ALBERT
EINSTEIN

Grundzüge der Relativitätstheorie

Springer

Albert Einstein

Grundzüge der Relativitätstheorie

Translated by:
Good Translator

Published by:
Springer

Vorwort zur 1. Auflage der „Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie“

In der vorliegenden Ausarbeitung von vier Vorträgen, die ich an der Universität Princeton im Mai 1921 gehalten habe, wollte ich die Hauptgedanken und mathematische Methoden der Relativitätstheorie zusammenfassen. Dabei habe ich mich bemüht, alles weniger Wesentliche wegzulassen, das Grundsätzliche aber doch so zu behandeln, daß das Ganze als Einführung für alle diejenigen dienen kann, welche die Elemente der höheren Mathematik beherrschen, aber nicht allzuviel Zeit und Mühe auf den Gegenstand verwenden wollen. Auf Vollständigkeit kann diese kurze Darlegung selbstverständlich keinen Anspruch machen, zumal ich die feineren, mehr mathematisch interessanten Entwicklungen, welche sich auf Variationsrechnung gründen, nicht behandelt habe. Mein Hauptziel war es, das Grundsätzliche in dem ganzen Gedankengang der Theorie klar hervortreten zu lassen.

Januar 1922 A. Einstein

Inhaltsverzeichnis

Raum und Zeit in der vorrelativistischen Physik

Die Relativitätstheorie ist aufs engste verbunden mit der Theorie von Raum und Zeit. Deshalb soll mit einer kurzen Untersuchung des Ursprungs unserer Ideen von Raum und Zeit begonnen werden, obwohl ich weiß, daß ich mich dabei auf strittiges Gebiet begebe. Alle Wissenschaft, sei es Naturwissenschaft oder

Psychologie, sucht in gewisser Weise unsere Erlebnisse zu ordnen und in ein logisches System zu bringen. Wie hängen die geläufigen Ideen über Raum und Zeit mit dem Charakter unserer Erlebnisse zusammen?

Die Erlebnisse eines Menschen erscheinen uns als in eine Erlebnisreihe eingeordnet, in welcher die einzelnen unserer Erinnerung zugänglichen Einzelerlebnisse nach dem nicht weiter zu analysierenden Kriterium des „Früher“ und „Später“ geordnet erscheinen. Es besteht also für das Individuum eine Ich-Zeit oder subjektive Zeit. Diese ist an sich nichts Meßbares. Ich kann zwar den Erlebnissen Zahlen zuordnen, derart, daß dem späteren Erlebnis eine größere Zahl zugeordnet wird als dem früheren, aber die Art dieser Zuordnung bleibt zunächst in hohem Maße willkürlich. Ich kann jedoch die Art dieser Zuordnung weiter fixieren durch eine Uhr, indem ich den durch sie vermittelten Erlebnisablauf mit dem Ablauf der übrigen Erlebnisse vergleiche. Unter einer Uhr versteht man ein Ding, welches abzählbare Erlebnisse liefert und noch andere Eigenschaften besitzt, von denen im folgenden die Rede sein wird.

Verschiedene Menschen können mit Hilfe der

Sprache ihre Erlebnisse bis zu einem gewissen Grade miteinander vergleichen. Dabei zeigt sich, daß gewisse sinnliche Erlebnisse verschiedener Menschen einander entsprechen, während bei anderen ein solches Entsprechen nicht festgestellt werden kann. Jenen sinnlichen Erlebnissen verschiedener Individuen, welche einander entsprechen und demnach in gewissem Sinne überpersönlich sind, wird eine Realität gedanklich zugeordnet. Von ihr, daher mittelbar von der Gesamtheit jener Erlebnisse, handeln die Naturwissenschaften, speziell auch deren elementarste, die Physik. Relativ konstanten Erlebniskomplexen solcher Art entspricht der Begriff des physikalischen Körpers, speziell auch des festen Körpers. Die Uhr ist auch ein Körper bzw. ein körperliches System in diesem Sinne. Zum Wesen der Uhr gehört außerdem, daß die an ihr gezählten gleichartigen Teilvorgänge der Erlebnisfolge als einander gleich angesehen werden dürfen.

