Επίλυση και Εύρεση Μέγιστης Μάζας Αστέρων Νετρονίων με Προσεγγιστική Μέθοδο

Πτυχιακη Εργασια

Επιβλεπων Καθηγητης:

Χαραλαμπος Μουστακιδης

Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Φυσικης
Μπομποτας Χρηστος
ΑΕΜ:15164
26/05/2023

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η εξέταση της ακρίβειας και χρησιμότητας της ομοιόμορφης θεώρησης των αστέρων νετρονίων μέσα απο την υπολογιστική διαδικασία. Το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας ξεκινά με μια σύντομη εισαγωγή γενικά για τους αστέρες νετρονίων και τις συνθήκες υδροστατικής ισορροπίας με τις συνέπειες τους να οδηγούν στις εξισώσεις TOV. Ακολουθεί η ανάλυση των εξισώσεων TOV με τη μελέτη της λύσης Schwarzschild σταθερής πυκνότητας, όπως θεωρούμε και στο υπολογιστικό μέρος της εργασίας. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η θεωρία απο την οποία παίρνουμε τις απαραίτητες μαθηματικές εξισώσεις ώστε να βρεθεί η μάζα, η άνω μάζα και η ακτίνα των αστέρων νετρονίων. Στα κεφάλαια 4 και 5 φαίνονται τα αποτελέσματα της εργασίας μαζί με τα όποια σχόλια και συμπεράσματα. Τέλος, στο παράρτημα μελετάται ο κώδικας python και η υπολογιστική διαδικασία που ακολουθήθηκε.

Summary

The purpose of this thesis is the determination of precision and usefulness of the uniform density approximation for neutron stars through computational methods. The theoretical framework begins with a short introduction about neutron stars in general, and the hydrostatic equilibrium conditions and their consequences leading to the TOV equations. Next, we have the analysis of the TOV equations, with the study of the Schwarzschild constant density interior solution, just like we assume in the computational part of this essay. In chapter 3 we present the theory from which the necessary mathematical equations are obtained in order to find the mass, the mass limit and the radius of the neutron stars. In chapters 4 and 5 the results are being shown together with the corresponding comments and conclusions. Lastly, in the appendix, we show the python code and the computational procedure that we followed.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

1.1 Αστέρες Νετρονίων

Οι αστέρες νετρονίων, απο τις πιο συμπαγείς μορφές ύλης στο σύμπαν, λόγω της πλέον ανικανότητας τους για θερμοπυρηνικές αντιδράσεις, αποτελούν ένα απο τα τελικά στάδια της αστρικής εξέλιξης. Τέτοια αστρικά αντικείμενα προκύπτουν στο τέλος της ζωής αστέρων της κύριας ακολουθίας μεταξύ 5 $M_\odot$ και 20 $M_\odot$. Η παρατήρηση τέτοιων αστέρων της κύριας ακολουθίας είναι συχνή στο Γαλαξία.

Λόγω της τεράστιας πίεσης που προκαλείται κατά την αστρική συστολή, τα ηλεκτρόνια εισχωρούν στους πυρήνες, αντιδρώντας με τα πρωτόνια και δημιουργώντας ένα αέριο εκφυλισμένων νετρονίων απο τα οποία αποτελείται και ο αστέρας νετρονίων. Η πίεση των εκφυλισμένων νετρονίων εξισορροπεί τη βαρυντική πίεση, κρατώντας τον αστέρα σε ισορροπία. Τα νετρόνια, όντας φερμιόνια, υπηρετούν στην απαγορευτική αρχή του Pauli, καθώς και στην αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg. Η μέση τιμή της μάζας τέτοιων αστέρων είναι 1 - 2 $M_\odot$ και η μέση θερμοκρασία στο εσωτερικό $\sim 10^7$K. Η μέση πυκνότητα ενός τυπικού αστέρα νετρονίων μάζας M = 1.4 $M_\odot$ και ακτίνας $1.5 * 10^6 cm$ είναι $4 * 10^{14} gr/cm^3$. Γι'αυτό συχνά οι αστέρες νετρονίων θεωρούνται σαν ενιαίοι ατομικοί πυρήνες, στους οποίους η δύναμη της βαρύτητας εχει αντικαταστήσει τις ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις.

Στην επιφάνεια των αστέρων νετρονίων, η επιτάχυνση της βαρύτητας παίρνει ακραίες τιμές ($\sim 5 * 10^9$ φορές μεγαλύτερη απο την επιφάνεια του ήλιου). Για το λόγο αυτό η επιφάνεια είναι σχεδόν ομαλή, με τις όποιες ανωμαλίες να είναι της τάξης των εκατοστών. Η επιφάνεια αποτελείται απο ένα λεπτό στρώμα πλάσματος, πάχους μερικών εκατοστών, δημιουργώντας την ατμόσφαιρα του αστέρα νετρονίων. Το πάχος της ατμόσφαιρας είναι τόσο μικρό εξαιτίας της μεγάλης τιμής της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Για τον ίδιο λόγο και η ταχύτητα διαφυγής απο έναν αστέρα νετρονίων είναι πολύ μεγάλη (περίπου το μισό της ταχύτητας του φωτός!)[7]

1.2 Συνθήκες ισορροπίας αστρικών αντικειμένων

1.2.1 Υδροστατική Ισορροπία στην Κλασική Φυσική

Έστω ομογενής σφαίρα με μάζα M και ακτίνα R. Ολοκληρώνοντας την πυκνότητα $\varrho(r)$ της σφαίρας κατά μήκος της ακτίνας r δίνει τη μάζα $m_r(r)$:

$$m_r(r) = \int dr'^3 \varrho(r') = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \varrho(r') \tag{1.2.1}$$

που εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας. Σε διαφορική μορφή η εξίσωση είναι:

$$\frac{dm_r(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varrho(r) \tag{1.2.2}$$

Οι οριακές συνθήκες ορίζονται απαιτώντας τη μάζα στο κέντρο της σφαίρας να μηδενίζεται $m_r(0) = 0$, ενώ η μάζα στην επιφάνεια δίνεται απο τη συνολική μάζα $m_r(R) = M$.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η ομογενής σφαίρα είναι σε υδροστατική ισορροπία. Αυτό σημαίνει ότι η πίεση της ύλης σε οποιαδήποτε επιφάνεια A του αντικειμένου εξουδετερώνει την αντίστοιχη βαρυντική δύναμη, έτσι ώστε η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι μηδενική. Υποθέτουμε ότι το αστρικό αντικείμενο είναι σε ισορροπία μέχρι μια απόσταση r απο το κέντρο του αστέρα. Τότε, αν προστεθεί μια στοιχειώδη ποσότητα ύλης, πάχους dr, σε μια τυχαία επιφάνεια A στην επιφάνεια της σφαίρας, η προστιθέμενη μάζα θα είναι:

$$dm_r(r) = A \cdot \varrho(r) dr \tag{1.2.3}$$

Όπως απαιτεί η αρχή διατήρησης της μάζας. Η βαρυντική δύναμη που θα δέχεται η προστιθέμενη ύλη είναι:

$$dF_G(r) = -G\frac{m_r(r) \cdot dm_r(r)}{r^2} = -G\frac{m_r(r) \cdot A \cdot \varrho(r) dr}{r^2} \tag{1.2.4}$$

Παράλληλα, η πίεση που προκαλεί η προσθήκη της ύλης αντιστοιχεί επίσης σε μια δύναμη

$$dF_P(r) = A \cdot dP(r) \tag{1.2.5}$$

Η επιπλέον βαρυντική δύναμη θα πρέπει να είναι ίση με την επιπλέον δύναμη λόγω πίεσης, ώστε να διατηρείται η υδροστατική ισορροπία σε όλο το στερεό.

$$dF_G(r) = -G\frac{m_r(r) \cdot A \cdot \varrho(r) dr}{r^2} = A \cdot dP(r) = dF_P(r) \tag{1.2.6}$$

Απαλοίφοντας την επιφάνεια A, προκύπτει η εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας στη νευτώνεια μηχανική:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G\frac{m_r(r) \cdot \varrho(r)}{r^2} \tag{1.2.7}$$

Οι οριακές συνθήκες ορίζονται απο την απαίτηση η πίεση στο κέντρο του στερεού να είναι $P(0) = P_C$, ενώ η πίεση στην επιφάνεια να είναι $P(R) = 0$ ώστε να εξασφαλιστεί υδροστατική ισορροπία.[6]

1.2.2 Υδροστατική Ισορροπία σε σχετικιστικά όρια

Η νευτώνεια εξίσωση για την υδροστατική ισορροπία είναι επεκτάσιμη στα σχετικιστικά όρια της γενικής σχετικότητας. Στη γενική σχετικότητα η εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας προκύπτει απο την γενικευμένη σχετικιστική μορφή της διατήρησης του τανυστή ενέργειας-ορμής. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής θεωρείται ότι έχει μορφή που αντιστοιχεί σε ιδανικό αέριο, χωρίς απώλειες θερμότητας, διασπορά, διασπάσεις της ύλης ή τοπικές διακυμάνσεις του ιξώδους της ύλης. Εξ'ορισμού τα μόνα μεγέθη που μπορούν να αποτελούν τον τανυστή ενέργειας-ορμής είναι η πίεση P και η ενεργειακή πυκνότητα ε. Οπότε, λόγω της γενικής σχετικότητας, μόνο ο μετρικός τανυστής $g^{\mu\nu}$ και η τετραταχύτητα u^{μ} μπορούν να προστεθούν επιπλέον στην έκφραση του τανυστή ενέργειας-ορμής. Σε μικρή κλίμακα, ο τανυστής ενέργειας-ορμής θα πρέπει να έχει τη μορφή:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{pmatrix} \tag{1.2.8}$$

Που αντιστοιχεί στη νευτώνεια φυσική. Θεωρούμε αρχικά την αναλλοίωτη, ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz, μορφή του τανυστή στον επίπεδο χώρο. Για τη σχετικιστική μορφή, οι μόνοι προσιτοί πίνακες είναι οι $\eta^{\mu\nu}$ και $u^{\mu}u^{\nu}$. Τότε, ο τανυστής ενέργειας-ορμής παίρνει τη μορφή:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P) \cdot u^{\mu}u^{\nu} + P \cdot \eta^{\mu\nu} \tag{1.2.9}$$

Στη γενική, αναλλοίωτη κατά Lorentz μορφή του. Στο τοπικό σύστημα αναφοράς, η τετραταχύτητα έχει τη μορφή $u^{\mu} = \big(1, 0, 0, 0\big)$ και καταλήγουμε στην εξίσωση 1.2.8. Η σχετικιστική μορφή της διατήρησης της ενέργειας και της ορμής του ρευστού εξασφαλίζεται απαιτώντας τον μηδενισμό της συμμεταβλητής παραγώγου:

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.10}$$

στον επίπεδο χώρο.

Προκειμένου τώρα να γίνει η μετάβαση στη γενική σχετικότητα, αρκεί η αντικατάσταση του μετρικού χώρου για τον επίπεδο χώρο $\eta^{\mu\nu}$ με τον γενικό $g^{\mu\nu}$ για τον καμπυλωμένο χωροχρόνο.

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P) \cdot u^{\mu}u^{\nu} + P \cdot g^{\mu\nu} \tag{1.2.11}$$

Έτσι, αυτή τη φορά η διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής δίνεται απο την αντίστοιχη εξίσωση σε μορφή συμμεταβλητής παραγώγου

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.12}$$

για τον γενικό καμπυλωμένο χώρο.

Λόγω της ένταξης της σχετικότητας και την μετάβασης στον καμπυλωμένο χωροχρόνο προκύπτουν διορθωτικοί παράγοντες στα μεγέθη m_r , ϱ και r. Κάθε παράγοντας προέρχεται απο διαφορετικά φαινόμενα. Στη γενική σχετικότητα, η βαρύτητα συνδέεται όχι μόνο με την πυκνότητα μάζας, αλλά με τη συνολική ενεργειακή πυκνότητα του στερεού, οπότε θα πρέπει η ενεργειακή πυκνότητα να αντικαταστήσει την πυκνότητα μάζας. Όμως, η βαρύτητα δεν είναι συνάρτηση μόνο της ενεργειακής πυκνότητας αλλά όλου του τανυστή ενέργειας-ορμής. Επομένως, η πίεση θα πρέπει επίσης να εισέλθει ως διορθωτικός παράγοντας στην πυκνότητα μάζας ϱ και στη μάζα m_r εντός ακτίνας r. Τέλος, θα υπάρχει μια διόρθωση στον καμπυλωμένο χωροχρόνο απο το μετρικό τανυστή. Για ακίνητο παρατηρητή σε σφαιρική συμμετρία, η κατάλληλη μετρική είναι η μετρική Schwarzschild και ο κατάλληλος διορθωτικός παράγοντας ο παράγοντας Schwarzschild της μετρικής $\left(1 - \frac{2Gm_r(r)}{r}\right)^{-1}$. Είναι αναμενόμενο ότι η ύλη θα έλκεται πιο ισχυρά, μόλις ενταχθούν οι διορθώσεις απο τη γενική σχετικότητα και ο παράγοντας Schwarzschild, μετασχηματίζοντας καταλλήλως την ακτίνα r στον παρονομαστή της εξίσωσης (1.2.7). Η τελική έκφραση οπότε, δίνεται απο την παρακάτω εξίσωση γνωστή ως εξίσωση **Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV)**

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{m_r(r)\varepsilon(r)}{r^2}\left(1 + \frac{P(r)}{\varepsilon(r)}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m_r(r)}\right)\left(1 - \frac{2Gm_r(r)}{r}\right)^{-1} \tag{1.2.13}$$

Εκτός απο την αντικατάσταση της πυκνότητας μάζας ϱ απο την ενεργειακή πυκνότητα ε υπάρχουν 3 διορθώσεις σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν παραπάνω. Μπορούμε εύκολα να επιστρέψουμε στη νευτώνεια περίπτωση θέτοντας $\varepsilon \to \varrho$, $P = 0$, και αγνοώντας τον παράγοντα Schwarzschild.

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας στη γενική σχετικότητα είναι

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) \tag{1.2.14}$$

Η αντικατάσταση της πυκνότητας μάζας απο την ενεργειακή πυκνότητα επαρκεί για τη μετάβαση απο τη νευτώνεια φυσική στην πλήρη έκφραση για τη γενική σχετικότητα. Απο την ολοκληρωτική μορφή της διατήρησης της μάζας αναμένει κανείς ο παράγοντας Schwarzschild να ενταχθεί μέσω του μέτρου του ολοκληρώματος του καμπυλωμένου χωροχρόνου της μετρικής Schwarzschild. Αυτό δε συμβαίνει, ώστε η m_r και η συνολική μάζα M όλης της σφαίρας να είναι μικρότερη απο το ολοκλήρωμα της ενεργειακής πυκνότητας πάνω σε όλη τη σφαίρα. Ο λόγος που υπάρχει αυτή η απαίτηση, είναι η ύπαρξη επιπρόσθετης ενέργειας δέσμευσης της ύλης, όταν αυτή εισέρχεται σε βαρυντικό πεδίο, ώστε η παρατηρούμενη μάζα, απο απομακρυσμένο παρατηρητή, να φαίνεται μικρότερη απο ότι στον επίπεδο χώρο. [6]

1.2.3 Συμπαγής σφαίρα μη αλληλεπιδρόντων νετρονίων

Για την εύρεση της αριθμητικής λύσης των εξισώσεων TOV είναι απαραίτητος ο ορισμός των αρχικών συνθηκών των διαφορικών εξισώσεων (1.2.13) και (1.2.14).

