ALBERT
EINSTEIN

Grundzüge der Relativitätstheorie

Springer

Albert Einstein

Grundzüge der Relativitätstheorie

Translated by:
Good Translator

Published by:
Springer

Vorwort zur 1. Auflage der „Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie“

In der vorliegenden Ausarbeitung von vier Vorträgen, die ich an der Universität Princeton im Mai 1921 gehalten habe, wollte ich die Hauptgedanken und mathematische Methoden der Relativitätstheorie zusammenfassen. Dabei habe ich mich bemüht, alles weniger Wesentliche wegzulassen, das Grundsätzliche aber doch so zu behandeln, daß das Ganze als Einführung für alle diejenigen dienen kann, welche die Elemente der höheren Mathematik beherrschen, aber nicht allzuviel Zeit und Mühe auf den Gegenstand verwenden wollen. Auf Vollständigkeit kann diese kurze Darlegung selbstverständlich keinen Anspruch machen, zumal ich die feineren, mehr mathematisch interessanten Entwicklungen, welche sich auf Variationsrechnung gründen, nicht behandelt habe. Mein Hauptziel war es, das Grundsätzliche in dem ganzen Gedankengang der Theorie klar hervortreten zu lassen.

Januar 1922 A. EINSTEIN

Vorbemerkung zum Anhang II

Für diese Auflage habe ich die „Verallgemeinerung der Gravitationstheorie“ unter dem Titel „Relativistische Theorie des nichtsymmetrischen Feldes“ völlig neu bearbeitet. Es ist mir nämlich gelungen – zum Teil unter Mitarbeit meiner Assistentin B. Kaufman – die Ableitungen sowie die Form der Feldgleichungen zu vereinfachen. Die ganze Theorie gewinnt dadurch an Durchsichtigkeit, ohne daß ihr Inhalt eine Änderung erfährt.

Dezember 1954 A. Einstein

Inhaltsverzeichnis

Raum und Zeit in der vorrelativistischen Physik **4**

Spezielle Relativitätstheorie **22**

Allgemeine Relativitätstheorie **24**

Allgemeine Relativitätstheorie (Fortsetzung) **24**

I Zum „kosmologischen Problem“ **24**

Koordinatenwabl 33

Die Feldgleichungen 33

Der Spezialfall verschwindender räumlicher Krümmung ($z = 0$) 34

Lösungen der Gleichung’en im Falle nicht verschwindender riiumlicher Krümmung 34

Erweiterung der vorstehenden Überlegungen durch Verallgemeinerung des Ansatzes bezüglich der ponderabeln Materie 34

„Teilchen-Gas“, nach der speziellen Relativtätstheorie behandelt 35

Zusammenfassende und sonstige Bemerkungen 35

II Relativistische Theorie des nichtsymmetrischen Feldes **36**

Über die „Kompatibilität“ und die „Stärke“ von Systemen von Feldgleichungen . . 36

Relativistische Feldtheorie 37

Allgemeine Bemerkungen 38

Namen- und Sachverzeichnis **39**

Raum und Zeit in der vorrelativistischen Physik

Die Relativitätstheorie ist aufs engste verbunden mit der Theorie von Raum und Zeit. Deshalb soll mit einer kurzen Untersuchung des Ursprungs unserer Ideen von Raum und Zeit begonnen werden, obwohl ich weiß, daß ich mich dabei auf strittiges Gebiet begebe. Alle Wissenschaft, sei es Naturwissenschaft oder Psychologie, sucht in gewisser Weise unsere Erlebnisse zu ordnen und in ein logisches System zu bringen. Wie hängen die geläufigen Ideen über Raum und Zeit mit dem Charakter unserer Erlebnisse zusammen?

Die Erlebnisse eines Menschen erscheinen uns als in eine Erlebnisreihe eingeordnet, in welcher die einzelnen unserer Erinnerung zugänglichen Einzelerlebnisse nach dem nicht weiter zu analysierenden Kriterium des „Früher“ und „Später“ geordnet erscheinen. Es besteht also für das Individuum eine Ich-Zeit oder subjektive Zeit. Diese ist an sich nichts Meßbares. Ich kann zwar den Erlebnissen Zahlen zuordnen, derart, daß dem späteren Erlebnis eine größere Zahl zugeordnet wird als dem früheren, aber die Art dieser Zuordnung bleibt zunächst in hohem Maße willkürlich. Ich kann jedoch die Art dieser Zuordnung weiter fixieren durch eine Uhr, indem ich den durch sie vermittelten Erlebnisablauf mit dem Ablauf der übrigen Erlebnisse vergleiche. Unter einer Uhr versteht man ein Ding, welches abzählbare Erlebnisse liefert und noch andere Eigenschaften besitzt, von denen im folgenden die Rede sein wird.

Verschiedene Menschen können mit Hilfe der Sprache ihre Erlebnisse bis zu einem gewissen Grade miteinander vergleichen. Dabei zeigt sich, daß gewisse sinnliche Erlebnisse verschiedener Menschen einander entsprechen, während bei anderen ein solches Entsprechen nicht festgestellt werden kann. Jenen sinnlichen Erlebnissen verschiedener Individuen, welche einander entsprechen und demnach in gewissem Sinne überpersönlich sind, wird eine Realität gedanklich zugeordnet. Von ihr, daher mittelbar von der Gesamtheit jener Erlebnisse, handeln die Naturwissenschaften, speziell auch deren elementarste, die Physik. Relativ konstanten Erlebniskomplexen solcher Art entspricht der Begriff des physikalischen Körpers, speziell auch des festen Körpers. Die Uhr ist auch ein

Körper bzw. ein körperliches System in diesem Sinne. Zum Wesen der Uhr gehört außerdem, daß die an ihr gezählten gleichartigen Teilvorgänge der Erlebnisfolge als einander gleich angesehen werden dürfen.

