

浙江大学

实验报告

专业: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

姓名: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

学号: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

日期: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

地点: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

课程名称: 电路与电子技术实验I 指导老师: XXXXXX 成绩: ____分

实验名称: 电压三角形法测参数的误差分析 实验类型: 个人实验

姓名: XXXXXX 学号: XXXXXXXXXXXX 同组学生姓名: 无

目录:

一、实验目的和要求

二、实验内容和原理

三、主要仪器设备

四、操作方法和实验步骤

五、实验数据记录和处理

六、实验结果与分析

七、讨论、心得

电路与电子技术实验报告

实验5—电压三角形法测参数的误差分析

一、实验目的和要求

实验目的

1. 学习无源一端口网络等效参数的测定方法；
2. 掌握判定待测无源一端口网络性质的方法；
3. 学习间接测量过程中的误差传递分析；
4. 了解实验条件与电路参数的合理选择在提高实验准确度中的作用。

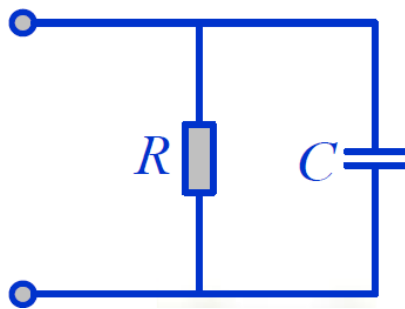
实验要求

1. 请不要带食物进入实验室，更不允许在实验室用餐；
2. 请勿大声喧哗，不要随意走动，不要私自更换实验设备；
3. 请听从实验指导老师的安排，独立完成实验；
4. 实验完毕请关闭电源，万用电表用完后关闭电源归还，并摆放整齐；整理实验桌面，保持实验室整洁；
5. 请注意用电安全，包括人身安全和设备安全；
6. 文明实验。

二、实验内容和原理

实验内容

1. 分别单独测量下图所示的电阻和电容值，再合成计算其一端口等效阻抗 Z （实验方案自定，我采用的方法是使用万用表分别测量 R 和 C ）；



待测一端口网络

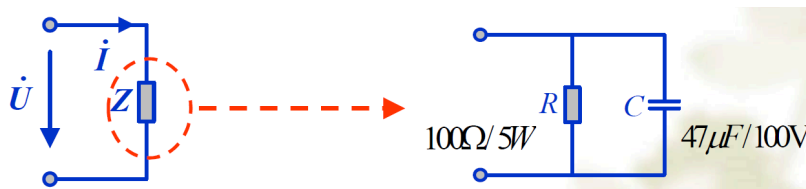
2. 用电压三角形法测量上图所示交流无源一端口电路的等效阻抗 Z ；
3. 计算电压三角形法的测量相对误差（使用[误差计算公式](#)计算） ；
4. 三表法测上述一端口网络的等效阻抗 Z 。

实验原理

任意一个无源交流一端口网络，其等效参数都可以用一个等效阻抗（入端阻抗）来表示，当端口电压和端口电流的参考方向一致时，其复数阻抗可以写作

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R_0 + jX_0, \quad X_0 < 0$$

如下图所示：



等效阻抗（入端阻抗）示意图

我们当然可以[不使用上面的公式](#)，直接测量 R 和 C ，然后利用[电阻电抗并联关系](#)直接计算出 Z ，即

$$Z = R \parallel X_C = \frac{RX_C}{R + X_C}$$

其中 $X_C = \frac{1}{j\omega C}$, $\omega = 2\pi f$, $f = 50\text{Hz}$, 整理得到

$$Z = \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} - j \cdot \frac{\omega C R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}, \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$$

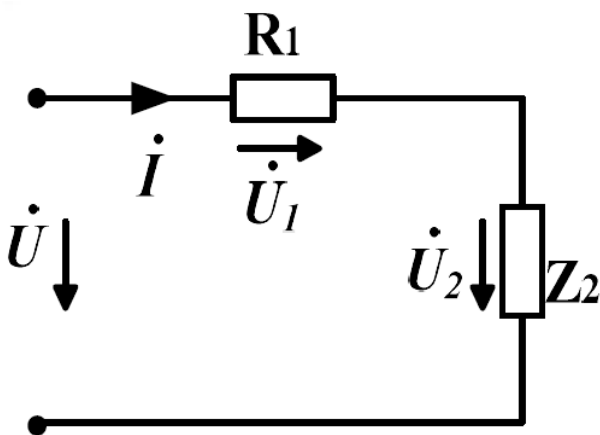
这就是[实验内容1](#)的原理。

那么，如果把上面推出的公式与 $Z_2 = R_0 + jX_0$ 对比，不难得到如下结果：

$$\begin{cases} R_0 = \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \\ X_0 = -\frac{\omega C R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \end{cases} \quad \blacksquare$$