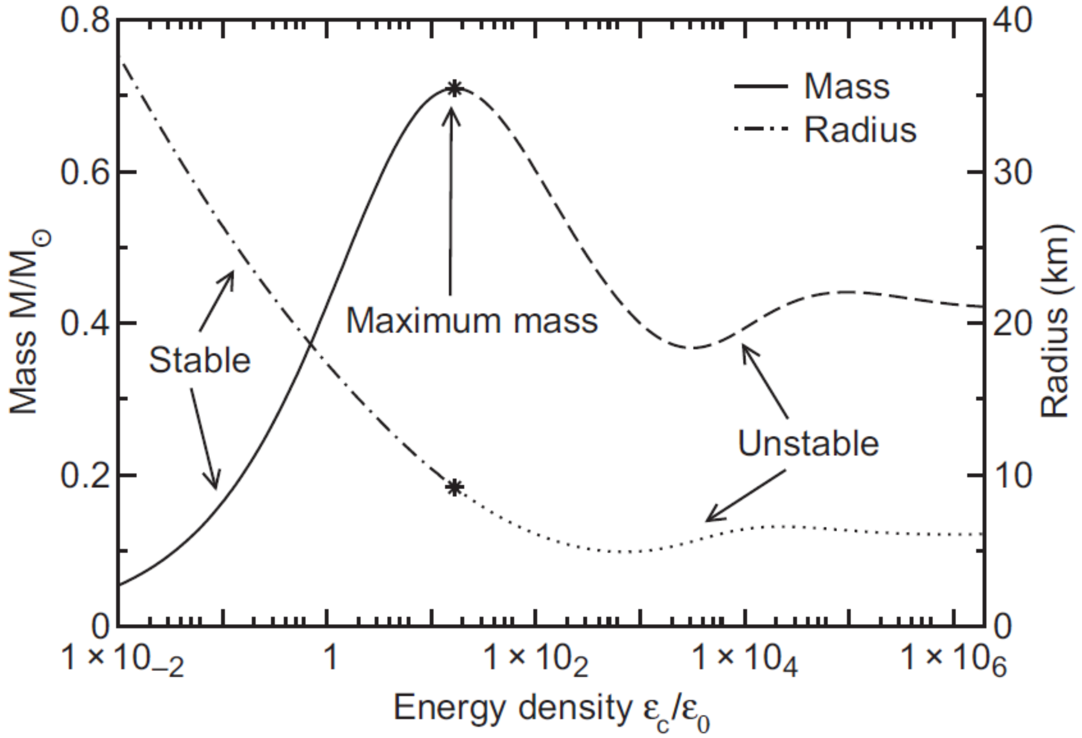
Ορίζουμε τις αρχικές τιμές για την πίεση και τη μάζα για $r = 0$:

$$P(r = 0) = P_c \qquad \text{και} \qquad m_r(r = 0) \tag{1.2.15}$$

Έχοντας οπότε μια καταστατική εξίσωση που δίνει την τιμή της πίεσης συναρτήσει της ενεργειακής πυκνότητας $P = P(\varepsilon)$ οι δύο διαφοορικές εξισώσεις μπορούν να ολοκληρωθούν με όρια απο το $r = 0$ ως το $r = R$ όπου μηδενίζεται η πίεση. Η ολοκληρωμένη μάζα μέσα σε αυτά τα όρια είναι η συνολική μάζα $M = m_r(R)$ του αστέρα νετρονίων. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία για διαφορετικές αρχικές πιέσεις P_c παίρνουμε μια οικογένεια λύσεων των εξισώσεων TOV για αυτή τη συγκεκριμένη καταστατική.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για μάζα ύλης εντός ακτίνας r, θα πρέπει να ισχύει $r > 2Gm_r(r)$, αφού ο παράγοντας Schwarzschild αποκλείνει για $r = 2Gm_r(r)$. Αυτή η συνθήκη δεν επιτρέπει την ύπαρξη μαύρης τρύπας σε ακτίνα r. Επίσης απο την εξίσωση (1.2.13) είναι προφανές πως για μια ρεαλιστική ποσότητα ύλης με θετικά P και ε, η παράγωγος της πίεσης θα πρέπει να είναι πάντα αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι η πίεση είναι μια συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση της ακτίνας, οπότε δε μπορεί να έχει ξαφνικές μεταβολές που μηδενίζουν την παράγωγο της, όπως είναι αναμενόμενο, επειδή η σφαίρα είναι σε υδροστατική ισορροπία. Μια άλλη συνέπεια της αρνητικής τιμής του ρυθμού μεταβολής της πίεσης είναι ότι, αν υπάρχουν περιοχές της καταστατικής εξίσωσης στις οποίες η πίεση δε μεταβάλλεται με τη μεταβολή της ενεργειακής πυκνότητας, τότε η απόσταση απο το κέντρο του αστέρα παραμένει σταθερή. Δηλαδή η ενεργειακή πυκνότητα μπορεί να έχει άλματα στις τιμές της συναρτήσει της ακτίνας, ενώ η πίεση θα παραμένει σταθερή. Τέλος, σε ένα συμπαγή αστέρα με καλά ορισμένη ακτίνα R, θα πρέπει η πίεση να μειώνεται ραγδαία συναρτήσει της ενεργειακής πυκνότητας, ώστε να μηδενίζεται η πίεση στην επιφάνεια του αστέρα.

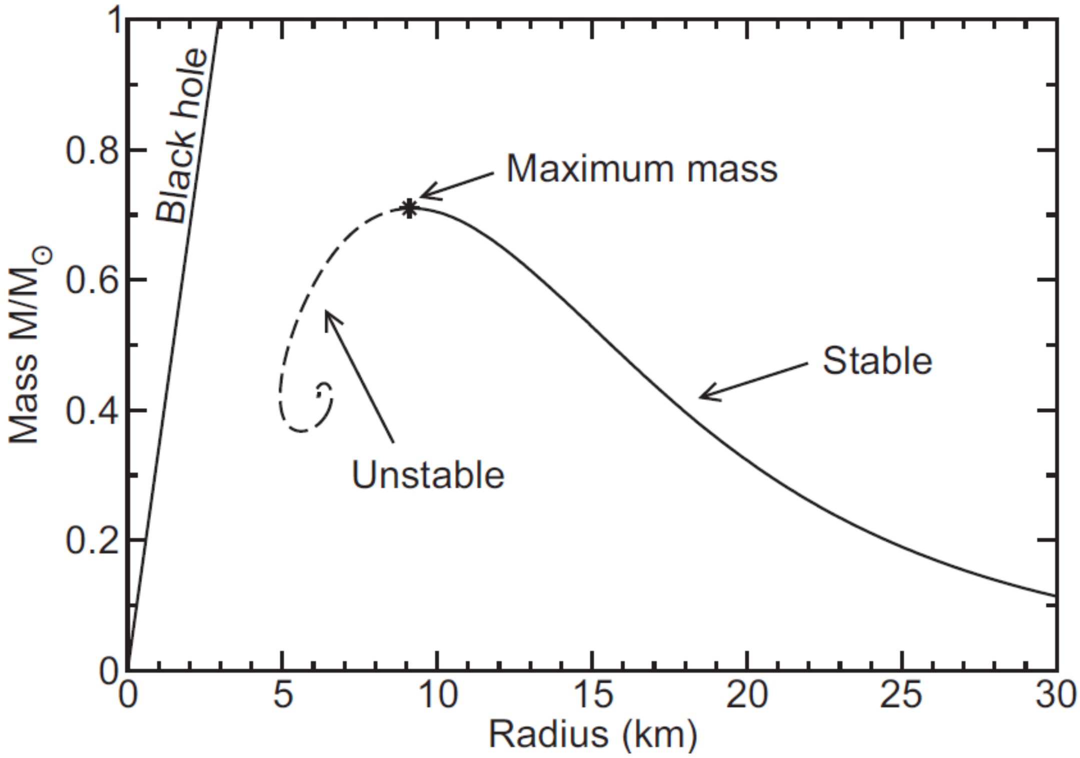
Η καταστατική εξίσωση για ένα ελέυθερο αέριο νετρονίων δίνει λύσεις συμπαγών αστέρων με καλά ορισμένη ακτίνα R και βαρυντική μάζα M. Η αριθμητκή λύση για τις εξισώσεις TOV ενός ελέυθερου αέριου νετρονίων φαίνεται παρακάτω στο γράφημα 1,



Γράφημα 1: Η μάζα και η ακτίνα ενός συμπαγούς αστέρα, αποτελούμενο απο ελεύθερα νετρόνια, σαν συνάρτηση της κεντρικής ενεργειακής πυκνότητας.

όπου παρατηρείται η μάζα M και η ακτίνα R του αστέρα σαν συνάρτηση της κεντρικής ενεργειακής πυκνότητας ε_c σε μονάδες ενεργειακής πυκνότητας πυρήνων ατόμων $\varepsilon_0 = 140MeVfm^{-3}$. Είναι προφανές πως η ακτίνα R αρχικά μειώνεται με την αύξηση της ενεργειακής πυκνότητας, ώσπου να φτάσει σε ένα τοπικό ελάχιστο, ώστε στη συνέχεια να ταλαντώνεται ασυμπτωτικά γύρω απο ένα όριο. Αντίθετα η μάζα M, αυξάνεται αρχικά μέχρι να φτάσει ένα απόλυτο μέγιστο και μετά αφού περάσει απο ένα ελάχιστο, ταλαντώνεται και αυτή γύρω απο ένα ασυμπτωτικό όριο. Το μέγιστο της μάζας συμβαίνει σε μικρότερες ενεργειακές πυκνότητες απο το πρώτο ελάχιστο της ακτίνας.

Στο γράφημα 2 φαίνεται η μάζα M σαν συνάρτηση της ακτίνας R. Στις πρώτες λύσεις υπάρχουν μικρές μάζες και μεγάλες ακτίνες σε μικρές ενεργειακές πυκνότητες όπου $M \propto R^{-3}$.



Γράφημα 2: Η μάζα σαν συνάρτηση της ακτίνας για ένα συμπαγή αστέρα μη αλληλεπροδρόντων νετρονίων. Η διακεκομένη γραμμή ανιστοιχεί σε ασταθείς καταστάσεις. Η συνεχής γραμμή σε μικρές ακτίνες με τίτλο 'βλαςκ ηολε' δείχνει την ακτίνα Σςηωαρζςςηιλδ.

Όσο αυξάνεται η ενεργειακή πυκνότητα, η μάζα αυξάνεται, ενώ η ακτίνα μειώνεται μέχρι το μέγιστο της μάζας. Σε μεγαλύτερες τιμές, η σταθερά αναλογίας μεταξύ μάζας και του αντίστροφου του κύβου της ακτίνας περιστρέφεται γύρω απο μια τιμή για ασυμπτωτικά μεγάλες κεντρικές ενεργειακές πυκνότητες, συμπεριφορά που είναι συνήθης για όλους τους συμπαγείς αστέρες. Φυσικά, η μάζα συμπαγών αστέρων αποκτά μια μέγιστη τιμή, η οποία για μη αλληλεπιδρούσα ύλη νετρονίων είναι $M_{max} = 0.71 M_{\odot}$ σε ακτίνα $R = 9.1km$.[6]

1.2.4 Μέγιστη μάζα αστέρων νετρονίων

Είναι απαραίτητο για τη συνέχεια αυτής της εργασίας να δειχθεί η ανάγκη ύπαρξης μέγιστης μάζας για τους αστέρες νετρονίων αλλά και για όλα τα συμπαγή άστρα.

Θεωρούμε μια ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R που αποτελείται απο ελεύθερα φερμιόνια μάζας m. Απο τη νευτώνεια μηχανική είναι αναμενόμενο ότι η συνολική ενέργεια $E(R)$ ενός σωματιδίου που βρίσκεται σε απόσταση R απο τη σφαίρα είναι το άθροισμα της βαρυντικής και της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου.

$$E(R) = E_G + E_{kin} = -G\frac{Mm}{R} + E_{kin} \tag{1.2.16}$$

Η ενέργεια του σωματιδίου δίνεται απο τη σχετικιστική σχέση:

$$E(k) = \sqrt{k^2 + m^2} \tag{1.2.17}$$

Για ένα ρευστό ελεύθερων φερμιονίων, η ορμή k δίνεται απο την ορμή fermi k_f. Η ορμή fermi αποτελεί συνάρτηση της αριθμητικής πυκνότητας ως:

$$n = \frac{g}{6\pi^2}k_f \tag{1.2.18}$$

Όπου g είναι ο παράγοντας εκφυλισμού. Για τα νετρόνια είναι $g = (2s+1) = 2$. Για ευκολία θέτουμε την αριθμητική πυκνότητα ίση με τη μέση πυκνότητα $\overline{n}$ του αστέρα που ορίζεται ως:

$$\overline{n} = \frac{N}{V} = \frac{3N}{4\pi R^3} \tag{1.2.19}$$

Όπου N είναι ο συνολικός αριθμός σωματιδίων. Οπότε έχουμε:

$$\frac{g}{6\pi^2}k_f = \frac{3N}{4\pi R^3} \tag{1.2.20}$$

και η ορμή Fermi είναι:

$$k_f = \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3} n^{1/3} = \left(\frac{9\pi}{2g}\right)^{1/3} \frac{N^{1/3}}{R} \tag{1.2.21}$$

Θεωρώντας ότι η συνολική μάζα είναι η μάζα όλων των φερμιονίων προκύπτει:

$$M = N \cdot m \tag{1.2.22}$$

Για ένα φερμιόνιο σε σχετικιστικά όρια η κινητική του ενέργεια είναι πλέον $E_kin = k_f$ και η συνολική ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$E(R) = -G\frac{Mm}{R} + k_f \tag{1.2.23}$$

οπότε αντικαθιστώντας απο τις σχέσεις (1.2.22) και (1.2.23) προκύπτει:

$$E(R) = -G\frac{Nm^2}{R} + \left(\frac{9\pi}{2g}\right)^{1/3} \frac{N^{1/3}}{R} \tag{1.2.24}$$

Παρατηρείται ότι και οι δύο όροι είναι ανάλογοι του $1/R$. Πλέον η συνολική ενέργεια εξαρτάται μόνο απο τον αριθμό των φερμιονίων N μιας και η μάζα των φερμιονίων είναι ορισμένη. Για μεγάλες τιμές του N, επικρατεί η ενέργεια λόγω βαρύτητας, δηλαδή ο πρώτος όρος. Για μικρές τιμές του N, επικρατεί η κινητική ενέργεια, δηλαδή ο δεύτερος όρος. Γενικά υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για την κατάληξη του άστρου ανάλογα με τις τιμές του N.

$E(R) < 0$: Ασταθές σύστημα με την ενέργεια να παίρνει συνεχώς μικρότερες τιμές καθώς το $R \to 0$, και να καταλήγει σε μια μαύρη τρύπα.

$E(R) > 0$: Η ενέργεια μειώνεται όσο αυξάνεται η ακτίνα μέχρι η αριθμητική πυκνότητα, και κατά συνέπεια λόγω της (1.2.18), και η ορμή Fermi να φύγουν απο τα σχετικιστικά όρια για ένα ρευστό Fermi ($k_f < m$). Τότε, $E_k in \propto \frac{k_f^2}{m_f} \propto R^{-2}$ και υπάρχει ένα σταθερό ελάχιστο για μια πεπερασμένη τιμή του R.

$E(R) = 0$: Το σύστημα είναι κατά κύριο λόγο σταθερό.