Begriffe und Begriffssysteme erhalten die Berechtigung nur dadurch, daß sie zum Überschauen von Erlebniskomplexen dienen; eine andere Legitimation gibt es für sie nicht. Es ist deshalb nach meiner Überzeugung einer der verderblichsten Taten der

Philosophen, daß sie gewisse begriffliche Grundlagen der Naturwissenschaft aus dem der Kontrolle zugänglichen Gebiete des Empirisch-Zweckmäßigen in die unangreifbare Höhe des Denknotwendigen (Apriorischen) versetzt haben. Denn wenn es auch ausgemacht ist, daß die Begriffe nicht aus den Erlebnissen durch Logik (oder sonstwie) abgeleitet werden können, sondern in gewissem Sinn freie Schöpfungen des menschlichen Geistes sind, so sind sie doch ebensowenig unabhängig von der Art der Erlebnisse, wie etwa die Kleider von der Gestalt der menschlichen Leiber. Dies gilt im besonderen auch von unseren Begriffen über Zeit und Raum, welche die Physiker – von Tatsachen gezwungen – aus dem Olymp des Apriori herunterholen mußten, um sie reparieren und wieder in einen brauchbaren Zustand setzen zu können.

Wir kommen nun zu den räumlichen Begriffen und Urteilen. Auch hier ist es unerläßlich, die Beziehung der Erlebnisse zu den Begriffen streng ins Auge zu fassen. Auf diesem Gebiete scheint mir Poincaré die Wahrheit besonders klar erfaßt zu haben in der Darstellung, welche er in seinem Buche: „La science et l'hypothèse“ gegeben hat. Unter allen Veränderungen, welche wir an festen Körpern wahrnehmen, sind diejenigen durch Einfachheit ausgezeichnet, welche durch willkürliche Bewegungen unseres Körpers rückgängig gemacht werden können; POINCARÉ nennt sie „Änderungen der Lage“. Durch bloße Lagenänderungen kann man zwei Körper „aneinander anlegen“. Das Fundament der Geometrie (Kongruenzsätze) bezieht sich auf die Gesetze, welche jene Lagerungsmöglichkeiten beherrschen. Für den Raumbegriff scheint uns folgendes wesentlich. Man kann durch Anlegen von Körpern B, C ... an einen Körper A neu Körper bilden, wir wollen sagen, den Körper A fortsetzen. Man kann einen Körper A so fortsetzen, daß er mit jedem anderen Körper X zur Berührung kommt. Wir können den Inbegriff aller Fortsetzungen des Körpers A als den „Raum des Körpers A“ bezeichnen. Dann gilt, daß alle Körper sich „im Raum des (beliebig gewählten) Körpers A“ befinden. Man kann in diesem Sinne nicht von dem „Raum“ schlechthin, sondern nur von dem „zu einem Körper A gehörigen Raum“ reden. Allerdings spielt im Alltagsleben der Körper Erdkruste eine so dominierende Rolle in der Beurteilung der Lagenverhältnisse der Körper, daß er zu dem ernstlich nicht zu verteidigenden Begriff *des* Raumes (schlechthin) geführt hat. Wir wollen aber, um diesen verhängnisvollen Irrtum auszuschließen, nur von „Bezugskörper“ oder „Bezugsraum“ reden. Erst die allgemeine Relativitätstheorie hat eine Verfeinerung dieses Begriffes nötig gemacht, wie wir später sehen werden.