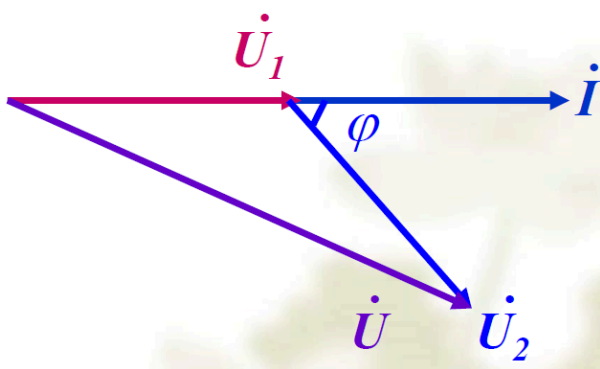
除了直接测量 R 和 C 外，我们还可以使用**电压三角形法** ([实验内容2](#))，下面给出原理：

电压三角形法测量线路如下图所示，外加一电阻 R_1 。 Z_2 为等效阻抗（待测）。



电压三角形法原理图

用电压表分别测量电压 U 、 U_1 、 U_2 的值，画出电压相量图大致如下图：



电压三角形法向量图

在左侧三角形中，使用**余弦定理**，可以直接求出 $\cos \varphi$ ：

$$\cos \varphi = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2}$$

由上文公式 $Z_2 = R_0 + jX_0$ ($X_0 < 0$)，在这里我们将直接计算出 R_0 和 X_0 。

从公式中，我们很容易理解，上[图](#)中的 Z_2 相当于是电阻 R_0 和电抗 X_0 ($X_0 < 0$) 的**串联**。

在此我必须澄清：我们实际的电路[图](#)中是 R 与 C **并联**。我们上面说的**串联**是**等效后的电路**，**并非原始电路**。我们这里直接计算的是**等效后的 R_0 和 X_0** ，即[实验内容1中的公式](#)中的 R_0 和 X_0 ，绝对不是**原始电路中的 R 和 X_C** ，请务必不要搞混。

换句话说，在[实验内容2](#)中，我们完全没有考虑到 Z_2 的内部结构，即它内部到底是如何连接的跟我没有任何关系。我只关心它的等效阻抗 $Z_2 = R_0 + jX_0$ ，我也确实是直接去计算了这个等效阻抗表达式中的两个未知数—— R_0 和 X_0 。而这个等效阻抗 Z_2 就是直接**串联**接进电路中的。

有了上面两段的铺垫，我们已经可以很清晰的理解**串联**的含义了： Z_2 相当于是**电阻 R_0 和容抗 X_0 的串联**（你可以使用[实验内容1中的公式](#)找到 R_0 、 X_0 与 R 、 C 的对应关系，但我们不关心这个）。

下面开始考虑等效后的电路： R_0 与 X_0 串联，它们的电流均是 I 。 R_0 是电阻，其电压与电流同相； X_0 是容抗，其电流相位超前电压 90° 。这两个互相垂直的电压的合成就是 U_2 。

所以， R_0 两端的电压是 U_2 在电流 I 方向上的分量，有效值为 $U_2 \cos \varphi$ ； X_0 两端的电压是 U_2 在电流 I 垂直方向上的分量，有效值为 $U_2 \sin \varphi$ 。

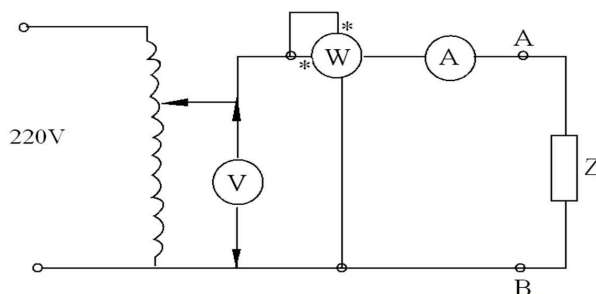
于是就有了下面的两个结果：

$$R_0 = \frac{U_2 \cos \varphi}{I} = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1 I}$$
$$|X_0| = \frac{U_2 \sin \varphi}{I} = \frac{U_2 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{I} = \frac{U_2}{I} \sqrt{1 - \left(\frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1 U_2} \right)^2} = -X_0$$