Με την ενέργεια να γίνεται αρνητική για μεγάλες τιμές του N, λόγω της υπερίσχησης του βαρυντικού δυναμικού, σταθερές λύσεις προκύπτουν μέχρι μια μέγιστη τιμή για τον αριθμό των φερμιονίων N_{max}, που δίνεται απο την τρίτη περίπτωση του κατά κύριο λόγο σταθερού συστήματος. Οπότε το όριο σταθερότητας $E(R) = 0$, απο την (1.2.24), έχει σαν συνέπεια

$$G N_{max} m^2 = \left(\frac{9\pi}{2g}\right)^{1/3} N_{max}^{1/3} \tag{1.2.25}$$

που γίνεται

$$N_{max} = \left(\frac{9\pi}{2g}\right)^{1/2} \left(\frac{m_P}{m}\right)^3 \tag{1.2.26}$$

καθώς θέσαμε $G = 1/m_P$ σε φυσικές μονάδες, με m_P να είναι η μάζα του Planck. Οπότε η μέγιστη μάζα δίνεται απο

$$M_{max} = N_{max} \cdot m = \left(\frac{9\pi}{2g}\right)^{1/2} \frac{m_P^3}{m^2} \tag{1.2.27}$$

Η αντίστοιχη ακτίνα R μπορεί να βρεθεί θέτοντας $k_f = m$ ώστε να βρεθούμε σε σχετικιστικά όρια για τα φερμιόνια. Με την εξίσωση (1.2.21) έχουμε

$$R_{crit} = \left(\frac{9\pi}{2g}\right)^{1/3} \frac{N_{max}^{1/3}}{m} = \left(\frac{9\pi}{2g}\right)^{1/2} \frac{m_P}{m^2} \tag{1.2.28}$$

όπου το N_{max} αντικαταστάθηκε απο την (1.2.26) Ορίζουμε τώρα τη μάζα Landau M_L και την αντίστοιχη ακτίνα R_L ως

$$M_L = \frac{m_P^3}{m^2} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad R_L = \frac{m_P}{m^2} \tag{1.2.29}$$

Ακόμα δεν έχουμε ορίσει το είδος του φερμιονίου που έχουμε και κατά συνέπεια δεν έχει γίνει αντικατάσταση της μάζας. Για έναν αστέρα νετρονίων με $m = m_n$ οι τιμές της μάζας και ακτίνας Landau είναι

$$M_L = \frac{m_P^3}{m_n^2} = 1.848\, M_\odot \qquad \kappa\alpha\iota \qquad R_L = \frac{m_P}{m_n^2} = 2.729\, km. \tag{1.2.30}$$

που είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές για αστέρα νετρονίων αποτελούμενο απο ελεύθερα νετρόνια με $M_{max} = 0.71\, M_\odot$ και $R = 9.1\, km$, καθώς το πηλίκο $\left(\frac{9\pi}{2g}\right)^{1/2} \approx 2.66$.

2 Ανάλυση των εξισώσεων TOV

Επειδή τα αποτελέσματα της ερευνητικής εργασίας συγκρίνονται με τις εξισώσεις TOV απαιτείται μια περαιτέρω ανάλυση τους

Για ένα στατικό, συμμετρικό και σφαιρικό σύστημα, η μετρική μπορεί να γραφτεί ως:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2). \tag{2.0.1}$$

Όπου οι $\nu(r)$ και $\lambda(r)$ είναι μετρικές συναρτήσεις, οι οποίες συνδέονται με την ενεργειακή πυκνότητα $\varepsilon(r)$ και την πίεση $P(r)$ ως:

$$\frac{8\pi G}{c^4}\varepsilon(r) = \frac{1}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda(r)}\right) + e^{-\lambda(r)}\frac{\lambda'(r)}{r}, \tag{2.0.2}$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}P(r) = -\frac{1}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda(r)}\right) + e^{-\lambda(r)}\frac{\nu'(r)}{r}, \tag{2.0.3}$$

$$P'(r) = -\frac{P(r) + \varepsilon(r)}{2}\nu'(r) \tag{2.0.4}$$

Όπου οι τονούμενες συναρτήσεις έχουν διαφοριστεί ως προς την ακτίνα r. Οι τρεις εξισώσεις σε συνδυασμό με την καταστατική εξίσωση του ρευστού $\varepsilon = \varepsilon(P)$ καθορίζουν τη μηχανική ισορροπία της αστρικής ύλης. Οι εξισώσεις (2.0.2),(2.0.3) και (2.0.4) σχηματίζουν τις εξισώσεις **TOV** που αποδείχτηκαν στο πρώτο κεφάλαιο (1.2.13) και (1.2.14).

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{m_r(r)\varepsilon(r)}{c^2r^2}\left(1 + \frac{P(r)}{\varepsilon(r)}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2 m_r(r)}\right)\left(1 - \frac{2Gm_r(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \tag{1.2.13}$$

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2\varepsilon(r) \tag{1.2.14}$$

Είναι σύνηθης η επίλυση των εξισώσεων με αριθμητικό τρόπο, χρησιμοποιώντας μια καταστατική εξίσωση πίεσης-πυκνότητας που περιγράφει το εσωτερικό του ρευστού. Η εναλλακτική είναι η προσπάθεια εύρεσης αναλυτικών λύσεων με το ενδεχόμενο εύρεσης λύσεων χωρίς φυσική σημασία. Φυσικά έχουν υπάρξει εκατοντάδες αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων TOV, όμως μόνο μια πολύ μικρή μειοψηφία είναι ουσιώδεις. Παρακάτω αναλύεται η λύση Schwarzschild με ομοιόμορφη πυκνότητα, καθώς σε αυτές τις συνθήκες έγινε και η εργασία.

2.1 Η λύση Schwarzschild σταθερής πυκνότητας

Η λύση δεν είναι ρεαλιστική όμως παρουσιάζει επιστημονικό ενδιαφέρον καθώς:

- Στο εσωτερικό των αστέρων νετρονίων η πυκνότητα είναι σχεδόν σταθερή.
- Η εξαγωγή αναλυτικής λύσης απο τις εξισώσεις Einstein είναι έυκολη.
- Προσφέρει διδακτικά οφέλη.

Οπότε παρακάτω παρουσιάζονται οι βασικές πτυχές της λύσης. Οι μετρικές είναι:

$$e^{-\lambda} = 1 - 2\beta x^2, e^{\nu} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1-2\beta} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\beta x^2}\right)^2, x = r/R. \tag{2.1.1}$$

Όπου β ο παράγοντας συμπαγότητας. Η ενεργειακή πυκνότητα και η πίεση είναι:

$$\varepsilon = \varepsilon_c = \frac{3Mc^2}{4\pi R^3}, \tag{2.1.2}$$

$$\frac{P(x)}{\varepsilon_c} = \frac{\sqrt{1-2\beta} - \sqrt{1-2\beta x^2}}{\sqrt{1-2\beta x^2} - 3\sqrt{1-2\beta}}. \tag{2.1.3}$$

Ο σημαντικός για τη σταθερότητα του άστρου λόγος της κεντρικής πίεσης προς την κεντρική ενεργειακή πυκνότητα δίνεται από:

$$\frac{P_c}{\varepsilon_c} = \frac{P(0)}{\varepsilon(0)} = \frac{\sqrt{1-2\beta} - 1}{1 - 3\sqrt{1-2\beta}} \tag{2.1.4}$$

Φαίνεται πως για $\beta = 4/9$ η κεντρική πίεση απειρίζεται. Αυτό είναι και το κύριο μειονέκτημα αυτής της λύσης, διότι έτσι απειρίζεται και η ταχύτητα του ήχου. [4]

3 Εύρεση μέγιστης μάζας ομοιόμορφου αστέρα

3.1 Επίλυση του προβλήματος της ενέργειας με προσέγγιση ομοιόμορφης πυκνότητας

Στη γενική σχετικότητα, η μάζα $M(r)$ και ο αριθμός των βαρυονίων $A(r)$ μιας σφαιρικά συμμετρικής κατανομής ύλης εντός ακτίνας r δίνεται απο τα ολοκληρώματα

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \varrho(r) r^2 dr, \tag{3.1.1}$$

$$A(r) = 4\pi \int_0^r \frac{n(r) r^2 dr}{1 - 2GM(r)/c^2 r} \tag{3.1.2}$$

Όπου ϱ η πυκνότητα και n η αριθμητική πυκνότητα των βαρυονίων. Η καταστατική εξίσωση των βαρυονίων σε μηδενική θερμοκρασία θέτει την πυκνότητα ϱ σαν συνάρτηση της αριθμητικής πυκνότητας n. Προκειμένου να βρεθεί η πυκνότητα στην οποία υπάρχει ισορροπία, θεωρούμε μια απειροστή μεταβολή πρώτης τάξης δM της συνολικής μάζας M, που προήλθε απο μια απειροστή μεταβολή στην αριθμητική πυκνότητα n, που κράτησε το συνολικό αριθμό των βαρυονίων A σταθερό. Η αρχή της μεταβλητότητας όμως ορίζει πως η μεταβολή δM μηδενίζεται όταν το n είναι η συνάρτηση στην οποία έχουμε ισορροπία. Μια προσεγγιστική λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι η επιλογή τέτοιων συναρτήσεων τόσο για την $n(r)$, όσο και για την $\varrho(r)$, ώστε αυτές να είναι σταθερές εντός σφαίρας ακτίνας R και μηδέν εκτός. Έτσι, με μια ορισμένη καταστατική εξίσωση τα ολοκληρώματα των εξισώσεων (3.1.1) και (3.1.2) μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} M &= \frac{4}{3}\pi\varrho R^3, && (3.1.3) \\ A &= 2\pi n \left(\frac{3c^2}{8nG\varrho}\right)^{3/2} (\chi - sin\chi cos\chi), && (3.1.4) \\ R &= \left(\frac{3c^2}{8nG\varrho}\right)^{1/2} sin\chi. && (3.1.5) \end{aligned}$$

άρα

$$M = \frac{4\pi}{3}\varrho^{-1/2}\left(\frac{3c^2}{8G}\right)^{3/2} sin^3(\chi) \tag{3.1.3}$$

Καθώς για λόγους απλότητας θεωρούμε $n = 1$ αφού είναι σταθερό.

$$\text{Όπου } sin^2\chi = 2GM/Rc^2$$

Οπότε το όριο της νευτώνειας μηχανικής αντιστοιχεί σε μικρά χ, ενώ το όριο Schwarzschild για $\chi = \pi/2$.

3.1.1 Απόδειξη της συνθήκης ισορροπίας $\mathbf{P/\varrho c^2} = \boldsymbol{\zeta(\chi)}$

Στη συνέχεια, προκειμένου να βρεθεί η συνθήκη ισορροπίας, θεωρούμε ότι εκεί η ενέργεια σύνδεσης $E = M - nA$ θα πρέπει να μένει σταθερή, μαζί με τον αριθμό των βαρυονίων, δηλαδή $dE = 0$ και $dA = 0$. Οπότε αφού

$$A = 2\pi n \left(\frac{3c^2}{8nG\varrho}\right)^{3/2} f(\chi), \tag{3.1.4}$$

Έχουμε

$$dA = \frac{\partial A}{\partial \chi}d\chi + \frac{\partial A}{\partial n}dn + \frac{\partial A}{\partial \varrho}d\varrho = 0 \implies$$

$$\frac{2\pi n}{\varrho^{3/2}}\left(\frac{3c^2}{8\pi G}\right)^{3/2}\frac{\partial f(\chi)}{\partial\chi}d\chi+\frac{2\pi}{\varrho^{3/2}}\left(\frac{3c^2}{8\pi G}\right)^{3/2}f(\chi)dn+\left(-\frac{3}{2}\right)^{-5/2}n\left(\frac{3c^2}{8\pi G}\right)^{3/2}f(\chi)d\varrho=0 \implies$$

$$n\frac{\partial f}{\partial\chi}d\chi+f(\chi)dn+\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{n}{\varrho}f(\chi)d\varrho=0$$

Και επειδή $dn=\frac{nd\varrho}{\varrho+P}$, προκύπτει:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\chi}=\frac{n\frac{\partial f(\chi)}{\partial\chi}}{\frac{3}{2}\frac{n}{\varrho}f(\chi)-\frac{nf(\chi)}{\varrho+P}} \tag{3.1.6}$$

Επίσης αφού η μάζα M μπορεί να μετααασχηματιστεί σε:

$$M(\varrho,\chi)=\frac{4\pi}{3\sqrt{\varrho}}\left(\frac{3c^2}{8G}\right)^{3/2}sin^2(\chi) \tag{3.1.7}$$

έχουμε

$$dM=\frac{\partial M}{\partial\chi}d\chi+\frac{\partial M}{\partial\varrho}d\varrho=0 \implies$$

$$-\frac{1}{2\varrho}sin^3(\chi)d\varrho+3sin^2(\chi)cos(\chi)d\chi=0 \implies$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\chi}=6\varrho\frac{cos(\chi)}{sin(\chi)} \tag{3.1.8}$$

Απο (3.1.6) και (3.1.8) λοιπόν:

$$\frac{n\frac{\partial f(\chi)}{\partial\chi}}{\frac{3}{2}\frac{n}{\varrho}f(\chi)-\frac{nf(\chi)}{\varrho+P}}=6\varrho\frac{cos(\chi)}{sin(\chi)} \tag{3.1.9}$$

Και θεωρώντας ότι

$$\frac{P}{\varrho c^2}=\zeta(\chi) \tag{3.1.10}$$

που είναι η συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\frac{2sin^2(\chi)}{6\frac{cos(\chi)}{sin(\chi)}}=f(\chi)[\frac{3}{2}-\frac{1}{1+\zeta(\chi)}] \implies$$

$$\frac{1}{1+\zeta(\chi)}=\frac{3}{2}-\frac{2sin^3(\chi)}{6cos(\chi)f(\chi)} \implies$$

$$\frac{1}{1+\zeta(\chi)} = \frac{9cos(\chi)f(\chi) - 2sin^3(\chi)}{6cos(\chi)f(\chi)} \implies$$

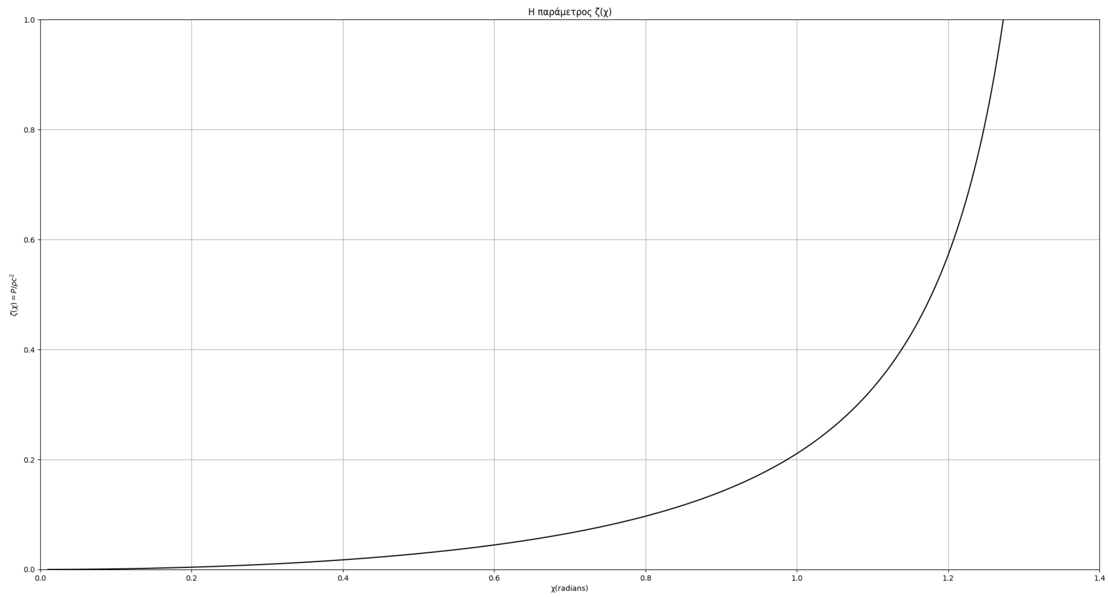
$$\boxed{\zeta(\chi) = \frac{6cos(\chi)}{3cos(\chi) - \frac{2sin^3(\chi)}{f(\chi)}}} \tag{3.1.11}$$

Η εξάρτηση του ζ απο τη γωνία χ φαίνεται γραφικά στο γράφημα 3. Άξια προσοχής είναι η συμπεριφορά του παράγοντα μόνο για $0 \leq \zeta(\chi) \leq 1$, καθώς η ειδική σχετικότητα δεν επιτρέπει $P > \varrho c^2$.

