INSTITUTO DE INFORMÁTICA
Universidade Federal de Goiás

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
TÓPICOS ESPECIAIS EM FUNDAMENTOS DE COMPUTAÇÃO – MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA PARA CIÊNCIA DE DADOS
PROF. DR. ROMMEL MELGAÇO BARBOSA

SEMINÁRIOS

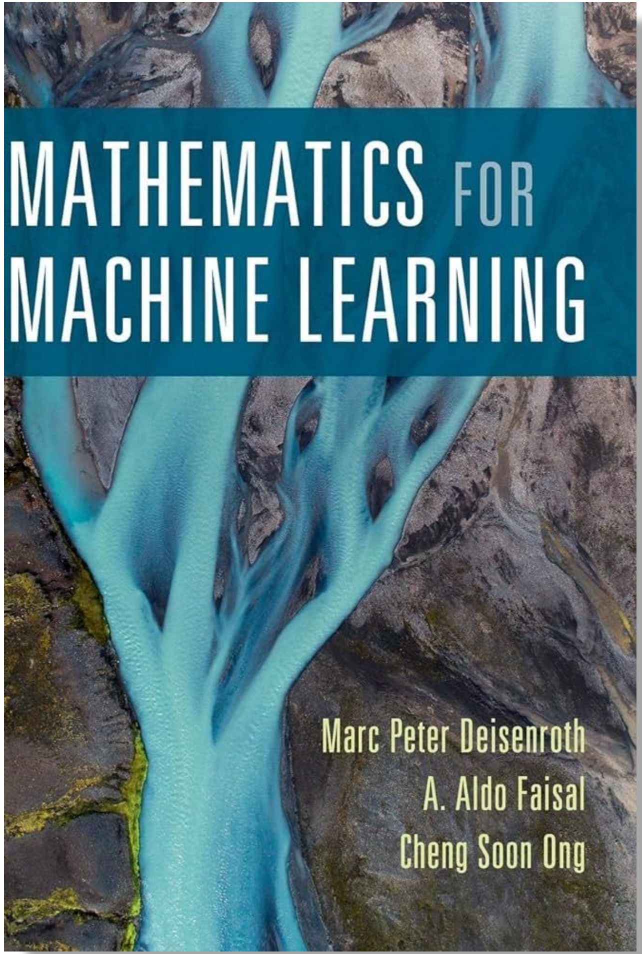
GEOMETRIA ANALÍTICA

André Rodrigues Coimbra
João Gabriel Junqueira da Silva
Rayane Araujo Lima
Renan Rodrigues de Oliveira

Abril/2024

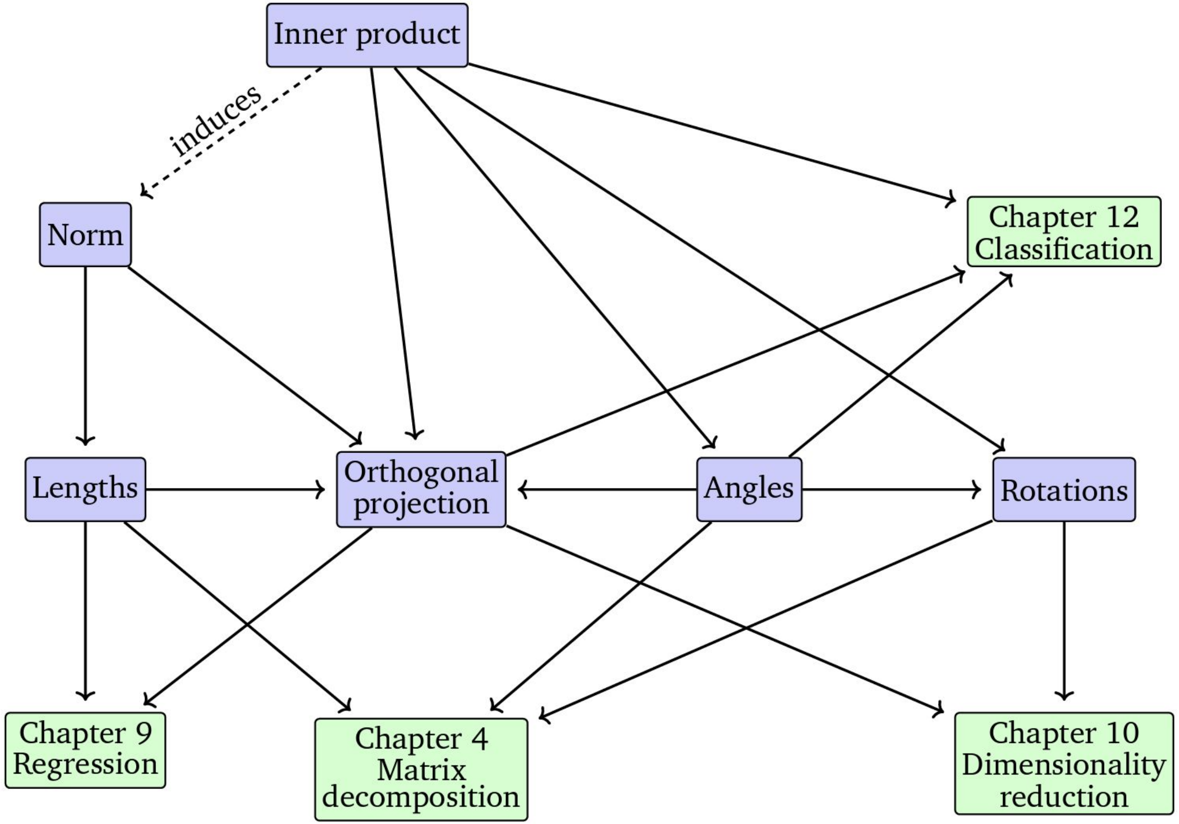
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
UFG

UFG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS



Capítulo 03

Geometria Analítica



Capítulo 03

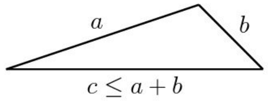
Geometria Analítica

3.1 Normas

Definição: Em um espaço vetorial V (real ou complexo), a norma é uma função que deve satisfazer às seguintes condições:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\to \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \|\boldsymbol{x}\| \end{aligned}$$

- Não negatividade: Associar ao vetor apenas um número real não negativo, de forma que $||x|| \geq 0$ para todo $x \in V$ e $||x||=0$ se e somente se $x=0$;
- Inequação triangular: $||x+y|| \leq ||x||+||y||$, para qualquer $x, y \in V$;



- Homogeneidade: $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$, para qualquer $\lambda \in R$ e $x \in V$.

3.1 Normas

Norma de Manhattan (ℓ1): Soma os valores absolutos das componentes do vetor. Também conhecida por métrica do táxi, é uma métrica de norma L_1 da diferença e de característica retilínea, descrita pela soma do valor absoluto de todas as diferenças. A mesma pode ser descrita por:

$$\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,,$$

3.1 Normas

Norma Euclidiana (ℓ2): Mede a distância direta, sendo a mais utilizada por padrão no livro. A distância euclidiana é uma métrica de norma L_2 da diferença, que descreve puramente a distância em linha reta entre dois pontos no espaço euclidiano. É a métrica natural e intuitiva para o espaço físico e pode ser descrita por:

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$$

3.2 Produtos Internos

Definição: Um produto interno em um espaço vetorial V é uma função $\langle \cdot , \cdot \rangle$:V×V→R, que para todos u, v, w ∈ V e todo escalar α satisfaz:

- Linearidade: ⟨u+v,w⟩ = ⟨u,w⟩ + ⟨v,w⟩
- Homogeneidade: $\langle \alpha u , v \rangle = \alpha \langle u , v \rangle$
- Simetria: ⟨u,v⟩ = ⟨v,u⟩
- Positividade: ⟨v,v⟩ ≥ 0 e $\langle v , v \rangle = 0$ se e somente se $v = 0$ v=0

3.2 Produtos Internos

Produtos Internos Gerais: Seja V um espaço vetorial e $\Omega : V \times V \to R$ um mapeamento bilinear que pega dois vetores e os mapeia em um número real. Então um mapeamento bilinear simétrico e definido positivo $\Omega : V \times V \to R$ é chamado de produto interno em V.

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,.$$

3.3 Comprimentos e Distância

Definição: O comprimento de um vetor e a distância entre dois vetores podem ser definidos em termos de normas e produtos internos. Ou seja, o comprimento ou a norma de *x* é dado por:

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

O conceito de distância é crucial para muitos métodos em aprendizado de máquina, incluindo agrupamento, classificação e redução de dimensionalidade, onde a medida de similaridade entre os dados é essencial.