Begriffe und Begriffssysteme erhalten die Berechtigung nur dadurch, daß sie zum Überschauen von Erlebniskomplexen dienen; eine andere Legitimation gibt es für sie nicht. Es ist deshalb nach meiner Überzeugung einer der verderblichsten Taten der Philosophen, daß sie gewisse begriffliche Grundlagen der Naturwissenschaft aus dem der Kontrolle zugänglichen Gebiete des Empirisch-Zweckmäßigen in die unangreifbare Höhe des Denknotwendigen (Apriorischen) versetzt haben. Denn wenn es auch ausgemacht ist, daß die Begriffe nicht aus den Erlebnissen durch Logik (oder sonstwie) abgeleitet werden können, sondern in gewissem Sinn freie Schöpfungen des menschlichen Geistes sind, so sind sie doch ebensowenig unabhängig von der Art der Erlebnisse, wie etwa die Kleider von der Gestalt der menschlichen Leiber. Dies gilt im besonderen auch von unseren Begriffen über Zeit und Raum, welche die Physiker – von Tatsachen gezwungen – aus dem Olymp des Apriori herunterholen mußten, um sie reparieren und wieder in einen brauchbaren Zustand setzen zu können.

Wir kommen nun zu den räumlichen Begriffen und Urteilen. Auch hier ist es unerläßlich, die Beziehung der Erlebnisse zu den Begriffen streng ins Auge zu fassen. Auf diesem Gebiete scheint mir Poincaré die Wahrheit besonders klar erfaßt zu haben in der Darstellung, welche er in seinem Buche: „La science et l'hypothèse" gegeben hat. Unter allen Veränderungen, welche wir an festen Körpern wahrnehmen, sind diejenigen durch Einfachheit ausgezeichnet, welche durch willkürliche Bewegungen unseres Körpers rückgängig gemacht werden können; Poincaré nennt sie „Änderungen der Lage". Durch bloße Lagenänderungen kann man zwei Körper „aneinander anlegen". Das Fundament der Geometrie (Kongruenzsätze) bezieht sich auf die Gesetze, welche jene Lagerungsmöglichkeiten beherrschen. Für den Raumbegriff scheint uns folgendes wesentlich. Man kann durch Anlegen von Körpern B, C ... an einen Körper A neu Körper bilden, wir wollen sagen, den Körper λ fortsetzen. Man kann einen Körper A so fortsetzen, daß er mit jedem anderen Körper X zur Berührung kommt. Wir können den Inbegriff aller Fortsetzungen des Körpers A als den „Raum des Körpers A“ bezeichnen. Dann gilt, daß alle Körper sich „im Raum des (beliebig gewählten) Körpers A“ befinden. Man kann in diesem Sinne nicht von dem „Raum“ schlechthin, sondern nur von dem „zu einem Körper A gehörigen Raum“ reden. Allerdings spielt im Alltagsleben der Körper Erdkruste eine so dominierende Rolle in der Beurteilung der Lagenverhältnisse der Körper, daß er zu dem ernstlich nicht zu verteidigenden Begriff *des* Raumes (schlechthin) geführt hat. Wir wollen aber, um diesen verhängnisvollen Irrtum auszuschließen, nur von „Bezugskörper“ oder „Bezugsraum“ reden. Erst die allgemeine Relativitätstheorie hat eine Verfeinerung dieses Begriffes nötig gemacht, wie wir später sehen werden.

Ich will nicht näher auf diejenigen Eigenschaften des Bezugsraumes eingehen, welche dazu geführt haben, als Element des Raumes den Punkt einzuführen und den Raum als Kontinuum aufzufassen. Ebensowenig will ich zu analysieren versuchen, durch welche Eigenschaften des Bezugsraumes der Begriff der stetigen Punktreihe oder Linie gerechtfertigt sei. Sind aber diese Begriffe nebst ihrer Beziehung zum festen Körper der Erlebniswelt gegeben, so ist leicht zu sagen, was unter der Dreidimensionalität des Raumes zu verstehen ist, nämlich die Aussage: Jedem Punkt lassen sich drei Zahlen x_1, x_2 und x_3 (Koordinaten) zuordnen, derart, daß diese Zuordnung umkehrbar eindeutig ist, und daß sich x_1, x_2 und x_3 stetig ändern, wenn der zugehörige Punkt eine stetig Punktreihe (Linie) beschreibt.

Die vorrelativistische Physik setzt voraus, daß die Lagerungsgesetze idealer fester Körper der euklidischen Geometrie gemäß seien. Was dies bedeutet, kann z. B. wie folgt ausgedrückt werden. Zwei an einem festen Körper markierte Punkte bilden eine Strecke. Eine solche kann in mannigfacher Weise gegenüber dem Bezugsraume ruhend gelagert werden. Wenn nun die Punkte dieses Raumes so durch Koordinaten x_1, x_2, x_3 bezeichnet werden können, daß die Koordinatendifferenzen Δx_1, Δx_2, Δx_3 der Streckenpunkte bei jeder Lagerung der Strecke die nämliche Quadratsumme

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{1}$$

liefern, so nennt man den Bezugsraum EUKLIDisch und die Koordinaten kartesische[1]. Es genügt hierfür sogar, diese Annahme in der Grenze für unendlich kleine Strecken zu machen. In dieser Annahme liegen einige weniger spezielle enthalten, auf die wir ihrer grundlegenden Bedeutung wegen aufmerksam machen wollen. Erstens nämlich wird vorausgesetzt, daß man einen idealen festen Körper beliebig bewegen könne. Zweitens wird vorausgesetzt, daß das Lagerungsverhalten idealer fester Körper in dem Sinne unabhängig vom Material des Körpers und von seinen Ortsänderungen ist, daß zwei Strecken, welche *einmal* zur Deckung gebracht werden können, *stets und überall* zur Deckung gebracht werden können. Diese beiden Voraussetzungen, welche für die Geometrie und überhaupt für die messende Physik von grundlegender Bedeutung sind, entstammen natürlich der Erfahrung; sie beanspruchen in der allgemeinen Relativitätstheorie allerdings nur für (gegenüber

[1] Diese Relation muß gelten für beliebige Wahl des Anfangspunktes und der Richtung (Verhältnis $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$) der Strecke.

astronomischen Dimensionen) unendlich kleine Körper und Bezugsräume Gültigkeit.

