

# 卢瑟福散射实验报告

何金铭 PB21020660

## 1 实验目的

- 复习用卢瑟福核式模型，推导  $\alpha$  粒子散射公式
- 了解卢瑟福散射谱仪的结构与工作原理
- 用实验验证卢瑟福散射公式

## 2 实验原理

### 2.1 库伦散射偏转角公式

带电粒子在原子核的库伦力作用下发生偏转时，偏转角  $\theta$  与入射距离  $b$  的关系。

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{a} \quad (1)$$

### 2.2 卢瑟福散射公式

微分散射截面公式如下，此处不详细解说。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dn}{nN_0td\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2)$$

### 2.3 卢瑟福散射公式的实验验证

$$N = \frac{dn}{nN_0td\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2 nN_0t \frac{\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (3)$$

其中  $N$  代表单位时间内被探测器接收的粒子数量， $n$  为散射薄膜的分子数密度， $t$  代表薄膜的厚度。

## 3 实验仪器

卢瑟福散射实验装置包括散射真空室、步进电机的控制系统和数据采集系统。

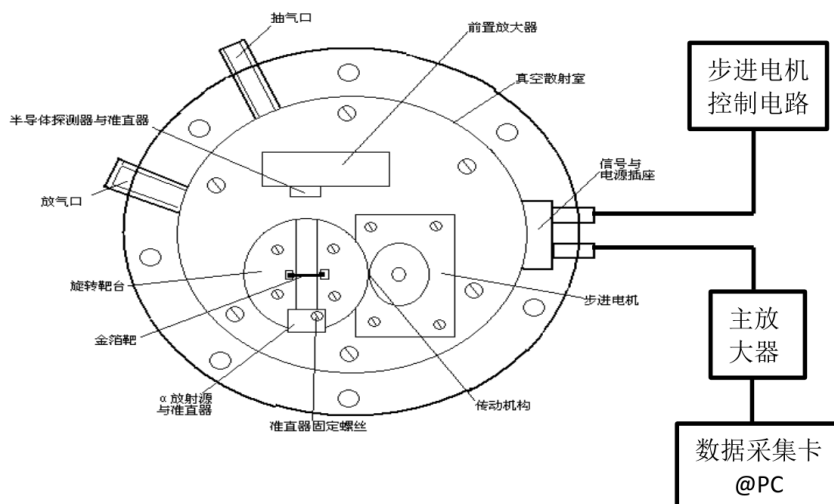


图 1: 卢瑟福散射实验装置原理图

散射真空室中主要包括有  $\alpha$  放射源、散射样品台、 $\alpha$  粒子探测器、步进电机及转动机构等。放射源为  $^{241}\text{Am}$  源， $^{241}\text{Am}$  源主要的  $\alpha$  粒子能量为  $5.486\text{MeV}$ 。

在本实验装置中利用步进电机来控制散射角  $\theta$  可使实验过程变得极为方便。不用每测量一个角度的数据便打开真空室转换角度，只需在真空室外控制步进电机转动相应的角度即可。

数据采集系统前端的  $\alpha$  粒子探测器为金硅面垒  $\text{Si}(\text{Au})$  探测器，此外还有电荷灵敏前置放大器、主放大器、探测器电源、NIM 机箱与数据采集卡。其中前置放大器和主放大器用于将探测器输出的信号放大到合适的幅度，再由数据采集卡对信号进行分析处理。

## 4 实验内容

1. 观察真空室结构及靶台的旋转控制，并且进行一些物理量的标定。
2. 测量  $\alpha$  粒子束的强度及在空气中的射程，计算  $\alpha$  粒子的能量  $E$
3. 验证  $N \propto \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$

## 5 实验数据及处理分析

### 5.1 原始实验数据

#### 5.1.1 一些测量初始值

1. 靶到探头的距离， $l_1 = 3.75\text{cm} + 0.2\text{cm} = 3.95\text{ cm}$
2. 源到探头的距离， $l_2 = 6.65\text{cm} + 0.2\text{cm} = 6.85\text{ cm}$
3.  $T = 19^\circ\text{C}$

以下所有数据的记录，都是在感兴趣区 (ROI) 范围为 200-1000 的地方取值。

### 5.1.2 空气靶

$\theta$	$-5^\circ$	$-4^\circ$	$-3^\circ$	$-2^\circ$	$-1^\circ$	$0^\circ$	$1^\circ$
N	76773	88479	91076	86569	77171	64019	46754