Ich will nicht näher auf diejenigen Eigenschaften des Bezugsraumes eingehen, welche dazu geführt haben, als Element des Raumes den Punkt einzuführen und den Raum als Kontinuum aufzufassen. Ebensowenig will ich zu analysieren versuchen, durch welche Eigenschaften des Bezugsraumes der Begriff der stetigen Punktreihe oder Linie gerechtfertigt sei. Sind aber diese Begriffe nebst ihrer Beziehung zum festen Körper der Erlebniswelt gegeben, so ist leicht zu sagen, was unter der Dreidimensionalität des Raumes zu verstehen ist, nämlich die Aussage: Jedem Punkt lassen sich drei Zahlen x_1, x_2 und x_3 (Koordinaten) zuordnen, derart, daß diese Zuordnung umkehrbar eindeutig ist, und daß sich x_1, x_2 und x_3 stetig ändern, wenn der zugehörige Punkt eine stetig Punktreihe (Linie) beschreibt.

Die vorrelativistische Physik setzt voraus, daß die Lagerungsgesetze idealer fester Körper der euklidischen Geometrie gemäß seien. Was dies bedeutet, kann z. B. wie folgt ausgedrückt werden. Zwei an einem festen Körper markierte Punkte bilden eine Strecke. Eine solche kann in mannigfacher Weise gegenüber dem Bezugsraume ruhend gelagert werden. Wenn nun die Punkte dieses Raumes so durch Koordinaten x_1, x_2, x_3 bezeichnet werden können, daß die Koordinatendifferenzen Δx_1, Δx_2, Δx_3 der Streckenpunkte bei jeder Lagerung der Strecke die nämliche Quadratsumme

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{1}$$

liefern, so nennt man den Bezugsraum EUKLIDisch und die Koordinaten kartesische[1]. Es genügt hierfür sogar, diese Annahme in der Grenze für unendlich kleine Strecken zu machen. In dieser Annahme liegen einige weniger spezielle enthalten, auf die wir ihrer grundlegenden Bedeutung wegen aufmerksam

[1] Diese Relation muß gelten für beliebige Wahl des Anfangspunktes und der Richtung (Verhältnis $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$) der Strecke.

machen wollen. Erstens nämlich wird vorausgesetzt, daß man einen idealen festen Körper beliebig bewegen könne. Zweitens wird vorausgesetzt, daß das Lagerungsverhalten idealer fester Körper in dem Sinne unabhängig vom Material des Körpers und von seinen Ortsänderungen ist, daß zwei Strecken, welche *einmal* zur Deckung gebracht werden können, *stets und überall* zur Deckung gebracht werden können. Diese beiden Voraussetzungen, welche für die Geometrie und überhaupt für die messende Physik von grundlegender Bedeutung sind, entstammen natürlich der Erfahrung; sie beanspruchen in der allgemeinen Relativitätstheorie allerdings nur für (gegenüber astronomischen Dimensionen) unendlich kleine Körper und Bezugsräume Gültigkeit.

Die Größe s nennen wir die Länge der Strecke. Damit diese eindeutig bestimmt sei, muß die Länge einer bestimmten Strecke willkürlich festgesetzt, z. B. gleich 1 gesetzt werden (Einheitsmaßstab). Dann sind die Längen aller übrigen Strecken bestimmt. Setzt man die x_ν linear abhängig von einem Parameter λ

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$

so erhält man eine Linie, welche alle Eigenschaften der Geraden der euklidischen Geometrie besitzt. Speziell folgert man leicht, daß man durch n-maliges Abtragen einer Strecke s auf einer Geraden eine Strecke von der Länge $n \cdot s$ erhält. Eine Länge bedeutet also das Ergebnis einer längs einer Geraden ausgeführten Messung mit Hilfe des Einheitsmaßstabes; sie hat ebenso wie die gerade Linie.eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Wir kommen nun zu einem Gedankengang, der in analoger Weise in der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie eine Rolle spielt. Wir fragen: Gibt es außer den verwendeten kartesischen Koordinaten noch andere gleichberechtigte? Die Strecke hat eine von der Koordinatenwahl unabhängige physikalische Bedeutung, ebenso also auch die Kugelfläche, welche man erhält als Ort der Endpunkte aller gleichen Strecken, welche man von einem beliebigen Anfangspunkt des Bezugsraumes aus abträgt. Sind sowohl x_ν als auch x'_ν (ν von 1 bis 3) kartesische Koordinaten unseres Bezugsraumes, so wird die Kugelfläche in bezug auf jene beiden Koordinatensysteme durch die