Die Größe s nennen wir die Länge der Strecke. Damit diese eindeutig bestimmt sei, muß die Länge einer bestimmten Strecke willkürlich festgesetzt, z. B. gleich 1 gesetzt werden (Einheitsmaßstab). Dann sind die Längen aller übrigen Strecken bestimmt. Setzt man die x_ν linear abhängig von einem Parameter λ

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$

so erhält man eine Linie, welche alle Eigenschaften der Geraden der euklidischen Geometrie besitzt. Speziell folgert man leicht, daß man durch n-maliges Abtragen einer Strecke s auf einer Geraden eine Strecke von der Länge $n \cdot s$ erhält. Eine Länge bedeutet also das Ergebnis einer längs einer Geraden ausgeführten Messung mit Hilfe des Einheitsmaßstabes; sie hat ebenso wie die gerade Linie.eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Wir kommen nun zu einem Gedankengang, der in analoger Weise in der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie eine Rolle spielt. Wir fragen: Gibt es außer den verwendeten kartesischen Koordinaten noch andere gleichberechtigte? Die Strecke hat eine von der Koordinatenwahl unabhängige physikalische Bedeutung, ebenso also auch die Kugelfläche, welche man erhält als Ort der Endpunkte aller gleichen Strecken, welche man von einem beliebigen Anfangspunkt des Bezugsraumes aus abträgt. Sind sowohl x_ν als auch x'_ν (ν von 1 bis 3) kartesische Koordinaten unseres Bezugsraumes, so wird die Kugelfläche in bezug auf jene beiden Koordinatensysteme durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \text{konst.} \tag{2}$$

$$\sum \Delta x_\nu'^2 = \text{konst.} \tag{2a}$$

Wie müssen sich die x'_ν aus den x_ν ausdrücken, damit die Gleichungen (2) und (2a) äquivalent seien? Denkt man sich die x'_ν in Funktion der x_ν ausgedrückt, so kann man für genügend kleine Δx_ν nach dem Taylorschen Satze setzen:

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} \Delta x_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} \Delta x_\alpha \, \Delta x_\beta \ldots$$

Setzt man dies in (2a) ein und vergleicht mit (1), so sieht man, daß die x'_ν *lineare* Gleichungen der x_ν sein müssen. Setzt man demgemäß

$$x'_\nu = a_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_\alpha \tag{3}$$

oder

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha}\, \Delta x_\alpha \tag{3a}$$

so drückt sich die Äquivalenz der Gleichungen (2) und (2a) in der Form aus

$$\sum \Delta x'^2_\nu = \lambda^2 \sum \Delta x^2_\nu \qquad (\lambda \text{ von den unabhängig}). \tag{2b}$$

Hieraus folgt zunächst, daß λ eine Konstante sein muß. Setzt man zunächst $\lambda = 1$, so liefern (2b) und (3a) die Bedingungen

$$\sum b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \Delta_{\alpha\beta}\,, \tag{4}$$

wobei $\Delta_{\alpha\beta} = 1$ oder $\Delta_{\alpha\beta} = 0$ ist, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$. Die Bedingungen (4) heißen Orthogonalitätsbedingungen, die Transformationen (3), (4) lineare orthogonale Transformationen. Verlangt man, daß $s^2 = \sum \varDelta x_\nu^2$ für jedes Koordinatensystem gleich dem Quadrat der Länge sei und daß stets mit dem gleichen Einheitsmaßstabe gemessen werde, so muß $\lambda = 1$ sein. Dann sind die linearen orthogonalen Transformationen die einzigen, welche den Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem eines Bezugsraumes zu einem anderen vermitteln. Man erkennt, daß bei Anwendung solcher Transformationen die Gleichungen einer Geraden wieder in die Gleichungen einer Geraden übergehen. Wir bilden noch die Umkehrung der Gleichungen (3a), indem wir beiderseits mit $b_{\nu\beta}$ multiplizieren und über ν summieren. Man erhält

$$\begin{aligned} \sum b_{\nu\beta}\, \varDelta x'_\nu &= \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\, \varDelta x_\alpha \\ &= \sum_\alpha \varDelta_{\alpha\beta}\, \varDelta x_\alpha = \varDelta x_\beta\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dieselben Koeffizienten b vermitteln also auch die inverse Substitution der $\varDelta x_\nu$. Geometrisch ist $b_{\nu\alpha}$ der Kosinus des Winkels zwischen der x'_ν-Achse und der x_α-Achse.

Zusammenfassend können wir sagen: In der euklidischen Geometrie gibt es (in einem gegebenen Bezugsraume) bevorzugte Koordinatensysteme, die kartesischen, welche auseinander durch lineare orthogonale Transformation der Koordinaten hervorgehen. In solchen Koordinaten drückt sich der mit dem Maßstab meßbare Abstand s zweier Punkte des Bezugsraumes in besonders einfacher Weise aus. Auf diesen Begriff des Abstandes läßt sich die ganze Geometrie gründen. In der gegebenen Darstellung bezieht sich die Geometrie auf wirkliche Dinge (feste Körper), und ihre Sätze sind Behauptungen über das Verhalten dieser Dinge, welche zutreffend oder auch unzutreffend sein können.

