
Capítulo

3

Geometria Analítica

André Rodrigues Coimbra, João Gabriel Junqueira da Silva, Rayane Araújo Lima e Renan Rodrigues de Oliveira

Abstract

This report provides a theoretical summary of Chapter 3 - Analytic Geometry of the book Mathematics for Machine Learning, focusing on the essential mathematical foundations for data science. The chapter covers a range of critical topics to understand vector spaces and their applications in machine learning, including norms, inner products, lengths, distances, angles and orthogonality. Each section explores with enough details the mathematical properties, their implications, and their practical applications in computational tasks. This report is part of the requirements of the course "Special Topics in Computing Foundations - Mathematics and Statistics for Data Science" which is offered at Universidade Federal de Goiás' (UFG) Graduate Program in Computer Science, during the academic semester of 2024/1, aiming to equip the students with the mathematical skills needed in the field of data science.

Resumo

Este relatório apresenta um resumo teórico do Capítulo 3 - Geometria Analítica do livro Mathematics for Machine Learning, focando nas bases matemáticas essenciais para a ciência de dados. O capítulo aborda uma série de tópicos fundamentais para o entendimento de espaços vetoriais e suas aplicações em aprendizado de máquina, incluindo normas, produtos internos, comprimentos, distâncias, bem como ângulos e ortogonalidade. Cada seção oferece uma exploração detalhada das propriedades matemáticas, suas implicações e suas aplicações práticas em tarefas computacionais. Este relatório é parte do trabalho da disciplina "Tópicos Especiais em Fundamentos de Computação - Matemática e Estatística para Ciências de Dados" do programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás (UFG), em Ciência da Computação, do Instituto de Informática, no semestre letivo 2024/1, visando equipar os estudantes com habilidades matemáticas necessárias no campo da ciência de dados.

3.1. Normas

Uma norma em um espaço vetorial V é uma função que associa a cada vetor x um número real não negativo, com as seguintes propriedades:

- **Não negatividade:** $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e somente se $\mathbf{x} = 0$;
- **Desigualdade Triangular:** $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$;
- **Homogeneidade:** $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Norma de Manhattan (l_1)

Soma os valores absolutos das componentes do vetor. Também conhecida por métrica do táxi, é uma métrica de norma l_1 da diferença e de característica retilínea, descrita pela soma do valor absoluto de todas as diferenças. A mesma pode ser descrita por:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

Norma Euclidiana (l_2)

Mede a distância direta, sendo a mais utilizada por padrão no livro. A distância euclidiana é uma métrica de norma l_2 da diferença, que descreve puramente a distância em linha reta entre dois pontos no espaço euclidiano. É a métrica natural e intuitiva para o espaço físico e pode ser descrita por:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

3.2. Produtos Internos

Um produto interno em um espaço vetorial V é uma função bilinear e simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades matemáticas, cada uma fundamental para as operações em análise funcional e álgebra linear:

- **Linearidade:** A operação é aditiva em ambos os argumentos, o que significa que $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$. Esta propriedade é crucial para garantir a consistência da estrutura vetorial com a operação de adição.
- **Homogeneidade:** A operação é compatível com a multiplicação escalar, tal que $\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ e $\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, evidenciando a interação entre a estrutura vetorial e o campo dos escalares.

- **Simetria:** O produto interno é comutativo até o sinal, isto é, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, o que simplifica muitas operações matemáticas e é essencial para a definição de ângulos e ortogonalidade.
- **Positividade:** Garante que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, com $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e somente se $\mathbf{v} = 0$. Esta propriedade é fundamental para a definição de normas induzidas e distâncias métricas no espaço vetorial.

3.2.1. Produtos Internos Gerais

Seja V um espaço vetorial e $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ um mapeamento bilinear que associa dois vetores a um número real. Um mapeamento bilinear simétrico e definido positivo $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado de produto interno em V . Esta generalização permite a incorporação de diferentes formas de medir "ângulos" e "distâncias" em espaços mais abstratos ou com propriedades específicas, adaptando-se a necessidades particulares de diversas áreas da matemática e suas aplicações, como em espaços de função e em teoria da relatividade, onde o produto interno pode incluir componentes não ortogonais ou métricas não euclidianas.

3.3. Comprimentos e Distância

Definição:

O comprimento de um vetor \mathbf{x} em um espaço vetorial normado é dado pela norma do vetor, que mede a "magnitude" ou "tamanho" do vetor no espaço. A distância entre dois vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} , por sua vez, é definida como a norma da diferença entre eles. Esta medida é fundamental para entender as propriedades geométricas e topológicas do espaço, como a continuidade e a convergência de sequências de vetores.

$$\text{Comprimento}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$$

$$\text{Distância}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Este conceito de distância é particularmente útil em análises que envolvem a minimização de erros ou discrepâncias, como nos métodos de otimização e nas soluções de problemas de aproximação em espaços de função.

3.4. Ângulos e Ortogonalidade

Definição:

Os ângulos e a ortogonalidade em um espaço vetorial são conceitos derivados do produto interno. O ângulo entre dois vetores é uma medida da sua divergência direcional, enquanto a ortogonalidade indica que dois vetores são perpendiculares, isto é, o produto interno entre eles é zero.

$$\text{Cosseno do Ângulo}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, então os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são ortogonais, indicando que não há componente de \mathbf{x} na direção de \mathbf{y} e vice-versa. A ortogonalidade é uma propriedade crucial em muitos processos matemáticos e computacionais, incluindo métodos de ortogonalização como o Processo de Gram-Schmidt e em algoritmos de decomposição matricial, como a decomposição QR e a decomposição em valores singulares (SVD).

A análise de vetores ortogonais é fundamental para a simplificação de problemas em muitas áreas da matemática aplicada, física e engenharia, pois vetores ortogonais formam bases que facilitam a solução de sistemas lineares e a análise de transformações lineares.

3.5. Base Ortonormal

Considere um espaço vetorial \mathbf{V} que possui n dimensões e uma base específica $\{b_1, \dots, b_n\}$ de \mathbf{V} . Se:

$$\langle b_i, b_j \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

$$\langle b_i, b_i \rangle = 1$$

Para todo $i, j = 1, \dots, n$ então a base é chamada de base ortonormal.

3.5.1. Exemplo 01 - Base Ortonormal

Verificar que os vetores $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ formam uma base ortonormal. Logo, será necessário verificar duas condições: *ortogonalidade e normalização*.

1. Ortogonalidade:

Para verificar a ortogonalidade, calculamos o produto interno entre v_1 e v_2 :

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como o produto interno entre v_1 e v_2 é zero, os vetores são ortogonais.

2. Normalização:

Para verificar a normalização, calculamos o módulo de cada vetor:

$$\|v_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Como ambos os vetores têm módulo igual a 1, eles estão normalizados.

Portanto, os vetores v_1 e v_2 formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^2 .

3.5.2. Exemplo 02 - Base Ortonormal:

Pode-se utilizar a eliminação Gaussiana para encontrar uma base para um espaço vetorial gerado por um conjunto de vetores. Suponha um conjunto de vetores bases não ortogonais e não normalizados $\{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$. Realiza-se a concatenação em uma matriz $\tilde{B} = [\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n]$ e aplica-se a eliminação Gaussiana à matriz aumentada $[\tilde{B} \tilde{B}^\perp | \tilde{B}]$ para obter uma base ortonormal. Esta forma construtiva de construir iterativamente uma base ortonormal $\{b_1, \dots, b_n\}$ é chamada de **Gram-Schmidt**.