3.4 Ângulos e Ortogonalidade

Ângulo: Além de permitir a definição dos comprimentos dos vetores, bem como da distância entre dois vetores, os produtos internos também capturam a geometria de um espaço vetorial ao definir o ângulo ω entre dois vetores. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que:

$$-1 \leqslant \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|} \leqslant 1 \, .$$

Portanto, existe um único ângulo ω tal que:

$$\cos \omega = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|} \, .$$

3.4 Ângulos e Ortogonalidade

Ortogonalidade: Dois vetores x e y são ortogonais se e somente se ⟨x,y⟩ = 0, e escrevemos x ⊥ y. Se adicionalmente // x // = 1 = // y // , ou seja, os vetores são vetores unitários, então x e y são ortonormais.

Exemplo:

Considere os elementos $u = (2, 2)$ e $v = (2, -2)$ do R^2 com produto interno Euclidiano. Temos que:

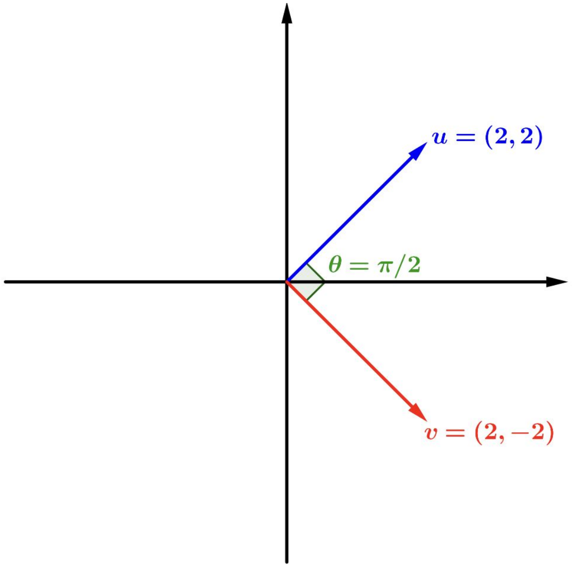
$$\langle u, v \rangle = (2)(2) + (2)(-2) = 4 - 4 = 0$$

3.4 Ângulos e Ortogonalidade

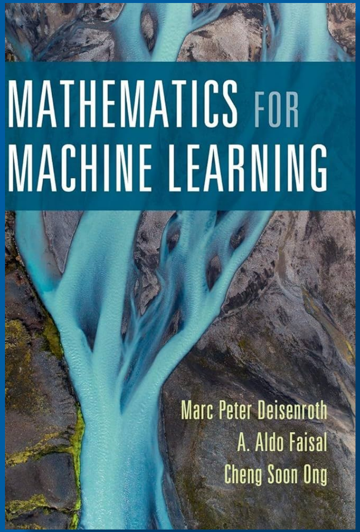
Considere os elementos *u = (2 2)* e *v = (2, -2)* do *R²* com produto interno Euclidiano. Temos que:

$$\langle u, v \rangle = (2)(2) + (2)(-2) = 4 - 4 = 0$$

Portanto, os elementos *u* e *v* são ortogonais em *R²* com relação ao produto interno Euclidiano.



3.5 Base Ortonormal



3.5 Base Ortonormal

Definição: Considere um espaço vetorial V que possui n dimensões e uma base específica $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ de V. Se

$$\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle = 0 \quad \text{for } i \neq j$$
$$\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i \rangle = 1$$

Para todo i, j = 1,..., n então a base é chamada de base ortonormal.

Exemplo: Mostre que os vetores são bases ortonormais:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Provando o produto interno:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

E as normas dos vetores são:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Portanto os vetores formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^2$.

Podemos utilizar a eliminação Gaussiana para encontrar uma base para um espaço vetorial gerado por um conjunto de vetores.

Suponha um conjunto de vetores bases não ortogonais e não normalizados $\{\tilde{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{b}}_n\}$ Realiza-se a concatenação em uma matriz $\tilde{\boldsymbol{B}} = [\tilde{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{b}}_n]$e aplica-se a eliminação Gaussiana à matriz aumentada $[\tilde{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{B}}^\top | \tilde{\boldsymbol{B}}]$ para obter uma base ortonormal. Esta forma construtiva de construir iterativamente uma base ortonormal $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ é chamada de **Gram-Schmidt**.

Exemplo: Encontre uma base ortonormal a partir da base:

$$\beta = \{(2,0,0), (0,2,2), (0,2,-2)\}$$

Normalizando os vetores:

$$v_n = \frac{v}{||v||}$$

$$\beta = \{(2,0,0), (0,2,2), (0,2,-2)\}$$

$$\beta = \{(2,0,0), (0,2,2), (0,2,-2)\}$$

u v w

$$||w|| = \sqrt{0\cdot 0 + 2\cdot 2 + 2\cdot(-2)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$||u|| = \sqrt{2\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$u_n = (\tfrac{2}{2}, \tfrac{0}{2}, \tfrac{0}{2}) = (1, 0, 0)$$

$$w_n = (\frac{0}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$$

$$||v|| = \sqrt{0\cdot 0 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$v_n = (\frac{0}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\alpha = \{(1,0,0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})\}$$

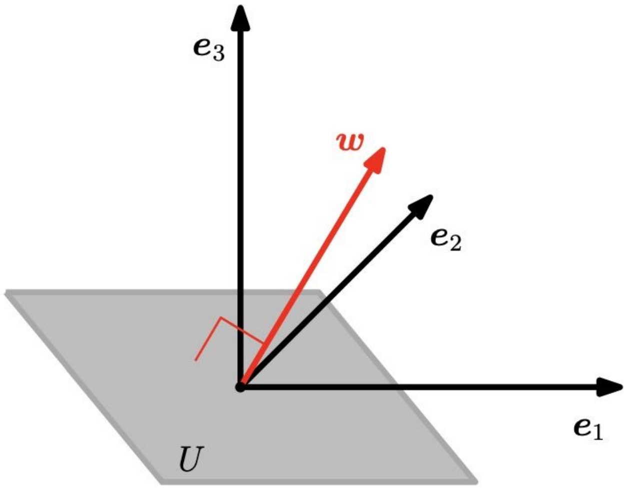
3.6 Complemento Ortogonal

Considere um espaço vetorial D-dimensional $\boldsymbol{V}$ e um subespaço M-dimensional $U \subset V$. Então seu complemento ortogonal $U^{\perp}$ é um subespaço (DM)-dimensional de $\boldsymbol{V}$ e contém todos os vetores em $\boldsymbol{V}$ que são ortogonais a todos os vetores em $\boldsymbol{U}$. Além disso , $\boldsymbol{U} \cap U^{\perp} = \{0\}$ de modo que qualquer vetor $x \in V$ pode ser decomposto exclusivamente em:

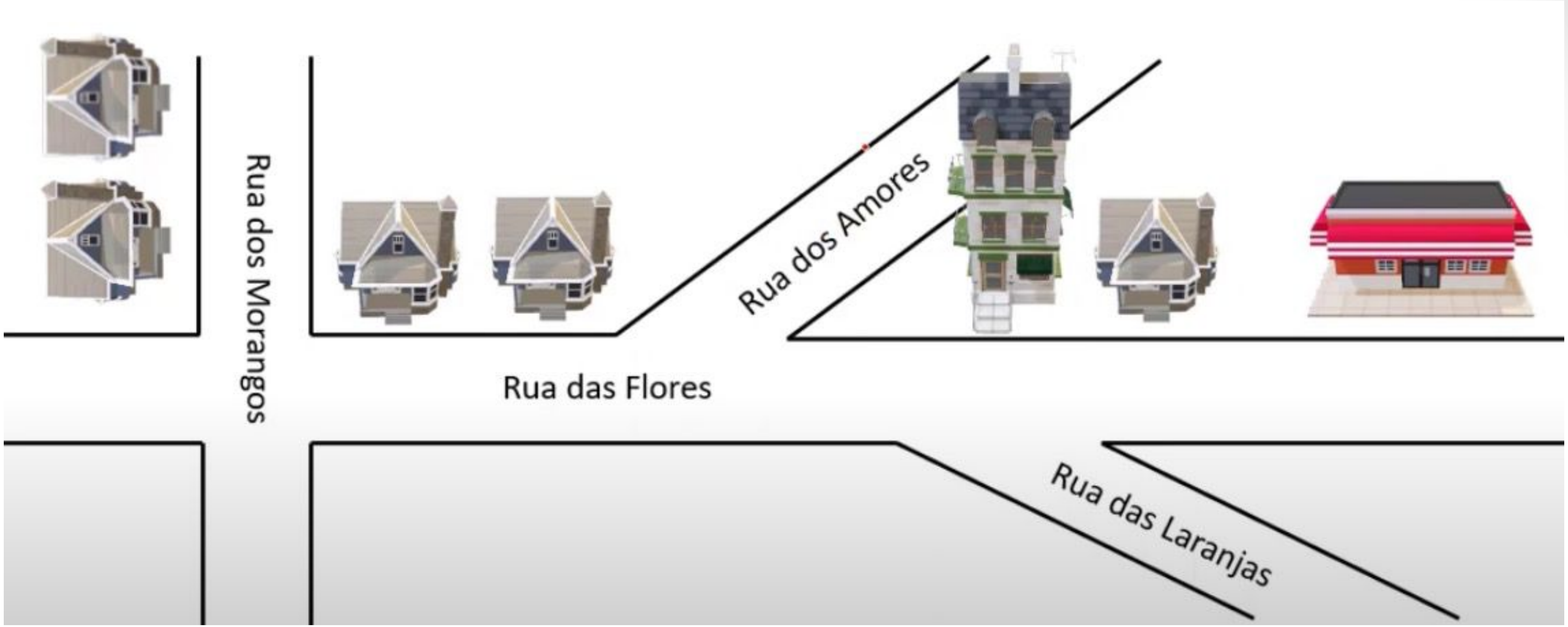
$$\boldsymbol{x} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \boldsymbol{b}_m + \sum_{j=1}^{D-M} \psi_j \boldsymbol{b}_j^{\perp}, \quad \lambda_m, \ \psi_j \in \mathbb{R},$$

onde $(b_1, ..., b_M)$ é uma base de U e $(b_1^{\perp}, ..., b_M^{\perp})$ é uma base de $U^{\perp}$.
Portanto, o complemento ortogonal também pode ser usado para descrever um plano U (subespaço bidimensional) em um espaço vetorial tridimensional.
Mais especificamente, o vetor w com $||w|| = 1$, que é ortogonal ao plano U, é o vetor base de $U^{\perp}$.

Todos os vetores que são ortogonais a $\boldsymbol{w}$ devem (por construção) estar no plano $\boldsymbol{U}$. O vetor $\boldsymbol{w}$ é chamado de vetor normal de $\boldsymbol{U}$. Geralmente, complementos ortogonais podem ser usados para descrever hiperplanos em vetores n-dimensionais e espaços afins.



Mapa da cidade



Exemplo: Como encontrar o complemento ortogonal?

$$V = span\{(1,2,3),(2,3,4)\}$$

$(x,y,z) \in V^{\perp}$:

$\langle (x,y,z),(1,2,3)\rangle = 0$

$\langle (x,y,z),(2,3,4)\rangle = 0$

$\longrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0\cdot(-2) \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$

$y=-2z$ substituindo na primeira equação $\longrightarrow$ $x+2(-2z)+3z=0$ $\longrightarrow$ $(x,y,z) \Rightarrow (z,-2z,z) \Rightarrow z\cdot(1,-2,1)$

$x=z$

$\downarrow$

$\boxed{V^{\perp} = span\{(1,-2,1)\}}$

3.7 Produto Interno de Funções

Dado um vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ como uma função com n valores de função. O conceito de produto interno pode ser generalizado para vetores com um número infinito de entradas (contavelmente infinito) e também funções de valor contínuo (incontavelmente infinito). Então a soma dos componentes individuais dos vetores se transforma em uma integral.

Um produto interno de duas funções $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser definido como uma integral definida:

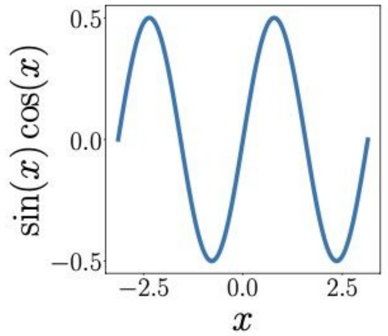
$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x)dx$$

Para os limites superiores e inferiores $a, b < \infty$ respectivamente.

- Podemos definir normas e ortogonalidade;

- Os produtos internos de funções podem divergir (ter valor infinito);

Exemplo: Dadas as funções *u=sin(x)* e *v=cos(x)*:



$$\langle u, v\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} sin(x)cos(x)\,dx$$

Considerando:

$c = sin(x)$ e
$dc = cos(x)dx$

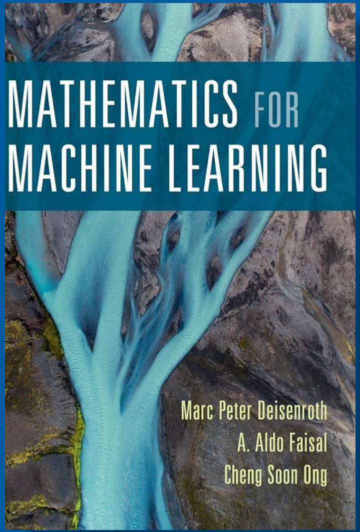
reescrevendo $\langle u, v\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} C dc = [\frac{C^2}{2}]_{-\pi}^{\pi}$ *resultando…*

$$\boxed{\langle u, v\rangle = [\frac{sin(x)^2}{2}]_{-\pi}^{\pi} = 0}$$

A coleção de funções {1, cos(x), cos(2x), cos(3x), ….} abrange um grande subespaço de funções que são pares periódicos em $[-\pi, \pi)$ e projetar funções neste subespaço é a ideia fundamental por trás da série de Fourier.

Nos próximos capítulos vamos abordar um tipo de produto interno não convencional, o produto interno de variáveis aleatórias.

3.8 Projeções Ortogonais



3.8 Projeções Ortogonais

- **As projeções são úteis no contexto de aprendizado de máquina.**
    - Dados de alta dimensão que costumam ser difíceis de analisar ou visualizar.
    - Os vetores que representam os dados podem ser projetados em um subespaço de características de dimensão inferior.
    - Neste contexto, as projeções ortogonais retêm o máximo de informação possível e minimizam a diferença/erro entre os dados originais e a projeção correspondente.

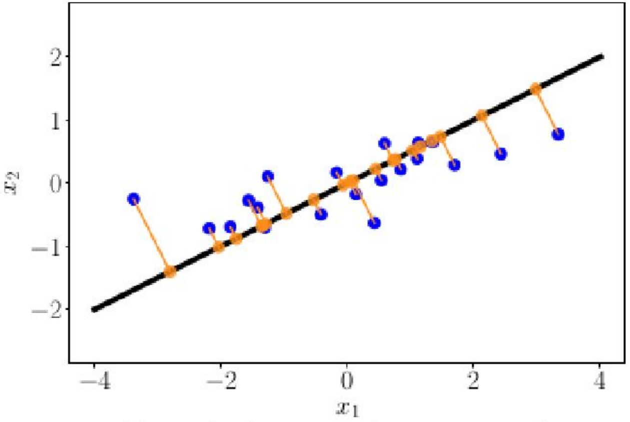
Definição

Seja V um espaço vetorial onde $U \subseteq V$ é um subespaço de V.
Um mapeamento linear $\pi : V \to U$ é chamado de projeção se $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$.

- **A definição trata da noção de projeção em espaços vetoriais.**
  - O mapeamento deve satisfazer as propriedades fundamentais de adição vetorial e multiplicação por escalar.
  - O mapeamento linear é chamado de projeção se $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$.
    - O resultado da primeira projeção já está contido no subespaço e não deve ser alterado pela segunda projeção.
  - A definição pode ser expressa por matrizes de projeção $\boldsymbol{P}_\pi$.

Projeções em Subespaços Unidimensionais

- Considere uma reta (subespaço unidimensional) que passa pela origem com o vetor base $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.
  - A reta é um subespaço unidimensional $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gerado por $\boldsymbol{b}$.
  - Ao projetar $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ em U, busca-se o vetor $\pi_U(\boldsymbol{x}) \in U$ que está mais próximo de $\boldsymbol{x}$.