Gleichungen ausgedrückt:

$$\sum \varDelta x_\nu^2 = \text{konst.} \tag{2}$$

$$\sum \varDelta x_\nu'^2 = \text{konst.} \tag{2a}$$

Wie müssen sich die x'_ν aus den x_ν ausdrücken, damit die Gleichungen (2) und (2a) äquivalent seien? Denkt man sich die x'_ν in Funktion der x_ν ausgedrückt, so kann man für genügend kleine $\varDelta x_\nu$ nach dem TAYLORschen Satze setzen:

$$\varDelta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha}\,\varDelta x_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\,\varDelta x_\alpha\,\varDelta x_\beta \ldots$$

Setzt man dies in (2a) ein und vergleicht mit (1), so sieht man, daß die x'_ν *lineare* Gleichungen der x_ν sein müssen. Setzt man demgemäß

$$x'_\nu = a_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_\alpha \tag{3}$$

oder

$$\varDelta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha}\,\varDelta x_\alpha \tag{3a}$$

so drückt sich die Äquivalenz der Gleichungen (2) und (2a) in der Form aus

$$\sum \Delta x_\nu'^2 = \lambda^2 \sum \Delta x_\nu^2 \tag{2b}$$
$$(\lambda \text{ von den unabhängig}).$$

Hieraus folgt zunächst, daß λ eine Konstante sein muß. Setzt man zunächst $\lambda = 1$, so liefern (2b) und (3a) die Bedingungen

$$\sum b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \Delta_{\alpha\beta}\,, \tag{4}$$

wobei $\Delta_{\alpha\beta} = 1$ oder $\Delta_{\alpha\beta} = 0$ ist, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$. Die Bedingungen (4) heißen Orthogonalitätsbedingungen, die Transformationen (3), (4) lineare orthogonale Transformationen. Verlangt man, daß $s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$ für jedes Koordinatensystem gleich dem Quadrat der Länge sei und daß stets mit dem gleichen Einheitsmaßstabe gemessen werde, so muß $\lambda = 1$ sein. Dann sind die linearen orthogonalen Transformationen die einzigen, welche den Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem eines Bezugsraumes zu einem anderen vermitteln. Man erkennt, daß bei Anwendung solcher Transformationen die Gleichungen einer Geraden wieder in die Gleichungen einer Geraden übergehen. Wir bilden noch die Umkehrung der Gleichungen (3a), indem wir beiderseits mit $b_{\nu\beta}$ multiplizieren und über ν summieren. Man erhält

$$\begin{aligned} \sum b_{\nu\beta}\,\varDelta x'_\nu &= \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\,\varDelta x_\alpha \\ &= \sum_{\alpha} \varDelta_{\alpha\beta}\,\varDelta x_\alpha = \varDelta x_\beta\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dieselben Koeffizienten b vermitteln also auch die inverse Substitution der $\varDelta x_\nu$. Geometrisch ist $b_{\nu\alpha}$ der Kosinus des Winkels zwischen der x'_ν-Achse und der x_α-Achse.

Zusammenfassend können wir sagen: In der euklidischen Geometrie gibt es (in einem gegebenen Bezugsraume) bevorzugte Koordinatensysteme, die kartesischen, welche auseinander durch lineare orthogonale Transformation der Koordinaten hervorgehen. In solchen Koordinaten drückt sich der mit dem Maßstab meßbare Abstand s zweier Punkte des Bezugsraumes in besonders einfacher Weise aus. Auf diesen Begriff des Abstandes läßt sich die ganze Geometrie gründen. In der gegebenen Darstellung bezieht sich die Geometrie auf wirkliche Dinge (feste Körper), und ihre Sätze sind Behauptungen über das Verhalten dieser Dinge, welche zutreffend oder auch unzutreffend sein können.