从上面的两个公式中，我们可以体会到**误差的传递**。 U_1 、 U_2 、 U 和 I 均是我们的直接测量结果，它们本身就带有误差，而这些误差都会传递到最终的测量结果 R_0 和 X_0 上。至于误差具体是怎么传递的，请见下文的[误差计算公式](#)。

除了我们上面使用的两种方法之外，我们还可以使用**三表法**（[实验内容4](#)）。

下面给出我们的三表法测量的原理图：



三表法测量原理图

当然，实际上我们用的是“一表法”。因为实验室的功率表可以同时给出电压、电流和功率值，发挥了上图中三个表的作用。

我们只需要依据 $R_0 = \frac{P}{I^2}$ 即可求得等效电阻 R_0 ，用 $|Z| = \frac{U}{I}$ 即可求得 Z 的模，进而依公式 $X_0 = -\sqrt{Z^2 - R_0^2}$ 即可求得 X_0 。如果你想找到 R_0 、 X_0 与 R 、 C 的对应关系，请参照[电压三角形法](#)部分的相关说明，使用[实验内容1中的公式](#)，这里不再赘述。

三、主要仪器设备

- 变压器单相 0 ~ 220 V 可调电源；
- 单相变压器，输出可调，**本实验中调节输出为 16 V**
- $R = 100 \Omega / 5 \text{ W}$ 电阻，
- $C = 47 \mu\text{F} / 100 \text{ V}$ 电容；
- 交流电压/电流表，精度均为 $a = 0.5$ 级；
- 功率/功率因数表。

为什么单相变压器要调节输出为 16 V 呢？

原因在于，我们的电阻有最大功率限制，电容有最大电压限制。我们必须保证这两个元件都不能烧坏。

根据下面理论公式

$$Z_{2\text{理论}} = \frac{R_{\text{理论}}}{1 + \omega^2 C_{\text{理论}}^2 R_{\text{理论}}^2} - j \cdot \frac{\omega C_{\text{理论}} R_{\text{理论}}^2}{1 + \omega^2 C_{\text{理论}}^2 R_{\text{理论}}^2}, \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$$

计算可以得到 $Z_{2\text{理论}} \approx (31.4446066199059 - 46.4294882214952i) \Omega$ ，
 $|Z_{2\text{理论}}| \approx 56.0754907423073 \Omega$ 。

由 $R = 100 \Omega / 5 \text{ W}$ 知 R 允许通过的最大电流

$$I_{R_{max}} = \sqrt{\frac{P}{R}} \approx 223.606797749979 \text{ mA}$$

R 上的最大电压

$$U_{R_{max}} = U_{2_{max}} = I_{R_{max}} R \approx 22.3606797749979 \text{ V}.$$

实验中取 $R_1 = |Z_{2\text{理论}}| \approx 56.0754907423073 \Omega$ ，原因见下文的[误差分析](#)部分。则有

$$I_{max} = \frac{U_{1_{max}}}{R_1} = \frac{U_{2_{max}}}{|Z_{2\text{理论}}|} \approx 398.7603047070157 \text{ mA}.$$

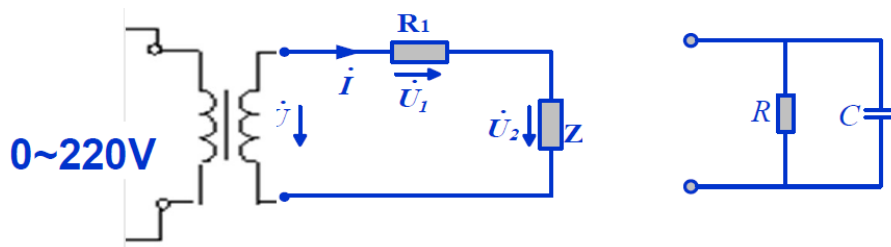
使用 16V 的电压值可以保证上述元件均不过流，如果使用另一档位，给电压超过 30V，电阻是一定会过流烧坏的。所以我们调节单相变压器输出 16V。