Desta maneira, encontre uma base ortonormal a partir da base formada pelos vetores v, u, w :

$$\beta = \{(2, 0, 0), (0, 2, 2), (0, 2, -2)\}$$

- Para normalizar os vetores, fazemos:

$$v_n = \frac{v}{\|v\|}$$

- Vetor u : (2,0,0)

$$\|u\| = \sqrt{2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$u_n = \left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}\right) = (1, 0, 0)$$

- Vetor v : (0,2,2)

$$\|v\| = \sqrt{0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$v_n = \left(\frac{0}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- Vetor w : (0,2,-2)

$$\|w\| = \sqrt{0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$w_n = \left(\frac{0}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

- Logo a base ortogonal a partir da base β é:

$$\alpha = \left\{(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

3.6. Complemento Ortogonal

Considere um espaço vetorial D -dimensional V e um subespaço M -dimensional $U \subset V$. Então seu complemento ortogonal U^\perp é um subespaço $(D-M)$ -dimensional de V e contém todos os vetores em V que são ortogonais a todos os vetores em U . Além disso, $U \cap U^\perp = \{0\}$ de modo que qualquer vetor $x \in V$ pode ser decomposto exclusivamente em:

$$x = \sum_{m=1}^M \lambda_m b_m + \sum_{j=1}^{D-M} \psi_j b_j^\perp, \quad \lambda_m, \psi_j \in \mathbb{R}$$

Onde (b_1, \dots, b_M) é uma base de U e $(b_1^\perp, \dots, b_M^\perp)$ é uma base de U^\perp . Portanto, o complemento ortogonal também pode ser usado para descrever um plano U (subespaço bidimensional) em um espaço vetorial tridimensional. Mais especificamente, o vetor w com $\|w\| = 1$, que é ortogonal ao plano U , é o vetor base de U^\perp .

Todos os vetores que são ortogonais a w devem (por construção) estar no plano U (Figura 3.1). O vetor w é chamado de vetor normal de U . Geralmente, complementos ortogonais podem ser usados para descrever hiperplanos em vetores n -dimensionais e espaços afins.

3.6.1. Exemplo - Complemento Ortogonal:

Como encontrar o complemento ortogonal do seguinte espaço vetorial:

$$V = \text{span}\{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$$

Considerando o complemento ortogonal como $(x, y, z) \in V^\perp$:

- Utilizando a propriedade da ortogonalidade, temos que:

$$\begin{aligned} \langle (x, y, z), (1, 2, 3) \rangle &= 0 \\ \langle (x, y, z), (2, 3, 4) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

- Montando a equação, e multiplicando a primeira por (-2) , temos que:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \cdot (-2) \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

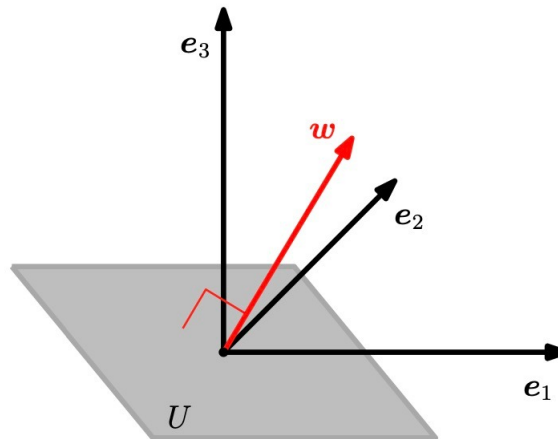


Figura 3.1: Vetores ortogonais w devem estar no plano U .

Logo, $y = -2z$

- Substituindo na primeira equação: $x + 2(-2z) + 3z = 0$, obtemos:

$$x = z$$

$$(x, y, z) \Rightarrow (z, -2z, z) \Rightarrow z \cdot (1, -2, 1)$$

- Logo o complemento ortogonal do espaço vetorial fica $V^\perp = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$.

3.7. Produto Interno de Funções

Dado um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ como uma função com n valores de função. O conceito de produto interno pode ser generalizado para vetores com um número infinito de entradas (contavelmente infinito) e também funções de valor contínuo (incontavelmente infinito). Então a soma dos componentes individuais dos vetores se transforma em uma integral. Um produto interno de duas funções $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser definido como uma integral definida:

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x) dx$$

Para os limites superiores e inferiores $a, b < \infty$ respectivamente. A coleção de funções $\{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \dots\}$ abrange um subespaço de funções que são pares periódicos em $[-\pi, \pi]$ e projetar funções neste subespaço é a ideia fundamental por trás da série de Fourier.

3.7.1. Exemplo - Produto Interno de Funções:

Dadas as funções u e v , mostre a ortogonalidade.

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx$$

Considerando:

$$C = \sin(x) \text{ e} \\ dc = \cos(x) dx$$

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} C dc = \left[\frac{C^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\langle u, v \rangle = \left[\frac{\sin(x)^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Logo, como o produto interno entre as funções é 0 (zero), podemos afirmar que as mesmas são ortogonais.

3.8. Projeções Ortogonais

As projeções são uma classe importante de transformações lineares e desempenham um papel importante em gráficos, teoria de codificação, estatística e aprendizado de máquina. No aprendizado de máquina, muitas vezes lidamos com dados de alta dimensão. Dados altamente dimensionais costumam ser difíceis de analisar ou visualizar.

No entanto, dados de alta dimensão muitas vezes possuem a propriedade de que apenas algumas dimensões contêm a maior parte da informação, e a maioria das outras dimensões não são essenciais para descrever propriedades-chave dos dados. Quando compactamos ou visualizamos dados de alta dimensão, perderemos informações. Para minimizar esta perda de compressão, idealmente encontramos as dimensões mais informativas nos dados.

Considerando que os dados podem ser representados como vetores, podemos projetar os dados originais de alta dimensão em um espaço de características de dimensão inferior e trabalhar nesse espaço de dimensão inferior para aprender mais sobre o conjunto de dados e extrair padrões relevantes. Para um determinado subespaço de dimensão inferior, as projeções ortogonais de dados de alta dimensão retêm o máximo de informação possível e minimizam a diferença/erro entre os dados originais e a projeção correspondente.

Definição 1. Seja V um espaço vetorial onde $U \subseteq V$ é um subespaço de V . Um mapeamento linear $\pi : V \rightarrow U$ é chamado de projeção se $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$.

A definição 1 trata da noção de projeção em espaços vetoriais. O mapeamento linear π de V para U é uma função que leva vetores de um espaço vetorial V para um espaço vetorial U . Para ser considerado um mapeamento linear, a função deve satisfazer as

propriedades fundamentais de adição vetorial e multiplicação por escalar. O mapeamento linear π é chamado de projeção se satisfizer a condição $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$. Como a projeção é uma função que mapeia um vetor para o subespaço, aplicar a projeção duas vezes é essencialmente o mesmo que aplicá-la apenas uma vez, porque o resultado da primeira projeção já está contido no subespaço e não é alterado pela segunda projeção.

Como os mapeamentos lineares podem ser expressos por matrizes de transformação, a definição anterior se aplica igualmente a um tipo especial de matrizes de transformação, denominadas de matrizes de projeção P_π , que possuem a propriedade de que $P_\pi^2 = P_\pi$. A seguir, são derivadas projeções ortogonais de vetores em subespaços unidimensionais, também chamados de retas. Se não for mencionado o contrário, assume-se que o produto escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ como o produto interno.

3.8.1. Projeções em Subespaços Unidimensionais

Considere uma reta (subespaço unidimensional) que passa pela origem com o vetor base $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. A reta é um subespaço unidimensional $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gerado por \mathbf{b} . Ao projetar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ em U , busca-se o vetor $\pi_U(\mathbf{x}) \in U$ que está mais próximo de \mathbf{x} .

A Figura 3.2 apresenta um exemplo ilustrativo de projeção ortogonal (pontos laranja) de um conjunto de dados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ (pontos azuis) em um subespaço U caracterizado por uma linha em \mathbb{R}^2 , ou seja, um espaço unidimensional. Observa-se que a projeção minimiza a distância entre \mathbf{x} e $\pi_U(\mathbf{x})$. Essa distância pode ser caracterizada pela distância euclidiana, ou seja, uma linha reta entre \mathbf{x} e um ponto em U .