Gewöhnlich pflegt man die Geometrie so zu lehren, daß eine Beziehung der Begriffe zu den Erlebnissen nicht hergestellt wird. Es hat auch Vorteile, dasjenige, was an ihr rein logisch und von der prinzipiell unvollkommenen Empirie unabhängig ist, zu isolieren. Der reine Mathematiker kann sich damit begnügen. Er ist zufrieden, wenn seine Sätze richtig, d. h. ohne logische Fehler aus den Axiomen abgeleitet sind. Die Frage, ob die euklidische Geometrie *wahr* ist oder nicht, hat für ihn keinen Sinn. Für unseren Zweck aber ist es nötig, den Grundbegriffen der Geometrie Naturobjekte zuzuordnen; ohne eine solche Zuordnung ist die Geometrie für den Physiker gegenstandslos. Für den Physiker hat es daher wohl einen Sinn, nach der Wahrheit bzw. dem Zutreffen der geometrischen Sätze zu sprechen. Daß die so interpretierte euklidische Geometrie nicht nur Selbstverständliches, d. h. durch Definitionen logisch Bedingtes ausspricht, erkennt man durch folgende einfache Überlegung, welche von HELMHOLTZ herrührt:

Zwischen n Punkten des Raumes gibt es $\frac{1}{2}n(n-1)$ Abstände $s_{\mu\nu}$; zwischen diesen und den $3n$ Koordinaten bestehen die Relationen

$$s_{\mu\nu}^2 = \left(x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)}\right)^2 + \left(x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)}\right)^2 + \cdots \qquad (6)$$

Aus diesen $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen lassen sich die $3n$ Koordinaten eliminieren, aus welcher Elimination mindestens $\frac{n(n-1)}{2} - 3n$ Gleichungen zwischen den $s_{\mu\nu}$ folgen müssen[1]. Da die $s_{\mu\nu}$ meßbare Größen sind, die ihrer Definition nach voneinander unabhängig sind, brauchen diese Beziehungen zwischen den $s_{\mu\nu}$ a priori nicht zu bestehen.

Aus dem Vorhergehenden zeigt sich, daß die Transformationsgleichungen (3), (4) für die euklidische Geometrie eine fundamentale Bedeutung besitzen, indem sie den Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen beherrschen.

---

[1] In Wahrheit sind es $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ Gleichungen.

Das kartesische Koordinatensystem zeichnet sich dadurch aus, daß sich in bezug auf jedes solche der meßbare Abstand s zweier Punkte durch die Gleichung

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$$

ausdrückt. Sind K_{x_ν} und $K'_{x'_\nu}$ zwei kartesische Koordinatensysteme, so gilt

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \sum \Delta x_\nu'^2 \,.$$

Die rechte Seite ist der linken identisch gleich vermöge der zwischen x' und x bestehenden linearen orthogonalen Transformationsgleichungen, und die rechte Seite unterscheidet sich von der linken nur dadurch, daß die x_ν durch die x'_ν ersetzt sind. Man drückt diesen Sachverhalt durch die Aussage aus: $\sum \Delta x_\nu^2$ ist eine Invariante bezüglich linearer orthogonaler Transformationen. Offenbar haben in der euklidischen Geometrie nur solche (und alle solche) Größen eine objektive (von der besonderen Wahl des kartesischen Systems unabhängige) Bedeutung, welche sich durch eine Invariante (bezüglich linearer orthogonaler Koordinaten) ausdrücken lassen. Hierauf beruht es, daß die Invariantentheorie, welche sich mit den Strukturgesetzen der Invariante beschäftigt, für die analytische Geometrie von Bedeutung ist.

