

# Integrable Cosmological Models with Liouville Scalar Fields

Alexander A. Andrianov<sup>1,4</sup>

Chen Lan<sup>2</sup>  
Wang<sup>3</sup>

Oleg O. Novikov<sup>1</sup>

*Yi-Fan*

<sup>1</sup> Saint-Petersburg State University, St. Petersburg 198504, Russia

<sup>2</sup> ELI-ALPS, ELI-Hu NKft, Dugonics tér 13, Szeged 6720, Hungary

<sup>3</sup> Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln, Zùlpicher StraÙe 77, 50937 Köln, Germany

<sup>4</sup> Institut de Ciències del Cosmos (ICCUB), Universitat de Barcelona, Spain

December 4, 2017



# Outline

1. Introduction
2. Classical model
3. Quantum model with constant potential
4. Classical model with exponential potential
5. Quantum model with exponential potential
6. Wave packets and their matching



- Flat Robertson–Walker metric  $ds^2 = -N^2(t) dt^2 + \varkappa^{-1/2} e^{2\alpha(t)} d\Omega_3^2$ , where  $\varkappa = 8\pi G$ ,  $d\Omega_3^2$  dimensionless spacial metric
- Homogeneous real Klein–Gordon with potential (dubbed Liouville)  $V e^{\lambda\phi}$ ,  $\lambda, V \in \mathbb{R}$ .
- Total action  $\mathcal{S} = S_{\text{EH}} + S_{\text{GHY}} + S_L = \int d\Omega_3^2 \int dt L$ ,

$$L := \varkappa^{3/2} N e^{3\alpha} \left( -\frac{3}{\varkappa} \frac{\dot{\alpha}^2}{N^2} + \ell \frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} - V e^{\lambda\phi} \right), \quad (1)$$

in which dot means  $d/dt$ ,  $\ell = \pm 1$  corresponds to quintessence / phantom model, respectively.

- Choosing  $\overline{N} := N e^{-3\alpha}$ , the effective Lagrangian transforms to

$$L_e = \varkappa^{3/2} \overline{N} \left( -\frac{3}{\varkappa} \frac{\dot{\alpha}^2}{\overline{N}^2} + \ell \frac{\dot{\phi}^2}{2\overline{N}^2} - V e^{\lambda\phi + 6\alpha} \right) \quad (2)$$

- Defining  $\Delta := \lambda^2 - 6\ell\varkappa$ ,  $\mathcal{J} := \text{sgn } \Delta$  and  $g := \mathcal{J}\sqrt{|\Delta|} \equiv \mathcal{J}\sqrt{\mathcal{J}\Delta}$ , the rescaled special orthogonal transformation

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{\mathcal{J}}{g} \begin{pmatrix} \lambda & -\ell\varkappa \\ -6 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_\beta \beta \\ \mathcal{J}_\chi \chi \end{pmatrix} \quad \text{where } \mathcal{J}_\beta, \mathcal{J}_\chi = \pm 1 \quad (3)$$



gives the decoupled Lagrangian

$$L_d = \varkappa^{3/2} \overline{N} \left( -\jmath \frac{3}{\varkappa} \frac{\dot{\beta}^2}{\overline{N}^2} + \ell \jmath \frac{\dot{\chi}^2}{2\overline{N}^2} - V e^{\jmath \chi} g \chi \right), \quad (4)$$

- Since  $\beta$  is cyclic in eq. (4), the second Friedmann equation can be integrated

$$\text{const.} \equiv p_\beta := \frac{\partial L_d}{\partial \dot{\beta}} = -6\jmath \varkappa^{1/2} \frac{\dot{\beta}}{\overline{N}} \quad (5)$$

$$= -6\jmath \jmath_\beta \frac{\varkappa^{1/2}}{g} \frac{\lambda \dot{\alpha} + \ell \varkappa \dot{\phi}}{\overline{N}}. \quad (6)$$