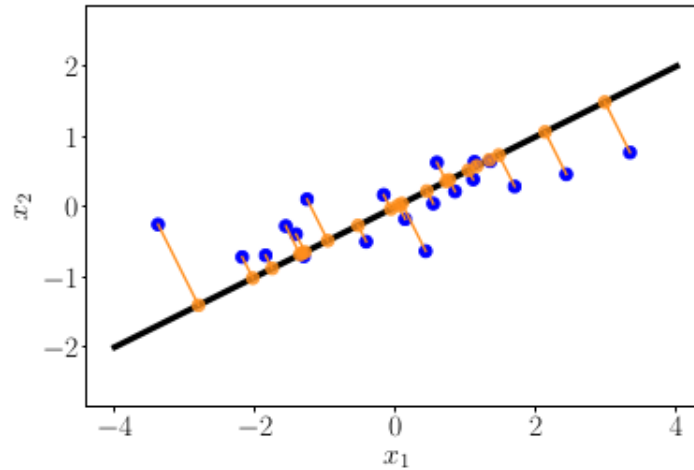


Figura 3.2: Exemplo de uma projeção ortogonal

Utilizando argumentos geométricos, caracteriza-se algumas propriedades da projeção $\pi_U(\mathbf{x})$ da seguinte forma:

- A projeção $\pi_U(\mathbf{x})$ é a mais próxima de \mathbf{x} , onde “mais próximo” implica que a distância $\|\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})\|$ é mínima. Além do mais, o segmento $\pi_U(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ de $\pi_U(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} é ortogonal ao vetor base de U . A condição de ortogonalidade produz $\langle \pi_U(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0$.

- A projeção $\pi_U(\mathbf{x})$ sobre U deve ser um elemento de U e, portanto, um múltiplo do vetor base \mathbf{b} que gera U . Portanto, $\pi_U(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{b}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

A Figura 3.3 apresenta uma ilustração geométrica das propriedades projeção ortogonal em \mathbb{R}^2 . Na Figura 3.3a, o ponto $\pi_U(\mathbf{x})$ é a projeção ortogonal do vetor \mathbf{x} sobre o subespaço U , ou seja, é a representação do vetor \mathbf{x} no subespaço U quando projetado perpendicularmente. A linha tracejada de \mathbf{x} até $\pi_U(\mathbf{x})$ representa a linha da projeção. Esta linha é perpendicular ao subespaço U e mostra a direção e magnitude da menor distância entre \mathbf{x} e o subespaço U . A projeção é dita ortogonal pois a linha de projeção é perpendicular ao vetor \mathbf{b} (e, portanto, a todo o subespaço U). Em outras palavras, $\langle \pi_U(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0$, o que é uma condição para a ortogonalidade. Neste caso, a analogia com uma sombra ajuda a visualizar a ideia de como um vetor é “projetado” em um subespaço de forma perpendicular, semelhante à formação de uma sombra no chão.

A Figura 3.3b considera $\pi_U(\mathbf{x})$ sobre \mathbf{b} no contexto do círculo unitário. O vetor \mathbf{x} tem origem no centro do círculo unitário e se estende até um ponto na borda do círculo formando um ângulo ω com $\|\mathbf{x}\| = 1$. Neste caso, $\pi_U(\mathbf{x})$ sobre \mathbf{b} significa encontrar uma componente de \mathbf{x} na direção de \mathbf{b} . No caso do círculo unitário, a magnitude da reta da projeção de $\pi_U(\mathbf{x})$ é igual a $\sin(\omega)$ e a “sombra” mais curta de \mathbf{x} sobre a reta \mathbf{b} quando a “luz” é projetada ao longo de uma reta perpendicular a \mathbf{b} que caracteriza a magnitude de $\pi_U(\mathbf{x})$ é igual a $\cos(\omega)$.

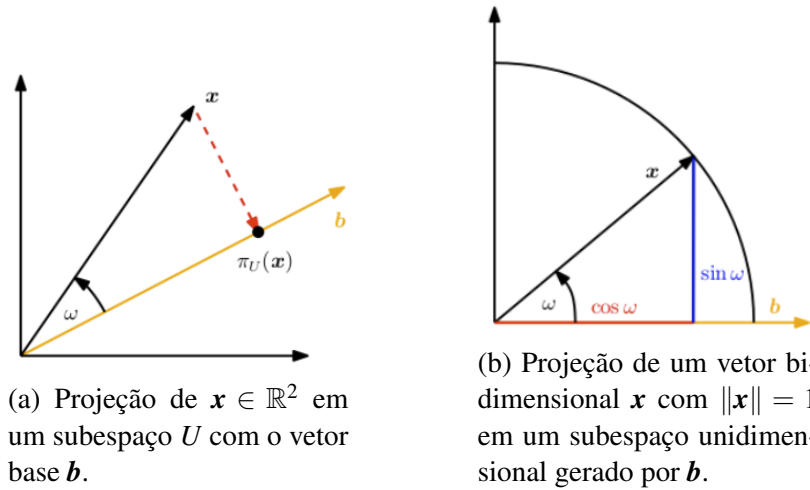


Figura 3.3: Ilustração das propriedades da projeção $\pi_U(\mathbf{x})$

Nas três etapas a seguir, será determinado o valor de λ , a projeção $\pi_U(\mathbf{x}) \in U$ e a matriz de projeção \mathbf{P}_π que mapeia qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ em U :

1. Encontre o valor de λ . A condição de ortogonalidade produz

$$\langle \mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x}), \mathbf{b} \rangle = 0 \iff \langle \mathbf{x} - \lambda \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0. \quad (1)$$

Explorando a propriedades do produto interno, tem-se que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle - \lambda \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0 \iff \lambda = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2}. \quad (2)$$

De forma geral, obtém-se $\lambda = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle$ se $\|\mathbf{b}\| = 1$. Na última etapa, é explorado o fato de que os produtos internos são simétricos. Escolhendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como o produto escalar, obtém-se

$$\lambda = \frac{\mathbf{b}^\top \mathbf{x}}{\mathbf{b}^\top \mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}^\top \mathbf{x}}{\|\mathbf{b}\|^2}. \quad (3)$$

Se $\|\mathbf{b}\| = 1$, então a coordenada λ da projeção é dada por $\mathbf{b}^\top \mathbf{x}$.

2. Encontre o ponto $\pi_U(\mathbf{x})$. Como $\pi_U(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{b}$, obtém-se o valor imediatamente com a Equação 2, tal que

$$\pi_U(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}^\top \mathbf{x}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}. \quad (4)$$

onde a última igualdade vale apenas para o produto escalar. Em seguida, é possível calcular o comprimento de $\pi_U(\mathbf{x})$ como

$$\|\pi_U(\mathbf{x})\| = \|\lambda \mathbf{b}\| = |\lambda| \|\mathbf{b}\|. \quad (5)$$

Portanto, a projeção tem comprimento $|\lambda|$ vezes o comprimento de \mathbf{b} . Isso também adiciona a intuição de que λ é a coordenada de $\pi_U(\mathbf{x})$ em relação ao vetor base \mathbf{b} que abrange ao subespaço unidimensional U .

Usando o produto escalar como produto interno, obtém-se

$$\|\pi_U(\mathbf{x})\| = \frac{|\mathbf{b}^\top \mathbf{x}|}{\|\mathbf{b}\|^2} \|\mathbf{b}\| = |\cos \omega| \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{b}\| \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|^2} = |\cos \omega| \|\mathbf{x}\| \quad (6)$$

Neste caso, ω é o ângulo entre \mathbf{x} e \mathbf{b} . Esta é uma equação familiar da trigonometria: Se $\|\mathbf{x}\| = 1$, então \mathbf{x} está no círculo unitário. Então, a projeção no eixo horizontal medido por \mathbf{b} é exatamente $\cos \omega$ e o comprimento de $\pi_U(\mathbf{x})$ é $|\cos \omega| \|\mathbf{x}\|$. A Figura 3.3b apresenta uma representação geométrica destas propriedades.