Gewöhnlich pflegt man die Geometrie so zu lehren, daß eine Beziehung der Begriffe zu den Erlebnissen nicht hergestellt wird. Es hat auch Vorteile, dasjenige, was an ihr rein logisch und von der prinzipiell unvollkommenen Empirie unabhängig ist, zu isolieren. Der reine Mathematiker kann sich damit begnügen. Er ist zufrieden, wenn seine Sätze richtig, d. h. ohne logische Fehler aus den Axiomen abgeleitet sind. Die Frage, ob die euklidische Geometrie *wahr* ist oder nicht, hat für ihn keinen Sinn. Für unseren Zweck aber ist es nötig, den Grundbegriffen der Geometrie Naturobjekte zuzuordnen; ohne eine solche Zuordnung ist die Geometrie für den Physiker gegenstandslos. Für den Physiker hat es daher wohl einen Sinn, nach der Wahrheit bzw. dem Zutreffen der geometrischen Sätze zu sprechen. Daß die so interpretierte euklidische Geometrie nicht nur Selbstverständliches, d. h. durch Definitionen logisch Bedingtes ausspricht, erkennt man durch folgende einfache Überlegung, welche von Helmholtz herrührt:

Zwischen n Punkten des Raumes gibt es $\frac{1}{2}n(n-1)$ Abstände $s_{\mu\nu}$; zwischen diesen und den $3n$ Koordinaten bestehen die Relationen

$$s_{\mu\nu}^2 = \left(x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)}\right)^2 + \left(x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)}\right)^2 + \cdots \qquad (6)$$

Aus diesen $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen lassen sich die $3n$ Koordinaten eliminieren, aus welcher Elimination mindestens $\frac{n(n-1)}{2} - 3n$ Gleichungen zwischen den $s_{\mu\nu}$ folgen müssen[1]. Da die $s_{\mu\nu}$ meßbare Größen

[1] In Wahrheit sind es $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ Gleichungen.

sind, die ihrer Definition nach voneinander unabhängig sind, brauchen diese Beziehungen zwischen den $s_{\mu\nu}$ a priori nicht zu bestehen.

Aus dem Vorhergehenden zeigt sich, daß die Transformationsgleichungen (3), (4) für die euklidische Geometrie eine fundamentale Bedeutung besitzen, indem sie den Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen beherrschen. Das kartesische Koordinatensystem zeichnet sich dadurch aus, daß sich in bezug auf jedes solche der meßbare Abstand s zweier Punkte durch die Gleichung

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$$

ausdrückt. Sind K_{x_ν} und $K'_{x'_\nu}$ zwei kartesische Koordinatensysteme, so gilt

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \sum \Delta x_\nu'^2 \,.$$

Die rechte Seite ist der linken identisch gleich vermöge der zwischen x' und x bestehenden linearen orthogonalen Transformationsgleichungen, und die rechte Seite unterscheidet sich von der linken nur dadurch, daß die x_ν durch die x'_ν ersetzt sind. Man drückt diesen Sachverhalt durch die Aussage aus: $\sum \Delta x_\nu^2$ ist eine Invariante bezüglich linearer orthogonaler Transformationen. Offenbar haben in der euklidischen Geometrie nur solche (und alle solche) Größen eine objektive (von der besonderen Wahl des kartesischen Systems unabhängige) Bedeutung, welche sich durch eine Invariante (bezüglich linearer orthogonaler Koordinaten) ausdrücken lassen. Hierauf beruht es, daß die Invariantentheorie, welche sich mit den Strukturgesetzen der Invariante beschäftigt, für die analytische Geometrie von Bedeutung ist.

Als zweites Beispiel einer geometrischen Invariante nenne ich die Größe eines Volumens. Dasselbe drückt sich in der Form aus:

$$V = \iiint dx_1\, dx_2\, dx_3\, .$$

In der Tat ist nach dem JACOBIschen Transformationssatze

$$\iiint dx_1'\, dx_2'\, dx_3' = \iiint \frac{\partial(x_1', x_2', x_3')}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, ,$$

wobei der Integrand im letzten Integral die Funktionaldeterminante der x_ν' nach den x_ν bedeutet, welche nach (3) gleich der Determinante $|b_{\mu\nu}|$ der Substitutionskoeffizienten $b_{\nu\alpha}$ ist. Bildet man die Determinante der $\delta_{\mu\alpha}$ der Gleichung (4), so erhält man unter Anwendung des Multiplikationstheorems der Determinanten

$$\begin{aligned} 1 = |\delta_{\alpha\beta}| = \left|\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\right| &= |b_{\mu\nu}|^2; \\ |b_{\mu\nu}| = \pm 1\,. & \end{aligned} \tag{7}$$

Beschränkt man sich auf diejenigen Transformationen, welche die Determinante $+1$ haben[1)] (und nur solche gehen aus *stetiger* Änderung des Koordinatensystems hervor), so ist also V eine Invariante.

[1)] Es gibt also zweierlei kartesische Koordinatensysteme, welche man als „Rechtssysteme“ und „Linkssysteme“ bezeichnet. Der Unterschied zwischen beiden ist jedem Physiker und Ingenieur geläufig. Interessant ist, daß man Rechtssysteme bzw. Linkssysteme an sich nicht geometrisch definieren kann, wohl aber die Gegensätzlichkeit beider Typen.

