Integrable Cosmological Models with Liouville Scalar Fields

Alexander A. Andrianov[1,4] Chen Lan[2] Oleg O. Novikov[1]
Yi-Fan Wang[3]

[1]Saint-Petersburg State University, St. Petersburg 198504, Russia

[2]ELI-ALPS, ELI-Hu NKft, Dugonics tér 13, Szeged 6720, Hungary

[3]Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln, Zülpicher Straße 77, 50937 Köln, Germany

[4]Institut de Ciències del Cosmos (ICCUB), Universitat de Barcelona, Spain

December 6, 2017

Outline

1. Introduction

2. Classical model

3. Quantum model with constant potential

4. Classical model with exponential potential

5. Quantum model with exponential potential

6. Wave packets and their matching

Introduction

Introduction

-

The Friedmann-Lemaître model

- Flat Robertson–Walker metric $\mathbb{d}s^2 = -N^2(t)\,\mathbb{d}t^2 + \varkappa^{-1/2}\mathbb{e}^{2\alpha(t)}\,\mathbb{d}\Omega_3^2$, where $\varkappa := 8\pi G$, $\mathbb{d}\Omega_3^2$ dimensionless spacial metric.
- Homogeneous real Klein–Gordon field with potential (dubbed *Liouville*) $V\mathbb{e}^{\lambda\phi}$, $\lambda, V \in \mathbb{R}$, and kinetic term with sign $\ell = \pm 1$ (quintessence / phantom model).
- Total action $\mathcal{S} = S_{\mathsf{EH}} + S_{\mathsf{GHY}} + S_{\mathsf{L}} = \int \mathbb{d}\Omega_3^2 \int \mathbb{d}t\, L$,

$$L := \varkappa^{3/2} N \mathbb{e}^{3\alpha}\left(-\frac{3}{\varkappa}\frac{\dot{\alpha}^2}{N^2} + \ell\,\frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} - V\mathbb{e}^{\lambda\phi}\right), \tag{1}$$

in which dot means $\mathbb{d}/\mathbb{d}t$ and $\ell = \pm 1$.

Andrianov, Lan, Novikov, Wang
SPBU, ELI-ALPS, UzK, UB

Decoupling the variables

123

- Choosing $\overline{N} := N\mathrm{e}^{-3\alpha}$, the effective Lagrangian transforms to

$$L = \varkappa^{3/2}\overline{N}\left(-\frac{3}{\varkappa}\frac{\dot{\alpha}^2}{\overline{N}^2} + \ell\,\frac{\dot{\phi}^2}{2\overline{N}^2} - V\mathrm{e}^{\lambda\phi+6\alpha}\right) \tag{2}$$

- Defining $\varDelta := \lambda^2 - 6\ell\varkappa$, $\jmath := \operatorname{sgn}\varDelta$ and $g := \jmath\sqrt{|\varDelta|} \equiv \jmath\sqrt{\jmath\varDelta}$, the *rescaled special orthogonal transformation*

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \phi\end{pmatrix} = \frac{\jmath}{g}\begin{pmatrix}\lambda & -\ell\kappa\\ -6 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\jmath_\beta\beta\\ \jmath_\chi\chi\end{pmatrix} \qquad \text{where } \jmath_\beta, \jmath_\chi = \pm 1 \tag{3}$$

gives the decoupled Lagrangian

$$L = \varkappa^{3/2}\overline{N}\left(-\jmath\frac{3}{\varkappa}\frac{\dot{\beta}^2}{\overline{N}^2} + \ell\,\jmath\,\frac{\dot{\chi}^2}{2\overline{N}^2} - V\mathrm{e}^{\jmath_\chi g\chi}\right). \tag{4}$$

- The Euler–Lagrange equations w.r.t. $\overline{N}$, β and χ will be called the trsfed. first, second Friedmann eqs. and the Klein–Gordon eq., respectively.

Andrianov, Lan, Novikov, Wang
SPBU, ELI-ALPS, UzK, UB

Implicitised integration

$p_\beta \neq 0$

- Since β is cyclic in **??**, the second Friedmann equation can be integrated

$$\text{const.} \equiv p_\beta := \frac{\partial L}{\partial \dot\beta} = -6 s \varkappa^{1/2} \frac{\dot\beta}{\overline{N}} \equiv -6 s s_\beta \frac{\varkappa^{1/2}}{g} \frac{\lambda\dot\alpha + \ell\varkappa\dot\phi}{\overline{N}}. \tag{5}$$

- For $p_\beta \neq 0$, fixing the *implicitising gauge* $\overline{N} = -6 s \sqrt{\varkappa}\dot\beta / p_\beta$, the trsfed. first Friedmann equation can be integrated

$$\mathbb{e}^{s_\chi g\chi} = \frac{p_\beta^2}{12\varkappa^2 |V|} S^2\left(s_\beta \sqrt{\frac{3}{2\varkappa}}\, g\beta \right), \tag{6}$$

in which $v := \operatorname{sgn} V$, and

$$S(\gamma) := \begin{cases} \operatorname{sech}(\gamma + C_{++}) & (\ell, sv) = (+,+), \\ \operatorname{csch}(\gamma + C_{+-}) & (\ell, sv) = (+,-), \\ \sec(\gamma + C_{-+}) & (\ell, sv) = (-,+), \\ \mathbb{i}\csc(\gamma + C_{--}) & (\ell, sv) = (-,-). \end{cases} \tag{7}$$