Η συνθήκη ισορροπίας (3.1.10) είναι η γενική σχετικιστική μορφή του θεωρήματος Virial για την περίπτωση της ομοιόμορφης πυκνότητας. Στην κλασική μηχανική για $\chi \ll 1$ έχει την οκεία μορφή :

$$PV = -\omega/3, \tag{3.1.12}$$

όπου $\omega = \frac{3}{5}(GM^2/R)$ είναι η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας για μια σφαίρα ομοιόμορφης πυκνότητας όγκου V.



Γράφημα 3: Η παράμετρος $\zeta(\chi)$ συναρτήσει της γωνίας χ.

Για μία καταστατική εξίσωση $\varrho(n)$, η συνθήκη ισορροπίας (3.1.10), κρίνει την εξάρτηση της γωνίας χ απο την πυκνότητα σωματιδίων n. Αντικαθιστώντας αυτή τη συνάρτηση $\chi(n)$ στις εξισώσεις (3.1.3) - (3.1.5), δίνει τα τρία μεγέθη των εξισώσεων σαν συνάρτηση μόνο της μεταβλητής n. Για μικρές τιμές τις πυκνότητας n έχουμε $P/\varrho c^2 \ll 1$, και για αυτό η κλασική προσέγγιση είναι σωστή. Σε αυτή την περίπτωση, οι εξισώσεις (3.1.3)-(3.1.11) δίνουν ότι $M \sim P^{3/2}/\varrho^2$ και οπότε η μάζα αυξάνεται με την αριθμητική πυκνότητα, με την προϋπόθεση ότι η πίεση P αυξάνεται πιο ραγδαία απο το $\varrho^{4/3}$. Παράλληλα, αν το πηλίκο $P/\varrho c^2$, πλησιάζει μια ακραία τιμή ζ =σταθερό, παίρνουμε $M \sim \varrho^{-1/2}$. Συνεπώς είναι λογικό το συμπεράσμα πως για ορισμένη τιμή του n η μάζα παίρνει μια μέγιστη τιμή. Η κλασική προσέγγιση (3.1.12) είναι σύνηθης για τη μελέτη των ιδιοτήτων αυτών για τους αστέρες νετρονίων, αλλά μόνο όταν το πηλίκο $P/\varrho c^2$ δεν πλησιάζει τη μονάδα. Στη συνέχεια, εαν αγνοήσουμε τον περιορισμό της ειδικής σχετικότητας $\zeta < 1$, βρίσκουμε ότι ο παράγοντας ζ απειρίζεται για $\chi \to 80^\circ.03$. Οπότε επειδή $sin^2\chi = 2GM/Rc^2$, προκύπτει πως η μέγιστη τιμή του πηλίκου $GM/Rc^2 = 0.4850$. Που έρχεται σε συμφωνία με το ακριβές άνω όριο (Bondi,1964) $GM/Rc^2 < 6\sqrt{2} - 8 \simeq 0.4853$.

3.1.2 Ενέργεια Σύνδεσης

Η ενέργεια σύνδεσης $E/Mc^2 = (M - mA)/M$ δίνεται απο τις εξισώσεων (3.1.3) και (3.1.4) όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\frac{E}{Mc^2} = 1 - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{u}{\varrho c^2}\right)\frac{\chi - sin(\chi)cos(\chi)}{sin^3(\chi)} \tag{3.1.13}$$

όπου $u = (\varrho - mn)c^2$ είναι η ενεργειακή πυκνότητα αφού αφαιρέθηκε απο αυτή η ενέργεια της μάζας ηρεμίας. Στην ειδική περίπτωση που $P = (\gamma - 1)u$, όπου γ ο αδιαβατικός δείκτης, μπορεί να αντικατασταθεί η συνθήκη ισορροπίας (3.1.10) στην εξίσωση (3.1.13) ώστε να βρεθεί η ενέργεια σύνδεσης συναρτήσει του παράγοντα χ. Πιο συγκεκριμένα, για μικρές τιμές του χ, γνωρίζοντας ότι $sin^2\chi = 2GM/Rc^2$ μπορούμε να βρούμε τους δύο πρώτους όρους μιας σειράς δυνάμεων του GM/Rc^2.

$$\frac{E}{Mc^2} = \frac{4 - 3\gamma}{5(\gamma - 1)}\left(\frac{GM}{Rc^2}\right) + \frac{389 - 225\gamma}{350(\gamma - 1)}\left(\frac{GM}{Rc^2}\right)^2 \tag{3.1.14}$$

Το πρώτο μέρος της παράστασης είναι το ακριβές αποτέλεσμα, προβλεπόμενο απο τη νευτώνεια θεωρία. Όμως, όταν $(\gamma - 4/3) \simeq \delta(GM/Rc^2)$, με το δ να είναι παράγοντας μοναδιαίας τάξης, ο δεύτερος όρος γίνεται σημαντικός και έχουμε:

$$\frac{E}{Mc^2} = \frac{9}{5}\left(\frac{GM}{Rc^2}\right)^2\left(\frac{89}{210} - \delta\right), \tag{3.1.15}$$

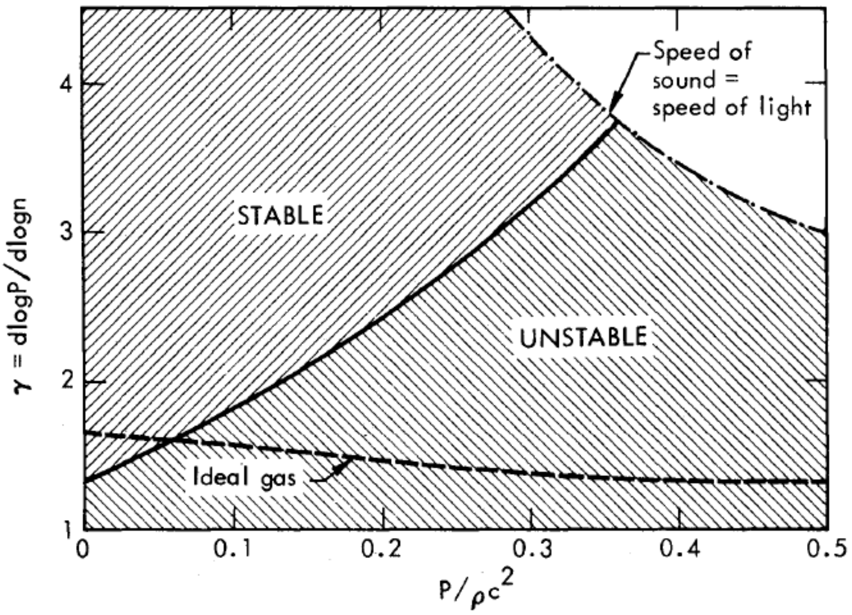
απο όπου γίνεται κατανοητό ότι η ενέργεια σύνδεσης $E > 0$ όταν $\delta < 89/210$.

Η σταθερότητα της ισορροπίας όσον αφορά τις ακτινικές ταλαντώσεις του άστρου κρίνεται απο απο την παράγωγο $\partial^2 M/\partial\chi^2$ υπολογισμένη στην ισορροπία για έναν σταθερό αριθμό βαρυονίων Α. Βρίσκεται ότι η παράγωγος είναι θετική και κατά συνέπεια υπάρχει σταθερότητα στο άστρο όταν

$$\gamma > \gamma_c(\chi) \tag{3.1.16}$$

Όπου

$$\gamma = \frac{d\,log\,P}{d\,log\,n} = \left(1 + \frac{\varrho c^2}{P}\right)\frac{dP}{c^2 d\varrho} \tag{3.1.17}$$



Γράφημα 4: Η καμπύλη που διαχωρίζει την περιοχή σταθερότητας ("stable") απο την περιοχή αστάθειας ("unstable") είναι η συνάρτηση γ_c που δίνεται απο την εξίσωση (3.1.18) παρακάτω. Για σύκριση, φαίνεται με διακεκομένες γραμμές ο αδιαβατικός δείκτης γ ενός ελεύθερου αέριου νετρονίων.

και ο γ_c εξαρτάται μόνο απο το $\zeta(\chi)$ και κατά συνέπεια μόνο απο το χ:

$$\gamma_c = (\zeta + 1)\left[1 + \frac{3\zeta + 1}{2}\left(\frac{\zeta + 1}{6\zeta}tan^2(\chi) - 1\right)\right] \tag{3.1.18}$$

Η εξάρτηση του γ_c απο το ζ φαίνεται στο γράφημα 3. Για ορισμένη καταστατική εξίσωση, ο αδιαβατικός δείκτης γ που φαίνεται στην εξίσωση (3.1.17) μπορεί επίσης να παρασταθεί γραφικά, ώστε το σημείο τομής μεταξύ γ και γ_c να αποτελεί την τιμή του $P/\varrho c^2$ πάνω απο την οποία υπάρχει αστάθεια.

Στο κλασικό όριο για $\chi \ll 1$, οι πρώτοι δύο όροι του αναπτύγματος του γ_c σε δυνάμεις του χ^2 δίνουν

$$\gamma_c = \frac{4}{3} + \frac{89}{210}\chi^2, \tag{3.1.19}$$

όπου επειδή μιλάμε για μικρά χ ισχύει $\chi^2 \simeq sin^2(\chi) = 2GM/Rc^2$.

Ο πρώτος όρος στην εξίσωση (3.1.19) είναι η συνθήκη σταθερότητας στην κλασική μηχανική. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, όταν ο δείκτης πλησιάζει την τιμή 4/3, ο 2ος όρος γίνεται σημαντικός. Έτσι, η γενική σχετικότητα μπορεί να έχει επίδραση ακόμα και σε περιπτώσεις που $\chi \ll 1$. [5]

3.2 Ιδανικό Αέριο Νετρονίων

Προκειμένου να δειχθεί η εφαρμογή της θεωρίας, χρησιμοποιούμε παρακάτω την καταστατική εξίσωση ενός ιδανικού, μη αλληλεπιδρόντος, σχετικιστικού αέριου νετρονίων.

Η πυκνότητα μάζας ϱ, η αριθμητική πυκνότητα n και η πίεση P μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της παράμετρου σχετικόττηας $x = p_F/m$, όπου p_F η ορμή Fermi και m η μάζα ηρεμίας του νετρονίου.

$$n = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 x^3, \tag{3.2.1}$$

$$\varrho = \frac{m}{8\pi^2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \nu(x), \tag{3.2.2}$$

και

$$P = \frac{mc^2}{3\pi^2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 [x^3\sqrt{x^2+1} - \frac{3}{8}\nu(x)], \tag{3.2.3}$$

όπου

$$\nu(x) = x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \ln[x + \sqrt{x^2+1}]. \tag{3.2.4}$$

Οι εξισώσεις (3.2.1)-(3.2.3), μέσω των εξισώσεων (3.1.3)-(3.1.5) δίνουν:

$$\frac{M}{M_0} = \frac{sin^3(\chi)}{\sqrt{\nu(x)}}, \tag{3.2.5}$$

$$\frac{mA}{M_0} = \frac{4x}{\nu(x)^{3/2}}(\chi - sin\chi cos\chi), \tag{3.2.6}$$

και

$$\frac{R}{R_0} = \frac{sin\chi}{\sqrt{\nu(x)}}, \tag{3.2.7}$$

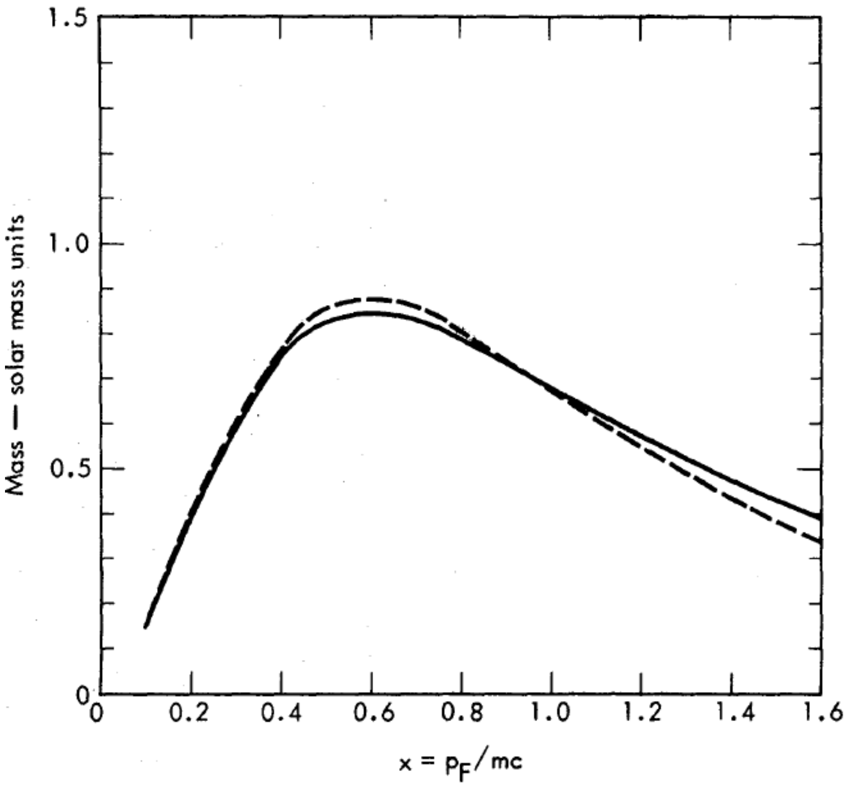
όπου

$$M_0 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}\left(\frac{\hbar c}{Gm^2}\right)^{3/2} = 2.83M_\odot,$$
$$R_0 = \sqrt{3}\chi\frac{\hbar}{mc}\left(\frac{\hbar c}{Gm^2}\right) = 8.378km.$$