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial x_3} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\mathfrak{i}_1 \\
\dfrac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_1} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\mathfrak{i}_2 \\
\ldots \\
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial x_3} = \varrho
\end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial x_3} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial t} \\
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial x_1} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial t} \\
\ldots \\
\dfrac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_3} = 0
\end{array}\right\} \tag{9}$$

$\mathfrak{i}$ ist ein Vektor, da die Stromdichte definiert ist als Elektrizitätsdichte, multipliziert mit dem Geschwindig- keitsvektor der Elektrizität. Also ist es nach den ersten drei Gleichungen naheliegend, auch e als einen Vektor zu betrachten. Dann können wir nicht als Vektor auffassen[1)]. Die Gleichungen lassen sich aber leicht interpretieren, indem man als antisymmetrischen Tensor vom Range 2 interpretiert. Wir schreiben in diesem Sinne statt 1 ’ 2 ’ 3 der Reihe nach 2 3 ’ 3 1 ’ 1 2 ’ Mit Rücksicht auf die Antisymmetrie von I l ” können die ersten drei Gleichungen von (8) und (9) in die Form gebracht werden

$$= \frac{1}{c} \tag{19a}$$

$$= +\frac{1}{c}. \tag{20a}$$

$\mathfrak{h}$ erscheint demnach im Gegensatz zu $\mathfrak{e}$ als Größe vom Symmetriecharakter eines Drehmomentes oder einer Rotationsgeschwindigkeit. Die Divergenzgleichungen

---

[1)] Diese Betrachtungen sollen den Leser mit der Tensorbetrachtung bekannt machen ohne die besonderen Schwierigkeiten der vierdimensionalen Betrachtungsweise, damit dann die entsprechenden Betrachtungen der speziellen Relativitätstheorie (Minkowskis Interpretation des Feldes) weniger Schwie- rigkeiten machen.

aber nehmen die Formen an

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_\nu}{\partial x_\nu} = \varrho \tag{19b}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial \mathfrak{h}_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathfrak{h}_{\varrho\mu}}{\partial x_\nu} = 0\,. \tag{20b}$$

Die letzte Gleichung ist eine antisymmetrische Tensorgleichung vom dritten Range (die Antisymmetrie der linken Seite bezüglich jedes Indexpaares ist mit Rücksicht auf die Antisymmetrie von $\mathfrak{h}_{\mu\nu}$ leicht zu beweisen).

Sie enthält also trotz ihrer drei Indizes nur eine einzige Bedingung. Diese Schreibweise ist darum natürlicher als die übliche, weil sie im Gegensatz zu letzterer ohne Zeichenänderung auf kartesische Linkssysteme wie auf Rechtssysteme paßt.

Spezielle Relativitätstheorie

Die bisherigen Überlegungen sind, abgesehen von der Voraussetzung der Gültigkeit der EUKLIDischen Geome- trie, für die Lagerungsmöglichkeiten fester Körper auf die Voraussetzung gegründet, daß alle

Richtungen des Raumes (bzw. Lagerungen kartesischer Koordinaten- systeme) physikalisch gleichwertig seien. Es gibt keine absolute Richtung im Bezugsraume, welche durch ob- jektive Merkmale ausgezeichnet wäre, sondern nur Relationen zwischen Richtungen. Man kann diese Aus- sage als "Relativitätsprinzip in bezug auf die Rich. tung" bezeichnen, und es wurde gezeigt, daß mittels des Tensorkalküls diesem Prinzip entsprechend gebaute Gleichungen (Naturgesetze) gefunden werden können. Nun stellen wir uns die Frage, ob es auch eine Rela- tivität hinsichtlich des Bewegungszustandes des Bezugs- raumes gibt, d. h. ob es relativ zueinander bewegte Bezugsräume gibt, welche physikalisch gleichwertig sind. Vom Standpunkt der Mechanik scheinen gleich- berechtigte Bezugsräume zu existieren. Denn wir merken beim Experimentieren auf der Erde nichts davon, daß diese sich mit etwa 30 km/sec Geschwindigkeit um die Sonne bewegt. Andererseits scheint aber diese physikalische Gleichwertigkeit nicht für beliebig be- wegte Bezugsräume zu gelten;' denn die mechanischen Vorgänge scheinen in bezug auf einen schaukelnden Eisenbahnwagen nicht nach denselben Gesetzen vor sich zu gehen, wie in bezug auf einen gleichmäßig fahrenden EiSenbahnwagen; die Drehung der Erde macht sich

Allgemeine Relativitätstheorie

Allgemeine Relativitätstheorie (Fortsetzung)

I Zum „kosmologischen Problem“

Seit dem ersten Erscheinen dieses Büchleins sind einige Fortschritte der Relativitätstheorie zu verzeichnen. Einige davon sollen zunächst kurz erwähnt werden.

Der erste Fortschritt betrifft den überzeugenden Nachweis von der Existenz der Rot-Verschiebung der Spektrallinien durch das (negative) Gravitationspotential des Erzeugungsortes (vgl. S.91). Dieser Nachweis wurde ermöglicht durch die Entdeckung von sogenann- ten ”Zwergsternen”, deren mittlere Dichte die des Was- sers um einen Faktor von der Größenordnung 10 4 über- trifft. Für einen solchen Stern (z. B. den lichtschwachen Begleiter des Sirius), dessen Masse und Radius bestimm- bar ist[1], ist die nach der Tl1eorie zu erwartende Rot. versclliebung etwa 20mal so groß wie bei der Sonne und hat sich tatsächlich in dem erwarteten Betrage nach. ,veisen lassen.