Andrianov, Lan, Novikov, Wang
SPBU, ELI-ALPS, UzK, UB

Integration

Discussions

- The integrals are consistent with the trsfed. Klein–Gordon equation.
- The integral for $(+,+)$
  - has two asymptotes
- The implicitised integral for $(+,-)$
  - contains two distinct solutions
  - has three asymptotes
- The implicitised integral for $(-,+)$
  - contains infinite distinct solutions
  - has infinite asymptotes, which are pairwise parallel
- The integral for $(-,-)$
  - is not real

Implicitised integration

$p_\beta = 0$

- For $p_\beta = 0$, one has $\beta \equiv \beta_0$ or $\phi - \phi_0 = -\ell\lambda\alpha/\kappa$, which is the familiar power-law special solution[1].
- Further integrating the first Friedmann equation demands $(+,-)$ or $(-,+)$ to guarantee $\overline{N} > 0$, and the result is automatically consistent with the trsfed. Klein–Gordon equation.
- Fixing $\overline{N} = (2\varkappa^2|V|)^{-1/2}$ yields

$$\mathbb{e}^{g\mathscr{s}_\chi \chi} = \left(\frac{2\kappa}{g(t-t_0)}\right)^2. \tag{8}$$

[1] **Dabrowski2006**.

Introduction

Introduction

Andrianov, Lan, Novikov, Wang
SPBU, ELI-ALPS, UzK, UB

Dirac quantisation
233

- The primary Hamiltonian and the Hamiltonian constraint reads

$$H^{\mathsf{p}} = \overline{N} H_{\perp} + p_{\overline{N}} v^{\overline{N}}, \tag{9}$$

$$H_{\perp} = -\jmath \frac{p_{\beta}^2}{12\varkappa^{1/2}} + \ell \jmath \frac{p_{\chi}^2}{2\varkappa^{3/2}} + \varkappa^{3/2} V \mathbb{e}^{g \jmath_{\chi} \chi}. \tag{10}$$

- Applying the Dirac quantisation rules with the Laplace–Beltrami opeator for the generalised momenta, one gets the minisuperspace Wheeler–DeWitt equation with (β, χ)

$$0 = \widehat{H}_{\perp} \Psi(\beta, \chi) := \left(\jmath \frac{\hbar^2}{12\varkappa^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \beta}^2 - \ell \jmath \frac{\hbar^2}{2\varkappa^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \chi}^2 + \varkappa^{3/2} V \mathbb{e}^{g \jmath_{\chi} \chi} \right) \Psi. \tag{11}$$

The mode functions
233

- Inserting the separating Ansatz $\Psi(\beta, \chi) = \mathbb{e}^{-\mathbb{i} k_\beta \mathscr{s}_\beta \beta} \psi(\chi)$, the remaining equation turns out to be Besselian, and the mode functions are

$$\psi_\nu(\chi) = C_1 \mathrm{B}_\nu^{(1)}(\sigma) + C_2 \mathrm{B}_\nu^{(2)}(\sigma), \tag{12}$$

in which

$$\nu := \sqrt{\frac{2\varkappa}{3} \frac{k_\beta}{g}}, \quad \sigma^2 := \frac{8\varkappa^3 |V| \mathbb{e}^{g \mathscr{s}_\chi \chi}}{\hbar^2 g^2}, \tag{13}$$

and

$$\mathrm{B}_\nu^{(i)}(\sigma) := \begin{cases} \mathrm{K} \text{ or } \mathrm{I}_{\mathbb{i}\nu}(\sigma) & (\ell, \mathscr{s}\mathscr{v}) = (+,+), \\ \mathrm{J} \text{ or } \mathrm{Y}_{\mathbb{i}\nu}(\sigma) & (\ell, \mathscr{s}\mathscr{v}) = (+,-), \\ \mathrm{J} \text{ or } \mathrm{Y}_{\nu}(\sigma) & (\ell, \mathscr{s}\mathscr{v}) = (-,+), \\ \mathrm{K} \text{ or } \mathrm{I}_{\nu}(\sigma) & (\ell, \mathscr{s}\mathscr{v}) = (-,-). \end{cases} \tag{14}$$