Als zweites Beispiel einer geometrischen Invariante nenne ich die Größe eines Volumens. Dasselbe drückt sich in der Form aus:

$$V = \iiint dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, .$$

In der Tat ist nach dem Jacobischen Transformationssatze

$$\iiint dx'_1 \, dx'_2 \, dx'_3 = \iiint \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, ,$$

wobei der Integrand im letzten Integral die Funktionaldeterminante der x'_ν nach den x_ν bedeutet, welche nach (3) gleich der Determinante $\left|b_{\mu\nu}\right|$ der Substitutionskoeffizienten $b_{\nu\alpha}$ ist. Bildet man die Determinante der $\delta_{\mu\alpha}$ der Gleichung (4), so erhält man unter Anwendung des Multiplikationstheorems der Determinanten

$$\begin{aligned} 1 = \left|\delta_{\alpha\beta}\right| = \left|\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\right| = \left|b_{\mu\nu}\right|^2 ; \\ \left|b_{\mu\nu}\right| = \pm 1 \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Beschränkt man sich auf diejenigen Transformationen, welche die Determinante $+1$ haben[1)] (und nur solche gehen aus *stetiger* Änderung des Koordinatensystems hervor), so ist also V eine Invariante.

Die Invariante ist aber nicht die einzige Form, welche gestattet, von der speziellen Wahl der kartesischen Koordinaten unabhängige Aussagen zum Ausdruck zu bringen. Andere Ausdrucksmittel sind die Vektoren und Tensoren. Es handle sich z. B. um die Aussage, daß Punkte mit den (laufenden) Koordinaten x_ν auf einer Geraden liegen. Dann gilt

$$x_\nu - A_\nu = \lambda B_\nu \quad (\nu \text{ von } 1 \text{ bis } 3)\,.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann hierbei

$$\Sigma B_\nu^2 = 1$$

gesetzt werden.

[1)] Es gibt also zweierlei kartesische Koordinatensysteme, welche man als „Rechtssysteme“ und „Linkssysteme“ bezeichnet. Der Unterschied zwischen beiden ist jedem Physiker und Ingenieur geläufig. Interessant ist, daß man Rechtssysteme bzw. Linkssysteme an sich nicht geometrisch definieren kann, wohl aber die Gegensätzlichkeit beider Typen.

Multipliziert man die Gleichungen mit $b_{\beta\nu}$ [vgl. Gleichungen (5) und (3a)] und summiert über ν, so erhält man

$$x'_\beta - A'_\beta = \lambda B'_\beta\,,$$

wobei

$$B'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} B_\nu; \qquad A'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} A_\nu$$

gesetzt ist. Dies sind die Gleichungen der Geraden bezüglich eines zweiten kartesischen Koordinatensystems K'. Sie haben dieselbe Form wie die Gleichungen bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems; es zeigt sich also, daß die Gerade eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung hat. Formal betrachtet beruht dies darauf, daß sich die Größen $(x_\nu - A_\nu) - \lambda B_\nu$ transformieren wie Streckenkomponenten Δx_ν. Den Inbegriff dreier Größen, die für jedes kartesische Koordinatensystem definiert sind und sich transformieren wie Streckenkomponenten, nennt man einen Vektor. Verschwinden die drei Komponenten eines Vektors in bezug auf ein kartesisclles Koordinatensystem, so verschwinden sie auch für jedes andere, weil die Transformationsgleichungen homogen sind. So kann man die Bedeutung des Vektorbegriffes erfassen, ohne auf die geometrische Veranschaulichung rekurrieren zu müssen. Das geschilderte Verhalten der obigen Gleichung der Geraden drückt man so aus: Die Gleichung der Geraden ist bezüglich linearer orthogonaler Transformationen kovariant.

Nun soll kurz gezeigt werden, daß es geometrische Realitäten gibt, die auf den Begriff des Tensors führen. Es sei P_0 Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades, P ein beliebiger Punkt der Oberfläche, ξ_ν seien die Projektionen der Strecke $P_0 - P$ auf die Koordinatenachsen. Dann ist

$$\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 1\,,$$

oder – wie wir *von nun an in allen* analogen Fällen unter Weglassung des Summenzeichens schreiben wollen, indem wir festsetzen, daß die Summation über zweimal auftretende Indizes selbstverständlich sei –