3. Encontre a matriz de projeção \mathbf{P}_π . Como uma projeção é um mapeamento linear, existe uma matriz de projeção \mathbf{P}_π , tal que $\pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_\pi \mathbf{x}$. Utilizando o produto escalar como produto interno, tem-se

$$\pi_U(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{b} = \mathbf{b} \lambda = \mathbf{b} \frac{\mathbf{b}^\top \mathbf{x}}{\|\mathbf{b}\|^2} = \frac{\mathbf{b} \mathbf{b}^\top}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{x}. \quad (7)$$

tendo em seguida, que

$$\mathbf{P}_\pi = \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^\top}{\|\mathbf{b}\|^2}. \quad (8)$$

Observa-se que $\mathbf{b}\mathbf{b}^\top$ (e, consequentemente, \mathbf{P}_π) é uma matriz simétrica, e $\|\mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$ é um escalar. Dessa forma, a projeção $\pi_U(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ ainda é um vetor n -dimensional e não um escalar.

3.8.2. Exemplo: Projeção em Subespaços Unidimensionais

Encontre a matriz de projeção \mathbf{P}_π na reta que passa pela origem gerado por $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 2]^\top$, onde \mathbf{b} é uma direção e uma base do subespaço unidimensional.

Resolução:

A projeção \mathbf{P}_π será encontrada seguindo os seguintes passos:

- Considere a Equação 8, dada por $\mathbf{P}_\pi = \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^\top}{\|\mathbf{b}\|^2}$.
 - ◊ Calculando $\mathbf{b}\mathbf{b}^\top$.

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 2] = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 2 & 1 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$
 - ◊ Calculando $\|\mathbf{b}\|^2$ utilizando a norma Euclidiana.

$$= \|\mathbf{b}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$= \|\mathbf{b}\|^2 = 3^2 = 9$$
 - ◊ Encontrando \mathbf{P}_π .

$$= \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^\top}{\|\mathbf{b}\|^2} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, considere um vetor \mathbf{x} , onde será verificado que ele está no subespaço gerado por \mathbf{b} .

- Considere $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1]^\top$. Neste caso, deve-se calcular \mathbf{P}_π de \mathbf{x} sobre \mathbf{b} e verificar se o resultado é proporcional a \mathbf{b} .
 - ◊ Encontrando $\pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_\pi \mathbf{x}$.

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 \\ 2 \times 1 + 4 \times 1 + 4 \times 1 \\ 2 \times 1 + 4 \times 1 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- ◇ Para verificar se $P_\pi \mathbf{x}$ é um múltiplo escalar de \mathbf{b} , a projeção deve ser igual a $\lambda \times \mathbf{b}$, onde λ é algum escalar. Portanto, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{5}{9} = \lambda \\ \frac{10}{9} = \lambda \times 2 \implies \frac{5}{9} = \lambda \\ \frac{10}{9} = \lambda \times 2 \implies \frac{5}{9} = \lambda \end{cases}$$

- ◇ Resolvendo o sistema, observa-se que todas as equações resultam no mesmo valor de $\lambda = \frac{5}{9}$. Neste caso, P_π pode ser expresso como

$$P_\pi = \lambda \times \mathbf{b} = \frac{5}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Portanto, pode-se concluir que \mathbf{x} está no mesmo subespaço gerado por \mathbf{b} , pois cada componente de \mathbf{x} é proporcional à componente correspondente de \mathbf{b} .

Adicionalmente, considere um vetor \mathbf{y} , onde será verificado que ele não está no subespaço gerado por \mathbf{b} .

- Considere $\mathbf{y} = [2 \ 1 \ 3]^\top$. Neste caso, deve-se calcular P_π de \mathbf{y} sobre \mathbf{b} e verificar se o resultado é proporcional a \mathbf{b} .

- ◇ Encontrando $\pi_U(\mathbf{y}) = P_\pi \mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 3 \\ 2 \times 2 + 4 \times 1 + 4 \times 3 \\ 2 \times 2 + 4 \times 1 + 4 \times 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- ◇ Para verificar se $P_\pi \mathbf{y}$ é um múltiplo escalar de \mathbf{b} , a projeção deve ser igual a $\lambda \times \mathbf{b}$, onde λ é algum escalar. Portanto, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ \frac{20}{9} = \lambda \times 2 \implies \frac{10}{9} = \lambda \\ \frac{20}{9} = \lambda \times 2 \implies \frac{10}{9} = \lambda \end{cases}$$

- ◇ Analisando o sistema, observa-se que as equações não resultam no mesmo valor de λ .

Portanto, como não há uma solução que satisfaça o valor de λ para todas as equações simultaneamente, pode-se concluir que \mathbf{y} não está no mesmo subespaço gerado por \mathbf{b} .

Por fim, considere os vetores anteriores, \mathbf{x} e \mathbf{y} , mostrando pela condição de ortogonalidade que, $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ é ortogonal a base $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 2]^\top$ e que $\mathbf{y} - \pi_U(\mathbf{y})$ não é ortogonal a referida base.

- Seja $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1]^\top$. Pela condição de ortogonalidade, o resultado do produto interno de $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ com a base $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 2]^\top$ deve ser zero.

◇ Considerando os cálculos anteriores, $\pi_U(\mathbf{x}) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$. Dessa forma,

calculando $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{10}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{9} \\ 1 - \frac{10}{9} \\ 1 - \frac{10}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇ Verificando se $\langle \mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x}), \mathbf{b} \rangle = 0$.

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}(4 - 2 - 2) = 0$$

Como o produto interno é zero, $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ é ortogonal a base dada.

- Seja $\mathbf{y} = [2 \ 1 \ 3]^\top$. Pela condição de ortogonalidade, o resultado de produto interno de $\mathbf{y} - \pi_U(\mathbf{y})$ com a base $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 2]^\top$ deve ser zero.

◇ Considerando os cálculos anteriores, $\pi_U(\mathbf{y}) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$. Dessa forma,

calculando $\mathbf{y} - \pi_U(\mathbf{y})$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} - \pi_U(\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{20}{9} \\ \frac{20}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{9} \\ 1 - \frac{20}{9} \\ 1 - \frac{20}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{11}{9} \\ -\frac{11}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇ Verificando se $\langle \mathbf{y} - \pi_U(\mathbf{y}), \mathbf{b} \rangle = 0$.

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}(8 - 22 - 22) = -44$$

Como o produto interno é diferente de zero, $\mathbf{y} - \pi_U(\mathbf{y})$ não é ortogonal a base dada.

3.8.3. Exemplo de Visualização Geométrica

A Figura 3.4 apresenta uma visualização geométrica de $\pi_U(\mathbf{x})$ sobre a reta \mathbf{b} que define o subespaço da projeção. O vetor \mathbf{x} é projetado no subespaço e $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ representa a diferença entre \mathbf{x} e sua projeção $\pi_U(\mathbf{x})$.

Nota-se de forma geométrica que $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ é ortogonal ao vetor \mathbf{b} que gera o subespaço. Neste caso, como $\pi_U(\mathbf{x})$ reside no subespaço definido por \mathbf{b} , a projeção pode ser caracterizada como uma combinação linear de \mathbf{b} que define a base de U .

