

Integrable Cosmological Models with Liouville Scalar Fields

Alexander A. Andrianov^{1,4} Chen Lan² Oleg O. Novikov¹
Yi-Fan Wang³

¹Saint-Petersburg State University, St. Petersburg 198504, Russia

²ELI-ALPS, ELI-Hu NKft, Dugonics tér 13, Szeged 6720, Hungary

³Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln, Zùlpicher StraÙe 77, 50937
Köln, Germany

⁴Institut de Ciències del Cosmos (ICCUB), Universitat de Barcelona, Spain

December 3, 2017



Outline

1. Introduction
2. Classical model
3. Quantum model with constant potential
4. Classical model with exponential potential
5. Quantum model with exponential potential
6. Wave packets and their matching



- Flat Robertson–Walker metric $\mathrm{d}s^2 = -N^2(t) \mathrm{d}t^2 + \varkappa^{-1/2} \mathrm{e}^{2\alpha(t)} \mathrm{d}\Omega_3^2$, where $\varkappa = 8\pi G$, $\mathrm{d}\Omega_3^2$ dimensionless spacial metric
- Homogeneous real Klein–Gordon with potential (dubbed Liouville) $V\mathrm{e}^{\lambda\phi}$, $\lambda, V \in \mathbb{R}$.
- Total action $\mathcal{S} = S_{\text{EH}} + S_{\text{GHY}} + S_{\text{L}} = \int \mathrm{d}\Omega_3^2 \int \mathrm{d}t L$,

$$L := \varkappa^{3/2} N \mathrm{e}^{3\alpha} \left(-\frac{3}{\varkappa} \frac{\dot{\alpha}^2}{N^2} + \ell \frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} - V \mathrm{e}^{\lambda\phi} \right), \quad (1)$$

in which dot means $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, $\ell = \pm 1$ corresponds to quintessence / phantom model, respectively.

- Choosing $\overline{N} := N \mathrm{e}^{-3\alpha}$, the effective Lagrangian transforms to

$$L_{\text{e}} = \varkappa^{3/2} \overline{N} \left(-\frac{3}{\varkappa} \frac{\dot{\alpha}^2}{\overline{N}^2} + \ell \frac{\dot{\phi}^2}{2\overline{N}^2} - V \mathrm{e}^{\lambda\phi+6\alpha} \right) \quad (2)$$



- Defining $\Delta := \lambda^2 - 6\ell\kappa$, $\jmath := \text{sgn } \Delta$ and $g := \jmath\sqrt{|\Delta|} \equiv \jmath\sqrt{\jmath\Delta}$, the rescaled special orthogonal transformation

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{\jmath}{g} \begin{pmatrix} \lambda & -\ell\kappa \\ -6 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \jmath_\beta\beta \\ \jmath_\chi\chi \end{pmatrix} \quad \text{where } \jmath_\beta, \jmath_\chi = \pm 1 \quad (3)$$

gives the decoupled Lagrangian

$$L_d = \kappa^{3/2} \overline{N} \left(-\jmath \frac{3}{\kappa} \frac{\dot{\beta}^2}{\overline{N}^2} + \ell \jmath \frac{\dot{\chi}^2}{2\overline{N}^2} - V e^{\jmath_\chi g \chi} \right), \quad (4)$$

- Since β is cyclic in eq. (4), the second Friedmann equation can be integrated

$$\text{const.} \equiv p_\beta := \frac{\partial L_d}{\partial \dot{\beta}} = -6\jmath\kappa^{1/2} \frac{\dot{\beta}}{\overline{N}} \quad (5)$$

$$= -6\jmath\jmath_\beta \frac{\kappa^{1/2}}{a} \frac{\lambda\dot{\alpha} + \ell\kappa\dot{\phi}}{\overline{N}}. \quad (6)$$



- Taking the gauge $\overline{N} = -6\beta\sqrt{\kappa}\dot{\beta}/p_\beta$, the first Friedmann equation can be integrated

$$e^{6\alpha-\lambda\phi} \equiv e^{g_{\mathcal{X}}\chi} = \frac{p_\beta^2}{12\kappa^2|V|} f^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2\kappa}} (\alpha\lambda + \ell\kappa\phi) \right), \quad (7)$$

$$f(\gamma) := \begin{cases} \cosh(\gamma + C) & \ell = +1, \nu = +1, \\ \sinh(\gamma + C) & \ell = +1, \nu = -1, \\ \cos(\gamma + C) & \ell = -1, \nu = +1, \\ i\sin(\gamma + C) & \ell = -1, \nu = -1, \end{cases} \quad (8)$$

in which $\nu := \text{sgn } V$.



- Mit diesem *beamer theme* ist es möglich, Präsentationen in \LaTeX mit der Beamer-Klasse zu erstellen, die dem Corporate Design der Universität zu Köln entsprechen
- Auf die Beamer-Klasse wird in diesem Dokument nicht näher eingegangen, nähere Informationen finden Sie unter <http://latex-beamer.sourceforge.net/>



Laden des Themes

Das Theme kann mit den folgenden Optionen geladen werden

```
\usetheme[%  
% uk,      %% Farben aller Fakultaeten  
wiso,      %% Wiso-Fakultaet  
% jura,    %% Rechtswissenschaftliche Fakultaet  
% medizin, %% Medizinische Fakultaet  
% philo,   %% Philosophische Fakultaet  
% matnat,  %% Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultaet  
% human,   %% Humanwissenschaftliche Fakultaet  
% verw,    %% Universitaetsverwaltung  
{UzK}
```



Die Fußzeile

- Es stehen verschiedene Fußzeilen zur Auswahl, die als Option beim Laden des *themes* übergeben werden:
 - Balken mit allen Fakultätsfarben (Option `uk`)
 - Balken in jeweils einer Fakultätsfarbe (Optionen `wiso`, `jura`, `medizin`, `philosophie`, `matematik`, `human`, `verwissenschaft`)¹
- "Universität zu Köln" sowie der Name der Fakultät sind im Theme definiert, das Institut oder Seminar kann mit dem Befehl `\institute{}` festgelegt werden
- Die Optionen sind im Quellcode dieser Präsentation dokumentiert

¹Es werden die offiziellen RGB-Werte aus dem 2-D Handbuch Corporate Design verwendet.



Englische Präsentationen

- Der Universitäts- sowie die Fakultätsnamen werden standardmäßig auf Deutsch angezeigt.
- Übergeben Sie dem Paket babel die Option `english`, so werden diese Namen entsprechen angepasst.
- Die Übersetzungen können in der Theme-Datei `beamerthemeUzK.sty` geändert werden



block-Umgebungen

Standard (block)

Verwendet die Farbe "Blaugrau Mittel" als Blocktitel-Hintergrund

exampleblock

Bei Verwendung der Fußzeile mit allen Fakultätsfarben
Titelhintergrund in Wiso-Grün, sonst in der jeweiligen
Fakultätsfarbe

alertblock

Verwendet das Rot der Folientitel

Installation

- Das Theme besteht aus den Dateien `beamerthemeUzK.sty` und `beamercolorthemeUzK.sty` sowie den Grafikdateien `logo.pdf` und `logo-small.pdf`.
- Das Theme kann auf zwei Arten verwendet werden:
 1. Die vier Dateien werden in den selben Ordner wie die zu erstellende Präsentation gelegt
 2. Die vier Dateien werden im lokalen *texmf*-Baum abgelegt
- Die zweite Variante ist der ersten vorzuziehen, da das Theme so an einem zentralen Ort vorliegt



Was noch zu tun ist...

- Erstellen einer eigenen Titelseite
- ...