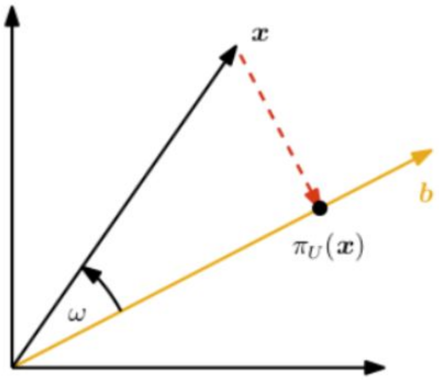


Exemplo de uma projeção ortogonal

Propriedades de $\pi_U(x)$

- A projeção $\pi_U(x)$ é a mais próxima de x implica que a distância $\|x - \pi_U(x)\|$ é mínima.

- O segmento $\pi_U(x) - x$ é ortogonal ao vetor base de U.



Projeção de $x \in \mathbb{R}^2$ em um subespaço U com o vetor base b

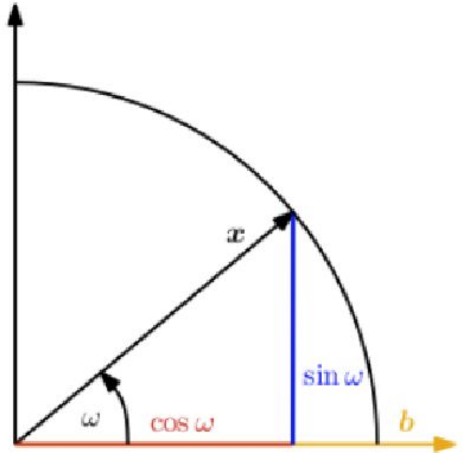
- A condição de ortogonalidade produz $\langle \pi_U(x) - x, b \rangle = 0$.

- A projeção de $\pi_U(x)$ sobre U deve ser um elemento de U e, portanto, um múltiplo do vetor base b que gera U. Portanto, $\pi_U(x) = \lambda b$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriedades de $\pi_U(x)$

- No contexto do círculo unitário, o vetor x estende-se até a borda do círculo formando um ângulo ω com $\|x\| = 1$.

- Neste caso, a magnitude da reta da projeção de $\pi_U(x) - x$ é igual a $\sin(\omega)$ e a reta perpendicular a b que caracteriza a magnitude de $\pi_U(x)$ é igual a $\cos(\omega)$.



Projeção de um vetor bidimensional x com $\|x\| = 1$ em um subespaço unidimensional gerado por b

Determinando λ, $\pi_U(x)$ e P_π (Subespaços Unidimensionais)

- **Segue um procedimento em três etapas:**
  - **1** Determine o valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle x - \pi_U(x), b\rangle = 0 \overset{\pi_U(x)=\lambda b}{\iff} \langle x - \lambda b, b\rangle = 0.$$

$$\langle x, b\rangle - \lambda\langle b, b\rangle = 0 \iff \lambda = \frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle} = \boxed{\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^2}}.$$

Equação como produto interno

$$\lambda = \frac{b^\top x}{b^\top b} = \boxed{\frac{b^\top x}{\|b\|^2}}.$$

Equação como produto matricial

Determinando λ, $\pi_U(x)$ e P_π (Subespaços Unidimensionais)

- **Segue um procedimento em três etapas:**
  - **2** Calcule $\pi_U(x)$.

$$\lambda = \frac{b^\top x}{b^\top b} = \boxed{\frac{b^\top x}{\|b\|^2}}.$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_U(x) = \lambda b = \frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^2} b = \boxed{\frac{b^\top x}{\|b\|^2}} b.$$

Determinando λ, $\pi_U(x)$ e P_π (Subespaços Unidimensionais)

- **Segue um procedimento em três etapas:**
  - **3** Encontre P_π, tal que $\pi_U(x) = \boxed{P_\pi} x$.

$$\Downarrow$$

$$\pi_U(x) = \lambda b = b\lambda = b\frac{b^\top x}{\|b\|^2} = \boxed{\frac{bb^\top}{\|b\|^2}} x.$$

$$\Downarrow$$

$$P_\pi = \boxed{\frac{bb^\top}{\|b\|^2}}$$

Exemplo 1

- Encontre a matriz de projeção P_π na reta que passa pela origem gerado por $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^\top$ onde bé uma direção e uma base do subespaço unidimensional.

Considere a equação $P_\pi = \dfrac{bb^\top}{\|b\|^2}$.

- Calculando $bb^\top$.

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 & 1\times 2 & 1\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 2 & 2\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 2 & 2\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- Calculando $\|b\|^2$.

$$\|b\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$\|b\|^2 = 3^2 = 9$$

- Encontrando P_π.

$$= \frac{bb^\top}{\|b\|^2} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

- Verifique se $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ está no subespaço gerado por $\boldsymbol{b}$.

  Neste caso, deve-se calcular $\boldsymbol{P}_\pi \boldsymbol{x}$ sobre $\boldsymbol{b}$ e verificar se o resultado é proporcional a $\boldsymbol{b}$.

  - Encontrando $\pi_U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}_\pi \boldsymbol{x}$.

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 1 + 2\times 1 \\ 2\times 1 + 4\times 1 + 4\times 1 \\ 2\times 1 + 4\times 1 + 4\times 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(cont.)

Exemplo 2

- Verifique se $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\top}$ está no subespaço gerado por $\boldsymbol{b}$.

  - Para verificar se $\boldsymbol{P}_{\pi}\boldsymbol{x}$ é um múltiplo escalar de $\boldsymbol{b}$, a projeção deve ser igual a $\lambda \times \boldsymbol{b}$, onde λ é algum escalar. Portanto, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{5}{9} = \lambda \\ \frac{10}{9} = \lambda \times 2 \implies \frac{5}{9} = \lambda \\ \frac{10}{9} = \lambda \times 2 \implies \frac{5}{9} = \lambda \end{cases}$$

  - Neste caso, $\boldsymbol{P}_{\pi}\boldsymbol{x}$ pode se expresso como

$$\boldsymbol{P}_{\pi} = \lambda \times \boldsymbol{b} = \frac{5}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

  - Portanto, conclui-se que $\boldsymbol{x}$ está no subespaço gerado por $\boldsymbol{b}$.

Exemplo 3

- Verifique se $x - \pi_U(x)$ é ortogonal a base b.

  Pela condição de ortogonalidade $\langle x - \pi_U(x), b \rangle = 0$.

  - Como $\pi_U(x) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$, calculando $x - \pi_U(x)$, temos que

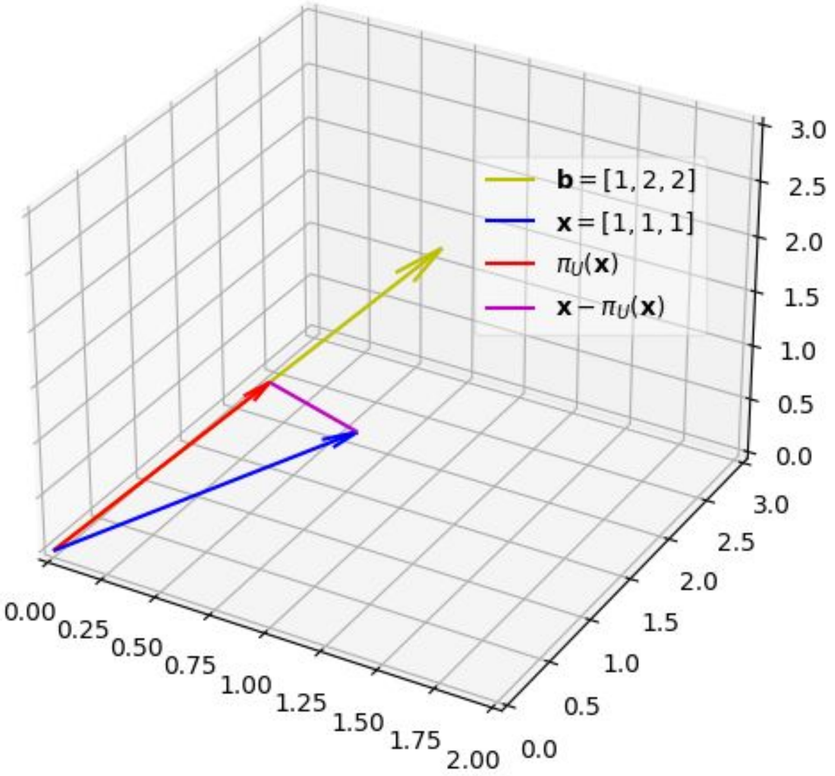
$$x - \pi_U(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{10}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{9} \\ 1 - \frac{10}{9} \\ 1 - \frac{10}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{-1}{9} \\ \frac{-1}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

  - Verificando se $\langle x - \pi_U(x), b \rangle = 0$.