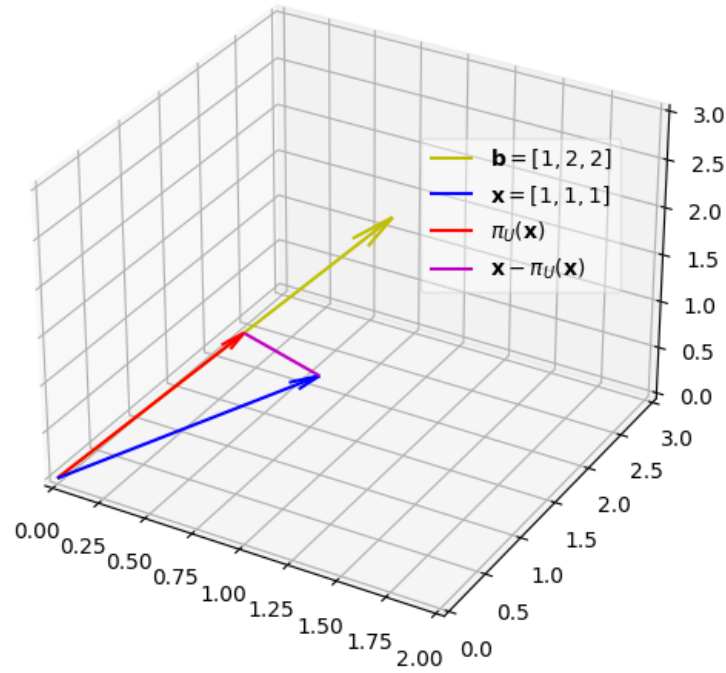


Figura 3.4: Visualização de $\pi_U(\mathbf{x})$ sobre a reta \mathbf{b} que define o subespaço da projeção.

3.8.4. Projeção em Subespaços Gerais

Esta seção discute as projeções ortogonais de vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ em subespaços de dimensão inferior $U \subseteq \mathbb{R}^n$ com $\dim(U) = m \geq 1$. A Figura 3.5 apresenta uma ilustração uma projeção em um subespaço bidimensional U com a base definida por b_1 e b_2 . A projeção $\pi_U(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ pode ser expressa como uma combinação linear de b_1 e b_2 , com o vetor $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ sendo ortogonal a b_1 e b_2 .

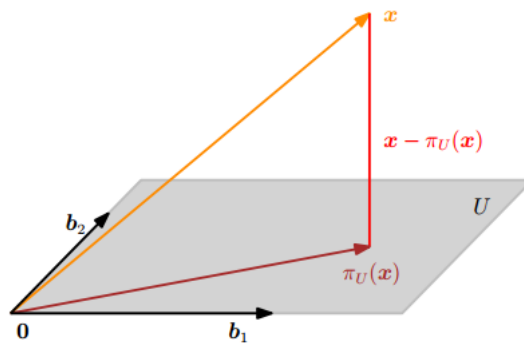


Figura 3.5: Projeção ortogonal de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ em um subespaço bidimensional

Considere que (b_1, \dots, b_m) é uma base de U . Neste caso, qualquer projeção $\pi_U(\mathbf{x})$ em U é necessariamente um elemento de U . Portanto, as projeções podem ser representadas como combinações lineares dos vetores de base b_1, \dots, b_m de U de modo que $\pi_U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$.

Como no caso 1D, pode-se seguir um procedimento de três etapas para encontrar a projeção $\pi_U(\mathbf{x})$ e a matriz de projeção \mathbf{P}_π :

1. Encontre as coordenadas $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ da projeção (em relação à base de U), tal que a combinação linear

$$\pi_U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i, \quad (9)$$

$$\pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}, \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = [b_1, \dots, b_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}, \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \in \mathbb{R}^m, \quad (11)$$

é fechada para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Como no caso 1D, “mais próximo” significa “distância mínima”, o que implica que o vetor que conecta $\pi_U(\mathbf{x}) \in U$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ deve ser ortogonal a todos os vetores de base de U . Portanto, temos m vetores, onde o produto escalar como o produto interno de cada vetor da base com $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ deve ser zero, de modo que obtém-se um sistema de equações lineares homogêneo, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} [\mathbf{x} - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} = 0] \iff \mathbf{B}^\top (\mathbf{x} - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}) = 0 \iff \mathbf{B}^\top \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}^\top \mathbf{x}. \quad (12)$$

Esta última expressão é chamada de equação normal. Desde que b_1, \dots, b_m formam uma base de U e, portanto, linearmente independentes, $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{mm}$ pode ser invertido. Isso permite encontrar os coeficientes

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{x}. \quad (13)$$

2. Encontre a projeção $\pi_U(\mathbf{x}) \in U$. Na Equação 10 foi definido que $\pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}$. Portanto, com base na Equação 13, tem-se que

$$\pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{x}. \quad (14)$$

3. Encontre a matriz de projeção \mathbf{P}_π . Da Equação 14, pode-se ver imediatamente que a matriz de projeção que resolve $\mathbf{P}_\pi \mathbf{x} = \pi_U(\mathbf{x})$ deve ser

$$\mathbf{P}_\pi = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top. \quad (15)$$

A solução da projeção em subespaços gerais inclui o caso 1D como um caso especial: Se $\dim(U) = 1$, então $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} \in \mathbb{R}$ é um escalar. Dessa forma, pode-se reescrever a matriz de projeção da Equação 15 $\mathbf{P}_\pi = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top$ como $\mathbf{P}_\pi = \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}^\top}{\mathbf{B}^\top \mathbf{B}}$ que é exatamente a matriz de projeção em subespaços unidimensionais da Equação 8.

3.8.5. Exemplo: Projeção em um subespaço bidimensional

Para o $U = \text{span}\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$ encontre os valores de λ , $\pi_U(\mathbf{x})$ e \mathbf{P}_π .

Resolução:

Inicialmente, será verificado que o conjunto gerador de U formam uma base, ou seja, os vetores devem ser linearmente independentes. Neste caso, é necessário demonstrar que a única combinação linear dos dois vetores resulta no vetor nulo.

- Dessa forma, supondo que existam escalares a_1 e a_2 tais que:

$$a_1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Dessa forma, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

- ◊ Da primeira equação, tem-se que $a_1 = 0$. Substituindo na segunda e terceira equação, tem-se que $a_2 = 0$. Dessa forma, a única solução para o sistema resulta no vetor nulo, e portanto, pode-se concluir que esses vetores são linearmente independentes.

Em seguida, os vetores base de U são definidos como $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, sendo

calculada a matriz $B^\top B$ e o vetor $B^\top \mathbf{x}$.

- Calculando a matriz $B^\top B$.

$$\begin{aligned} B^\top B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 \\ 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 & 0 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Calculando $B^\top \mathbf{x}$.

$$B^\top \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times 0 \\ 0 \times 6 + 1 \times 0 + 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ◊ Resolvendo a equação $B^\top B \lambda = B^\top \mathbf{x}$ para encontrar λ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times \lambda_1 + 3 \times \lambda_2 \\ 3 \times \lambda_1 + 5 \times \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ◇ Dessa forma, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 6 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

- ◇ Substituindo $\lambda_1 = 2 - \lambda_2$ da equação (1) em (2):

$$6 - 3\lambda_2 + 5\lambda_2 = 0 \implies 2\lambda_2 = -6 \implies \lambda_2 = -3$$

- ◇ Utilizando $\lambda_2 = -3$ na equação (1) para encontrar λ_1 :

$$3\lambda_1 - 9 = 6 \implies 3\lambda_1 = 15 \implies \lambda_1 = 5$$

- Encontrando a projeção $\pi_U(\mathbf{x})$ em U :

$$\pi_U(\mathbf{x}) = B\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 - 0 \times (-3) \\ 1 \times 5 + 1 \times (-3) \\ 1 \times 5 + 2 \times (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- ◇ O erro da projeção é a norma da diferença entre o vetor original e sua projeção em U , ou seja $\|\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})\|$.

Calculando $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ◇ Calculando $\|\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})\|$:

$$\| \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^\top \| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

- Encontrando a matriz de projeção (para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) resolvendo $\mathbf{P}_\pi \mathbf{x} = \pi_U(\mathbf{x}) = B(B^\top B)^{-1} B^\top$.

- ◇ Calculando $(B^\top B)^{-1}$.