$$a_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu = 1$$

die Gleichung der Fläche. Die Größen $a_{\mu\nu}$ bestimmen die Fläche bis auf die Lage des Mittelpunktes in bezug auf das gewählte kartesische Koordinatensystem vollständig. Aus dem bekannten Transformationsgesetz der ξ_ν [Gleichung (3a)] für lineare orthogonale Transformationen findet man leicht für die $a_{\mu\nu}$ das Transformationsgesetz[1)]

$$a'_{\sigma\tau} = b_{\sigma\mu} b_{\tau\nu} a_{\mu\nu} \,.$$

Dies Transformationsgesetz ist homogen und vom ersten Grade in den $a_{\mu\nu}$. Die $a_{\mu\nu}$ nennt man vermöge dieses Transformationsgesetzes Komponenten eines Tensors vom zweiten Range[2)] (letzteres wegen der Zwei-Zahl der Indizes). Verschwinden sämtliche Komponenten $a_{\mu\nu}$ eines Tensors in bezug auf ein kartesisches System, so verschwinden sie auch in bezug auf jedes andere kartesische System. Die Fläche zweiten Grades wird ihrer Form und Lage nach durch diesen Tensor (a) dargestellt.

---

1) Die Gleichung $a'_{\sigma\tau}\xi'_\sigma\xi'_\tau = 1$ läßt sich vermöge (5) durch $a'_{\sigma\tau} b_{\mu\sigma} b_{\nu\tau} \xi_\sigma \xi_\tau = 1$ ersetzen, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

2) In der neueren Literatur wird der „Rang“ eines Tensors häufig mit „Stufe“ bezeichnet.

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial x_3} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\mathfrak{i}_1 \\
\dfrac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_1} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\mathfrak{i}_2 \\
\ldots \\
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial x_3} = \varrho
\end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial x_3} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial t} \\
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial x_1} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial t} \\
\ldots \\
\dfrac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_3} = 0
\end{array}\right\} \tag{9}$$

$\mathfrak{i}$ ist ein Vektor, da die Stromdichte definiert ist als Elektrizitätsdichte, multipliziert mit dem Geschwindigkeitsvektor der Elektrizität. Also ist es nach den ersten drei Gleichungen naheliegend, auch $\mathfrak{e}$ als einen Vektor zu betrachten. Dann können wir $\mathfrak{h}$ nicht als Vektor auffassen[1]. Die Gleichungen lassen sich aber leicht interpretieren, indem man $\mathfrak{h}$ als antisymmetrischen Tensor vom Range 2 interpretiert. Wir schreiben in diesem Sinne statt $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$ der Reihe nach $\mathfrak{h}_{23}$, $\mathfrak{h}_{31}$, $\mathfrak{h}_{12}$. Mit Rücksicht auf die Antisymmetrie von $\mathfrak{h}_{\mu\nu}$ können die ersten drei Gleichungen von (8) und (9) in die Form gebracht werden

$$= \frac{1}{c} \tag{19a}$$

$$= +\frac{1}{c}. \tag{20a}$$

$\mathfrak{h}$ erscheint demnach im Gegensatz zu $\mathfrak{e}$ als Größe vom Symmetriecharakter eines Drehmomentes oder einer Rotationsgeschwindigkeit. Die Divergenzgleichungen

[1] Diese Betrachtungen sollen den Leser mit der Tensorbetrachtung bekannt machen ohne die besonderen Schwierigkeiten der vierdimensionalen Betrachtungsweise, damit dann die entsprechenden Betrachtungen der speziellen Relativitätstheorie (Minkowskis Interpretation des Feldes) weniger Schwierigkeiten machen.

aber nehmen die Formen an

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_\nu}{\partial x_\nu} = \varrho \tag{19b}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial \mathfrak{h}_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathfrak{h}_{\varrho\mu}}{\partial x_\nu} = 0\,. \tag{20b}$$

Die letzte Gleichung ist eine antisymmetrische Tensorgleichung vom dritten Range (die Antisymmetrie der linken Seite bezüglich jedes Indexpaares ist mit Rücksicht auf die Antisymmetrie von $\mathfrak{h}_{\mu\nu}$ leicht zu beweisen).