- Taking the gauge  $\overline{N} = -6\jmath \sqrt{\varkappa} \dot{\beta} / p_\beta$ , the first Friedmann equation can be integrated

$$e^{\jmath \chi} g \chi = P^2 f^2 \left( s_\beta \sqrt{3/2 \varkappa g \beta} \right) \quad \text{or} \quad (7)$$

$$e^{6\alpha + \lambda \phi} = P^2 f^2 \left( \sqrt{3/2 \varkappa} (\alpha \lambda + \ell \varkappa \phi) \right), \quad (8)$$



in which  $P^2 := p_\beta^2/12\kappa^2|V|$ ,  $v := \text{sgn } V$ , and

$$f(\gamma) := \begin{cases} \text{sech}(\gamma + C_{++}) & (\ell, sv) = (+, +), \\ \text{csch}(\gamma + C_{+-}) & (\ell, sv) = (+, -) \\ \sec(\gamma + C_{-+}) & (\ell, sv) = (-, +) \\ \text{icsc}(\gamma + C_{--}) & (\ell, sv) = (-, -) \end{cases} \quad (9)$$

The last solution is not real.

- The trajectory equation for  $(+, -)$  and  $(-, +)$  contains two and infinite distinct solutions, respectively.

•



- Mit diesem *beamer theme* ist es möglich, Präsentationen in  $\text{\LaTeX}$  mit der Beamer-Klasse zu erstellen, die dem Corporate Design der Universität zu Köln entsprechen
- Auf die Beamer-Klasse wird in diesem Dokument nicht näher eingegangen, nähere Informationen finden Sie unter <http://latex-beamer.sourceforge.net/>



Das Theme kann mit den folgenden Optionen geladen werden

```
\usepackage[%  
% uk,      %% Farben aller Fakultäten  
wiso,      %% Wiso-Fakultät  
% jura,    %% Rechtswissenschaftliche Fakultät  
% medizin, %% Medizinische Fakultät  
% philo,   %% Philosophische Fakultät  
% matnat,  %% Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
% human,   %% Humanwissenschaftliche Fakultät  
% verw,    %% Universitätsverwaltung  
{UzK}
```



# Die Fußzeile

- Es stehen verschiedene Fußzeilen zur Auswahl, die als Option beim Laden des *themes* übergeben werden:
  - Balken mit allen Fakultätsfarben (Option uk)
  - Balken in jeweils einer Fakultätsfarbe (Optionen wiso, jura, medizin, philo, matnat, human, verw)<sup>1</sup>
- "'Universität zu Köln"' sowie der Name der Fakultät sind im Theme definiert, das Institut oder Seminar kann mit dem Befehl `\institute{}` festgelegt werden
- Die Optionen sind im Quellcode dieser Präsentation dokumentiert

---

<sup>1</sup>Es werden die offiziellen RGB-Werte aus dem 2-D Handbuch Corporate Design verwendet.





- Der Universitäts- sowie die Fakultätsnamen werden standardmäßig auf Deutsch angezeigt.
- Übergeben Sie dem Paket babel die Option english, so werden diese Namen entsprechen angepasst.
- Die Übersetzungen können in der Theme-Datei beamerthemeUzK.sty geändert werden



# block-Umgebungen

## Standard (block)

Verwendet die Farbe "Blaugrau Mittel" als Blocktitel-Hintergrund

## exampleblock

Bei Verwendung der Fußzeile mit allen Fakultätsfarben Titelhintergrund in Wiso-Grün, sonst in der jeweiligen Fakultätsfarbe

## alertblock

Verwendet das Rot der Folientitel



# Installation

- Das Theme besteht aus den Dateien `beamerthemeUzK.sty` und `beamercolorthemeUzK.sty` sowie den Grafikdateien `logo.pdf` und `logo-small.pdf`.
- Das Theme kann auf zwei Arten verwendet werden:
  1. Die vier Dateien werden in den selben Ordner wie die zu erstellende Präsentation gelegt
  2. Die vier Dateien werden im lokalen *texmf*-Baum abgelegt
- Die zweite Variante ist der ersten vorzuziehen, da das Theme so an einem zentralen Ort vorliegt



## Was noch zu tun ist...

- Erstellen einer eigenen Titelseite
- ...