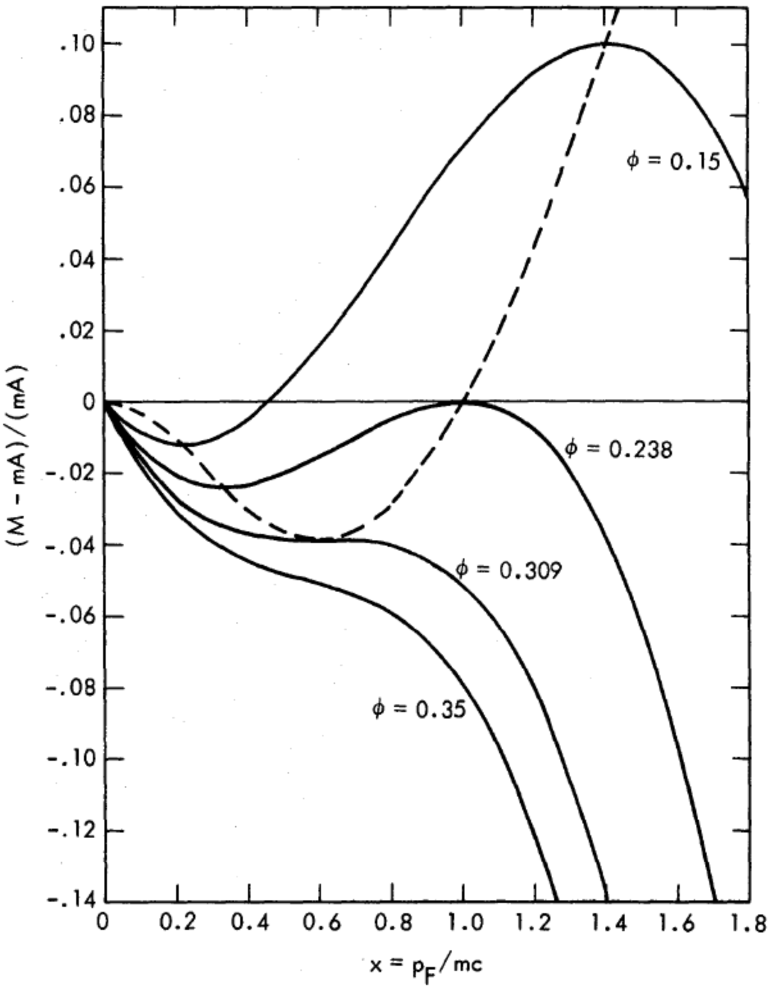
Η εξάρτηση της γωνίας χ απο τη παράμετρο σχετικότητας x δίνεται αντικαθιστώντας τις εξισώσεις(3.2.2) και (3.2.3) στη συνθήκη ισορροπίας (3.1.10):

$$\zeta(x) = \frac{8x^3\sqrt{x^2+1}}{3\nu(x)} - 1 \tag{3.2.8}$$

Και λύνοντας ως προς χ, βρίσκοντας τον αντίστροφο της εξίσωσης (3.1.11). Στο γράφημα 4 φαίνται τα αποτελέσματα, όπου παρίστανται γραφικά η φυσική μάζα της σφαίρας M και η μάζα όλων των νετρονίων, δηλαδή η μάζα ηρεμίας mA συναρτήσει του παράγοντα σχετικότητας x. Στο $x \simeq 0.84$ αντιστοιχούν οι μέγιστες τιμές των M και mA όπου $M = 0.84M_\odot$ και $mA = 0.88MM\odot$. Φαίνεται πως για $x \gtrsim 1$ βρίσκεται ισορροπία με αρνητική ενέργεια σύνδεσης. Η ενέργεια σύνδεσης συναρτήσει του παράγοντα x φαίνεται γραφικά στο γράφημα 5, όπου για ευσταθή ισορροπία το κλάσμα $(M - mA)/mA$ είναι ελάχιστο, ενώ για ασταθή μέγιστο. Για τιμές μεγαλύτερες του 0.88 το κλάσμα είναι γνησίως μονότονο.



Γράφημα 5: Η μάζα ηρεμίας (διακεκομένη γραμμή) και η συνολική μάζα (συμπαγής γραμμή) συναρτήσει του του $x = p_F/mc$ για ένα ελεύθερο αέριο νετρονίων ομοιόμορφης πυκνότητας.



Γράφημα 6: Η ενέγεια σύνδεσης $(M - mA)/mA$ συναρτήσει του παράγοντα σχετικότητας x, για ένα ελεύθερο αέριο νετρονίων ομοιόμορφης πυκνότητας με σταθερό αριθμό νετρονίων A. Η διακεκομένη γραμμή είναι η ενέργεια σύνδεσης στην ισορροπία.

Για τη σχετικιστική περίπτωση $\chi \gg 1$, προκύπτει για το ιδανικό αέριο $\zeta \to \frac{1}{3}$. Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.2.1)-(3.2.8),έχουμε $\chi \to 63°.17$ και $M \simeq \frac{0.335}{x} M_\odot$ και $mA = \frac{0.35}{x^2} M_\odot$ Οπότε, $(M - mA)/mA > 0$ επειδή η μάζα ηρεμίας, λόγω του x^2 στον παρονομαστή της, μειώνεται πιο ραγδαία απο τη φυσική μάζα που είναι ανάλογη του $\frac{1}{x}$. Ανάλογα, με τη μη σχετικιστική περίπτωση $x \ll 1$, βρίσκεται ένα ανάπτυγμα δυναμοσειράς του x για την ενέργειας σύνδεσης: $(M - mA)/M_0 = -(3\sqrt{3}/10)x^{7/2}$, που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα για την κλασική περίπτωση στη προσέγγιση που μελετάμε. Για τεράστιες τιμές του x, η υπόθεση ομοιόμορφης πυκνότητας δεν υφίσταται, καθώς για $x \to \infty$ οι εξισώσεις (3.2.5)-(3.2.7) αποκλείουν απο τις ακριβείς λύσεις των Oppenheimer και Volkoff που βρήκαν $M \sim 0.34 M_\odot$ για άπειρες κεντρικές πυκνότητες. [5]

3.3 Μέγιστη μάζα αστέρων νετρονίων

Μελέτες δείχνουν πως η μέση πυκνότητα ενός σταθερού αστέρα νετρονίων είναι συγκρίσιμη με την πυκνότητα των νουκλεονίων εντός ενός μεγάλου πυρήνα. Αυτό σημαίνει ότι η πυηρνική δύναμη μεταξύ των νετρονίων είναι καταλυτική για τις ιδιότητες ενός αστέρα νετρονίων. Υπάρχουν και διορθώσεις λόγω της παρουσίας άλλων βαρυονίων όπως προτόνια, υπερόνια κτλπ. Εφόσον η συμπεριφορά των πυρηνικών δυνάμεων σε κβαντικές διαστάσεις δεν έχει εξακριβωθεί πλήρως, δε μπορούν να βρεθούν καταστατικές εξισώσεις που να περιγράφουν επακριβώς τη συμπεριφορά της νετρονικής ύλης. Ωστόσο, μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία της παραγράφου 3.1, ώστε να εκτιμηθεί το πως οι διάφορες υποθέσεις σχετικά με την καταστατική εξίσωση των αστέρων νετρονίων διαμορφώνουν τις ιδιότητες του. Επίσης, ακριβείς αριθμητικές λύσεις δείχνουν πως η θεώρηση ομοιόμορφης πυκνότητας εφαρμόζεται βέλτιστα όταν η μάζα του αστέρα πλησιάζει τη μέγιστη της τιμή. Λογικό εφόσον σε μεγάλες μάζες έχουμε μεγάλες πυκνότητες και κατά συνέπεια μεγάλες πιέσεις, όπου η καταστατική εξίσωση γίνεται πιο σφιχτή ("stiff") και έτσι η κατανομή πυκνότητας μοιάζει πιο ομοιόμορφη. Στον πίνακα παρακάτω φαίνεται η μέγιστη μάζα και η αντίστοιχη ακτίνα υπολογισμένη με τη προσέγγιση ομοιόμορφης πυκνότητας με δύο διαφορετικές καταστατικές, V_γ(Tsuruta & Cameron,1966) και Pandharipande (1971) ,που είναι μερικές απο αυτές που χρησιμοποιήθηκαν και για το υπολογιστικό κομμάτι της παρούσας εργασίας, και τα συκρίνονται με τα ακριβή αποτελέσματα των Baym, Pethick και Sunderland. Είναι προφανές πως υπάρχει καλύτερη προσέγγιση απο τη V_γ και αυτό γιατί αυτή η καταστατική είναι πιο σφιχτή σε υψηλότερες πυκνότητες. Επίσης βλέπουμε πως οι τιμές της μάζας είναι μεγαλύτερες απο την ακριβή τιμή. Ο λόγος αυτού είναι πως για οποιοδήποτε αριθμό βαρυονίων, η θεωρία θα έχει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερη μάζα γιατί ο ακριβής υπολογισμός συμβαίνει σε ευσταθή αστέρα, που βρίσκεται σε ελάχιστο. Με αυτό το δεδομένο, βρίσκεται το άνω όριο της μάζας, το οποίο είναι ανεξάρτητο απο τις όποιες ανισορροπίες της καταστατικής εξίσωσης.

	TSURUTA AND CAMERON		PANDAHARIPANDE	
Παράμετρος	Εξ.3.3.6	Ακριβής	Εξ.3.3.6	Ακριβής
Μάζα ($M_\odot$).....	2.0	1.95	1.6	1.41
Ακτίνα (km)...	10.0	9.9	6.2	7.0

Πίνακας 1: : Μέγιστη μάζα αστέρων νετρονίων για δύο διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.1 η μέγιστη μάζα θα οριστεί απο το πόσο γρήγορα η αύξηση της πυκνότητας αυξάνει την πίεση. Καταληγούμε οπότε σε ένα άνω όριο για τη μάζα, θεωρώντας ένα άνω όριο για το ρυθμό αύξησης της πίεσης με την πυκνότητα. Έτσι, θέτοντας $\partial P/\partial \varrho = v^2$, όπου v η ταχύτητα του ήχου και γνωρίζοντας απο τη σχετικότητα πως η ταχύτητα του ήχου δε μπορεί να είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός, προκύπτει:

$$\partial P/\partial \varrho \leq c^2, \tag{3.3.1}$$

που φράζει το ρυθμό αύξησης της πίεσης με την ενεργειακή πυκνότητα. Θεωρώντας ότι η πίεση σε ορισμένη ενεργειακή πυκνότητα ϱ_0 είναι P_0, τότε σε οποιαδήποτε μεγαλύτερη ενεργειακή πυκνότητα ϱ θα πρέπει να ισχύει για αυτή:

$$P \leq P_0 + c_s^2(\varrho - \varrho_0) \tag{3.3.2}$$

όπου $c_s < c$ η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του ήχου για ενεργειακές πυκνότητες μεταξύ ϱ και ϱ_0. Οι εξισώσεις (3.1.3) και (3.1.10) δείχνουν πως για σταθερό ϱ η μάζα αυξάνεται με την πίεση. Οπότε η μέγιστη μάζα επιτυγχάνεται όταν το πηλίκο $P/\varrho c^2$ πάρει μια κρίσιμη τιμή, για την οποία $\gamma = \gamma_c$, όπως είναι προφανές απο την εξίσωση (3.1.16) και το γράφημα 3. Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το $P/\varrho c^2$, που την θέτουμε ως ζ_c, συνδέεται με τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας του ήχου c_s μέσω της υπερβατικής εξίσωσης:

$$\frac{\zeta_c + 1}{\zeta_c}\left(\frac{c_s}{c}\right)^2 = \gamma_c, \tag{3.3.3}$$

όπου το γ_c προκύπτει για $\zeta = \zeta_c$. Ορίζοντας στην εξίσωση (3.3.2) τα P και ϱ ως P_c και ϱ_c αντίστοιχα και διαρώντας με $\varrho_c c^2$ έχουμε:

$$\frac{P_c}{\varrho_c c^2} \leq \frac{P_0}{\varrho_c c^2} + \left(\frac{c_s}{c}\right)^2\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho_c}\right) \tag{3.3.4}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το ζ_c στην εξίσωση (3.3.4), μέσω της (3.3.3), παίρνουμε τη μέση πυκνότητα ϱ_c που αντιστοιχεί στη μέγιστη μάζα:

$$\varrho_c \geq \frac{\varrho_0 - P_0/c_s^2}{1 - (\zeta_c + 1)/\gamma_c} \tag{3.3.5}$$

Έτσι, απο την εξίσωση (3.1.3), μέσω της (3.1.5) προκύπτει η μέγιστη μάζα για έναν αστέρα νετρονίων:

$$M_c \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{c^2}{G}\right)^{3/2}\left[\frac{1 - (\zeta_c + 1)/\gamma_c}{\varrho_0 - P_0/c_s^2}\right]^{1/2} sin^3(\chi_c) \tag{3.3.6}$$

όπου το χ_c είναι η λύση της εξίσωσης $\zeta = \zeta_c$. Αντίθετα, όταν τα ϱ_0 και P_0 είναι μέσα στην κοιλάδα ευστάθειας, τότε $c_s^2 > P_0/\varrho_0$.

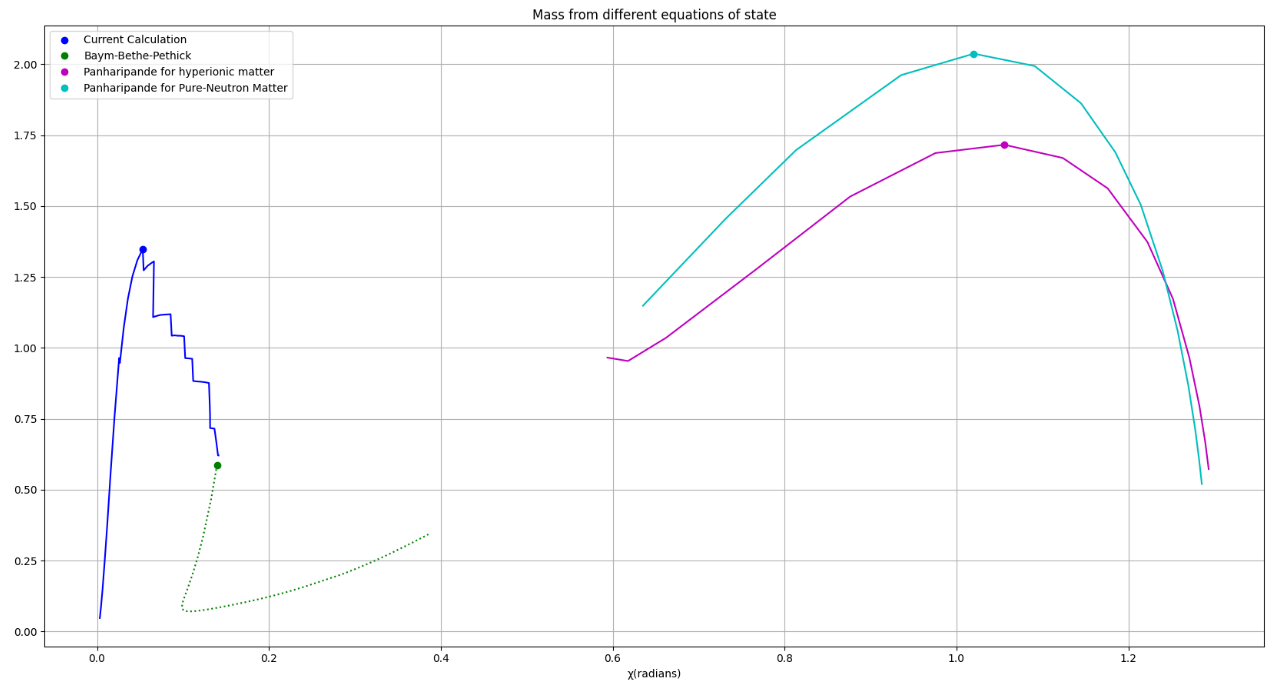
Παρατηρούμε στις εξισώσεις (3.3.5) και (3.3.6) πως προκειμένου να βρεθεί η μεγαλύτερη και κατά συνέπεια πιο ακριβής τιμή για τη μέγιστη μάζα, θα πρέπει να τοποθετηθεί στην εξίσωση η μεγαλύτερη διαθέσιμη τιμή του $\varrho - P_0/c_s^2$. Αυτό εξαρτάται καθαρά απο την καταστατική εξίσωση την οποία μελετάμε. Τη στιγμή συγγραφής της πηγής (1973), η μεγαλύτερη τιμή του ϱ_0 για την οποία μπορεί να προβλεφθεί επακριβώς η πίεση είναι $\varrho_0 = 5 \times 10^14 gr \cdot^{-3}$, όπου $P_0 = 7 \times 10^{33} dyn \cdot cm^{-2}$. [5]