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}(4 - 2 - 2) = 0$$

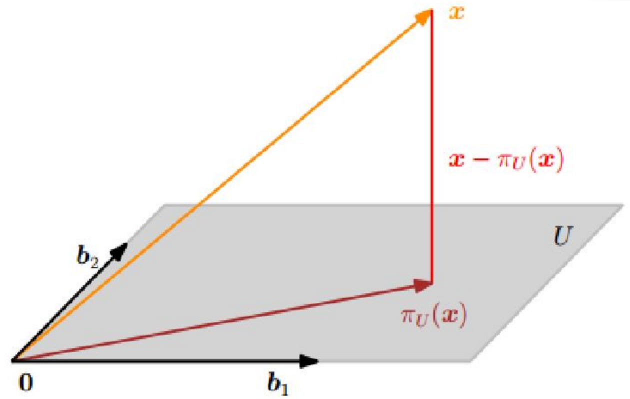
  - Como $\langle x - \pi_U(x), b \rangle = 0$, conclui-se que $x - \pi_U(x)$ é ortogonal a base b.

Representação Geométrica



Projeções em Subespaços Gerais

- A projeção $\pi_U(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$ pode ser expressa como uma combinação linear de b_1 e b_2 , com $\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})$ sendo ortogonal a b_1 e b_2 .
  - Seja $(b_1, \ldots, b_m)$ uma base de U. Neste caso, qualquer projeção $\pi_U(\boldsymbol{x})$ em U é necessariamente um elemento de U.
  - As projeções podem ser representadas por combinações lineares dos vetores da base de U de modo que $\pi_U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$.



Projeção ortogonal de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ em um subespaço bidimensional

Determinando λ, $\pi_U(x)$ e P_π (Subespaços Gerais)

- **Segue um procedimento em três etapas:**
  - **1** Determine as coordenadas $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, de modo que

$$\pi_U(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i, \implies \pi_U(x) = B\lambda$$

$$B = [b_1, \ldots, b_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}, \lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \in \mathbb{R}^m$$

  - Portanto, temos m vetores, onde o produto escalar como o produto interno de cada vetor da base com $\pi_U(x) - x$ deve ser zero.

$$\begin{bmatrix} b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} [x - B\lambda = 0] \iff B^\top(x - B\lambda) = 0 \iff \boxed{B^\top B\lambda = B^\top x.}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda = (B^\top B)^{-1} B^\top x.}$$

Determinando λ, $\pi_U(x)$ e P_π (Subespaços Gerais)

- **Segue um procedimento em três etapas:**
  - **2** Calcule $\pi_U(x)$ considerando $\pi_U(x) = B\lambda$ e $\lambda = (B^\top B)^{-1}B^\top x$.

$$\pi_U(x) = B\boxed{\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = (B^\top B)^{-1}B^\top x$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_U(x) = B\boxed{(B^\top B)^{-1}B^\top x}.$$

Determinando λ, $\pi_U(x)$ e P_π (Subespaços Gerais)

- **Segue um procedimento em três etapas:**
  - **3** Encontre P_π, tal que $\pi_U(x) = \boxed{P_\pi} x.$

$$\Downarrow$$

$$\pi_U(x) = \boxed{B(B^\top B)^{-1}B^\top} x.$$

$$\Downarrow$$

$$P_\pi = \boxed{B(B^\top B)^{-1}B^\top}$$

Exemplo 4

- Para $U = span[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$, encontre $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_U(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{P}_\pi$.

Inicialmente, será verificado que o conjunto gerador de U forma uma base, ou seja, os vetores devem ser linearmente independentes.

- Neste caso, é necessário demonstrar que a única combinação linear dos dois vetores resulta no vetor nulo.

(cont.)

Exemplo 4

- Para $U = span[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$, encontre $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_U(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{P}_{\pi}$.

    - Supondo que existam escalares a_1 e a_2, tem-se o seguinte sistema.

$$a_1 \times \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}a_1\\a_1+a_2\\a_1+2a_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a_1 = 0\\a_1+a_2 = 0\\a_1+2a_2 = 0\end{cases}$$

    - Da primeira equação, tem-se que $a_1 = 0$. Substituindo na segunda e terceira equação, tem-se que $a_2 = 0$.

    - Como a única solução para o sistema resulta no vetor nulo, e portanto, pode-se concluir que esses vetores são linearmente independentes.

$\Rightarrow$ (cont.)

Exemplo 4

- Para $U = span[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$, encontre $\boldsymbol{\lambda}, \pi_U(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{P}_\pi$.

Encontrando $\boldsymbol{\lambda}$ resolvendo a equação $\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{x}$.

- Calculando $B^\top B$:

$$B^\top B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times1+1\times1+1\times1 & 1\times0+1\times1+1\times2\\0\times1+1\times1+2\times1 & 0\times0+1\times1+2\times2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}$$

- Calculando:

$$B^\top \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times6+1\times0+1\times0\\0\times6+1\times0+2\times0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$$

(cont.)

Exemplo 4

- Para $U = span[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$, encontre $\boldsymbol{\lambda}, \pi_U(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{P}_\pi$.

Encontrando $\boldsymbol{\lambda}$ resolvendo a equação $\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{x}$.

- Resolvendo a $B^\top B\boldsymbol{\lambda} = B^\top \boldsymbol{x}$ para encontrar $\boldsymbol{\lambda}$ pelo sistema de equações.

$$\begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\times\lambda_1 + 3\times\lambda_2\\3\times\lambda_1+5\times\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 6\\3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0\end{cases}$$

- Substituindo $\lambda_1 = 2 - \lambda_2$ da equação (1) em (2):

$$6 - 3\lambda_2 + 5\lambda_2 = 0 \implies 2\lambda_2 = -6 \implies \lambda_2 = -3$$

- Substituindo $\lambda_2 = -3$ na equação (1).

$$3\lambda_1 - 9 = 6 \implies 3\lambda_1 = 15 \implies \lambda_1 = 5$$

(cont.)

Exemplo 4

- Para $U = span[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$, encontre $\boldsymbol{\lambda}, \pi_U(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{P}_\pi$.

  - Encontrando a projeção $\pi_U(\boldsymbol{x})$ em U.

$$\pi_U(\boldsymbol{x}) = B\lambda = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times5-0\times(-3)\\1\times5+1\times(-3)\\1\times5+2\times(-3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix}$$

  - Encontrando $\|\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x})\|$.

$$\boldsymbol{x} - \pi_U(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$\| \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}^\top \| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$$

(cont.)

Exemplo 4

- Para $U = span[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$, encontre $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}_U(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{P}_\pi$.

Encontrando $\boldsymbol{P}_\pi \boldsymbol{x} = B(B^\top B)^{-1} B^\top$.

- Calculando $(B^\top B)^{-1}$.

  Considerando os cálculos anteriores, tem-se que $B^\top B = \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}$.

$$(B^\top B)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & -3\\-3 & 3\end{bmatrix}$$

(cont.)

Exemplo 4

- Para $U = span[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$, encontre $\boldsymbol{\lambda}, \pi_U(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{P}_\pi$.

  Encontrando $\boldsymbol{P}_\pi \boldsymbol{x} = B(B^\top B)^{-1}B^\top$.

  - Calculando $B(B^\top B)^{-1}$.

$$B(B^\top B)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\-3 & 3\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\times5+0\times(-3) & 1\times(-3)+0\times3\\1\times5+1\times(-3) & 1\times(-3)+1\times3\\1\times5+2\times(-3) & 1\times(-3)+2\times3\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & -3\\2 & 0\\-1 & 3\end{bmatrix}$$

(cont.)

Exemplo 4

- Para $U = span[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$, encontre $\boldsymbol{\lambda}$, $\pi_U(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{P}_\pi$.

Encontrando $\boldsymbol{P}_\pi \boldsymbol{x} = B(B^\top B)^{-1}B^\top$.