Ein zweiter Fortschritt, der hier kurz erwähnt werden soll, betrifft das Bewegungsgesetz eines gravitierenden Körpers. Bei der ursprünglichen Formulierung der Theorie ,vurde das Bewegungsgesetz für ein gravitie- rendes Partikel neben den1 Feldgesetz der Gravitation als eine unabhängige Grundannahme der Theorie ein- gefüllrt. Vgl. GI. (90); diese spricht aus, daß sich ein gravitierendes Partikel in einer Geodäte bewegt. Es ist dies eine hypothetische Übertragung des GALILEI- sehen Trägheitsgesetzes auf den Fall des Vorhanden seins "ecllter" Gravitationsfelder. Es hat sich gezeigt, daß sich dies Bewegungsgesetz -

---

[1] Die Masse ergibt sich aus der Rückwirkung auf den Sirius auf spektroskopischem Wege mit Hilfe des NEwToNsehen Gesetzes, der Radius aus der absoluten Helligkeit und der aus der Telnperatur seines Leuchtens erschließbaren Leuchtstärke pro Flä.cheneinheit.

verallgemeinert auf den Fall beliebig großer gravitierender Massen - aus den Feldgleichunge11 des leeren Raums erschließen läßt. Nacll dieser Ableitung wird das Bewegungsgesetz durch die Bedingung erzwungen, daß das Feld außerhalb der es erzeugenden Massenpunkte nirgends singulär werden soll.

Auf einen dritten Fortscllritt, der sich auf das soge- nannte "kosmologische Problem" bezieht, soll hier aus- füllrlicher eingegangen werden, teils wegen seiner prin- zipiellen Bedeutung, teils auch deswegen, weil die Dis- kussion dieser Fragen noch keineswegs abgeschlossen ist. Ich fühle mich zu einer genaueren Diskussion auch dadllrcll gedrängt, daß ich mich des Eindruckes nicht er,vehren kann, daß bei d.er gegenwärtigen Behandlung dieses Problems die wichtigsten prinzipiellen Gesichts- punkte nicllt genügend hervortreten.

Dies Problem läßt sich etwa so forlnulieren. Wir sind auf Grund der Beobachtungen am Fixstern-Himmel hinreichend davon überzeugt, daß das System der Fix- sterne nicht im wesentlichen einer Insel gleicht, die in einem unendlichen leeren Raum schwebt, daß es also nicht so etwas gibt wie einen

Schwerpunkt der ganzen in der Welt befindlichen Masse materieller Substanz. Wir fühlen uns vielmehr zu der Überzeugung gedrängt, daß es, abgesehen von den lokalen Verdichtungen in Einzelsterne und Sternsysteme, eine mittlere Dichte der Materie im Raum gibt, die überall größer als Null ist. Es entsteht also die Frage: Läßt sich diese von der Erfahrung nahegelegte Hypothese mit den Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie in Einklang bringen 1 Wir haben zuerst das Problem schärfer zu formulieren. Man denke sich einen Teilraum des Universums, der eben groß genug ist, daß die mittlere Dichte der in ihm enthaltenen Stern-Materie als kontinuierliche Funktion von Xl' .•. , X 4 betrachtet werden kann. In einem sol- chen Teilraum kann man annähernd ein Inertialsystem (MINKOwsKI-Raum) finden, auf das man die Stern- Bewegungen bezieht. Man kann es so einrichten, daß .die mittlere Geschwindigkeit der Materie in bezug auf dieses System in allen Koordinatenrichtungen ver- schwindet. Es bleiben dann noch (nahezu ungeordnete) Geschwindigkeiten der Sterne übrig, ähnlich der Bewe- gung der Moleküle eines Gases. Wesentlich ist nun zu- nächst, daß diese Geschwindigkeiten erfahrungsgemäß gegen die Lichtgeschwindigkeit sehr klein sind. Es ist deshalb vernünftig, von der Existenz dieser Relativ- Bewegungen zunächst ganz abzusehen und die Sterne ersetzt zu denken durch einen materiellen Staub ohne (ungeordnete) Relativbewegung der Teilchen gegen- einander.

Die bisherigen Forderungen genügen aber noch keines- wegs, um das Problem zu einem hinreichend bestimmten zu machen. Die einfachste und radikalste Spezialisierung wäre der Ansatz: die (natürlich gemessene) Dichte e der Materie ist überall im (vierdimensionalen) Raume die- selbe, die Metrik ist bei passender Koordinatenwahl unabhängig von X 4 und b e z ü g l c h Xl' XI' X a homogen und isotrop. Dieser Fall ist es, den ich zunächst als die natürlichste idealisierte Darstellung für den physi- kalischen Raum im Großen ansah; er ist auf den Seiten 102-107 dieses Büchleins behandelt. Das Bedenkliche an dieser Lösung liegt darin, daß man einen negativen Druck einführen muß, für welchen es keine physikalische Rechtfertigung gibt. Ursprünglich hab.e ich zur Ermöglichung jener Lösung statt des genannten Druckes eine neues Glied in die Gleichungen eingeführt, welches vom Standpunkt des Relativitäts-Prinzips erlaubt ist. Die so erweiterte Gravitationsgleichungen lauten

$$R_{ik} = 0, \tag{1}$$

wobei A eine universelle Konstante ("kosmologische Konstante") b e d e u t e . Die Einfügung dieses zweiten Gliedes ist eine Komplizierung der Theorie, welche deren logische Einfachheit bedenklich vermindert. Seine Ein- führung kann nur durch die Notlage entschuldigt wer- den, welche die kaum vermeidbare Einführung einer endlichen durchschnittlichen Dichte der Materie mit sich bringt. Beiläufig sei bemerkt, daß in NEWTONS Theorie dieselbe Schwierigkeit besteht.