Considerando os cálculos anteriores, tem-se que $B^\top B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Em seguida, para inverter a matriz, será utilizado o método da matriz adjunta.

$$(B^\top B)^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

- ◇ Calculando $B(B^\top B)^{-1}$.

$$\begin{aligned} B(B^\top B)^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times (-3) & 1 \times (-3) + 0 \times 3 \\ 1 \times 5 + 1 \times (-3) & 1 \times (-3) + 1 \times 3 \\ 1 \times 5 + 2 \times (-3) & 1 \times (-3) + 2 \times 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- ◇ Calculando $\mathbf{P}_\pi \mathbf{x} = B(B^\top B)^{-1} B^\top$.

$$B(B^\top B)^{-1} B^\top = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \times 1 + (-3) \times 0 & 5 \times 1 + (-3) \times 1 & 5 \times 1 + (-3) \times 2 \\ 2 \times 1 + 0 \times 0 & 2 \times 1 + 0 \times 1 & 2 \times 1 + 0 \times 2 \\ -1 \times 1 + 3 \times 0 & -1 \times 1 + 3 \times 1 & -1 \times 1 + 3 \times 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Para verificar o resultado da projeção, será mostrado que o vetor $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ é ortogonal ao vetor base de U .

- Pela condição de ortogonalidade, o resultado do produto interno de $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ com cada vetor da base de U deve ser zero. Considerando os cálculos anteriores, tem-se que $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x}) = [1 \ -2 \ 1]^\top$.

- ◊ Calculando o produto interno do primeiro vetor da base de U .

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0$$

- ◊ Calculando o produto interno do segundo vetor da base de U .

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0$$

Observa-se que ambos os produtos internos são zero. Assim, o vetor $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x}) = [1 \ -2 \ 1]^\top$ é ortogonal a cada um dos vetores que compõem a base de U , confirmando $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ é ortogonal a base dada.

3.8.6. Exemplo de Visualização Geométrica

A Figura 3.6 apresenta uma visualização geométrica de $\pi_U(\mathbf{x})$ em $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Os vetores b_1 e b_2 formam a base do subespaço U , \mathbf{x} é o vetor considerado para a projeção e $\pi_U(\mathbf{x})$ é a projeção ortogonal do vetor \mathbf{x} no subespaço U . Observa-se que $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ é a diferença entre \mathbf{x} e sua projeção $\pi_U(\mathbf{x})$.

A representação de $\pi_U(\mathbf{x})$ como uma linha que começa no vetor \mathbf{x} e termina sua respectiva projeção no plano evidencia a natureza geométrica da projeção ortogonal. No entanto, a perspectiva da Figura 3.6 pode não evidenciar a ortogonalidade de $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ com relação aos vetores b_1 e b_2 que formam a base do subespaço U . Neste caso, a Figura 3.7 apresenta uma visualização geométrica que evidencia a ortogonalidade de $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ com relação aos vetores b_1 e b_2 , conforme verificado pelos cálculos do produto escalar.

Dessa forma, nota-se que a representação geométrica desempenha um papel fundamental no estudo das projeções ortogonais, uma vez que oferece uma compreensão visual e intuitiva dos conceitos matemáticos.

3.8.7. Ortogonalização por Gram-Schmidt

O método de Ortogonalização por Gram-Schmidt é utilizado em álgebra linear para transformar um conjunto de vetores linearmente independentes em um conjunto ortogonal / ortonormal. Este método é útil em diversas aplicações, como resolver sistemas de equações lineares, diagonalizar matrizes e resolver problemas de mínimos quadrados.

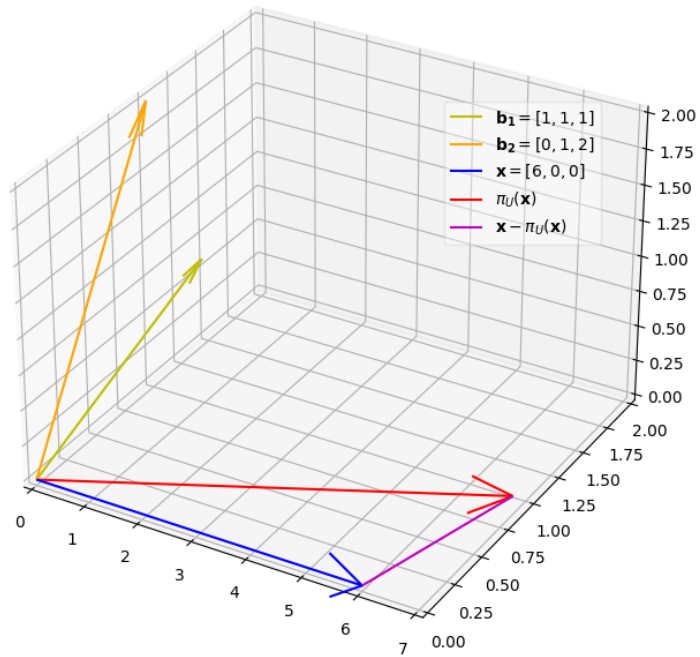


Figura 3.6: Visualização de $\pi_U(\mathbf{x})$ em $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

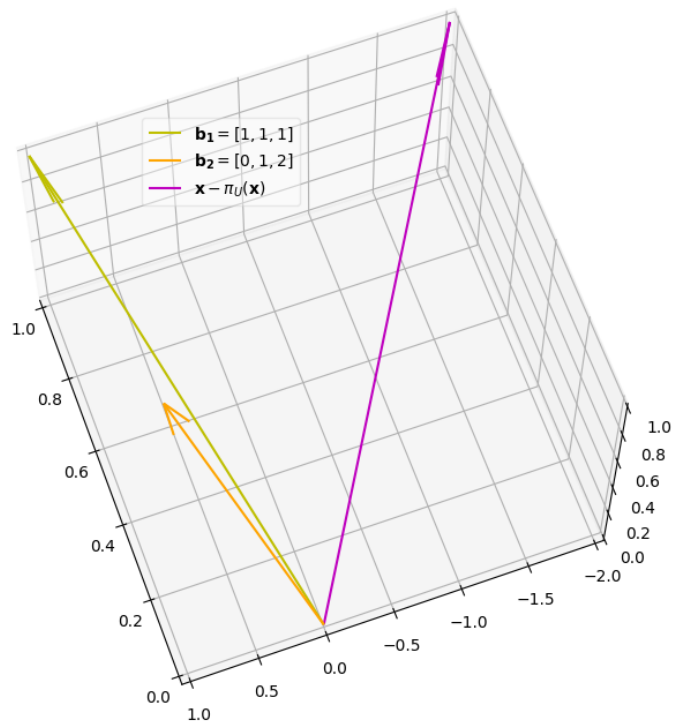


Figura 3.7: Evidenciando a ortogonalidade de $\mathbf{x} - \pi_U(\mathbf{x})$ com relação aos vetores b_1 e b_2 .

Visando explorar ainda mais propriedades, podemos aplicar esse método a uma base de um espaço vetorial e obter uma base ortonormal desse espaço, o que traz vanta-

gens e simplificações, tais como:

- *Cálculo Simplificado*: os cálculos envolvendo vetores em uma base ortonormal são mais simples, uma vez que os produtos internos entre os vetores resultam sempre em 0 (zero) ou 1 (um), o que simplifica significativamente as operações matriciais e algébricas.
- *Diagonalização de Matrizes*: em álgebra linear, muitos problemas envolvem a diagonalização de matrizes. Assim, partindo de uma base ortonormal, o processo de diagonalização se torna muito mais simples, o que facilita a análise e resolução dos problemas.
- *Interpretação Geométrica*: uma base ortonormal pode facilitar a interpretação geométrica de operações lineares, transformações e propriedades de vetores. Destaca-se que no Espaço Euclidiano e considerando o Produto Interno como o produto usual, o ângulo entre cada um dos vetores de uma base ortonormal será sempre de 90° .
- *Projeções*: projetar vetores em subespaços ou calcular componentes ortogonais de vetores é mais simples em uma base ortonormal, uma vez que as coordenadas do vetor em relação à base fornecem diretamente as projeções ortogonais em cada direção da base.
- *Normalização*: todos os vetores em uma base ortonormal têm norma unitária, o que facilita a normalização de vetores e simplifica o cálculo de coordenadas normalizadas.