4 Αποτελέσματα

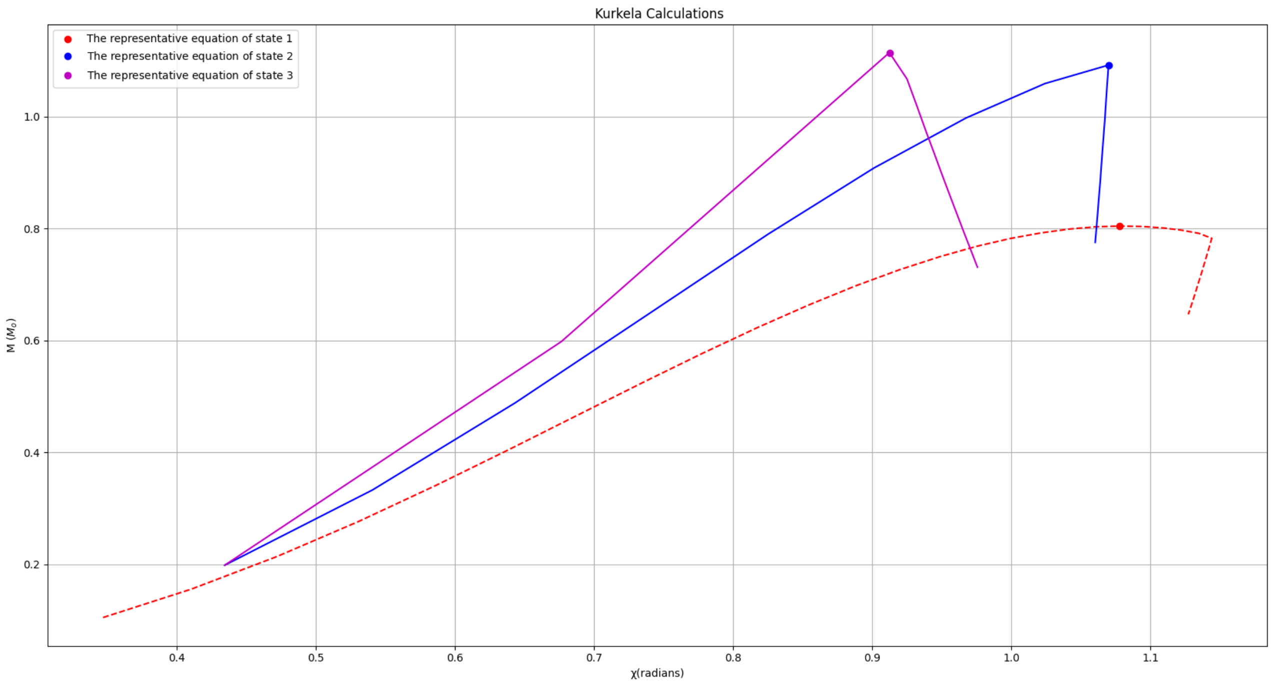
Αφού λοιπόν τελειώσαμε με τη μελέτη του θεωρητικού υποβάθρου της εργασίας, ακολουθούν τα υπολογιστικά αποτελέσματα. Κατόπιν δημιουργίας γραφημάτων μάζας με το πρώτυπο της ομοιόμορφης θεώρησης, για λόγους εξοικείωσης με την υπολογιστική διαδικασία, βρίσκονται το αναμενόμενο απο την εξίσωση (3.3.6) άνω όριο της μάζας ανάλογα με την θεωρούμενη μέγιστη ταχύτητα του ήχου και η ακτίνα του αστέρα όταν η μάζα είναι μέγιστη για καταστατικές απο τη διεθνή βιβλιογραφία.

4.1 Γραφήματα μάζας

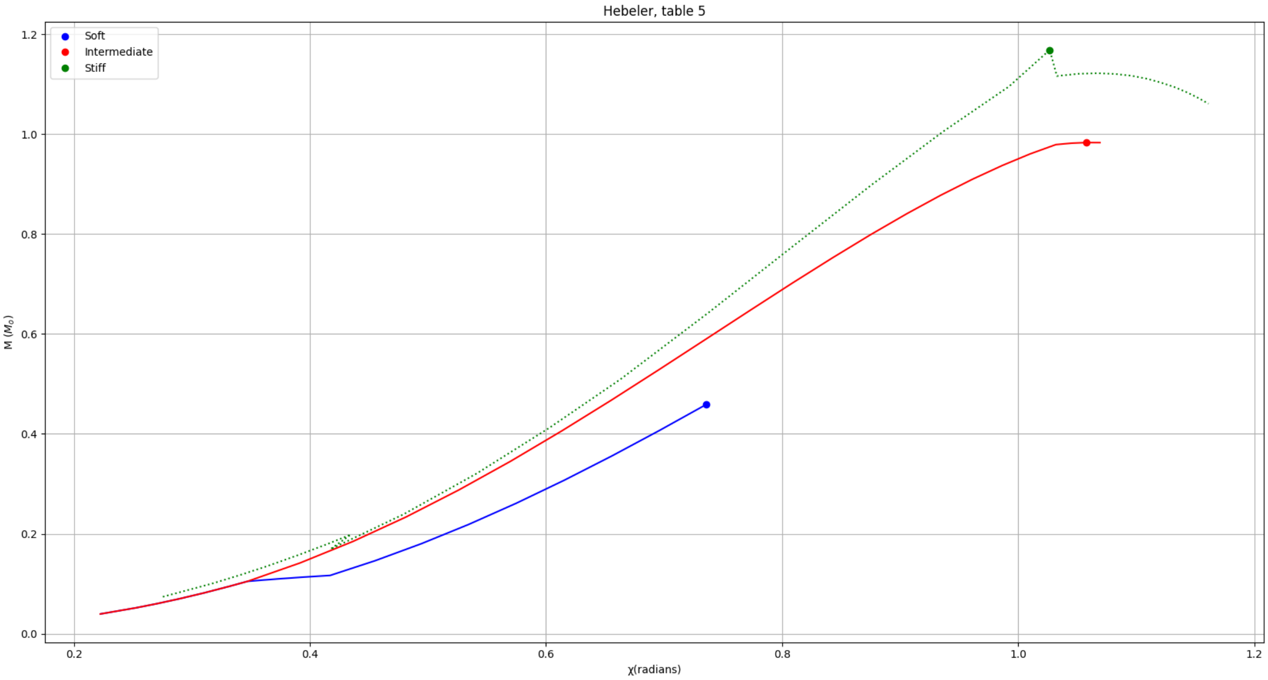
Με τις καταστατικές απο τις πηγές [1], [3] και [2] λοιπόν,για κάθε ζεύγος τιμών πίεσης και πυκνότητας, αφού γίνει ο κατάλληλος μετασχηματισμός μονάδων, απο το πηλίκο $P/\varrho c^2$ βρίσκεται το $\zeta(\chi)$.Στη συνέχεια, λύνοντας ως προς χ, απο τη σχέση (3.1.3), βρίσκεται η μάζα του αστέρα νετρονίων σε μονάδες ηλιακής μάζας για όλα τα διαφορετικά ζεύγη P και ϱ. Έτσι, μπορούν να δημιουργηθούν τα παρακάτω γραφήματα με σκοπό την κατανόηση των ιδιοτήτων του αστέρα.



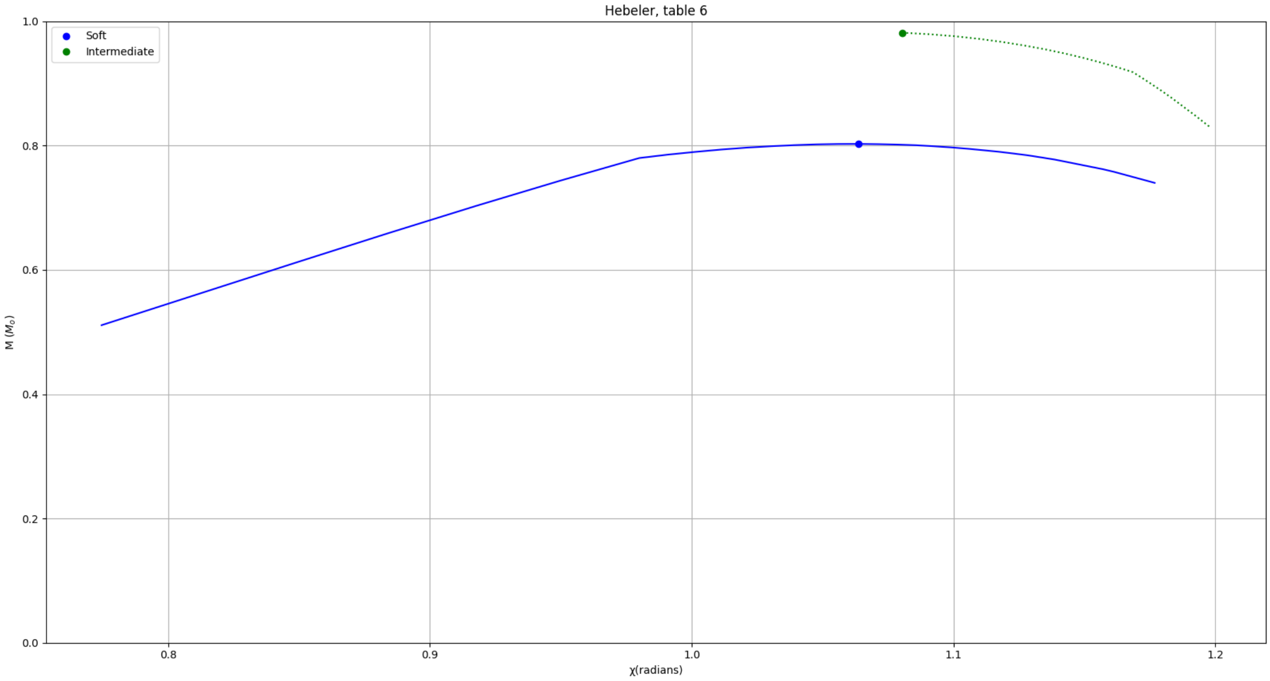
Γράφημα 7: Τα γραφήματα της μάζας συναρτήσει της παραμέτρου χ για τις 4 διαφορετικές καταστατικές της πηγής [1].



Γράφημα 8: Τα γραφήματα της μάζας συναρτήσει της παραμέτρου χ για τις 3 διαφορετικές καταστατικές της πηγής [3].



Γράφημα 9: Τα γραφήματα της μάζας συναρτήσει της παραμέτρου χ για τις 3 διαφορετικές καταστατικές ('stiff", "intermediate" και "soft") του πίνακα 5 της πηγής [2].



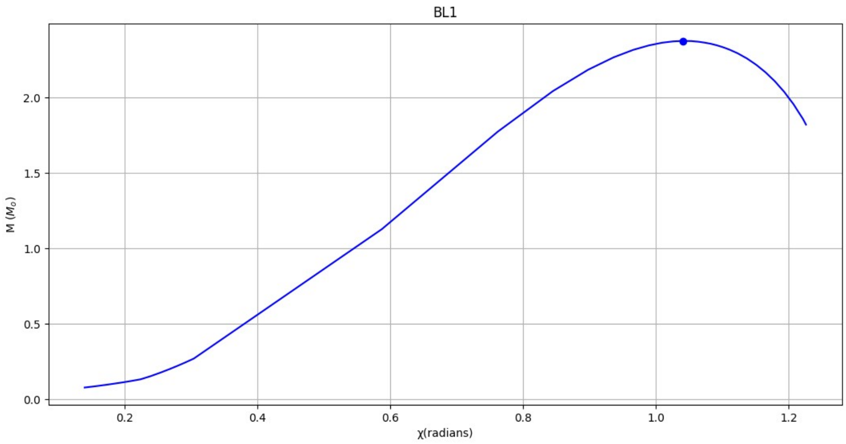
Γράφημα 10: Τα γραφήματα της μάζας συναρτήσει της παραμέτρου χ για τις 2 διαφορετικές καταστατικές ('stiff" και "soft") του πίνακα 6 της πηγής [2].

Παρατηρείται στα τελευταία δύο γραφήματα πως όσο πιο σφιχτή είναι η καταστατική εξίσωση, τόσο πιο ψηλά είναι η μέγιστη μάζα, ακριβώς όπως προέβλεψε η θεωρία στο κεφάλαιο 3.

4.2 Κύριο Μέρος της Εργασίας

4.2.1 Γραφήματα μάζας και θεωρητικό άνω όριο

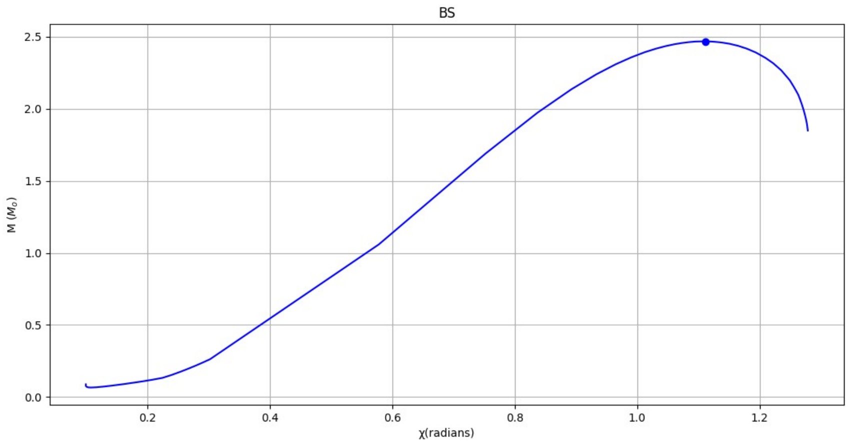
Απο τις καταστατικές εξισώσεις της διεθνής βιβλιογραφίας λοιπόν σχεδιάστηκαν τα γραφήματα μάζας και οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές του άνω ορίου.