Aus diesem Dilemma hat der Mathematiker FRIED- MANN einen Ausweg gefunden[1)]. Sein Ergebnis hat dann durch HUBBLES Entdeckung der Expansion des Fixstern-Systems (mit der. Distanz

---

[1)] Er hat gezeigt, daß es nach den Feldgleichungen möglich ist, eine endliche Dichte im ganzen Raume (dreidimensional aufgefaßt) zu haben, ohne die Feldgleichungen ad hoc zu erweitern. Zeitschr. f. Physik 10 (1922).

gleichmäßig an- wachsender Rot-Verschiebung der Spektrallinien) eine überraschende Bestätigung gefunden. Das Folgende ist im wesentlichen nichts anderes als eine Darlegung von IfRIEDMANNS Idee: Vierdimensionaler Raum, der bezüg- lich dreier Dimensionen isotrop ist.

Wir nehmen wahr, daß die Sternsysteme von uns aus gesehen nach allen Richtungen hin ungefähr gleicll dicht verteilt sind. Wir sehen uns dadurch zu der An- nahme gedrängt, daß diese räumliche Isotropie des Systems für alle Beobachter zutreffen würde, für jeden Ort und jede Zeit eines gegen die ihn umgebende Ma- terie ruhenden Beobachters. Dagegen machen wir nicht l11ehr die Anllahme, daß die mittlere Dichte der Materie für einen relativ z'ur benachbarten Materie ruhenden Beobachter zeitlich konstant sei. Damit entfällt auch die Annahme, daß der Ausdruck des metrischen Feldes die Zeit nicht enthalte.

Wir müssen nun eine mathematische Form finden für die Voraussetzung, daß die Welt in räumlicher Be- ziehung allenthalben isotrop sei. Durch jeden Punkt P des (vierdimensionalen) Raumes geht eine Teilchen- Bahn (im folgenden kurz "Geodäte" genannt). P und Q seien zwei infinitesimal benachbarte Punl te einer solchen Geodäte. Dann werden wir zu verlangen haben, daß bezüglich jeder „Drehung“ des Koordinatensystems um Pund Q der Ausdruck des Feldes invariant sein soll. Dies soll gelten für jedes Element jeder Geodäte.

Diese Forderung beschränkt nicht nur die Metrik, sondern auch die Koordinatenwahl, von welch letzterer Beschränkung wir uns nach Auffindung der Metriken von dem verlangten Symmetrie-Charakter wieder frei machen können.

Die Forderung einer solchen Invarianz verlangt, daß die Geodäte in ihrem ganzen Verlauf der Drehungsachse angehört und all ihre Punkte bei der Drehung des Koordinatensystems fest bleiben. Die Lösung soll also drehungsinvariant sein bezüglich aller Drehungen des Koordinatensystems um alle die dreifach unendlich vielen Geodäten.

Auf die deduktive Ableitung der Lösung dieses Pro- blems will ich hier der Kürze halber nicht eingehen. für einen dreidimel1sionalen Raum erscheint es jedoch anschaulich evident, daß eine bezüglich zweifach un- endlich vielen Linien drehungsinvariante Metrik im ,vesentlichen (Ien Typus einer (bei passender Koordi- natenwahl) zentralsymmetrischen Lösung haben muß, wobei die Drehachsen die radial verlaufenden Geraden sind, die ja aus Symmetriegründen Geodäten sind. Die Flächen konstanten Radius sind dann Flächen kon- stantel (positiver) Krümmung, welche auf den (radialen) Geodäten überall senkrecht stehen. In invarianter Aus- drucksweise ergibt sich also:

Es gibt eine zu den Geodäten orthogonale Flächen- schar. Jede dieser Flächen ist eine Fläche konstanter Krümmung. Je zwei Flächen dieser Schar schneiden aus diesen Geodäten gleich, lange Stücke heraus.

Bemerkung. Der so anscllaulich gewonnene Fall ist nur insofern nicht der allgemeine, als die Flächen der Schar auch Flächen negativer konstanter Krüm- mung oder EUKLIDisch(verschwindende Krümmung) sein können.

Indem uns interessierenden vierdimensionalen Fall ist es genau analog. Es ist ferner kein wesentlicher Unterscllied, ,venn der metrische Raum vom Trägheits- index 1 ist; nur muß man die radialen Richtungen zeit- artig, die in den Flächen der Schar liegenden Richtungen dementsprechend raumartig wählen. Die Achsen der lokalen Liclltkegel aller Punkte liegen auf den radialen Linien.

Koordinatenwabl

Statt jener vier Koordinaten, für welche die räumliche Isotropie des Kontinuums am unmittelbarsten hervortritt, wählen wir nun andere Koordinaten, die vom Standpunkt der physikalischen Interpretation be- quelner sind. Als zeitartige Linien, auf denen Xl' X 2 , x 3 konstant sind und X 4 allein variabel, wählen wir die Teilchen-Geodäten, welche in der zentralsymmetrischen Dar- stellung die vom Zentrum ausgellenden Geraden sind. x 4 sei ferner gleich dem metrischen Abstand vom Zen- trum. In solchen Koordinaten ausgedrückt, ist die Metrik von der speziellen Gestalt

Die Feldgleichungen

Wir haben nun ferner den Feldgleichungen der Gra- vitation Genüge zu leisten, und zwar den

Feldgleichun- gen ohne das früher ad hoc eingeführte "kosmologische Glied":

Der Spezialfall verschwindender räumlicher Krümmung ($z = 0$)

Der einfachste Sonderfall bei nicht verschwindender Dichte e ist der Fall

Lösungen der Gleichung'en im Falle nicht verschwindender riiumlicher Krümmung

Berücksichtigt man eine räunlliche Krümmung räumlichen Schnittes (x 4 = konst.), so hat man Gleichungen

Erweiterung der vorstehenden Überlegungen durch Verallgemeinerung des Ansatzes bezüglich der ponderabeln Materie

