

Integrable Cosmological Models with Liouville Scalar Fields

Alexander A. Andrianov^{1,4}

Chen Lan²
Wang³

Oleg O. Novikov¹

Yi-Fan

¹ Saint-Petersburg State University, St. Petersburg 198504, Russia

² ELI-ALPS, ELI-Hu NKft, Dugonics tér 13, Szeged 6720, Hungary

³ Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln, Zùlpicher StraÙe 77, 50937 Köln, Germany

⁴ Institut de Ciències del Cosmos (ICCUB), Universitat de Barcelona, Spain

December 4, 2017



Outline

1. Introduction
2. Classical model
3. Quantum model with constant potential
4. Classical model with exponential potential
5. Quantum model with exponential potential
6. Wave packets and their matching



- Flat Robertson–Walker metric $ds^2 = -N^2(t) dt^2 + \varkappa^{-1/2} e^{2\alpha(t)} d\Omega_3^2$, where $\varkappa = 8\pi G$, $d\Omega_3^2$ dimensionless spacial metric
- Homogeneous real Klein–Gordon with potential (dubbed Liouville) $V e^{\lambda\phi}$, $\lambda, V \in \mathbb{R}$.
- Total action $\mathcal{S} = S_{\text{EH}} + S_{\text{GHY}} + S_L = \int d\Omega_3^2 \int dt L$,

$$L := \varkappa^{3/2} N e^{3\alpha} \left(-\frac{3}{\varkappa} \frac{\dot{\alpha}^2}{N^2} + \ell \frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} - V e^{\lambda\phi} \right), \quad (1)$$

in which dot means d/dt , $\ell = \pm 1$ corresponds to quintessence / phantom model, respectively.

- Choosing $\overline{N} := N e^{-3\alpha}$, the effective Lagrangian transforms to

$$L_e = \varkappa^{3/2} \overline{N} \left(-\frac{3}{\varkappa} \frac{\dot{\alpha}^2}{\overline{N}^2} + \ell \frac{\dot{\phi}^2}{2\overline{N}^2} - V e^{\lambda\phi + 6\alpha} \right) \quad (2)$$

- Defining $\Delta := \lambda^2 - 6\ell\varkappa$, $\mathcal{J} := \text{sgn } \Delta$ and $g := \mathcal{J}\sqrt{|\Delta|} \equiv \mathcal{J}\sqrt{\mathcal{J}\Delta}$, the rescaled special orthogonal transformation

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{\mathcal{J}}{g} \begin{pmatrix} \lambda & -\ell\varkappa \\ -6 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_\beta \beta \\ \mathcal{J}_\chi \chi \end{pmatrix} \quad \text{where } \mathcal{J}_\beta, \mathcal{J}_\chi = \pm 1 \quad (3)$$



gives the decoupled Lagrangian

$$L = \kappa^{3/2} \bar{N} \left(-\jmath \frac{3}{\kappa} \frac{\dot{\beta}^2}{\bar{N}^2} + \ell \jmath \frac{\dot{\chi}^2}{2\bar{N}^2} - V e^{\jmath x g \chi} \right), \quad (4)$$

the Euler–Lagrange equations w.r.t. \bar{N} , β and χ will be called the first, second Friedmann eqs. and the Klein–Gordon eq., respectively.

- Since β is cyclic in eq. (4), the second Friedmann equation can be integrated

$$\text{const.} \equiv p_\beta := \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = -6\jmath \kappa^{1/2} \frac{\dot{\beta}}{\bar{N}} \quad (5)$$

$$= -6\jmath \jmath_\beta \frac{\kappa^{1/2}}{g} \frac{\lambda \dot{\alpha} + \ell \kappa \dot{\phi}}{\bar{N}}. \quad (6)$$

- For $p_\beta \neq 0$, taking the gauge $\bar{N} = -6\jmath \sqrt{\kappa} \dot{\beta} / p_\beta$, the first Friedmann equation can be integrated

$$e^{\jmath x g \chi} = p_\beta^2 / 12 \kappa^2 |V| \cdot f^2 \left(s_\beta \sqrt{3/2\kappa} g \beta \right) \quad \text{or} \quad (7)$$

$$e^{6\alpha + \lambda \phi} = p_\beta^2 / 12 \kappa^2 |V| \cdot f^2 \left(\sqrt{3/2\kappa} (\lambda \alpha + \ell \kappa \phi) \right), \quad (8)$$



in which $v := \operatorname{sgn} V$, and

$$f(\gamma) := \begin{cases} \operatorname{sech}(\gamma + C_{++}) & (\ell, sv) = (+, +), \\ \operatorname{csch}(\gamma + C_{+-}) & (\ell, sv) = (+, -), \\ \operatorname{sec}(\gamma + C_{-+}) & (\ell, sv) = (-, +), \\ \operatorname{isc}(\gamma + C_{--}) & (\ell, sv) = (-, -). \end{cases} \quad (9)$$

The last solution is not real, whereas the first three cases are consistent with the Klein–Gordon equation.