- Calculando $\boldsymbol{P}_\pi \boldsymbol{x} = B(B^\top B)^{-1}B^\top$.

$$B(B^\top B)^{-1}B^\top = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5\times1+(-3)\times0 & 5\times1+(-3)\times1 & 5\times1+(-3)\times2\\ 2\times1+0\times0 & 2\times1+0\times1 & 2\times1+0\times2\\ -1\times1+3\times0 & -1\times1+3\times1 & -1\times1+3\times2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}.$$

Exemplo 5

- Verifique se o vetor $x - \pi_U(x)$ do exemplo anterior é ortogonal ao vetor base de U.

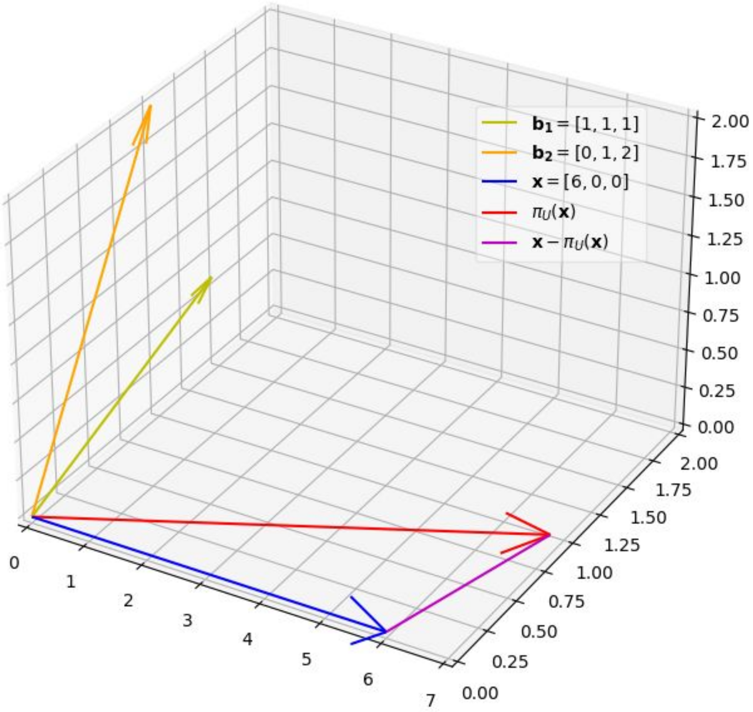
Pela condição de ortogonalidade, o resultado do produto interno de $x - \pi_U(x)$ com cada vetor da base de U deve ser zero.
Considerando os resultados anteriores, tem-se que $x - \pi_U(x) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

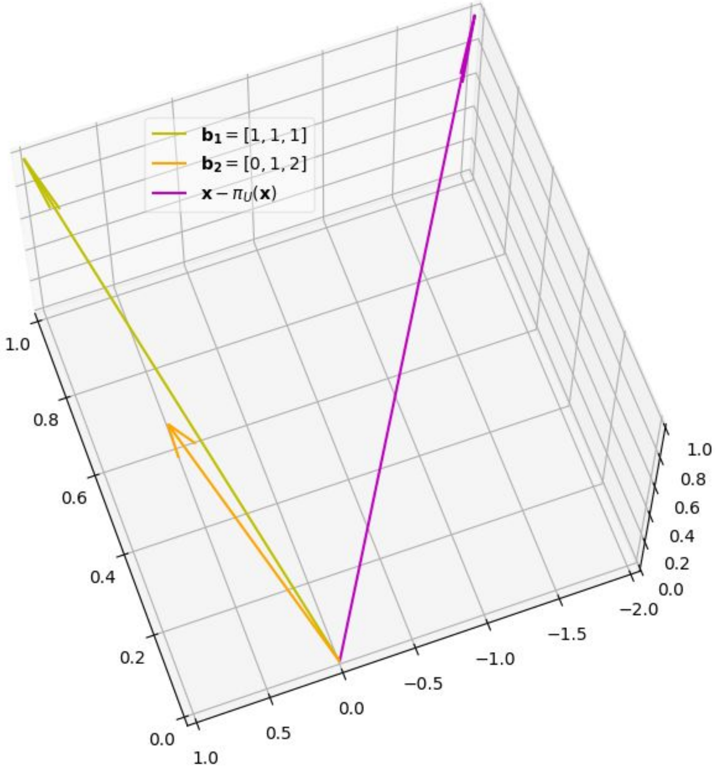
- Calculando o produto interno dos vetores da base de U.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0$$

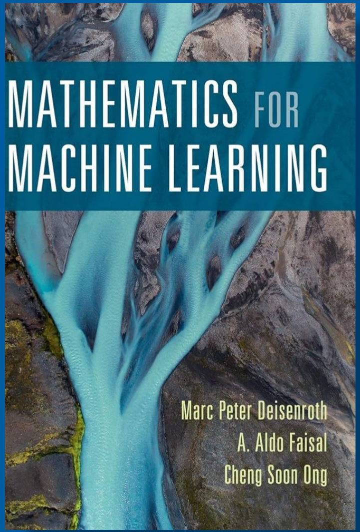
- Observa-se que ambos os produtos internos são zero. Portanto, $x - \pi_U(x)$ é ortogonal a base de U.

Representação Geométrica





3.8.3 Ortogonalização por Gram-Schmidt



3.8.3 Ortogonalização por Gram-Schmidt

- Processo que permite transformar iterativamente qualquer base $(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ de um Espaço Vetorial n-dimensional V em uma base ortogonal/ortonormal $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ de V.

- **Projeções** são essenciais no Método de Gram-Schmidt.

- Bases ortonormais de um espaço vetorial possuem propriedades importantes e são úteis em diversos problemas:
  - Análise de Componentes Principais (*Principal Component Analysis* - PCA) - Capítulo 10.
  - Máquinas de Vetores de Suporte (*Support Vector Machines* - SVM) - Capítulo 12.

3.8.3 Ortogonalização por Gram-Schmidt

- Considerando a base $(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ de um Espaço Vetorial n-dimensional V podemos transformá-la interativamente em uma base ortogonal/ ortonormal $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ de V, de forma que:

$$\boldsymbol{u}_1 := \boldsymbol{b}_1$$

$$\boldsymbol{u}_k := \boldsymbol{b}_k - \pi_{\mathrm{span}[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{k-1}]}(\boldsymbol{b}_k)\,, \quad k = 2, \dots, n\,.$$

3.8.3 Ortogonalização por Gram-Schmidt

$$\boxed{\boldsymbol{u}_1 := \boldsymbol{b}_1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{u}_k} := \boxed{\boldsymbol{b}_k - \boxed{\pi_{\mathrm{span}[\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_{k-1}]}(\boldsymbol{b}_k)}}\,, \quad \boxed{k = 2, \ldots, n\,.}$$

1. O k-ésimo vetor de base $\boldsymbol{b}_k$ é projetado no subespaço gerado pelos primeiros $k - 1$ vetores ortogonais construídos $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$;

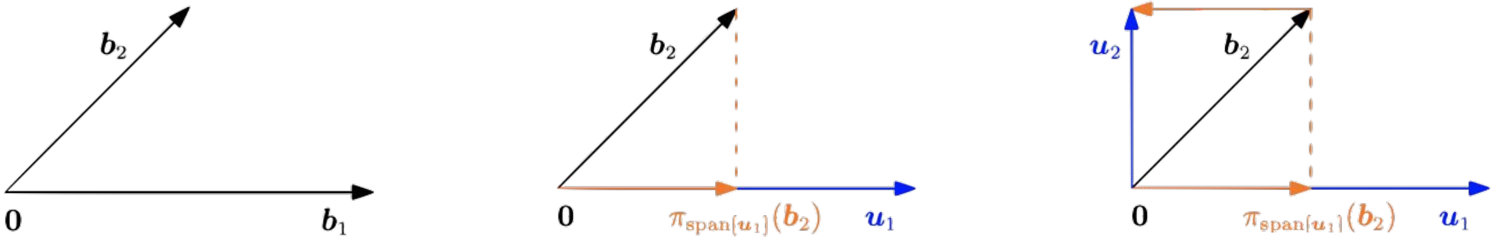
2. Em seguida, essa projeção é subtraída de $\mathbf{b}_k$ e produz um vetor $\mathbf{u}_k$ que é ortogonal ao subespaço $(k - 1)$-dimensional gerado por $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$;

3. O procedimento é repetido para todos os n vetores da base $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ o que produz uma base ortogonal $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ de V.