Bei allen bisher erlallgten Lösungen gibt es eillen Zustand des Systems, in welchem die Metrik singulär

„Teilchen-Gas“, nach der speziellen Relativtätstheorie behandelt

Wir denken uns einen Schwarm parallel bewegter Teilchell von der Masse m. Er kann auf Rulle transformiert werden, die räumliche Dichte der Teilchen, (1, hat dann LORENTZ-invariante Bedeutung. Auf ein be- liebiges LORENTZ-System bezogen, hat dann

Zusammenfassende und sonstige Bemerkungen

[1]

e Gravitationsgleichullgen ist zwar relativistisch mög- lich, vom Standpunkt der logischen Ökonomie aber ver- werflich. Wie FRIEDMANN zuerst gezeigt hat, kann man eine allenthalben endliche Dichte der Materie mit der ursprünglichen Form der Gravitationsgleichungen in Einklang bringen, wenn man die zeitliclle Veränderlicllkeit des metriscllell Abstandes distanter Massenpunkte zuläßt[2].

[1] Vgl. Anmerkung am Schluß dieses Anhangs.

[2] 'Vürde die HUBBLE-Expansion bei Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie bereits entdeckt gewesen sein, so

II Relativistische Theorie des nichtsymmetrischen Feldes

Bevor ich mit dem eigentlichen Gegenstande beginne, will ich eine allgemeine Betrachtung über die „Stärke“ von Systemen von Feldgleichungen im allgemeinen vorausschicken. Diese Betrachtung ist auch unab- hängig von der besonderen hier dargestellten Theorie von Interesse .. Für eine tiefere Durchdringung unseres Problems ist sie aber beinahe unentbehrlich.

Über die „Kompatibilität“ und die „Stärke“ von Systemen von Feldgleichungen

Wenn gewisse Feldvariable gewählt sind sowie ein System von Feldgleichungen für diese, so bestimmen die letzteren im allgemeinen das Feld nicht vollstän-

---

wäre es nie zur Einführung des kosmologischen Gliedes gekonlmen. Es erscheint nun aposteriori um so ungerechtfertigter, ein solches Glied in die Feldgleichungen einzuführen, als dessen Einführung seine einzige ursprüngliche Existenzberechtigung - zu einer natürlichen Lösung des kosmologischen Problems zu führen - einbüßt.

dig, sondern es bleiben gewisse frei wählbare Größen für eine Lösung der Feldgleichungen. Je weniger solch frei wählbare Größen von dem System von Feldgleichungen zugelassen werden, desto "stärker" ist das System. Es ist klar, daß man in Ermangelung anderer Gesichts- punkte einem in diesem Sinne stärkeren System gegen- über einem weniger starken den Vorzug geben wird. Es ist unser Ziel, für diese Stärke von Gleichungs- systemen ein Maß zu finden. Es wird sich dabei zeigen, daß sich ein solches Maß angeben. läßt, das uns sogar in den .Stand setzt, die Stärke von Systemen mitein- ander zu vergleichen, deren Feldvariable nach Zahl und Art voneinander verschieden sind.

Relativistische Feldtheorie

Allgemeines Die eigentliche Leistung der (allgemeinen) Relativi- tätstheorie liegt darin, daß sie die Physik von der N ot- wendigkeit der Einführung des "Inertialsystems" (bzw. der Inertialsysteme) befreit hat. Das Unbefriedigende an diesem Begriff liegt darin: Er ,vählt ohne Begründung unter allen denkbaren Koordinatensystemen gewisse Systeme aus. Es wird dann angenommen, daß die Ge- setze der Physik nur in bezug auf solche Inertialsysteme gelten (z. B. der Trägheits-Satz und das Gesetz von der Konstanz der Lichtgeschwindigk-eit). Dadurch wird dem Raum als solchem :eine Rolle im System der Physik zuerteilt, die ihn vor den übrigen Elementen der physi- kalischen Beschreibung auszeichnet: Er wirkt bestim- mend auf alle Vorgänge, ohne daß diese auf ihn zurück- wirken; eine solche Theorie ist zwar logisch möglich, aber andererseits doch recht unbefriedigend. NEWTON hatte diesen Mangel deutlich empfunden, aber auch klar verstanden, daß es für die damalige Physik keinen an- deren Weg gab. Unter den Späteren war es besonders ERNST I A C H , -der diesen Punkt klar ins Licht brachte.

Sowohl die Ableitung als auch die Form der Erhal- tungssätze werden viel komplizierter, wenn man die frühere Formulierung der Feldgleichungen zugrunde legt.

Allgemeine Bemerkungen

A. Die dargelegte Theorie ist nach meiner Ansicht die logisch einfachste relativistische Feldtheorie, die überhaupt möglich ist. Damit ist aber nicht gesagt, daß die Natur nicht einer komplexeren Feldtheorie entsprechen könnte. Die Aufstellung komplexerer Feld- theorien ist vielfach vorgeschlagen worden. Sie lassen sich betrachten nach folgenden Gesichtspunkten:

D. Man kann gute Argumente dafür anführen, daß die Realität überhaupt nicht durch ein kontinuierliches Feld dargestellt werden könne. Aus den Quanten- phänomenen scheint nämlich mit Sicherheit hervorzu- gehen, daß ein endliches System von endlicher Energie durch eine endliche Zahl von Zahlen (Quanten-Zahlen) vollständig beschrieben werden kann .. Dies scheint zu einer Kontinuums-Theorie nicht zu passen und muß zu einem Versuch führen, die Realität durch eine rein algebraische Theorie zu beschreiben. Niemand sieht a her, wie die Basis einer solchen Theorie gewonnen werden könnte.

Namen- und Sachverzeichnis