Sie enthält also trotz ihrer drei Indizes nur eine einzige Bedingung. Diese Schreibweise ist darum natürlicher als die übliche, weil sie im Gegensatz zu letzterer ohne Zeichenänderung auf kartesische Linkssysteme wie auf Rechtssysteme paßt.

Spezielle Relativitätstheorie

Die bisherigen Überlegungen sind, abgesehen von der Voraussetzung der Gültigkeit der EUKLIDischen Geometrie, für die Lagerungsmöglichkeiten fester Körper auf die Voraussetzung gegründet, daß alle Richtungen des Raumes (bzw. Lagerungen kartesischer Koordinatensysteme) physikalisch gleichwertig seien. Es gibt keine absolute Richtung im Bezugsraume, welche durch objektive Merkmale ausgezeichnet wäre, sondern nur Relationen zwischen Richtungen. Man kann diese Aussage als „Relativitätsprinzip in bezug auf die Richtung" bezeichnen, und es wurde gezeigt, daß mittels des Tensorkalküls diesem Prinzip entsprechend gebaute Gleichungen (Naturgesetze) gefunden werden können. Nun stellen wir uns die Frage, ob es auch eine Relativität hinsichtlich des Bewegungszustandes des Bezugsraumes gibt, d. h. ob es relativ zueinander bewegte Bezugsräume gibt, welche physikalisch gleichwertig sind. Vom Standpunkt der Mechanik scheinen gleichberechtigte Bezugsräume zu existieren. Denn wir merken beim Experimentieren auf der Erde nichts davon, daß diese sich mit etwa 30 km/sec Geschwindigkeit um die Sonne bewegt. Andererseits scheint aber diese physikalische Gleichwertigkeit nicht für beliebig bewegte Bezugsräume zu gelten; denn die mechanischen Vorgänge scheinen in bezug auf einen schaukelnden Eisenbahnwagen nicht nach denselben Gesetzen vor sich zu gehen, wie in bezug auf einen gleichmäßig fahrenden EiSenbahnwagen; die Drehung der Erde macht sich

Allgemeine Relativitätstheorie

Alle bisherigen Überlegungen beruhen auf der Voraussetzung, daß die Inertialsysteme für die physikalische Beschreibung gleichberechtigt, den Bezugsräumen von anderen Bewegungszuständen für die Formulierung der Naturgesetze aber überlegen seien. Für diese Bevorzugung bestimmter Bewegungszustände vor allen anderen kann gemäß unseren bisherigen Betrachtungen in den wahrnehmbaren Körpern bzw. in dem Begriff der Bewegung eine Ursache nicht gedacht werden; sie muß vielmehr auf eine selbständige, d. h. durch nichts anderes bedingte Eigenschaft des raumzeitlichen Kontinuums zurückgeführt werden. Insbesondere scheint das Trägheitsgesetz dazu zu zwingen, dem Raum-Zeit-Kontinuum physikalisch-objektive Eigenschaften zuzuschreiben. War es vom Standpunkt NEWTONs konsequent die beiden Begriffe auszusprechen: „tempus absolutum, spatium absolutum“, so muß man auf dem Standpunkt der speziellen Relativitätstheorie von „continuum absolutum spatii et temporis est“ sprechen. Dabei bedeutet „absolutum“ nicht nur „physikalisch-real“, sondern auch „in ihren physikalischen Eigenschaften selbständig, physikalisch bedingend, aber selbst nicht bedingt“.

Allgemeine Relativitätstheorie (Fortsetzung)

Wir sind nun im Besitze der mathematischen Hilfsmittel zur Formulierung der Gesetze der allgemeinen Relativitätstheorie. Es soll für diese Darstellung nicht systematische Geschlossenheit erstrebt werden, sondern die einzelnen Resultate und Möglichkeiten sollen schrittweise aus dem Bekannten und auseinander entwickelt werden. Eine derartige Darstellung ist die dem provisorischen Stand unserer Kenntnisse am besten angemessene.