4. Por fim, basta normalizar $\mathbf{u}_k$, onde $\|\mathbf{u}_k\| = 1$ para $k = 1, \ldots, n$.

3.8.3 Ortogonalização por Gram-Schmidt

$$\boldsymbol{u}_1 := \boldsymbol{b}_1$$
$$\boldsymbol{u}_k := \boldsymbol{b}_k - \pi_{\mathrm{span}[\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_{k-1}]}(\boldsymbol{b}_k)\,, \quad k = 2,\ldots,n\,.$$



a) Vetores da base $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ não ortogonais

b) Primeiro novo vetor da base $\mathbf{u}_1 = \mathbf{b}_1$ e a projeção de $\mathbf{b}_2$ no subespaço gerado por $\mathbf{u}_1$.

c) Vetores de base ortogonais $\mathbf{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \pi_{\mathrm{span}[\boldsymbol{u}_1]}(\boldsymbol{b}_2)$.

Vemos imediatamente que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são ortogonais, ou seja, $\boldsymbol{u}_1^\top \boldsymbol{u}_2 = 0$.

Exemplo: (Ortogonalização por Gram-Schmidt)

Considere uma base $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, em que:

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\pi_U(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\lambda = \boldsymbol{b}\frac{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{b}\|^2} = \boxed{\frac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^\top}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{u}_1 := \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

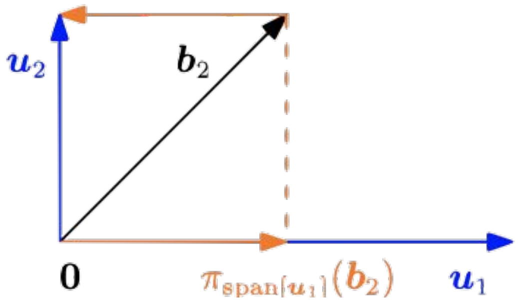
$$\boldsymbol{u}_2 := \boldsymbol{b}_2 - \pi_{\mathrm{span}[\boldsymbol{u}_1]}(\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{b}_2 - \boxed{\frac{\boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^\top}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}} \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Exemplo: (Ortogonalização por Gram-Schmidt)

Obtivemos:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

Vemos que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são ortogonais, ou seja, $\boldsymbol{u}_1^\top \boldsymbol{u}_2 = 0$.



3.8.4 Projeção em Subespaços Afins

- É possível projetar um vetor tanto em um subespaço $\boldsymbol{U}$ de **dimensão inferior**, quanto em **Subespaços Afins**.

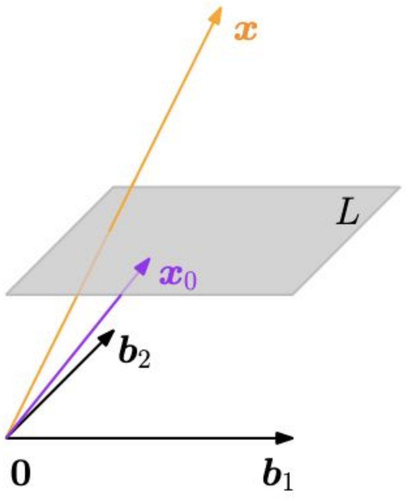
- **Subespaço Afim** (*2.8.1 Affine Subspaces*)
  - **Definição:** Seja V um espaço vetorial, $x_0 \in V$ e $U \subseteq V$ um subespaço. Então o subconjunto L é chamado de subespaço afim de V, tal que:

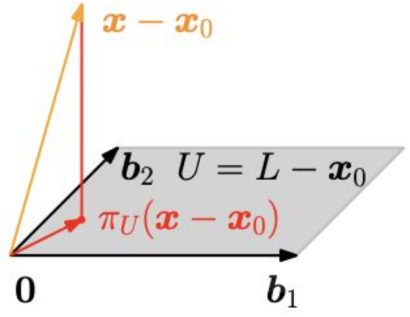
$$\begin{aligned} L &= \boldsymbol{x}_0 + U := \{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u} : \boldsymbol{u} \in U\} \\ &= \{\boldsymbol{v} \in V | \exists \boldsymbol{u} \in U : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}\} \subseteq V \end{aligned}$$

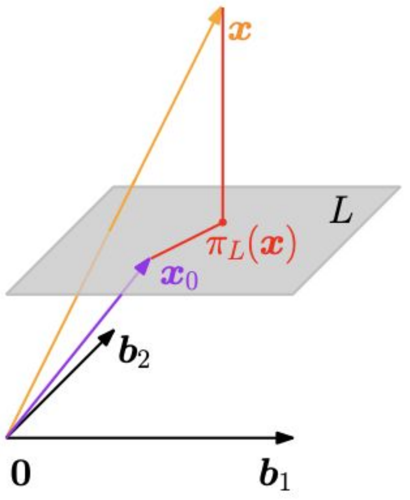
  - Importante para o conceito de separação de hiperplanos (SVM - Capítulo 12).

3.8.4 Projeção em Subespaços Afins

$$\boxed{\pi_L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_0 + \pi_U(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}$$







a) Considere um subespaço afim $L = x_0 + U$, onde b_1, b_2 são vetores base de U.

b) O problema foi reduzido à projeção π_U em um subespaço vetorial.

c) Adicione o ponto de suporte de volta para obter a projeção afim π_L.

3.9 Rotações

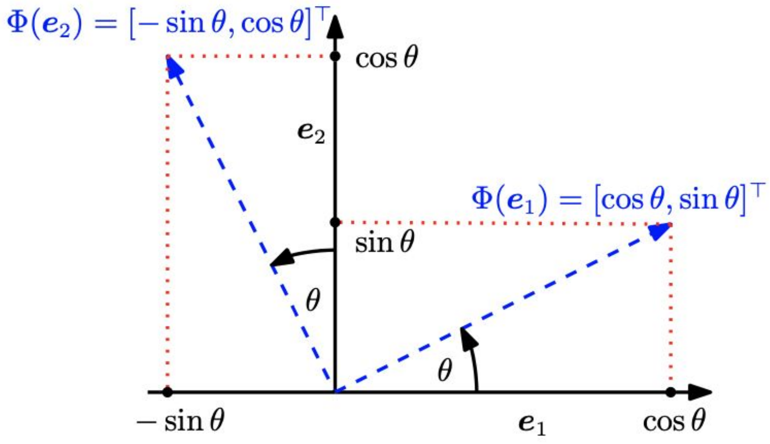
- **Rotação** é uma transformação linear que gira um plano em um ângulo θ em torno da origem.

- **Convenção**: para um ângulo positivo $\theta > 0$, giramos no sentido anti-horário.

- Importante lembrar que em transformações lineares com matrizes de transformação ortogonais, há a preservação do **comprimento** e do **ângulo** (Seção 3.4).

3.9.1 Rotações em $\mathbb{R}^2$

Considere a base $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$, que define o sistema de coordenadas padrão em $\mathbb{R}^2$.



Rotação da base padrão em $\mathbb{R}^2$ por um ângulo θ.

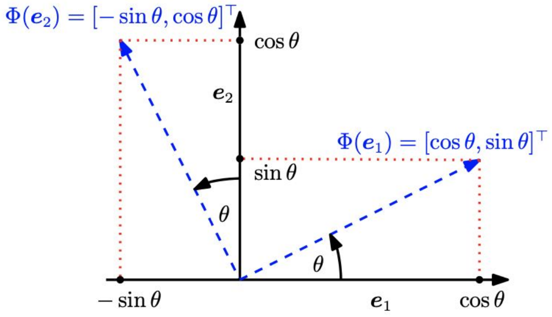
3.9.1 Rotações em $\mathbb{R}^2$

As rotações Φ são transformações lineares, portanto é possível expressá-las por uma matriz de rotação $\mathbf{R}(\theta)$. Assim, considerando que:

$$\Phi(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \Phi(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \Phi(\boldsymbol{e}_1) & \Phi(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Planilha: Transformações Lineares

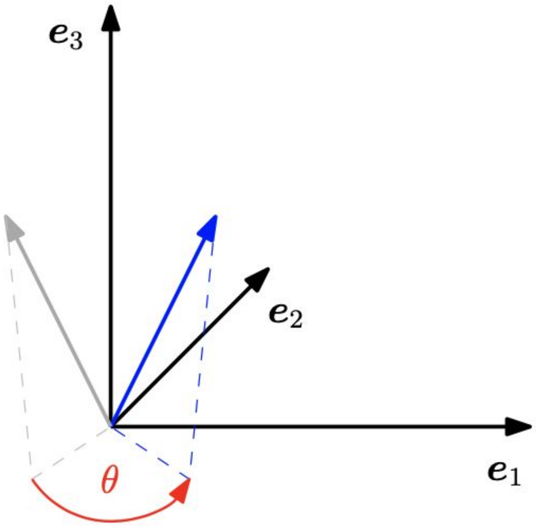
3.9.2 Rotações em $\mathbb{R}^3$

- Em $\mathbb{R}^3$ podemos girar qualquer plano bidimensional em torno de um eixo unidimensional.