Γράφημα 11: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική BL1

c_s/c	$\varrho_0 = 38,7 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 = 2.38 \cdot 10^{36} dyn/cm^2$
0.25	1.815
0.5	1.816
0.57736	1.817
0.75	1.821
1	1.811

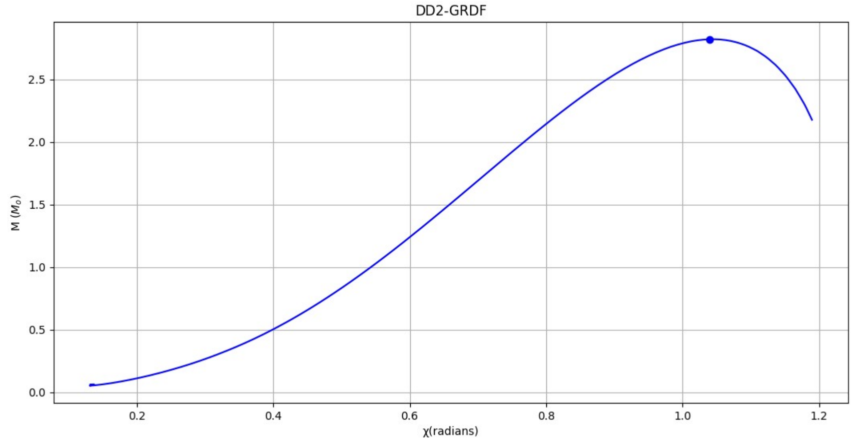
Πίνακας 2: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση BL1, σε μονάδες ηλιακής μάζας, ανάλογα με τη θεωρούμενη μέγιστη τιμή της ταχύτητας του ήχου. Όσο πιο μεγάλη τιμή πίεσης και πυκνότητας παίρνεται, τόσο μεγαλύτερη



Γράφημα 12: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική BS

c_s/c	$\varrho_0 = 41.77 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 = 3.98 \cdot 10^{36} dyn/cm^2$
0.25	1.8419
0.5	1.8222
0.57736	1.8424
0.75	1.8433
1	1.863

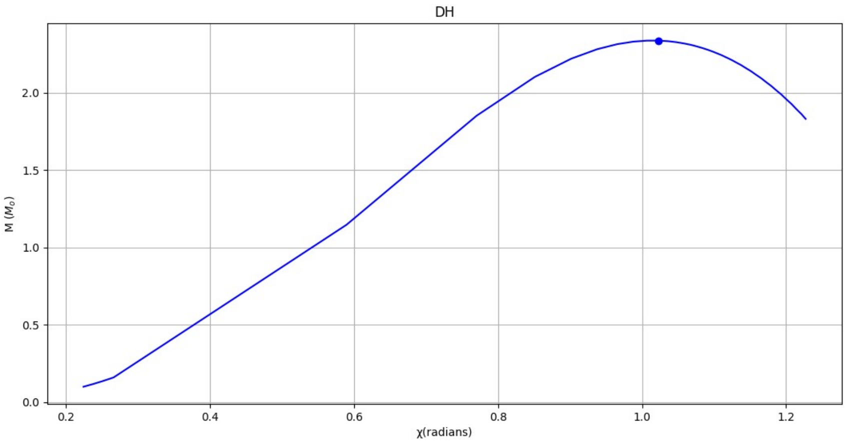
Πίνακας 3: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση BS, σε μονάδες ηλιακής μάζας.



Γράφημα 13: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική DD2-GRDF

c_s/c	$\varrho_0 = 24.94 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 = 1.2 \cdot 10^{36} dyn/cm^2$
0.25	2.1703
0.5	2.1714
0.57736	2.1725
0.75	2.1388
1	2.1669

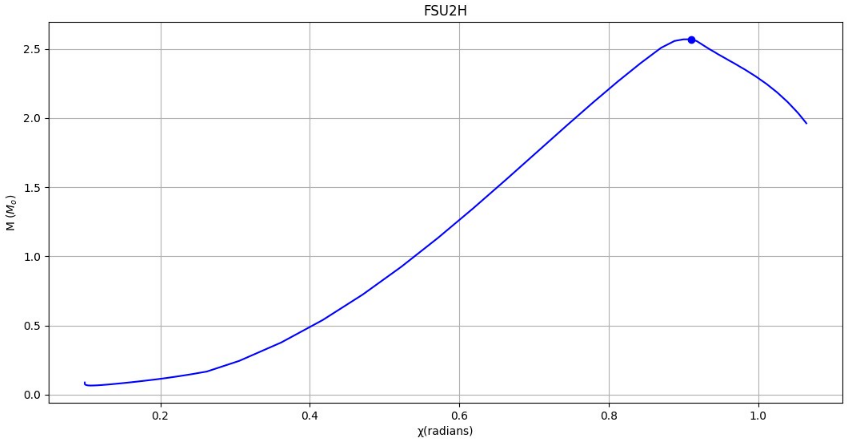
Πίνακας 4: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση DD2-GRDF, σε μονάδες ηλιακής μάζας.



Γράφημα 14: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική DH

c_s/c	$\varrho_0 = 38.46 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 = 2.38 \cdot 10^{36} dyn/cm^2$
0.25	1.8239
0.5	1.8245
0.57736	1.825
0.75	1.8294
1	1.8198

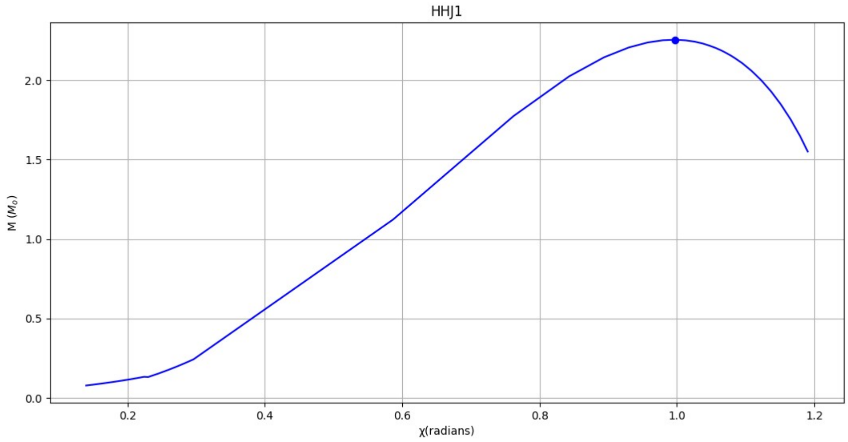
Πίνακας 5: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση DH, σε μονάδες ηλιακής μάζας.



Γράφημα 15: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική FSU2H

c_s/c	$\varrho_0 = 21.47 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 = 5.37 \cdot 10^{35} dyn/cm^2$
0.25	1.9559
0.5	1.9675
0.57736	1.9473
0.75	1.9529
1	1.9536

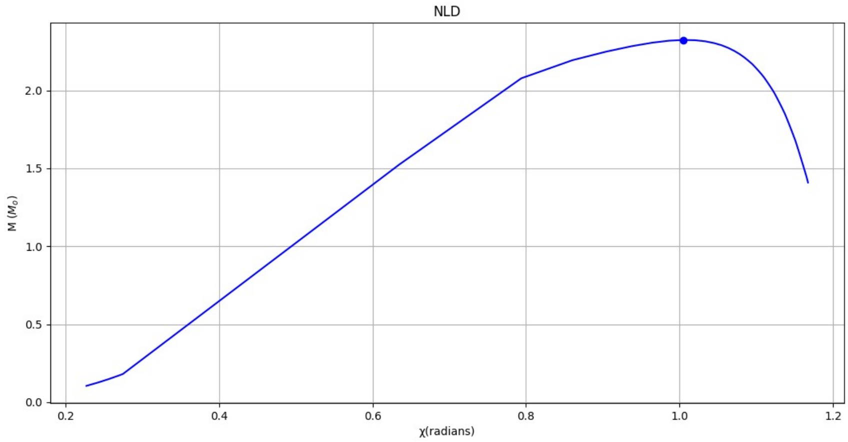
Πίνακας 6: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση FSU2H, σε μονάδες ηλιακής μάζας.



Γράφημα 16: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική HHJ1

c_s/c	$\varrho_0 = 49.25 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 = 2.38 \cdot 10^{36} dyn/cm^2$
0.25	1.5458
0.5	1.5465
0.57736	1.5474
0.75	1.5211
1	1.5433

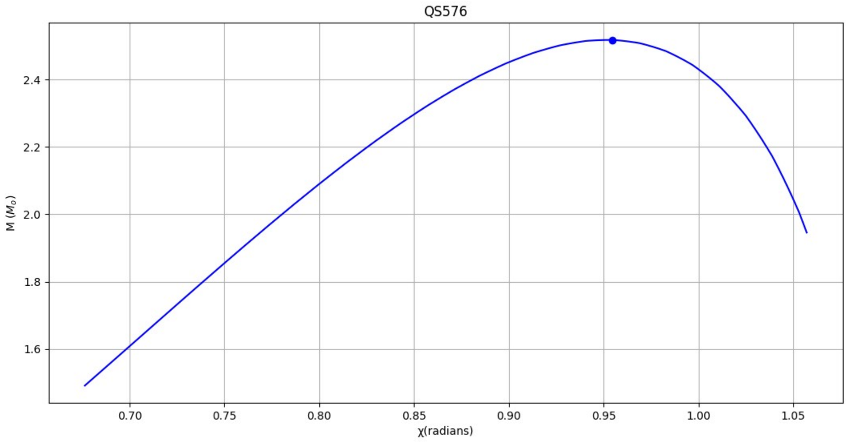
Πίνακας 7: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση HHJ1, σε μονάδες ηλιακής μάζας.



Γράφημα 17: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική NLD

c_s/c	$\varrho_0 = 56.47 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 = 2.38 \cdot 10^{36} dyn/cm^2$
0.25	1.4033
0.5	1.4043
0.57736	1.4056
0.75	1.3973
1	1.4013

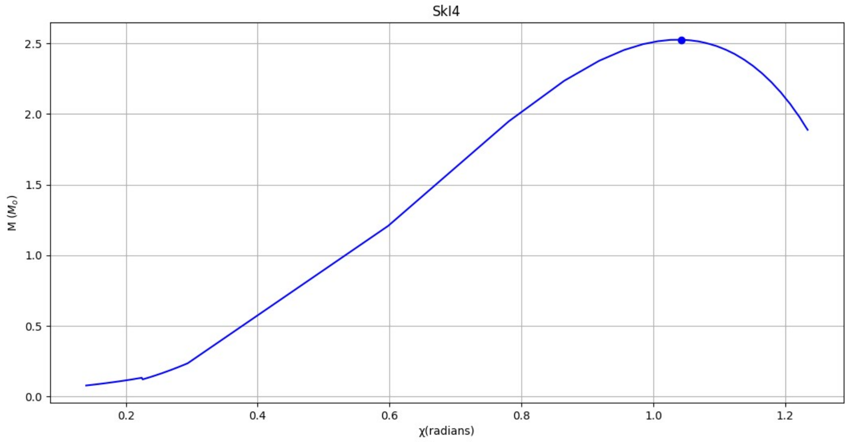
Πίνακας 8: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση NLD, σε μονάδες ηλιακής μάζας.



Γράφημα 18: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική QS576

c_s/c	$\varrho_0 = 21.32 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 == 5.16 \cdot 10^{35} dyn/cm^2$
0.25	1.939
0.5	1.9559
0.57736	1.9316
0.75	1.936
1	1.9368

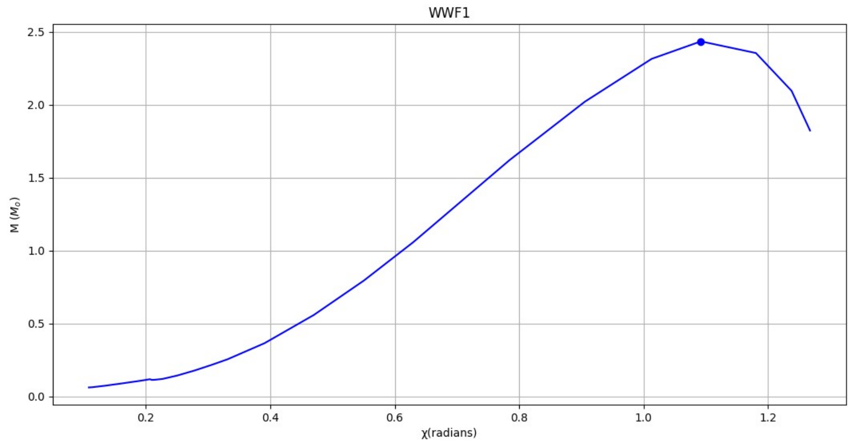
Πίνακας 9: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση QS576, σε μονάδες ηλιακής μάζας.



Γράφημα 19: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική Skl4

c_s/c	$\varrho_0 = 36.65 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 = 2.38 \cdot 10^{36} dyn/cm^2$
0.25	1.8818
0.5	1.8823
0.57736	1.8827
0.75	1.8862
1	1.8769

Πίνακας 10: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση Skl4, σε μονάδες ηλιακής μάζας.



Γράφημα 20: Το γράφημα μάζας συναρτήσει της γωνίας χ για την καταστατική WWF1

c_s/c	$\varrho_0 = 42.04 \cdot 10^{14} gr/cm^3$ $P_0 = 3.6 \cdot 10^{36} dyn/cm^2$
0.25	1.8167
0.5	1.817
0.57736	1.8173
0.75	1.8184
1	1.7898

Πίνακας 11: Το όριο μέγιστης μάζας για την καταστατική εξίσωση WWF1, σε μονάδες ηλιακής μάζας.

4.2.2 Σύγκριση μάζας και ακτίνας

Τέλος, συγκρίθηκαν οι μέγιστες μάζες απο τα γραφήματα και οι ακτίνες στις αντίστοιχες καταστάσεις μέγιστης μάζας απο την εξίσωση (3.1.5), με τις ακριβείς λύσεις απο τις εξισώσεις TOV:

Καταστατικές	Αποτελέσματα απο το πρότυπο		Αποτελέσματα απο TOV	
	Μάζα($M_{\odot}$)	Ακτίνα(km)	Μάζα($M_{\odot}$)	Ακτίνα(km)
BL1	2.38	9.42	2.09	10.29
BS	2.47	9.05	2.22	9.88
DD2-GRDF	2.82	11.21	2.42	11.87
DH	2.34	9.47	2.05	10.25
F2U2H	2.57	12.17	2.03	12.13
HHJ1	2.26	9.42	1.94	10.39
NLD	2.32	9.61	2.02	11.18
QS576	2.52	11.15	2.00	10.90
Skl4	2.53	10.00	2.20	10.85
WWF1	2.44	9.12	2.13	9.40

Πίνακας 12: Ο πίνακας όπου συγκρίνονται τα αποτελέσματα με τις μάζες σε μονάδες ηλιακών μαζών και τις ακτίνες σε χιλιόμετρα.

5 Σχόλια-Συμπεράσματα

Στους πίνακες της παραγράφου 4.2.1 παρατηρείται πως το άνω όριο της μάζας είναι μικρότερο απο τις μέγιστες μάζες που φαίνονται στα αντίστοιχα γραφήματα. Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί, καθώς όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 3.3, οι δοθέντες τιμές πίεσης και πυκνότητας δεν είναι αρκετά μεγάλες ώστε να έχουν τα αποτελέσματα την επιθυμητή ακρίβεια. Ακόμη, στη μέγιστη τιμή της ταχύτητας του ήχουc_s δίνεται και η τιμή $c_s = 0.57736c$, καθώς αυτή είναι η μέγιστη τιμή που μπορούν να πάρουν τα quarks, που αποτελούν τα νετρόνια του αστέρα. Επίσης, στον πίνακα 12 φαίνεται πως το πρότυπο της ομοιόμορφης θεώρησης παρουσιάζει ένα σφάλμα 11-26% στις μάζες και <10% στις ακτίνες. Συμπεραίνουμε έτσι πως το πρότυπο, όπως ήταν αναμενόμενο, δεν έχει την ακρίβεια των εξισώσεων TOV. Η χρησιμότητα του ωστόσο φαίνεται στην απλουστευμένη υπολογιστική διαδικασία που προσφέρει όπως αυτή αναλύεται στο παράρτημα, μέσα απο την οποία γίνεται πιο κατανοητή η συμπεριφορά και οι ιδιότητες των αστέρων νετρονίων.