表 1: 空气靶时角度与入射粒子数的关系表

以上数据的测量时间为 60s。

得出此时物理  $0^\circ$  角为  $-3^\circ$  角，接下来于物理  $0^\circ$  角继续进行测量。

P(kPa)	0	6	12	18	24	30
N	181109	160884	145866	125394	97962	68592

表 2: 空气靶  $\theta = 0$  时 P 与入射粒子数的关系表

以上数据的测量时间为 120s

### 5.1.3 金靶

$\theta$	$-3^\circ$	$-2^\circ$	$-1^\circ$	$0^\circ$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$
N	11364	12742	13800	14672	14946	14998	14523	13832
N 部分第二次测量					14972	15157		

表 3: 金靶时角度与入射粒子数的关系表

以上数据的测量时间为 90s

可得此时物理  $0^\circ$  角为  $2^\circ$  角，接下来于物理  $0^\circ$  角进行测量

$\theta$	$10^\circ$	$13^\circ$	$16^\circ$	$19^\circ$	$22^\circ$
t(s)	150	200	400	600	800
N	5722	3510	3102	2085	1255

表 4: 金靶时特定角度与特定时间时入射粒子数的关系表

## 5.2 数据的处理

### 5.2.1 空气靶

由卢瑟福散射公式得：

$$N = \frac{dn}{nN_0 t d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2 nN_0 t \frac{\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (4)$$

于低真空环境中，可以将腔内的气体近似为理想气体，满足克拉伯龙方程：

$$P = nkT \quad (5)$$

联立上面 2 式可得：

$$N = \frac{dn}{nN_0 t d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2 \frac{N_0 t P}{kT} \frac{\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (6)$$

当角度确定时，上式可以近似为：

$$N = \text{const} \cdot \frac{P}{T} \quad (7)$$

即当温度相同时，N,P 呈线性关系，所以采用最小二乘法的线性拟合。  
得到拟合公式为：

$$N = 185098.048 - 3675.348P(kPa) \quad (8)$$

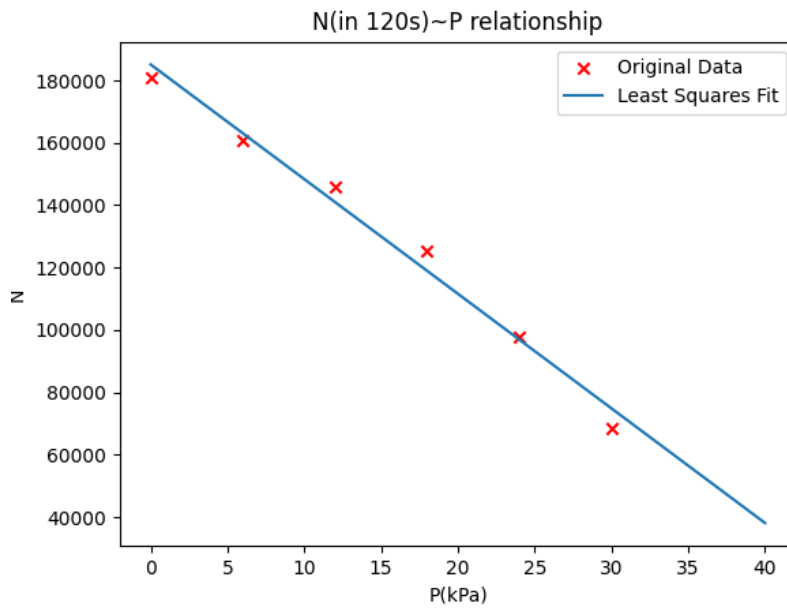


图 2: 120s 内接受到的粒子数 N 与空气压强 P 的关系图

可知初始强度于  $P = 0$  时，散射粒子数为 0，此时取到 120s 内接收的总粒子数为 185098，得  

$$N_0 = \frac{185098}{120} = 1542.483$$

当  $N = \frac{1}{2}N_0$  时， $P_{\frac{1}{2}} = 25.181kPa$ ，此时计数率降为一半，此时的射程为平均射程  $R_{\frac{1}{2}} = l_2 + 2mm$   
由此通过关系式：

$$P_{\frac{1}{2}} R_{\frac{1}{2}} \frac{1}{T_{\frac{1}{2}}} = P_1 R_1 \frac{1}{T_1} \quad (9)$$

其中  $R_{\frac{1}{2}} = l_2 = 6.85cm$ ， $T_{\frac{1}{2}} = 273.15 + 19 = 292.15K$ ， $T_1 = 273.15K$   
得：

$$R_1 = \frac{P_{\frac{1}{2}} R_{\frac{1}{2}}}{P_1} \cdot \frac{T_1}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{25.181}{101.325} \cdot \frac{273.15}{292.15} \cdot 6.85cm = 1.592cm \quad (10)$$

所以，动能为  $5.486MeV$  的  $\alpha$  粒子于  $0^\circ C$ ，一个标准大气压下的射程 R 为  $1.592cm$ 。

由于  $E \approx 5.486MeV$ ，所以，由计算公式近似可得：

$$R = (0.285 + 0.005E)E^{\frac{3}{2}} \cong 0.285E^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