- The trajectory equation for $(+, -)$ and $(-, +)$ contains two and infinite distinct solutions, respectively.
- For $p_\beta = 0$, one has $\beta \equiv \beta_0$ or $\phi - \phi_0 = -\ell\lambda\alpha/\kappa$, which is the familiar power-law special solution¹.
- Further integrating the first Friedmann equation demands $(+, -)$ or $(-, +)$ to guarantee $\bar{N} > 0$, which is automatically consistent with the Klein–Gordon equation. Taking $\bar{N} = (2\mathcal{H}^2|V|)^{-1/2}$ yields

$$e^{\int \chi g \chi} = \{2\kappa/g(t - t_0)\}^2. \quad (10)$$



- The primary Hamiltonian and the Hamiltonian constraint reads

$$H^{\text{p}} = \overline{N} H_{\perp} + P_{\overline{N}} V_{\overline{N}}, \quad (11)$$

$$H_{\perp} = -\beta \frac{p_{\beta}^2}{12\mathfrak{N}^{1/2}} + \ell \beta \frac{p_{\chi}^2}{2\mathfrak{N}^{3/2}} + \mathfrak{N}^{3/2} V e^{\beta \chi} g \chi. \quad (12)$$



- Mit diesem *beamer theme* ist es möglich, Präsentationen in \LaTeX mit der Beamer-Klasse zu erstellen, die dem Corporate Design der Universität zu Köln entsprechen
- Auf die Beamer-Klasse wird in diesem Dokument nicht näher eingegangen, nähere Informationen finden Sie unter <http://latex-beamer.sourceforge.net/>



Das Theme kann mit den folgenden Optionen geladen werden

```
\usepackage[%  
% uk,      %% Farben aller Fakultäten  
wiso,      %% Wiso-Fakultät  
% jura,    %% Rechtswissenschaftliche Fakultät  
% medizin, %% Medizinische Fakultät  
% philo,   %% Philosophische Fakultät  
% matnat,  %% Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
% human,   %% Humanwissenschaftliche Fakultät  
% verw,    %% Universitätsverwaltung  
{UzK}
```



Die Fußzeile

- Es stehen verschiedene Fußzeilen zur Auswahl, die als Option beim Laden des *themes* übergeben werden:
 - Balken mit allen Fakultätsfarben (Option `uk`)
 - Balken in jeweils einer Fakultätsfarbe (Optionen `wiso`, `jura`, `medizin`, `philo`, `matnat`, `human`, `verw`)²
- "'Universität zu Köln"' sowie der Name der Fakultät sind im Theme definiert, das Institut oder Seminar kann mit dem Befehl `\institute{}` festgelegt werden
- Die Optionen sind im Quellcode dieser Präsentation dokumentiert

²Es werden die offiziellen RGB-Werte aus dem 2-D Handbuch Corporate Design verwendet.



- Der Universitäts- sowie die Fakultätsnamen werden standardmäßig auf Deutsch angezeigt.
- Übergeben Sie dem Paket babel die Option english, so werden diese Namen entsprechen angepasst.
- Die Übersetzungen können in der Theme-Datei beamerthemeUzK.sty geändert werden



block-Umgebungen

Standard (block)

Verwendet die Farbe "Blaugrau Mittel" als Blocktitel-Hintergrund

exampleblock

Bei Verwendung der Fußzeile mit allen Fakultätsfarben Titelhintergrund in Wiso-Grün, sonst in der jeweiligen Fakultätsfarbe

alertblock

Verwendet das Rot der Folientitel

Installation

- Das Theme besteht aus den Dateien `beamerthemeUzK.sty` und `beamercolorthemeUzK.sty` sowie den Grafikdateien `logo.pdf` und `logo-small.pdf`.
- Das Theme kann auf zwei Arten verwendet werden:
 1. Die vier Dateien werden in den selben Ordner wie die zu erstellende Präsentation gelegt
 2. Die vier Dateien werden im lokalen *texmf*-Baum abgelegt
- Die zweite Variante ist der ersten vorzuziehen, da das Theme so an einem zentralen Ort vorliegt



Was noch zu tun ist...

- Erstellen einer eigenen Titelseite
- ...