A Παράρτημα: ο κώδικας python

Στο παρόν παράρτημα θα παρουσιαστεί ο τρόπος διεκπαιρέωσης της υπολογιστικής διαδικασίας. Αρχικά παραστήθηκε γραφικά η παράμετρος $\zeta(\chi)$, όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.1.11). Δημιουργούμε λοιπόν αρχικά τη λίστα "t" που θα έχει τις τιμές όλων των τετμημένων, δηλαδή των χ. Με την εντολή linspace της numpy λοιπόν, η οποία δίνει στη μεταβλητή t 10,000,000 τιμές (επειδή το πρόγραμμα είναι μικρό έχουμε αυτή την πολυτέλεια ώστε το γράφημα να είναι όσο πιο "smooth" γίνεται) απο το 0,01 έως το 1,35. Η τιμή 1,35 επιλέχθηκε επειδή περίπου εκεί η παράμετρος ζ γίνεται 1, που είναι η μέγιστη τιμή που η γενική θεωρία της σχετικότητας επιτρέπει. Στη συνέχεια, αρχικοποιείται η λίστα "z" όπου θα τοποθετηθούν οι τιμές των τεταγμένων $\zeta(\chi)$.

```
t=list(np.linspace(0.01,1.35,10000000))
z=[]
```

Στη συνέχεια, μέσα απο μια λούπα "for" φορτώνουμε τα αποτελέσματα στην άδεια λίστα "z".

```
for x in t:
    a=3*math.cos(x)
    b=(4.5)*math.cos(x)
    c=(math.sin(x))**3
    d=x-(math.sin(x)*math.cos(x))
    z.append((a/(b-c/d))-1)
```

Προκειμένου να μην υπάρξει κάποιο λάθος σύνταξης του τύπου $\zeta(\chi)$, μέσα απο τις μεταβλητές a,b,c,d ο τύπος συντάχθηκε σταδιακά. Τέλος, δημιουργήθηκε το γράφημα $\zeta(\chi)$ που είναι το γράφημα 3.

```
plt.title("Η παράμετρος ζ(χ)")
plt.plot(t,z,"k-")
plt.xlabel("χ(radians)")
plt.ylabel("$ζ(χ)=P/ρc^2$")
plt.axis([0,1.4,0,1])
plt.grid()
plt.show()
```

Στη συνέχεια έπρεπε να δημιουργηθούν τα γραφήματα απο τις πηγές [1],[2] και [3]. Αρχικά περνιούνται χειροκίνητα σε δύο λίστες οι τιμές πιέσεων και πυκνοτήτων απο τον εκάστοτε πίνακα, εδώ οι τιμές είναι απο τον πρώτο πίνακα της πηγής [1].

```
R1=[1.044*10**4,2.62*10**4,6.59*10**4,1.65*10**5,4.17*10**5,1.04*10**6,
2.62*10**6,6.58*10**6,8.29*10**6,1.655*10**7,3.302*10**7,6.589*10**7,
1.315*10**8,2.624*10**8,3.304*10**8,5.237*10**8,8.301*10**8,1.045*10**9,
1.316*10**9,1.657*10**9,2.626*10**9,4.164*10**9,6.601*10**9,8.312*10**9,
1.046*10**10,1.318*10**10,1.659*10**10,2.090*10**10,2.631*10**10,3.313*10**10,
4.172*10**10,5.254*10**10,6.617*10**10,8.332*10**10,1.049*10**11,1.322*10**11,
1.664*10**11,1.844*10**11,2.096*10**11,2.640*10**11,3.325*10**11,4.188*10**11,4.299*10**11]

P1=[9.744*10**18,4.968*10**19,2.431*10**20,1.151*10**21,5.266*10**21,2.318*10**22,
9.755*10**22,3.911*10**23,5.259*10**23,1.435*10**24,3.833*10**24,1.006*10**25,
2.604*10**25,6.676*10**25,8.738*10**25,1.629*10**26,3.029*10**26,4.129*10**26,
5.036*10**26,6.860*10**26,1.272*10**27,2.356*10**27,4.362*10**27,5.662*10**27,
7.702*10**27,1.048*10**28,1.425*10**28,1.938*10**28,2.503*10**28,3.404*10**28,
4.628*10**28,5.949*10**28,8.089*10**28,1.100*10**29,1.495*10**29,2.033*10**29,
2.597*10**29,2.892*10**29,3.290*10**29,4.473*10**29,5.816*10**29,7.538*10**29,7.805*10**29]
```

Στη συνέχεια, αφού γίνουν οι κατάλληλοι μετασχηματισμοί στα μεγέθη ώστε το πηλίκο $P/\varrho c^2$ να είναι αδιάστατο, βάζουμε τις τιμές όλων των διαιρέσεων σε μια λίστα "z" και δημιουργούμε ακριβώς όπως πριν για το γράφημα $\zeta(\chi)$ένα ζεύγος τιμών "z0" και "t".

```
P11=[p*10**(-4) for p in P1]
z=[p/(r*scipy.constants.c**2) for r,p in zip(R1,P11)]
t=np.linspace(0.001,0.6,10000)
z0=[]
for x in t:
    a=3*math.cos(x)
    b=(4.5)*math.cos(x)
    c=(math.sin(x))**3
    d=x-(math.sin(x)*math.cos(x))
    z0.append((a/(b-c/d))-1)
```

Το πιο απαιτητικό κομμάτι της εργασίας ήταν το πως έχοντας τις τιμές $\zeta(\chi)$ απο τις καταστατικές των πινάκων θα πάρουμε τις τιμές του χ, μιας και δεν υπάρχει προφανής λύση για την αντίστροφη συνάρτηση $\chi(\zeta)$. Τη λύση στο πρόβλημα τη δίνει η συνάρτηση interp της numpy, όπου για δύο ζεύγη τιμών που είναι γνησίως μονότονα το ένα σαν συνάρτηση του άλλου, μπορεί φορτώνοντας του μια τιμή "x" να βρει την αντίστοιχη τιμή "y" απο τη συμπεριφορά που έχουν τα ζεύγη τιμών. Για αυτό και δημιουργήθηκαν οι λίστες "z0" και "t" ώστε αυτές να είναι το ζεύγος τιμών και να αναλυθούν απο την interp ώστε να δωθεί η τιμή του χ για κάθε $\zeta(\chi)$.

```
x=[]
for k in z:
    x.append(np.interp(k,z0[:z0.index(max(z0))+1],t[:z0.index(max(z0))+1]))
```

Έτσι, στη λίστα "x" περνιέται μια τιμή των χ για κάθε τιμή $\zeta(\chi)$. Τα ορίσματα στη συνάρτηση interp είναι αρχικά η τιμή $\zeta(\chi)$ που μας ενδιαφέρει, στη συνέχεια οι τιμές του "z0" μέχρι εκεί που αυτή εμφανίζει μέγιστο (αυτό γιατί πρέπει τα ζεύγη τιμών να είναι γνησίως μονότονα και το $\zeta(\chi)$ έχει πολλά μέγιστα και ελάχιστα αφού ξεπεράσει τη μονάδα) και οι τιμές "t" πάλι μέχρι εκείνο το "t" που η z0 έχει τη μέγιστη τιμή της. Η ακρίβεια της μεθόδου μπορεί να ελεγχθεί εύκολα, παίρνοντας το x για ένα τυχαίο z που βρέθηκε απο τις καταστατικές και ξαναβάζοντας το σαν τετμημένη στον τύπο του $\zeta(\chi)$ ώστε να συγκριθούν. Τα αποτελέσματα είναι ακριβή, με το z να έχει ακρίβεια 8ου δεκαδικού ψηφίου. Οπότε μέσα απο την εξίσωση (3.1.3) μπορεί να βρεθεί η μάζα για κάθε ζεύγος τιμών P και ϱ.

```
M1=[7.57292*10**(8)*(1/(r))**(0.5) * (math.sin(w))**3 for r,w in zip(R1,x)]
```

Έτσι, μπορούμε πλέον να γραφικοποιήσουμε όλες τις τιμές των μαζών σαν συνάρτηση των γωνιών χ απο τη λίστα "x".

```
plt.plot(x[M1.index(max(M1))],max(M1),"bo",label="Current Calculation")
plt.plot(x,M1,"b-")
plt.xlabel("χ(radians)")
plt.ylabel("M $(M_o)$")
plt.legend(loc="upper right")
```

Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε για όλες τις υπόλοιπες καταστατικές απο τις πηγές [1],[2] και [3].

Αντίθετα, οι καταστατικές απο το κύριο μέρος της εργασίας, επειδή είχαν όλες τα ίδια μεγέθη και ήταν σε μορφή ".dat", για λόγους οικονομίας προτιμηθήκε η δημιουργία μιας συνάρτησης και στη συνέχεια απλά εκτέλεση της συνάρτησης για όλες τις διαφορετικές καταστατικές. Ακολουθούμε οπότε την ίδια διαδικασία πάλι για την εύρεση της μάζας, απλά αυτή τη φορά τα δεδομένα περνούνται μόνα τους απο τα αρχεία ".dat".

```
def plot(s:str,n):
    data=np.loadtxt(s,unpack = True,delimiter=" ")
    R=data[0]
    P=data[1]
    z=[p/(r) for r,p in zip(R,P)]


    t=np.linspace(0.000001,1.39,10000)
    #u=np.linspace(0.15,1.39,10000)
    #t = np.concatenate((t, u))
    z0=[]
    for x in t:
        a=3*math.cos(x)
        b=(4.5)*math.cos(x)
        c=(math.sin(x))**3
        d=x-(math.sin(x)*math.cos(x))
        z0.append((a/(b-c/d))-1)
    #4171539472355555.5
    #4177317264971663.0
    #fsdsdfdfs
    x=[]
    R=[r*1.6*10**(-10)/(scipy.constants.c**2*10**(-39)) for r in R]
    #R=[r*1.6*10**33/((3*10**10)**2) for r in R]

    P=[p*1.6*10**33 for p in P]
    #R=[r*1.6*10**33]
    for k in z:
        x.append(np.interp(k,z0[:z0.index(max(z0))+1],t[:z0.index(max(z0))+1]))
    #M1=[145557930.38776*(1/(r))**(0.5) * (math.sin(w))**3 for r,w in zip(R,x)]
    #M1=[7.57292*10**(8)*(1/(r))**(0.5) * (math.sin(w))**3 for r,w in zip(R,x)]
    M1=[1.36*10**8*(1/r)**0.5*(math.sin(w))**3 for r,w in zip(R,x)]
```

Έπειτα, βρίσκεται η ακτίνα στην κατάσταση μέγιστης μάζας απο την εξίσωση (3.1.5).

```
    ex=x[M1.index(max(M1))]
    den=data[0][M1.index(max(M1))]*1.6*10**(-13)/(10**(-45)*scipy.constants.c**2)
    Rad=(3*scipy.constants.c**2/(8*3.14*6.67*10**(-11)*den))**0.5*math.sin(ex)*10**-3
    name=s.replace(".dat","")
    print(f"\n{name}:{round(Rad,2)} km")
```

Επειδή ενδιαφερόμαστε για την κατάσταση μέγιστης μάζας, πρέπει να παρθεί το χ και το ϱ για αυτή την κατάσταση. Οπότε το πρόγραμμα θα εκτυπώσει το όνομα της καταστατικής που θα δωθεί σαν όρισμα και την ακτίνα σε χιλιόμετρα. Τέλος, θέτοντας σαν ζ_c τη μέγιστη τιμή των "z" και τις αντίστοιχες τιμές για τα P_0 και ϱ_0, απο τις εξισώσεις (3.3.3) και (3.3.5) βρίσκονται τα άνω όρια της μάζας για διαφορετικές θεωρούμενες μέγιστες ταχύτητες του ήχου.

```
zitac=max(z)
```

```
gammac=((zitac+1)/zitac)*(0.25)**2
Mlim1=0.5*(3/25.12)**0.5*((3*10**10)**2/(6.67*10**(-8)))**1.5*((1-((zitac+1)/gammac))/(max(R)-(max(P)/(0.25*3*10**10)**2)))**0.5*5*10**(-34)*math.sin(x[z.index(zitac)])**3
gammac=((zitac+1)/zitac)*(0.5)**2
Mlim2=0.5*(3/25.12)**0.5*((3*10**10)**2/(6.67*10**(-8)))**1.5*((1-((zitac+1)/gammac))/(max(R)-(max(P)/(0.5*3*10**10)**2)))**0.5*5*10**(-34)*math.sin(x[z.index(zitac)])**3
gammac=((zitac+1)/zitac)*(0.57736)**2
Mlim3=0.5*(3/25.12)**0.5*((3*10**10)**2/(6.67*10**(-8)))**1.5*((1-((zitac+1)/gammac))/(max(R)-(max(P)/(0.57736*3*10**10)**2)))**0.5*5*10**(-34)*math.sin(x[z.index(zitac)])**3
gammac=((zitac+1)/zitac)*(0.75)**2
Mlim4=0.5*(3/25.12)**0.5*((3*10**10)**2/(6.67*10**(-8)))**1.5*((1-((zitac+1)/gammac))/(max(R)-(max(P)/(0.75*3*10**10)**2)))**0.5*5*10**(-34)*math.sin(x[z.index(zitac)])**3
gammac=((zitac+1)/zitac)*(1)**2
Mlim5=0.5*(3/25.12)**0.5*((3*10**10)**2/(6.67*10**(-8)))**1.5*((1-((zitac+1)/gammac))/(max(R)-(max(P)/(1*3*10**10)**2)))**0.5*5*10**(-34)*math.sin(x[z.index(zitac)])**3

print(Mlim1,Mlim2,Mlim3,Mlim4,Mlim5)
```

Οπότε και εμφανίζουμε τα αποτελέσματα.

Το μόνο που μένει λοιπόν είναι η κλήση της συνάρτησης για όλες τις απαιτούμενες καταστατικές.

```
plot("BL1.dat",70)

plot("BS.dat",60)
plot("DD2-GRDF.dat",850)
plot("DH.dat",80)
plot("FSU2H.dat",60)
plot("HHJ1.dat",70)
plot("NLD.dat",80)
plot("QS576.dat",50)
plot("SkI4.dat",70)
plot("WWF1.dat",50)
```

Βιβλιογραφία

[1] Gordon Baym, Christopher Pethick, and Peter Sutherland. “The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models”. In: *The Astrophysical Journal* 170 (1971), p. 299.

[2] K Hebeler et al. “Equation of state and neutron star properties constrained by nuclear physics and observation”. In: *The Astrophysical Journal* 773.1 (2013), p. 11.

[3] Aleksi Kurkela et al. “Constraining neutron star matter with Quantum Chromodynamics”. In: *The Astrophysical Journal* 789.2 (2014), p. 127.

[4] Ch C Moustakidis. “The stability of relativistic stars and the role of the adiabatic index”. In: *General Relativity and Gravitation* 49 (2017), pp. 1–21.

[5] Michael Nauenberg and George Chapline Jr. “DETERMINAT10N of Properties of Cold Stars in General Relativity by a Variational Method..” In: *The Astrophysical Journal* 179 (1973), pp. 277–288.

[6] Jürgen Schaffner-Bielich. *Compact Star Physics*. Cambridge University Press, 2020. DOI: 10.1017/9781316848357.

[7] Γιάννης Χ. Σειραδάκης Χαράλαμπος Βαρβογλής. *εισαγωγή στη σύγχρονη αστρονομία*. γαρταγάνης, 1994.