Nesta esteira, considerando uma base ortogonal (b_1, \dots, b_n) de um Espaço Vetorial V , a partir do conceito de Projeções Ortogonais e utilizando o Método de Gram-Schmidt, podemos construir, iterativamente, a base (u_1, \dots, u_n) ortogonal de V , de seguinte forma:

$$u_1 := b_1 \tag{16}$$

$$u_k := b_k - \pi_{\text{span}[u_1, \dots, u_{k-1}]}(b_k), \quad k = 2, \dots, n \tag{17}$$

A Figura 3.8 apresenta o processo de construção de uma Base ortogonal (u_1, u_2) de \mathbb{R}^2 , assumindo o produto escalar como produto interno.

Vejamos um exemplo de Ortogonalização por Gram-Schmidt a partir de uma base inicial (b_1, b_2, b_3) no espaço \mathbb{R}^3 , transformando-a em uma base ortonormal (u_1, u_2, u_3) onde:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, aplicando o método em questão, temos o seguinte processo:

1. Começamos definindo $u_1 = b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

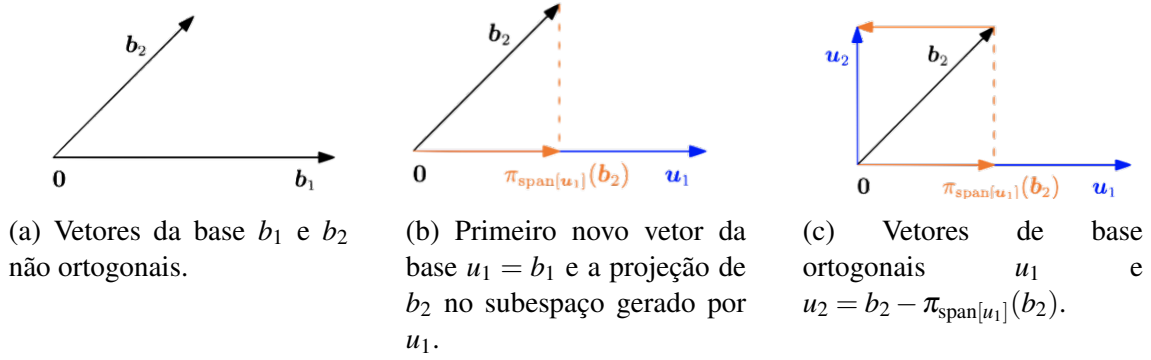


Figura 3.8: Ortogonalização por Gram-Schmidt. (a) Base não ortogonal (b_1, b_2) de \mathbb{R}^2 ; (b) Primeiro vetor de base construído u_1 e projeção ortogonal de b_2 sobre o $\text{span}[u_1]$; (c) Base ortogonal (u_1, u_2) de \mathbb{R}^2 .

Normalizando o vetor u_1 :

$$\|u_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2},$$

$$\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\|u_1\|} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Para u_2 , calculamos a projeção ortogonal de b_2 em u_1 e subtraímos essa projeção de b_2 :

$$\pi_{\text{span}[u_1]}(b_2) = \frac{u_1 u_1^T}{\|u_1\|^2} b_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_2 = b_2 - \pi_{\text{span}[u_1]}(b_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Normalizando u_2 :

$$\|u_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Para u_3 , calculamos a projeção ortogonal de b_3 em u_1 e u_2 e subtraímos essas projeções de b_3 :

$$\pi_{\text{span}[u_1]}(b_3) = \frac{u_1 u_1^T}{\|u_1\|^2} b_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\pi_{\text{span}[u_2]}(b_3) = \frac{u_2 u_2^T}{\|u_2\|^2} b_3 = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$u_3 = b_3 - \pi_{\text{span}[u_1]}(b_3) - \pi_{\text{span}[u_2]}(b_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{5}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Normalizando u_3 :

$$\|u_3\| = \frac{5}{6} \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{54}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{5}{3\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Portanto, a base ortonormal (u_1, u_2, u_3) é dada por:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \frac{5}{3\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

3.9. Rotações

Rotações são um tipo importante de transformação linear que ocorre em espaços n -dimensionais e podem ser descritas de forma precisa através de matrizes de rotação, que preservam a adição de vetores e a multiplicação por escalares. Além disso, mantêm a forma e o tamanho do objeto, mudando apenas sua orientação no espaço em função de um determinado ângulo.

As rotações têm muitas aplicações em geometria, computação gráfica, robótica, física e muitas outras áreas, sendo fundamentais para a compreensão e manipulação de objetos tridimensionais em diferentes contextos. Além disso, a partir de suas propriedades, como preservação de distâncias e ângulos, as rotações tornam-se ferramentas valiosas em muitos problemas práticos.

3.9.1. Rotações em \mathbb{R}^2

A Figura 3.9 ilustra uma rotação de uma base $\{e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ de \mathbb{R}^2 , que define o sistema de coordenadas padrão em \mathbb{R}^2 , por um ângulo θ . Essa rotação Φ no espaço bidimensional, pode ser expressa pela matriz de rotação $\mathbf{R}(\theta)$, que é a base para a construção das matrizes de rotação em outras dimensões, e é dada por:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

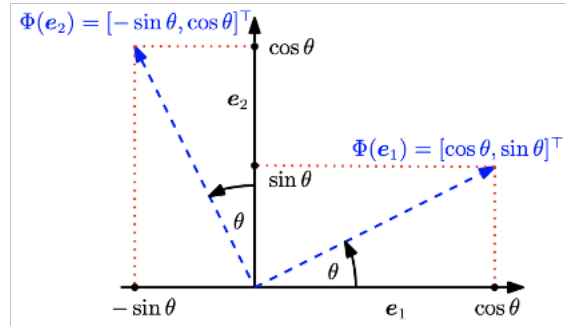


Figura 3.9: Rotação da base padrão em \mathbb{R}^2 por um ângulo θ .

Destaca-se que para um ângulo positivo $\theta > 0$, por convenção, rotacionamos no sentido anti-horário. Portanto, na Figura 3.10, vemos uma rotação aplicada em uma representação da letra "H", gerada por meio de um gráfico em um programa de Planilha Eletrônica.

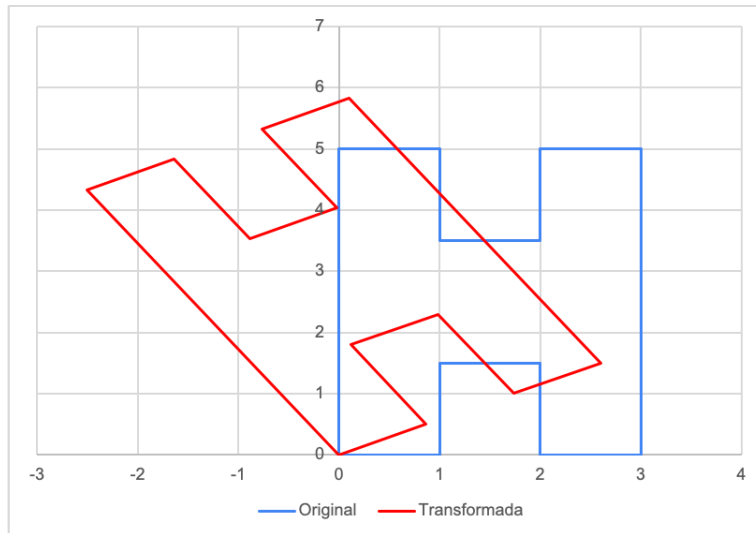


Figura 3.10: Rotação da representação da letra "H" por um ângulo 30° .