四、操作方法和实验步骤

对于[实验内容1](#)，采用万用表直接测量，这里不再赘述。[实验内容4](#)只需按[图](#)连线记录数据即可，也不再赘述。

下面来说明[实验内容2](#)的操作步骤：

首先，按下图连接电路：



电压三角形法接线图

然后有以下5步：

1. 检测电源和各电路元件，搭建测试电路；
2. 确定一端口网络上电压以及电源电压的变化范围；
3. 确定 R_1 的型号和数值；
4. 调节 R_1 使 $U_1 = U_2$ ，记录 U_1 、 U_2 、 U 和 I 、 R_1 ；
5. 计算测量误差。

上面第4步，使 $U_1 = U_2$ ，实际上就是在调 $R_1 = |Z_2|$ ，原因见下文的[误差分析](#)部分。这里给出目的：当调 $R_1 = |Z_2|$ 以后，可以使测量的相对误差最小。

五、实验数据记录和处理

实验内容1的测量结果

$$R = 104.5\Omega$$

$$C = 49.47\mu\text{F}$$

依据我们上文中已经提到过的公式：

$$Z = \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} - j \cdot \frac{\omega C R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}, \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$$

经过计算可得：

$$Z_1 \approx (28.727386617326 - 46.6556444564776j)\Omega$$

实验内容2的测量结果

$$U_1 = 8.74\text{V}$$

$$U_2 = 8.76\text{V}$$

$$U = 15.96\text{V}$$

$$I = 157.7\text{mA}$$

$$R_1 = 55\Omega$$

电压三角形法测量的计算公式：

$$\cos \varphi = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2}$$

$$R_0 = \frac{U_2 \cos \varphi}{I} = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1I}$$

$$|X_0| = -X_0 = \frac{U_2 \sin \varphi}{I} = \frac{U_2 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{I} = \frac{U_2}{I} \sqrt{1 - \left(\frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2} \right)^2}$$

$$Z_2 = R_0 + jX_0, \quad X_0 < 0$$

也即如下的公式：

$$Z_2 = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1I} - j \cdot \frac{U_2}{I} \sqrt{1 - \left(\frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2} \right)^2}$$

经过计算可得：

$$Z_2 \approx (36.85574527 - 41.56069038j) \Omega$$

实验内容3——电压三角形法误差分析

根据数学知识，由 R_0 的计算公式，将其看成 U 、 U_1 、 U_2 、 I 的函数，求全微分，可得：

$$\frac{dR_0}{R_0} = \frac{1}{U^2 - U_1^2 - U_2^2} \left[2U^2 \frac{dU}{U} + (U_2^2 - U^2 - U_1^2) \frac{dU_1}{U_1} - 2U_2^2 \frac{dU_2}{U_2} \right] - \frac{dI}{I}$$

同理，对 X_0 求全微分，有

$$\frac{dX_0}{X_0} = -\frac{dI}{I} - \frac{U^2 \cos \varphi}{U_1 U_2 \sin^2 \varphi} \frac{dU}{U} + \frac{U_1 + U_2 \cos \varphi}{U_2 \sin \varphi \tan \varphi} \frac{dU_1}{U_1} + \frac{U_1 + U_2 \cos \varphi}{U_1 \sin^2 \varphi} \frac{dU_2}{U_2}$$

上面的 $\frac{dR_0}{R_0}$ 和 $\frac{dX_0}{X_0}$ 就是 R_0 和 X_0 的相对误差。

R_0 和 X_0 的相对误差由 U 、 U_1 、 U_2 、 I 的相对误差所确定，这就是**误差的传递**。

而 U 、 U_1 、 U_2 、 I 的相对误差可以由仪表的准确度等级决定，即 $dU = a \times U$ 、 $dU_1 = a \times U_1$ 、 $dU_2 = a \times U_2$ 、 $dI = a \times I$ ，其中的 a 由仪表的准确度等级决定。本实验使用的电压表/电流表的准确度等级为 0.5 级，则 $a = 0.5\%$ 。

为了最保守的估计，我们对 $\frac{dR_0}{R_0}$ 和 $\frac{dX_0}{X_0}$ 中含有的每一项取绝对值，得到我们本次实验中采用的误差的计算值公式：

$$\frac{dR_0}{R_0} = \frac{1}{U^2 - U_1^2 - U_2^2} \left[2U^2 \frac{dU}{U} + (U^2 + U_1^2 - U_2^2) \frac{dU_1}{U_1} + 2U_2^2 \frac{dU_2}{U_2} \right] + \frac{dI}{I}$$

$$\frac{dX_0}{X_0} = \frac{dI}{I} + \frac{U^2 \cos \varphi}{U_1 U_2 \sin^2 \varphi} \frac{dU}{U} + \frac{U_1 + U_2 \cos \varphi}{U_2 \sin \varphi \tan \varphi} \frac{dU_1}{U_1} + \frac{U_1 + U_2 \cos \varphi}{U_1 \sin^2 \varphi} \frac{dU_2}{U_2}$$