所以有：

$$E = \left(\frac{R}{0.285}\right)^{\frac{2}{3}} = 3.148 \text{ MeV} \quad (12)$$

### 5.2.2 金靶

$\theta$	$10^\circ$	$13^\circ$	$16^\circ$	$19^\circ$	$22^\circ$
$\sin^4 \frac{\theta}{2}$	$5.770 \times 10^{-5}$	$1.642 \times 10^{-4}$	$3.752 \times 10^{-4}$	$7.421 \times 10^{-4}$	$1.326 \times 10^{-3}$
$\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$	17330.7	6089.27	2665.5	1347.61	754.405
$N/t$	38.147	17.55	7.755	3.475	1.569
K	$2.201 \times 10^{-3}$	$2.882 \times 10^{-3}$	$2.909 \times 10^{-3}$	$2.579 \times 10^{-3}$	$2.080 \times 10^{-3}$

表 5: 金靶时特定角度与单位时间入射粒子数, K 值的关系表

先验证卢瑟福散射公式  $N/t \propto \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ ，做  $N/t \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$  图。

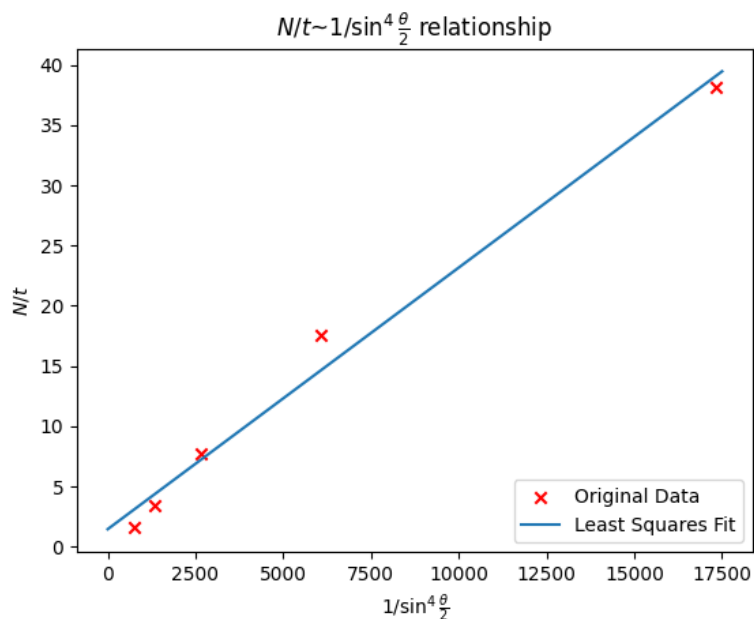


图 3: 单位时间内接受到的粒子数  $N/t$  与  $\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$  的关系图

拟合其关系式为：

$$N/t = 1.454 + 2.172 \times 10^{-3} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (13)$$

由上式可以得出 K 的拟合值为  $K = 2.172 \times 10^{-3}$

下面由公式给出 K 的理论值：

$$K = 4.8065 \times 10^{-34} \frac{N_0}{E^2 l_1^2} = 4.8065 \times 10^{-34} \frac{1542.48}{(3.148 \text{ MeV} \times 0.0395 \text{ m})^2} = 1.868 \times 10^{-3} \quad (14)$$