•

Integration of the transformed first Friedmann equation

$p_\beta \neq 0$

In order to integrate the trsfed. first Friedmann equation under the implicitising gauge

$$\jmath \frac{p_\beta^2}{12}\left(-\ell \frac{\varkappa^{1/2}}{6}\left(\frac{\mathbb{d}\chi}{\mathbb{d}\beta}\right)^2 + \varkappa^{-1/2}\right) - \varkappa^{3/2} V \mathbb{e}^{g\jmath_\chi \chi} = 0, \tag{15}$$

one can substitute

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{p_\beta^2}{12\varkappa^2 |V|} \mathbb{e}^{-g\jmath_\chi \chi}, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{3}{2\varkappa}} g\beta \tag{16}$$

to get

$$\left(\frac{\mathbb{d}\tilde{\sigma}}{\mathbb{d}\gamma}\right)^2 + \ell\left(\jmath v - \tilde{\sigma}^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbb{d}\gamma}{\mathbb{d}\tilde{\sigma}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\ell\left(\jmath v - \tilde{\sigma}^2\right)}}, \tag{17}$$

which is of the standard inverse hyperbolic/trigonometric form.

Andrianov, Lan, Novikov, Wang
SPBU, ELI-ALPS, UzK, UB

In order to integrate the separated minisuperspace Wheeler–DeWitt equation

$$\mathbb{e}^{-\mathbb{i}k_\beta s_\beta \beta}\left(-\ell s \frac{\hbar^2}{2\varkappa^{3/2}}\psi''(\chi) - s\frac{\hbar^2 k_\beta^2}{12\varkappa^{1/2}}\psi(\chi) + \varkappa^{3/2} V \mathbb{e}^{g s_\chi \chi}\psi(\chi)\right) = 0, \tag{18}$$

one can transform

$$\nu := \sqrt{\frac{2\varkappa}{3}}\frac{k_\beta}{g}, \quad \sigma^2 := \frac{8\varkappa^3 |V| \mathbb{e}^{g s_\chi \chi}}{\hbar^2 g^2}, \qquad \text{(?? rev.)}$$

to get

$$\sigma^2\psi''(\sigma) + \sigma\psi'(\sigma) + \ell\left(\nu^2 - s v \sigma^2\right)\psi(\sigma) = 0, \tag{19}$$

which is of the standard Bessel form.

•

Allgemeines

- Mit diesem *beamer theme* ist es möglich, Präsentationen in LaTeX mit der Beamer-Klasse zu erstellen, die dem Corporate Design der Universität zu Köln entsprechen
- Auf die Beamer-Klasse wird in diesem Dokument nicht näher eingegangen, nähere Informationen finden Sie unter `http://latex-beamer.sourceforge.net/`

Laden des Themes

Das Theme kann mit den folgenden Optionen geladen werden

```
\usetheme[%
% uk,       %% Farben aller Fakultaeten
wiso,      %% Wiso-Fakultaet
% jura,     %% Rechtswissenschaftliche Fakultaet
% medizin,  %% Medizinische Fakultaet
% philo,    %% Philosophische Fakultaet
% matnat,   %% Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultaet
% human,    %% Humanwissenschaftliche Fakultaet
% verw,     %% Universitaetsverwaltung
]{UzK}
```

Die Fußzeile

- Es stehen verschiedene Fußzeilen zur Auswahl, die als Option beim Laden des *themes* übergeben werden:
  - Balken mit allen Fakultätsfarben (Option `uk`)
  - Balken in jeweils einer Fakultätsfarbe (Optionen `wiso`, `jura`, `medizin`, `philo`, `matnat`, `human`, `verw`)[2]
- "'Universität zu Köln"' sowie der Name der Fakultät sind im Theme definiert, das Institut oder Seminar kann mit dem Befehl `\institute{}` festgelegt werden
- Die Optionen sind im Quellcode dieser Präsentation dokumentiert

[2]Es werden die offiziellen RGB-Werte aus dem 2-D Handbuch Corporate Design verwendet.

Englische Präsentationen

- Der Universitäts- sowie die Fakultätsnamen werden standardmäßig auf Deutsch angezeigt.
- Übergeben Sie dem Paket `babel` die Option `english`, so werden diese Namen entsprechen angepasst.
- Die Übersetzungen können in der Theme-Datei `beamerthemeUzK.sty` geändert werden

`block`-Umgebungen

Standard (`block`)

Verwendet die Farbe "'Blaugrau Mittel"' als Blocktitel-Hintergrund

`exampleblock`

Bei Verwendung der Fußzeile mit allen Fakultätsfarben Titelhintergrund in Wiso-Grün, sonst in der jeweiligen Fakultätsfarbe

`alertblock`

Verwendet das Rot der Folientitel

Installation

- Das Theme besteht aus den Dateien `beamerthemeUzK.sty` und `beamercolorthemeUzK.sty` sowie den Grafikdateien `logo.pdf` und `logo-small.pdf`.
- Das Theme kann auf zwei Arten verwendet werden:
  1. Die vier Dateien werden in den selben Ordner wie die zu erstellende Präsentation gelegt
  2. Die vier Dateien werden im lokalen *texmf*-Baum abgelegt
- Die zweite Variante ist der ersten vorzuziehen, da das Theme so an einem zentralen Ort vorliegt

ToDo

Was noch zu tun ist...

- Erstellen einer eigenen Titelseite
- ...