计算得

$$\frac{dR_0}{R_0} \approx 0.050143823 = 5.0143823\%$$

$$\frac{dX_0}{X_0} \approx 0.049433228 = 4.9433228\%$$

我们在上文中给出了结论：当调 $R_1 = |Z_2|$ 以后，可以使测量的相对误差最小，这也是 **R_1 调节的最终目标**。在这里，我们给出原因。

当 Z 、 U_2 、 $\frac{dI}{I}$ 、 $\frac{dU}{U}$ 、 $\frac{dU_1}{U_1}$ 、 $\frac{dU_2}{U_2}$ 不变时，为了判定选取的 R_1 值对所测 Z 的影响，亦即对 R_0 和 X_0 的相对误差有什么影响，我们继续将 $\frac{dR_0}{R_0}$ 和 $\frac{dX_0}{X_0}$ 对 R_1 求导数，得到下面的导数公式：

$$\frac{d}{dR_1} \left(\frac{dR_0}{R_0} \right) = \frac{4IU_2 \cos \varphi}{(U^2 - U_1^2 - U_2^2)^2} \left[(U_1^2 - U_2^2) \frac{dU}{U} - U_1^2 \frac{dU_1}{U_1} + U_2^2 \frac{dU_2}{U_2} \right]$$

$$\frac{d}{dR_1} \left(\frac{dX_0}{X_0} \right) = \frac{I \cos \varphi}{(U_1^2 U_2 \sin^2 \varphi)^2} \left[(U_2^2 - U_1^2) \frac{dU}{U} + U_1^2 \frac{dU_1}{U_1} - U_2^2 \frac{dU_2}{U_2} \right]$$

观察公式，当我们调节 R_1 使之满足 $U_1 = U_2$ 时， $\frac{dR_0}{R_0}$ 和 $\frac{dX_0}{X_0}$ 有最小值。也即调 $R_1 = |Z|$ 以后，可以使 Z 的测量的相对误差最小。这也就是上文取 $R_1 = 55 \Omega$ 的原因。

实验内容4的测量结果

$$U = 15.4V$$

$$I = 0.317A$$

$$P = 2.7W$$

根据以下公式

$$R_0 = \frac{P}{I^2}$$

$$|Z| = \frac{U}{I}$$

$$X_0 = -\sqrt{Z^2 - R_0^2}$$

$$Z_4 = R_0 + jX_0, \quad X_0 < 0$$

$$X_0 = -\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{P}{I^2}\right)^2}$$

可得

$$Z_4 = \frac{P}{I^2} - j\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{P}{I^2}\right)^2}$$

经过计算可得：

$$Z_4 \approx (26.86861248 - 40.47390484j) \Omega$$

六、实验结果与分析

实验内容1的计算结果为

$$Z_1 \approx (28.727386617326 - 46.6556444564776j) \Omega$$

实验内容2的计算结果为

$$Z_2 \approx (36.85574527 - 41.56069038j) \Omega$$

实验内容3计算得到的，实验内容2的测量误差为

$$\frac{dR_0}{R_0} \approx 0.050143823 = 5.0143823\%$$

$$\frac{dX_0}{X_0} \approx 0.049433228 = 4.9433228\%$$

实验内容4的计算结果为

$$Z_4 \approx (26.86861248 - 40.47390484j) \Omega$$

经过对比可以发现，实验内容1计算得到的 R_0 与实验内容4得到的值比较接近；实验内容2计算得到的 X_0 与实验内容4得到的值更加接近。

实验内容2采用的电压三角形法涉及到了误差的传递，导致了测量结果具有偏大的误差。

七、讨论、心得

在本次实验中，我们测量了无源一端口网络的等效参数。在我们动手操作，体会实操的快乐的同时，我们也进行了详实的理论分析。误差分析部分更是体现了学科交叉，充分说明了数学工具在电路学科中的重要作用。基础自然科学是现代工科的基础，学习工科的同时，也一定要夯实数理基础，二者相辅相成，互相促进。