K 于前 4 个节点的真实值与理论值相差较大，与最后一个节点较为接近。

下面给出  $K \sim \theta$  曲线，由于 K 理论上为一个常数，故利用直线对  $K \sim \theta$  进行拟合：

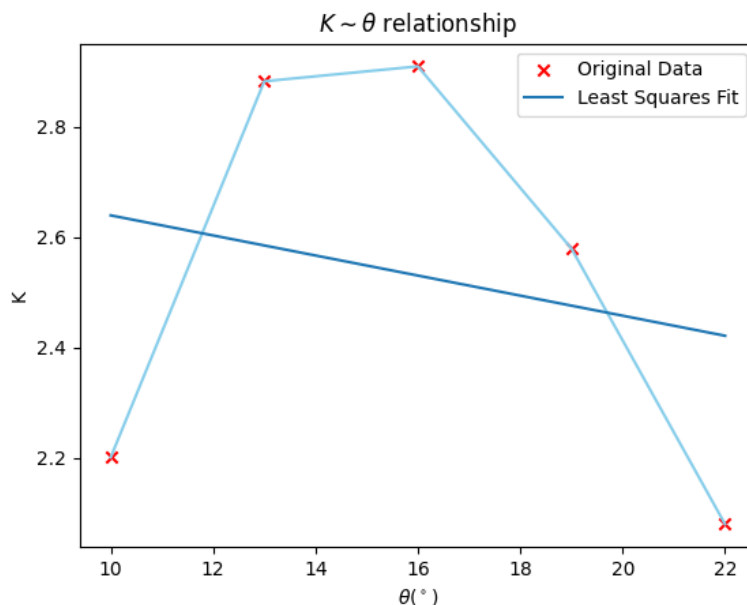


图 4:  $K$  与  $\theta$  的关系图

得出的拟合曲线为：

$$K = 2.821 \times 10^{-3} - 0.018\theta \quad (15)$$

由于采样点有限，所以只能用最小二乘法对数据进行拟合，发现得到的结果与之前的结果存在差异。

## 6 实验总结和误差分析

### 6.1 实验总结

1. 测量出的单位时间内放射源发射的  $\alpha$  粒子的数量为  $N_0 = 1542.5 \text{ s}^{-1}$
2. 计算出  $\alpha$  粒子在  $0^{\circ}\text{C}, 1 \text{ atm}$  的条件下的射程为  $R = 1.592 \text{ cm}$ ，计算得此放射源出射  $\alpha$  粒子的能量为  $E = 3.148 \text{ MeV}$
3. 此实验中分析的理论 K 值为  $1.868 \times 10^{-3}$ ，获得的 K 值的拟合值为  $2.172 \times 10^{-3}$ ，把每一对测量值单独计算得的 K 值与拟合值与理论值对比，发现相差较大。

## 6.2 误差分析

首先需要指出的一点是：实验中的  $\alpha$  粒子能量测量值与实验讲义上给出的内容有所出入，由于实验的测量点有限，在这种情况下不能进行准确的判断，在以下的讨论中，更倾向于认为实验测得的值是较为准确的。

1. E 与理论值的差异，在假设实验测得值准确的前提下，认为可能的原因是放射源已经有部分衰变，导致强度下降；若假设理论正确，则实验中出现的可能是实验中的低真空装置存在误差，由于无法达到严格的低真空，所以测得的平均误差偏小，导致测得的  $\alpha$  粒子偏小。
2. 关于 K 值的计算，理论计算值为  $1.868 \times 10^{-3}$ ，实验拟合值为  $2.172 \times 10^{-3}$ ，这两者较接近，但与各个测量点的直接计算值相差较大，于  $13^\circ, 16^\circ, 19^\circ$  尤为明显。可能的原因是有两个，一个原因是总体的采样值个数较少，于几个比较大的角度，采样得的粒子数仅有几千个，由中心极限定理的条件估计，误差较大；第二个原因可能是由于测量的角度值的数目有限，需要用最小二乘法进行拟合来减小误差，直接比较没有太大意义。

## 7 思考题

**7.1 根据卢瑟福公式  $N \sin^4(\frac{\theta}{2})$  应为常数，本实验的结果有偏差吗？试分析原因。**

有偏差， $N \sin^4(\frac{\theta}{2}) = K$ 。在上面的分析得，K 值在角度  $13^\circ, 16^\circ, 19^\circ$  时，偏差较大；而在角度  $10^\circ, 22^\circ$  时，偏差较小。分析的原因于本页 6.2 误差分析中的第二点。下面重新给出：

关于 K 值的计算，理论计算值为  $1.868 \times 10^{-3}$ ，实验拟合值为  $2.172 \times 10^{-3}$ ，这两者较接近，但与各个测量点的直接计算值相差较大，于  $13^\circ, 16^\circ, 19^\circ$  尤为明显。可能的原因是有两个，一个原因是总体的采样值个数较少，于几个比较大的角度，采样得的粒子数仅有几千个，由中心极限定理的条件估计，误差较大；第二个原因可能是由于测量的角度值的数目有限，需要用最小二乘法进行拟合来减小误差，直接比较没有太大意义。

**7.2 若人体肌肉组织的密度为  $1.10g/cm^3$ ，根据实验内容 4 的结果估算本实验中的  $\alpha$  粒子在人体肌肉组织中的射程，单位取  $cm$ 。**

由之前的讨论可得：

$$\rho_{air} R_{air} = \rho_{human} R_{human} \quad (16)$$

代入  $0^\circ C, 1atm$  时  $\rho_{air} = 1.293Kg/m^3$ ， $R_{air} = 1.592cm$ ， $\rho_{human} = 1100Kg/m^3$ ，得：

$$R_{human} = \frac{\rho_{air} R_{air}}{\rho_{human}} = 1.871\mu m \quad (17)$$

可得本实验中的  $\alpha$  粒子在人体肌肉组织中的平均射程为  $1.871\mu m$ 。需要注意的是，此处的平均射程具有统计意义。