- Uma matriz de rotação geral R pode ser obtida, considerando:
  - $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ como base padrão da imagem que serão rotacionadas resultando em $\boldsymbol{Re}_1$, $\boldsymbol{Re}_2$, $\boldsymbol{Re}_3$;
  - garantindo que $\boldsymbol{Re}_1$, $\boldsymbol{Re}_2$, $\boldsymbol{Re}_3$ sejam ortonormais entre si.

- **Convenção**: uma rotação "anti-horária" (planar) em torno de um eixo se refere a uma rotação em torno de um eixo quando olhamos para o eixo "de frente, da extremidade em direção à origem".

3.9.2 Rotações em $\mathbb{R}^3$



Rotação de um vetor (cinza) em $\mathbb{R}^3$ por um ângulo θ em torno do eixo $\boldsymbol{e}_3$. O vetor rotacionado é mostrado em azul.

3.9.2 Rotações em $\mathbb{R}^3$

- Rotação em torno do eixo $\boldsymbol{e}_1$

$$\boldsymbol{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix}\Phi(\boldsymbol{e}_1) & \Phi(\boldsymbol{e}_2) & \Phi(\boldsymbol{e}_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

  - Aqui, a coordenada e1 é fixa e a rotação no sentido anti-horário é realizado no plano $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$.

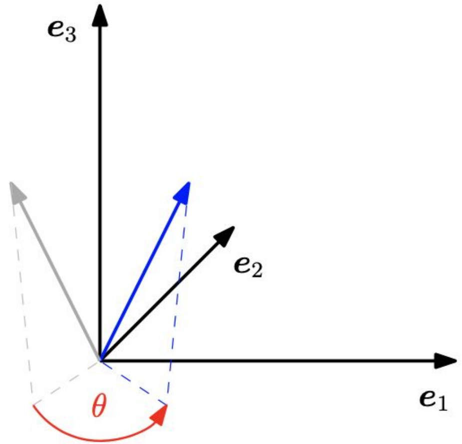
3.9.2 Rotações em $\mathbb{R}^3$

- Rotação em torno do eixo $\boldsymbol{e}_2$

$$\boldsymbol{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Rotação em torno do eixo $\boldsymbol{e}_3$

$$\boldsymbol{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3.9.3 Rotações em n Dimensões

- A rotação em espaços vetoriais euclidianos n-dimensionais pode ser intuitivamente descrita como fixando $n - 2$ dimensões e restringindo a rotação a um plano bidimensional no espaço n-dimensional.

- **Rotação de Givens** - Matemático James Wallace Givens, Jr.

3.9.3 Rotações em n Dimensões

Definição: Seja V um espaço vetorial euclidiano n-dimensional e $\Phi : V \to V$ um automorfismo com matriz de transformação:

$$\boldsymbol{R}_{ij}(\theta) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{i-1} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos\theta & \mathbf{0} & -\sin\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{j-i-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sin\theta & \mathbf{0} & \cos\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{n-j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

para $1 \leqslant i < j \leqslant n$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Então $R_{ij}(\theta)$ é chamada de *Rotação de Givens*. Em suma, $R_{ij}(\theta)$ é a matriz identidade com:

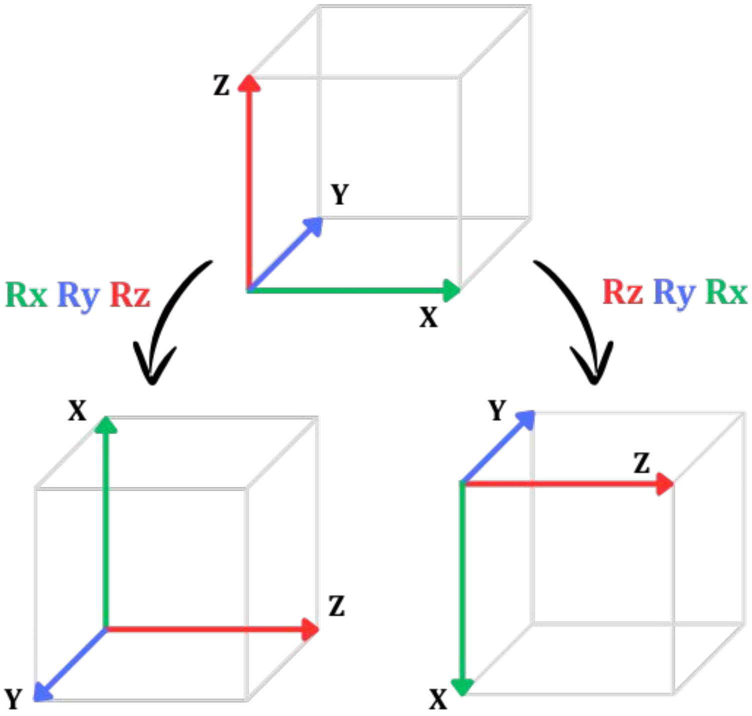
$$r_{ii} = \cos\theta\,, \quad r_{ij} = -\sin\theta\,, \quad r_{ji} = \sin\theta\,, \quad r_{jj} = \cos\theta$$

3.9.4 Propriedades de Rotações

- Considerando-as como matrizes ortogonais:
  - Rotações preservam **distâncias**, ou seja, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{y})\|$.
  - Rotações preservam os **ângulos**, ou seja, o ângulo entre $\mathbf{R_\theta x}$ e $\mathbf{R_\theta y}$ é igual ao ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
  - Rotações em <u>duas</u> dimensões **são comutativas**, de forma que $\boldsymbol{R}(\phi)\boldsymbol{R}(\theta) = \boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{R}(\phi)$ para todo $\phi, \theta \in [0, 2\pi)$.
  - Rotações em <u>três (ou mais)</u> dimensões geralmente **não são comutativas**. Portanto, a ordem em que as rotações são aplicadas é importante, mesmo que girem em torno do mesmo ponto.

3.9.4 Propriedades de Rotações

- Rotações em <u>três (ou mais)</u> dimensões geralmente **não são comutativas**.



Conclusão

Conclusão

- Importantes conceitos de Geometria Analítica:
  - **Produtos Internos** nos permitem determinar **bases** específicas de (sub)espaços vetoriais, onde cada vetor é **ortogonal** a todos os outros (bases ortogonais) usando o **método de Gram-Schmidt**.
  - Bases ortogonais são importantes em **otimização** e algoritmos numéricos para **resolução de sistemas de equações lineares**.
  - No **aprendizado de máquina**, os produtos internos são importantes no contexto de métodos de ***kernel***, que exploram o fato de que muitos algoritmos lineares podem ser expressos puramente por cálculos de produtos internos. (Capítulo 12)

Conclusão

- Importantes conceitos de Geometria Analítica:
    - As **projeções** são frequentemente usadas:
        - em **computação gráfica**, por exemplo, para gerar sombras;
        - em **otimização**, as projeções ortogonais são frequentemente usadas para (iterativamente) minimizar erros residuais;
        - em **aprendizado de máquina**, por exemplo, na regressão linear, onde queremos encontrar uma função (linear) que minimize os erros residuais, ou seja, os comprimentos das projeções ortogonais dos dados na função linear (Capítulo 9). PCA também utiliza projeções para reduzir a dimensionalidade de dados de alta dimensão (Capítulo 10).

Material Disponibilizado

- Página no GitHub:
    - Relatório (pdf)
    - Videoaula (YouTube)
    - Slides (pdf)
    - Planilha - Transformações Lineares (xlsx)
    - Vídeo: Exemplos com Código (YouTube)
    - Códigos (Notebooks Google Colab - Python)
    - Livro-texto (link)

Contatos

André Rodrigues Coimbra
andre_coimbra@discente.ufg.br

João Gabriel Junqueira da Silva
jgabriel@discente.ufg.br

Rayane Araujo Lima
rayane_lima@discente.ufg.br

Renan Rodrigues de Oliveira
renanrodrigues@discente.ufg.br

Obrigado!