Verallgemeinerung des Ansatzes bezüglich der ponderabeln Materie

Bei allen bisher erlallgten Lösungen gibt es eillen Zustand des Systems, in welchem die Metrik singulär

„Teilchen-Gas“, nach der speziellen Relativtätstheorie behandelt

Wir denken uns einen Schwarm parallel bewegter Teilchell von der Masse m. Er kann auf Rulle transformiert werden, die räumliche Dichte der Teilchen, (1, hat dann Lorentz-invariante Bedeutung. Auf ein beliebiges Lorentz-System bezogen, hat dann

Zusammenfassende und sonstige Bemerkungen

[1]

e Gravitationsgleichullgen ist zwar relativistisch möglich, vom Standpunkt der logischen Ökonomie aber verwerflich. Wie FRIEDMANN zuerst gezeigt hat, kann man eine allenthalben endliche Dichte der Materie mit der ursprünglichen Form der Gravitationsgleichungen in Einklang bringen, wenn man die zeitliclle Veränderliclllkeit des metriscllell Abstandes distanter Massenpunkte zuläßt[2].

---

[1] Vgl. Anmerkung am Schluß dieses Anhangs.

[2] 'Vürde die HUBBLE-Expansion bei Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie bereits entdeckt gewesen sein, so wäre es nie zur Einführung des kosmologischen Gliedes gekonlmen. Es erscheint nun aposteriori um so ungerechtfertigter, ein solches Glied in die Feldgleichungen einzuführen, als dessen Einführung seine einzige ursprüngliche Existenzberechtigung - zu einer natürlichen Lösung des kosmologischen Problems zu führen - einbüßt.

II Relativistische Theorie des nichtsymmetrischen Feldes

Bevor ich mit dem eigentlichen Gegenstande beginne, will ich eine allgemeine Betrachtung über die „Stärke" von Systemen von Feldgleichungen im allgemeinen vorausschicken. Diese Betrachtung ist auch unabhängig von der besonderen hier dargestellten Theorie von Interesse .. Für eine tiefere Durchdringung unseres Problems ist sie aber beinahe unentbehrlich.

Über die „Kompatibilität" und die „Stärke" von Systemen von Feldgleichungen

Wenn gewisse Feldvariable gewählt sind sowie ein System von Feldgleichungen für diese, so bestimmen die letzteren im allgemeinen das Feld nicht vollständig, sondern es bleiben gewisse frei wählbare Größen für eine Lösung der Feldgleichungen. Je weniger solch frei wählbare Größen von dem System von Feldgleichungen zugelassen werden, desto "stärker" ist das System. Es ist klar, daß man in Ermangelung anderer Gesichts- punkte einem in diesem Sinne stärkeren

System gegen- über einem weniger starken den Vorzug geben wird. Es ist unser Ziel, für diese Stärke von Gleichungs- systemen ein Maß zu finden. Es wird sich dabei zeigen, daß sich ein solches Maß angeben. läßt, das uns sogar in den .Stand setzt, die Stärke von Systemen mitein- ander zu vergleichen, deren Feldvariable nach Zahl und Art voneinander verschieden sind.

Relativistische Feldtheorie

Allgemeines Die eigentliche Leistung der (allgemeinen) Relativi- tätstheorie liegt darin, daß sie die Physik von der N ot- wendigkeit der Einführung des "Inertialsystems" (bzw. der Inertialsysteme) befreit hat. Das Unbefriedigende an diesem Begriff liegt darin: Er ,vählt ohne Begründung unter allen denkbaren Koordinatensystemen gewisse Systeme aus. Es wird dann angenommen, daß die Ge- setze der Physik nur in bezug auf solche Inertialsysteme gelten (z. B. der Trägheits-Satz und das Gesetz von der Konstanz der Lichtgeschwindigk-eit). Dadurch wird dem Raum als solchem :eine Rolle im System der Physik zuerteilt, die ihn vor den übrigen Elementen der physi- kalischen Beschreibung auszeichnet: Er wirkt bestim- mend auf alle Vorgänge, ohne daß diese auf ihn zurück- wirken; eine solche Theorie ist zwar logisch möglich, aber andererseits doch recht unbefriedigend. NEWTON hatte diesen Mangel deutlich empfunden, aber auch klar verstanden, daß es für die damalige Physik keinen an- deren Weg gab. Unter den Späteren war es besonders ERNST I A C H , -der diesen Punkt klar ins Licht brachte.

Sowohl die Ableitung als auch die Form der Erhaltungssätze werden viel komplizierter, wenn man die frühere Formulierung der Feldgleichungen zugrunde legt.

Allgemeine Bemerkungen

A. Die dargelegte Theorie ist nach meiner Ansicht die logisch einfachste relativistische Feldtheorie, die überhaupt möglich ist. Damit ist aber nicht gesagt, daß die Natur nicht einer komplexeren Feldtheorie entsprechen könnte. Die Aufstellung komplexerer Feld- theorien ist vielfach vorgeschlagen worden. Sie lassen sich betrachten nach folgenden Gesichtspunkten:

D. Man kann gute Argumente dafür anführen, daß die Realität überhaupt nicht durch ein kontinuierliches Feld dargestellt werden könne. Aus den Quanten- phänomenen scheint nämlich mit Sicherheit hervorzu- gehen, daß ein endliches System von endlicher Energie durch eine endliche Zahl von Zahlen (Quanten-Zahlen) vollständig beschrieben werden kann .. Dies scheint zu einer Kontinuums-Theorie nicht zu passen und muß zu einem Versuch führen, die Realität durch eine rein algebraische Theorie zu beschreiben. Niemand sieht a her, wie die Basis einer solchen Theorie gewonnen werden könnte.