Na Figura 3.10 foi aplicada um rotação de 30° , por conseguinte obteve-se a seguinte a matriz de rotação:

$$R\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{bmatrix} 0,87 & -0,50 \\ 0,50 & 0,87 \end{bmatrix}$$

3.9.2. Rotações em \mathbb{R}^3

Uma rotação no espaço tridimensional é uma transformação que gira um objeto em torno de um eixo de rotação. A representação matricial dessa rotação, considerando os eixos x , y , z e o ângulo de rotação θ , pode ser expressa da seguinte forma:

Rotação em torno do eixo x :

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo y :

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo z :

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ressalta-se que as rotações em três dimensões têm diversas aplicações, por exemplo, em ambientes 3D, como videogames, animações e modelagem 3D, as rotações são amplamente utilizadas para posicionar objetos e câmeras de forma dinâmica. Em robótica, as rotações são essenciais para controlar o movimento de braços robóticos e manipuladores em tarefas como montagem, soldagem, pintura, entre outras.

3.9.3. Propriedades de Rotações

Intuitivamente, a partir da rotação em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , é possível definir uma rotação no espaço n -dimensional como uma transformação que gira um objeto em torno de um subespaço de dimensão $n - 2$ contido no espaço n -dimensional. Nesse sentido, a partir das matrizes de rotação em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , em 1950, o matemático norte-americano James Wallace Givens, Jr. apresentou uma matriz de rotação para espaços n -dimensionais, que leva o seu nome e é apresentada no livro referência deste trabalho, na seção 3.9.3 [Deisenroth et al. 2020].

Desta forma, é possível verificar algumas propriedades interessantes ao se utilizar matrizes ortogonais de rotação, tais como:

- As rotações preservam distâncias, ou seja, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|R_\theta(\mathbf{x}) - R_\theta(\mathbf{y})\|$. Logo, as rotações deixam a distância entre quaisquer dois pontos inalterada após a transformação.
- As rotações preservam ângulos, ou seja, o ângulo entre $R_\theta \mathbf{x}$ e $R_\theta \mathbf{y}$ é igual ao ângulo entre \mathbf{x} e \mathbf{y} .
- As rotações em duas dimensões são comutativas, de modo que $R(\phi)R(\theta) = R(\theta)R(\phi)$ para todos $\phi, \theta \in [0, 2\pi)$.

- As rotações em três (ou mais) dimensões geralmente não são comutativas. Portanto, a ordem em que as rotações são aplicadas é importante, mesmo que elas rotacionem em torno do mesmo ponto, conforme ilustrado na Figura 3.11

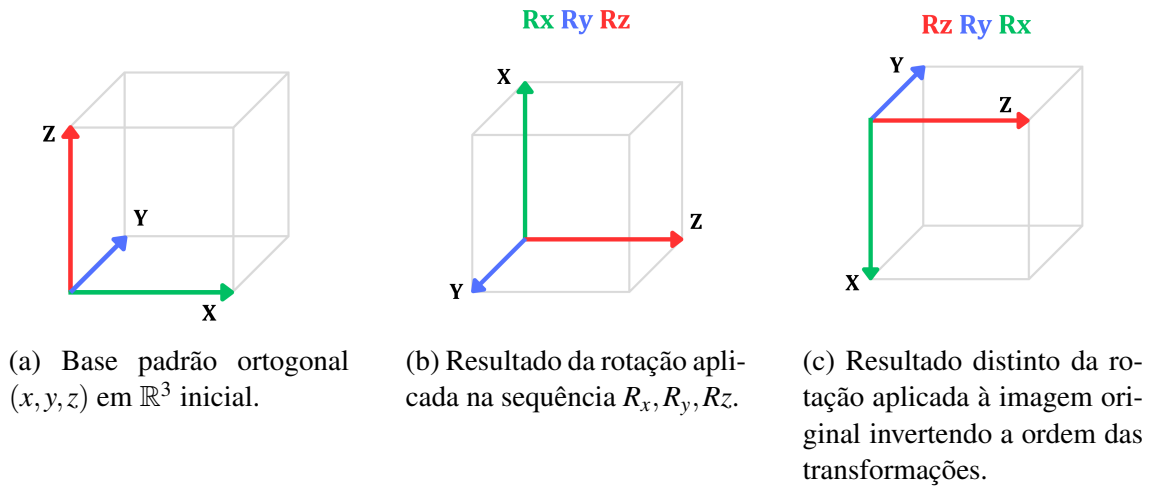


Figura 3.11: Rotação não comutativa em \mathbb{R}^3 . (a) Base padrão ortogonal (x, y, z) em \mathbb{R}^3 , sem transformação; (b) Resultado da rotação aplicada na sequência R_x, R_y, R_z ; (c) Resultado da rotação aplicada na sequência R_z, R_y, R_x .

3.10. Conclusão

Este capítulo apresenta importantes conceitos de Geometria Analítica que serão essenciais na compreensão de outros conteúdos que serão trabalhados ao longo do livro, tais como Regressão Linear no Capítulo 09, Análise de Componentes Principais (*Principal Component Analysis - PCA*) no Capítulo 10, e Máquinas de Vetores de Suporte (*Support Vector Machines - SVM*) no Capítulo 12.

Destaca-se a relevância do Produto Interno e a atenção necessária em sua definição, uma vez que terá impacto direto na realização das transformações lineares. Neste mesmo sentido, frisa-se a importância do Método de Ortogonalização por Gram-Schmidt, que permite gerar um base ortogonal / ortonormal de qualquer base de um espaço vetorial, e tem concreta repercussão nos algoritmos de otimização e algoritmos numéricos para resolução de sistemas de equações lineares.

Salienta-se, ainda, as Projeções Ortogonais, que são cruciais não apenas na computação gráfica, mas também em otimização, na minimização de erros residuais, e em aprendizado de máquina, por exemplo, na regressão linear, PCA, entre outros.

3.10.1. Material Disponibilizado

Por fim, informa-se que este grupo organizou o material do trabalho em uma página no *GitHub*, que pode ser acessada pelo endereço <https://github.com/cmprenan/TFC-UFG-Cap-3> e contém o seguintes documentos:

-
- **Relatório:** o presente relatório do trabalho em formato PDF.
 - **Videoaula:** apresentação dos principais conceitos de Geometria Analítica em um vídeo organizado em capítulos e disponível no *YouTube* pelo endereço <https://youtu.be/XIJF3vJR708>.
 - **Slides:** arquivo de apresentação utilizado durante a videoaula em formato PDF.
 - **Planilha - Transformações Lineares:** arquivo em formato XLSX que permite realizar translação e transformações lineares como contração, dilatação, reflexão, cisalhamento e rotação, por meio de matrizes em um programa de planilha eletrônica em duas representações de letras do alfabeto.
 - **Vídeo - Exemplos com Código:** apresentação de exemplos práticos em *Python* para facilitar a compreensão dos conceitos de Geometria Analítica, em um vídeo no *YouTube*, que pode ser acessado pelo endereço <https://youtu.be/Eulh4FtmKoY>.
 - **Códigos:** os códigos apresentados no vídeo de exemplos foram desenvolvidos em *Python* utilizando *Notebooks* no *Google Colab*, que encontram-se disponíveis para análise, teste, modificação.
 - **Livro-texto:** hiperlink para acessar a última edição do livro "*Mathematics for Machine Learning*" de [Deisenroth et al. 2020], disponível de forma gratuita no endereço: <https://mml-book.github.io/book/mml-book.pdf>. O livro em questão é o livro-texto da disciplina de "Tópicos Especiais em Fundamentos de Computação – Matemática e Estatística para Ciência de Dados" ministrada pelo Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa, no Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, do Instituto de Informática, da Universidade Federal de Goiás, no semestre letivo 2024/1 e foi a base para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

[Deisenroth et al. 2020] Deisenroth, M. P., Faisal, A. A., and Ong, C. S. (2020). *Mathematics for machine learning*. Cambridge University Press.